جزوه ریاضی نهم

نویسنده: امین هژبری نیا

فهرست مطالب

فصل اول

مجموعه‌ها

۱.۱ معرفی مجموعه

مجموعه: هر دسته‌ی کاملاً مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) از اشیاء را یک مجموعه می‌گویند. هر یک از این اشیاء را یک عضو مجموعه می‌گویند.

مثال: مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می‌دهند: $A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$

مثال: چهار عدد زوج متوالی تشکیل یک مجموعه را نمی‌دهند. زیرا جواب‌ها می‌توانند سلیقه‌ای انتخاب شوند.

$\{۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴\}$

$\{۲۲, ۲۴, ۲۶, ۲۸\}$

$\{۱۰۰۰, ۱۰۰۲, ۱۰۰۴, ۱۰۰۸\}$

نکته: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنند. عضوهای یک مجموعه را در داخل { } آکولاد قرار می‌دهند.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی به صورت اعضا به صورت زیر است:

$B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

نکته: در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست، یعنی با جابجایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. برای نمونه، مجموعه‌ی $C=\{۳,۵,۷\}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد:

$C=\{۳,۵,۷\}$ و $C=\{۵,۳,۷\}$ و $C=\{۷,۵,۳\}$

نکته: علامت عضو بودن در یک مجموعه را با نماد $\in$ و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد $\notin$ نشان می‌دهیم.

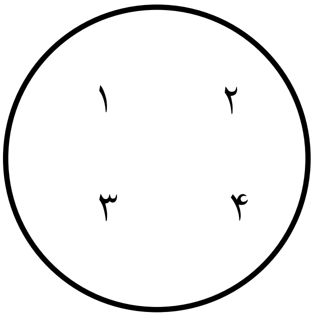
برای مثال در مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $۲\in A$. اما عدد ۱۰ عضو مجموعه‌ی A نیست که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $۱۰\notin A$.

نکته: همان‌طور که در تعریف یک مجموعه بیان کردیم، عضوهای یک مجموعه باید غیرتکراری باشند. پس در مجموعه عضوهای تکراری یک بار حساب می‌شوند (فقط یک بار نوشته می‌شوند).

برای مثال مجموعه‌ی $A=\{۲,۵,۳,۵,۷,۲\}$ دارای ۴ عضو است.

$A=\left\{۲,۵,۳,\cancel{۵},۷,\cancel{۲}\right\}=\{۲,۵,۳,۷\}$

نمودار وِن: مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد. برای مثال نمایش مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ با استفاده از نمودار وِن به صورت زیر می‌باشد:



مجموعه‌ی تهی: اگر در یک مجموعه عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه‌ی تهی می‌نامیم و با نماد $\{\ \}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهیم.

تذکر: هیچ‌گاه مجموعه‌ی تهی را با مجموعه‌ی $\{\emptyset\}$ یا $\{۰\}$ نشان نمی‌دهیم.

مثال: در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌ی تهی را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند. ✓

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک ×

ج) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ✓

۲.۱ مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه‌ی برابر: دو مجموعه‌ی A و B را برابر می‌گوییم، در صورتی که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از مجموعه‌ی A باشد و می‌نویسیم $A=B$.

مثال: مجموعه‌های زیر با هم برابر هستند:

$$A=\{۳,۵,۷\} \qquad B=\left\{۷,۵,\sqrt{۹}\right\}$$

مثال: x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه‌ی $A=\{۷,x+۱,۲\}$ و $B=\{y-۱,۷,۵\}$ با هم برابر باشند.

$$x+۱=۵ \longrightarrow x=۵-۱ \longrightarrow \boxed{x=۴}$$

$$y-۱=۲ \longrightarrow y=۲+۱ \longrightarrow \boxed{y=۳}$$

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B وجود نداشته باشد و یا این‌که عضوی در B باشد که در A وجود نداشته باشد، در این صورت A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A\neq B$.

زیرمجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که هر عضو A عضوی از B باشد، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم: $A\subseteq B$.

نکته: نماد $\subseteq$ برای نشان دادن زیرمجموعه بودن و نماد $\nsubseteq$ برای نشان دادن زیرمجموعه نبودن به کار می‌رود.

نکته: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است یعنی $A\subseteq A$.

نکته: مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است، یعنی $\emptyset\subseteq A$.

نکته: اگر دو مجموعه‌ی A و B برابر باشند $(A=B)$، در این صورت $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ (برعکس این مطلب

هم درست است).

مثال: مجموعه‌ی $A=\{۱,\{۲\},\{\{۳\}\}\}$ سه عضو دارد که برای نشان دادن عضویت هر کدام، خود آن‌ها را با نماد عضویت استفاده می‌کنیم:

$\{\{۳\}\}\in A$ و $\{۲\}\in A$ و $۱\in A$

اما برای نشان دادن زیرمجموعه‌های یک عضوی A، یک علامت آکولاد دور عضوها می‌گذاریم (علاوه بر آکولادی که بعضی عضوها دارند).

$\{\{\{۳\}\}\}\subseteq A$ و $\{\{۲\}\}A$ و $\{۱\}\subseteq A$

نمایش مجموعه‌های اعداد:

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد حسابی $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

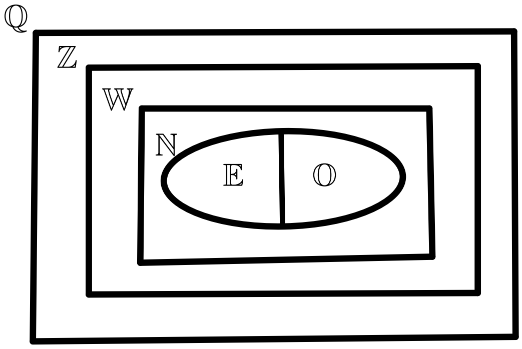
ج) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $\mathbb{O}=\{۱,۳,۵,\dots\}$

د) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $\mathbb{E}=\{۲,۴,۶,\dots\}$

هـ) مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$

و) مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$

نکته: نمودار وِن مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است:



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از نماد ریاضی بنویسید.

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد

$\mathbb{O} = \{۱,۳,۵,\dots\} = \{۲k-۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{۷,۸,۹,۱۰\}$

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\ ,\ ۷ \leqslant x \leqslant ۱۰\}$

ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

$B = \{۳,۶,۹,۱۲,\dots\} = \{۳k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $A = \{۵n+۳ \mid n \in \mathbb{N}\} = \{۵(۱)+۳,\ ۵(۲)+۳, ۵(۳)+۳, ۵(۴)+۳,\dots\}$

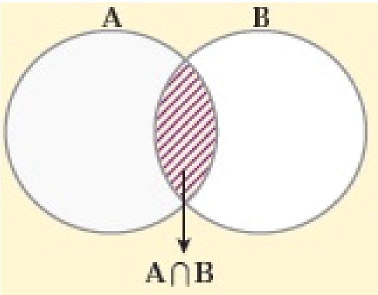
$\longrightarrow A = \{۸,۱۳,۱۸,۲۳,\dots\}$

ب) $B = \{۲x-۱ \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant ۳\} = \{۲(۱)-۱, ۲(۲)-۱, ۲(۳)-۱\}$

$\longrightarrow B = \{۱,۳,۵\}$

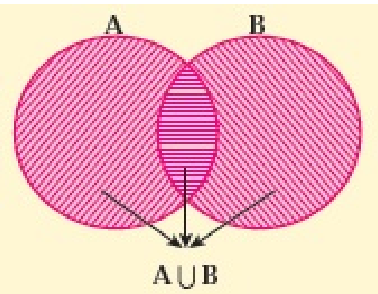
۳.۱ اشتراک، اجتماع و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B، مجموعه‌ای شامل همه‌ی عضوهایی است که هم عضو مجموعه‌ی A و هم عضو مجموعه‌ی B است. این مجموعه را با نماد $A\bigcap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار زیر قسمت هاشورخورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A\bigcap B = A\{x \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$$

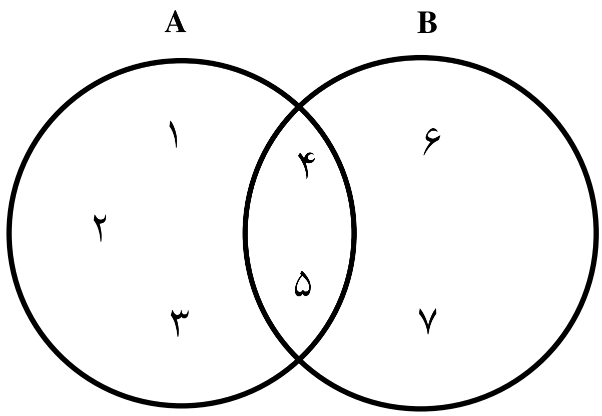
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B باشد. این مجموعه را با نماد $A\bigcup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار زیر، قسمت هاشورخورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A\bigcup B = \{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

نکته: عضوهای تکراری در اجتماع دو مجموعه را فقط یک بار می‌نویسیم.

مثال: با توجه به نمودار زیر، ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید و سپس $A\bigcap B$ و $A\bigcup B$ را به دست آورید.



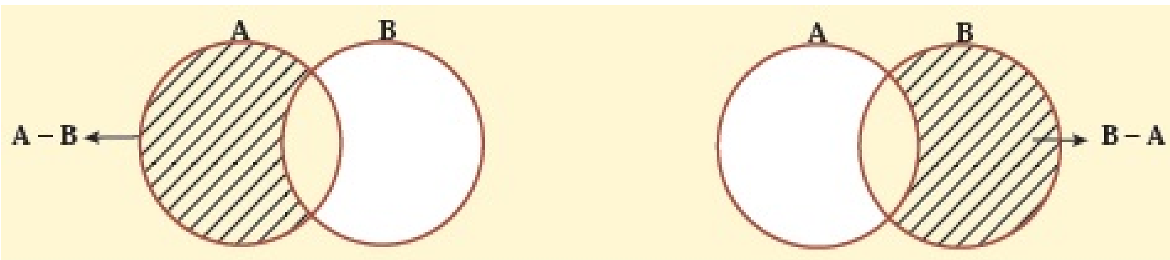
$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$B=\{۴,۵,۶,۷\}$

$A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

$A\cap B=\{۴,۵\}$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که عضو مجموعه‌ی A هستند؛ ولی عضو مجموعه‌ی B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشور خورده است:



$A-B=\{x\mid x\in A\ ,\ x\notin B\}$

$B-A=\{x\mid x\in B\ ,\ x\notin A\}$

نکته: برای به‌دست آوردن $A-B$، کافی است عضوهای مشترک را از مجموعه‌ی A حذف کنیم.

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$ باشد، آن‌گاه $A-B$ و $B-A$ را مشخص کنید.

$A-B=\{۱,۲\}$ و $B-A=\{۵,۶\}$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A)=k$.

مثال: اگر $A=\{۱,۵,۷,۱۰\}$ آنگاه داریم $n(A)=۴$.

مجموعه‌ها و احتمال:

یادآوری: در سال گذشته، احتمال رخ دادن یک پیشامد را با توجه به دستور زیر محاسبه می‌کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}}$$

حال چون با مجموعه‌ها و نمادگذاری آن‌ها آشنا شده‌ایم، مجموعه‌ای که شامل همه‌ی حالت‌های ممکن باشد را S، مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اول باشد.

ج) عدد رو شده بزرگ‌تر از ۶ باشد.

د) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

الف) A : پیشامد رو شدن مضرب ۳ ؛ $A = \{۳, ۶\} \Rightarrow n(A) = ۲$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اول ؛ $B = \{۲, ۳, ۵\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ج) $C:$ پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ $; C=\{\ \} \Rightarrow n(C)=۰$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) $D:$ پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ $; D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(D)=۶$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

مثال: اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو بار عدد اول بیاید.

ب) دو عدد رو شده مثل هم باشند.

ج) دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند.

د) مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد.

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۱),$$

$$(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),$$

$$(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(S)=۳۶$$

الف) $A:$ پیشامد رو شدن هر دو بار عدد اوّل ;

$$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(A)=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) $B:$ پیشامد رو شدن دو عدد مثل هم ؛

$$B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(B)=۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج) $C:$ پیشامد رو شدن دو عدد مضرب ۳ ؛

$$C=\{(۳,۳),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\} \Rightarrow n(C)=۴$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

د) $D:$ پیشامد رو شدن مجموع دو عدد ۷ ؛

$$D=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \Rightarrow n(D)=۶$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

فصل دوم

عددهای حقیقی

۱.۲ عددهای گویا

عددهای گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود، عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج باید عدد صحیح باشند و مخرج باید مخالف صفر باشد.)

نکته: اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} |\ a,b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک، کوچکترین مضرب مشترک (ک. م. م) می‌باشد.

مثال : $\left(-\frac{۵}{۱۲}\right) - \left(-\frac{۷}{۱۸}\right) = \left(-\frac{۵}{۱۲}\right) + \left(+\frac{۷}{۱۸}\right) = \frac{-۱۵+۱۴}{۳۶} = \frac{-۱}{۳۶}$

مضرب‌های ۱۲ : $۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, \ldots$

$\longrightarrow$ ۱۲,۱۸ ک. م. م $= ۳۶$

مضرب‌های ۱۸ : $۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, \ldots$

ضرب اعداد گویا: فقط در ضرب می‌توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت را در صورت و مخرج را نیز در مخرج ضرب می‌کنیم.

مثال : $\left(-\frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۳}}\right)\times\left(-\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۱۰}_{۲}}\right)=+\frac{۱}{۲}$

تقسیم اعداد گویا: کسر اول را نوشته، تقسیم را تبدیل به ضرب و کسر دوم را معکوس می‌کنیم.

مثال : $\left(+\frac{۴}{۷}\right)\div\left(-\frac{۵}{۲۱}\right)=\left(+\frac{۴}{\cancel{۷}_{۱}}\right)\times\left(-\frac{\cancel{۲۱}^{۳}}{۵}\right)=-\frac{۱۲}{۵}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(-\frac{۲}{۳}\right)\div\left[\left(-\frac{۱}{۱۵}\right)+\left(+\frac{۳}{۵}\right)\right]=\left(-\frac{۲}{۳}\right)\div\left(\frac{-۱+۹}{۱۵}\right)=\left(-\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}\right)\times\left(\frac{\cancel{۱۵}^{۵}}{\cancel{۸}_{۴}}\right)=-\frac{۵}{۴}$$

مقایسه اعداد گویا: از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده و سپس کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۱۰}$

$\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۲}=\frac{۱۰}{۲۰}$ و $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱۴}{۲۰}$ $\longrightarrow \frac{۸}{۲۰}<\frac{۱۰}{۲۰}<\frac{۱۴}{۲۰}<\frac{۱۵}{۲۰}\longrightarrow \boxed{\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۲}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۳}{۴}}$

ب) تبدیل به اعشار: صورت را بر مخرج تقسیم و خارج قسمت را تا دو رقم اعشار ادامه می‌دهیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۱۰}$

$\frac{۲}{۵}=۰/۴۰$ و $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ و $\frac{۱}{۲}=۰/۵۰$ و $\frac{۷}{۱۰}=۰/۷۰$ $\longrightarrow ۰/۴۰<۰/۵۰<۰/۷۰<۰/۷۵\longrightarrow \boxed{\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۲}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۳}{۴}}$

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

پیدا کردن کسرهایی بین دو عدد گویا (کسری): چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی به صورت زیر است:

روش اول: صورت‌ها را با هم جمع و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \quad و \quad \frac{۴}{۵} = ۰/۸۰$$

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۳+۴}{۴+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۷+۴}{۹+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \boxed{\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}}$$

روش دوم: ابتدا مخرج مشترک گرفته، سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳_{\times ۵}}{۴_{\times ۵}} = \frac{۱۵}{۲۰} \quad و \quad \frac{۴_{\times ۴}}{۵_{\times ۴}} = \frac{۱۶}{۲۰} \longrightarrow \frac{۱۵_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۵}{۶۰} \quad و \quad \frac{۱۶_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۸}{۶۰} \longrightarrow \boxed{\frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}}$$

انواع عددهای اعشاری:

الف) عدد اعشاری متناهی یا مختوم: اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود، آن عدد کسری مختوم نام دارد.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۳/۰ & ۴ \\ \cline{2-2} -۲۸ & ۰/۷۵ \\ \cline{1-1} ۲۰ & \\ -۲۰ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

$$\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر یکی از عامل‌های ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، آن کسر مختوم است.

مثال: $\frac{۳}{۲۰} \longrightarrow ۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ و $\frac{۵}{۸} \longrightarrow ۸ = ۲^۳$

ب) عدد اعشاری متناوب ساده: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن عدد را متناوب ساده می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۱/۰ & ۳ \\ \cline{2-2} -۹ & ۰/۳۳۳\ldots \\ \cline{1-1} ۱/۰ & \\ -۹ & \\ \cline{1-1} ۱/۰ & \\ -۹ & \\ \cline{1-1} ۱ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots = ۰/\overline{۳}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، عامل ۲ و ۵ نباشند، آن کسر متناوب ساده است.

مثال: $\frac{۳}{۷۷} \longrightarrow ۷۷ = ۷ \times ۱۱$ و $\frac{۵}{۳۹} \longrightarrow ۳۹ = ۳ \times ۱۳$

عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم‌های تکراری برسیم،به آن کسر متناوب مرکب می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۵/۰ & ۶ \\ \cline{2-2} -۴۸ & ۰/۸۳۳\dots \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳\dots=۰/۸\overline{۳}$$

$$\begin{array}{r|l} ۷/۰ & ۲۲ \\ \cline{2-2} -۶۶ & ۳/۱۸\dots \\ \hline ۴/۰ & \\ -۲۲ & \\ \hline ۱۸/۰ & \\ -۱۷۶ & \\ \hline ۴/۰ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۷}{۲۲}=۰/۳۱۸۱۸۱۸\dots=۰/۳\overline{۱۸}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، به جز ۲ و ۵ عامل‌های دیگری نیز وجود داشته باشد، آن کسر متناوب مرکب است.

مثال: $\frac{۳}{۷۵} \longrightarrow ۷۵=۳\times ۵^{۲}$ و $\frac{۵}{۱۴} \longrightarrow ۱۴=۲\times ۷$

۲.۲ عددهای حقیقی

اعداد گنگ (اصم): اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره‌ی تناوب نیستند، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ نمایش می‌دهیم. مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۱۰}$، π و $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱...$.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد، آن‌گاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند، گنگ هستند).

نکته: عدد π چون دارای دوره‌ی تناوب نیست، عددی گنگ است.

$$\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۲۶۵۳...$$

مثال: در جاهای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$\sqrt{۴۷}\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$ $\sqrt{۰/۳۶}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$ $-\frac{۲}{۵}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$

$۱-\sqrt{۲}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}$ $۳/۱۴\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$ $\pi\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$

مثال: بین دو عدد داده شده سه عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

$$\sqrt{۲} < \boxed{\sqrt{۲/۱}} < \boxed{\sqrt{۲/۲}} < \boxed{\sqrt{۲/۳}} < \sqrt{۳}$$

ب) ۲ و ۳

$$۲ = \sqrt{۴} < \boxed{\sqrt{۵}} < \boxed{\sqrt{۶}} < \boxed{\sqrt{۷}} < \sqrt{۹} = ۳$$

نکته: بین دو عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: عدد $\sqrt{10}+3$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد.

$$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16} \longrightarrow 3<\sqrt{10}<4 \longrightarrow 3+3<3+\sqrt{10}<4+3 \longrightarrow \boxed{6<3+\sqrt{10}<7}$$

بنابراین $\sqrt{10}+3$ بین ۶ و ۷ قرار دارد.

اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. داریم: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

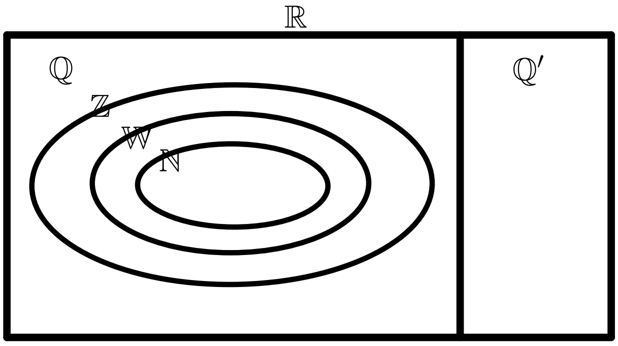
نکته:

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

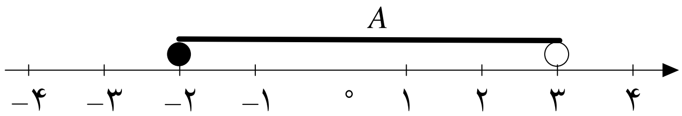
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\emptyset$



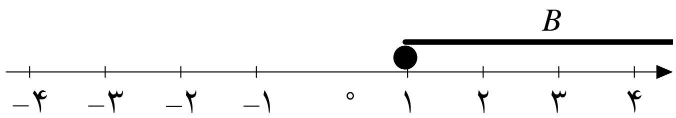
نکته: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند، پس نمایش این اعداد به صورت خط ممتدی است. (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد، دایره توپر و اگر سرکش نداشته باشد، دایره توخالی قرار می‌دهیم).

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A=\{x\in\mathbb{R}|-۲\leq x\leq ۳\}$



ب) $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq ۱\}$



۳.۲ قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

قدرمطلق: فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم.

مثال:
$|-\frac{۴}{۳}| = \frac{۴}{۳}$ $\quad$ $|۵| = ۵$ $\quad$ $|-۲| = ۲$

$|۰| = ۰$ $\quad$ $|-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$ $\quad$ $|-\pi| = \pi$

خواص قدر مطلق:

۱. قدر مطلق عدد صفر، برابر با صفر است. $\quad a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$

۲. قدر مطلق عددهای مثبت برابر با خود آن عدد است. $\quad a > ۰ \Rightarrow |a| = a$

۳. قدر مطلق عددهای منفی برابر با قرینه آن عدد است. $\quad a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$

نکته: به طور کلی قدرمطلق هر عدد (به جز صفر)، عددی مثبت می‌شود.

مثال: عبارت‌های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|۲۰ - ۴۰ + ۱۵| = |-۲۰ + ۱۵| = |-۵| = ۵$$

$$|(-۷) \times (+۸)| = |-۵۶| = ۵۶$$

$$|۴ - ۶ \times ۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۲۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۸ + ۲| = |-۴ + ۲| = |-۲| = ۲$$

نکته: مقدار تقریبی برخی از اعداد تا یک رقم اعشار به صورت زیر است:

$\sqrt{۲} \simeq ۱٫۴ \qquad \sqrt{۳} \simeq ۱٫۷ \qquad \sqrt{۵} \simeq ۲٫۲ \qquad \sqrt{۶} \simeq ۲٫۴ \qquad \sqrt{۷} \simeq ۲٫۶ \qquad \sqrt{۸} \simeq ۲٫۸$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۲}) = -۱+\sqrt{۲} = \sqrt{۲}-۱$$

$$|\underbrace{۲-\sqrt{۳}}_{\text{مثبت}}| = ۲-\sqrt{۳}$$

$$|\underbrace{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}| = ۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}$$

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}| = ۳-\sqrt{۵}+-(-۲-\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+(+۲+\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵} = ۵$$

نکته: اگر a عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\sqrt{a^{۲}} = |a|$

مثال:

$$\sqrt{(-۷)^{۲}} = |-۷| = ۷$$

$$\sqrt{۹^{۲}} = |۹| = ۹$$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}} = |\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۳}) = -۱+\sqrt{۳}$$

فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

۱.۳ استدلال

استدلال: استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد، اثبات می‌گوییم.

مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

نکته: هرچند به طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه‌ی حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، امّا به تشخیصی که بر اساس این روش‌ها حاصل می‌گردد، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

۲.۳ آشنایی با اثبات در هندسه

فرض مسئله: اطلاعاتی که در مورد مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشند. (به طور خلاصه داده‌های مسئله)

حکم مسئله: خواسته‌های مسئله را حکم می‌گویند.

روش اثبات: از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آن‌ها را از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به حکم استفاده می‌کنیم.

مثال: در هر یک از موارد زیر نتیجه‌ای را که از فرض‌های مشخص شده می‌توان گرفت، بنویسید.

الف) $\left\{\begin{array}{l}\text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.}\\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.}\end{array}\right.$ $\Longleftarrow$ چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.○

ب) $\left\{\begin{array}{l}\text{قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند.}\\ \text{مربع نوعی لوزی است.}\end{array}\right.$ $\Longleftarrow$ قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. ○

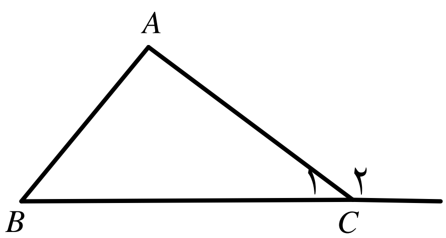
ج) $\left\{\begin{array}{l}\text{در هر مربع ضلع‌ها با هم برابرند.}\\ \text{در چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع‌ها برابر نیستند.}\end{array}\right.$ $\Longleftarrow$ چهارضلعی $ABCD$ مربع نیست.○

مثال: فرض و حکم مسئله‌ی زیر را مشخص کنید.

نشان دهید در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن برابر است.

فرض: ABC یک مثلث و $\widehat{C}_۲$ زاویه‌ی خارجی این مثلث است.

حکم: $\widehat{C}_۲ = \widehat{A} + \widehat{B}$



تعمیم: وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به کار برده‌ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همه‌ی عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

۳.۳ هم‌نهشتی مثلث‌ها

دو مثلث به سه حالت هم‌نهشت هستند:

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض)

ب) دو زاویه‌ی مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز)

ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته: سه زاویه‌ی مساوی (ز ز ز) از حالت‌های هم‌نهشتی نیست.

هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه: دو مثلث قائم‌الزاویه به دو حالت هم‌نهشت هستند:

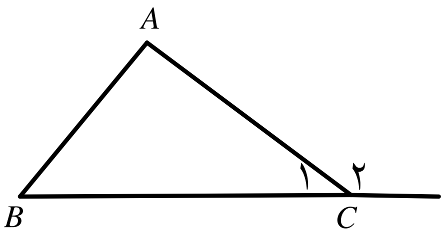
الف) وتر و یک زاویه‌ی تند مساوی (و ز)

ب) وتر و یک ضلع مساوی

مثال: ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است.

فرض: ABC یک مثلث و $\widehat{C}_۲$ زاویه‌ی خارجی این مثلث است.

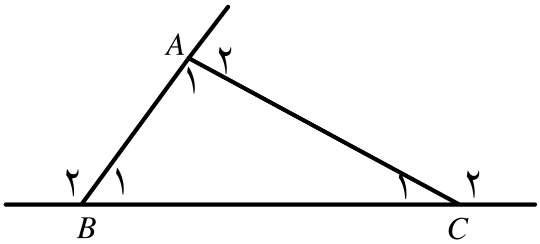
حکم: $\widehat{C}_۲ = \widehat{A} + \widehat{B}$



اثبات:

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{C}_۱+\widehat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Longrightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\cancel{\widehat{C}_۱} = \cancel{\widehat{C}_۱}+\widehat{C}_۲ \Longrightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C}_۲ \Longrightarrow \widehat{C}_۲ = \widehat{A}+\widehat{B}$$

مثال: ثابت کنید در هر مثلث مجموع زوایای خارجی برابر با ۳۶۰° است.



فرض: ABC یک مثلث دلخواه است.

حکم: $\widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۳۶۰^\circ$

اثبات:

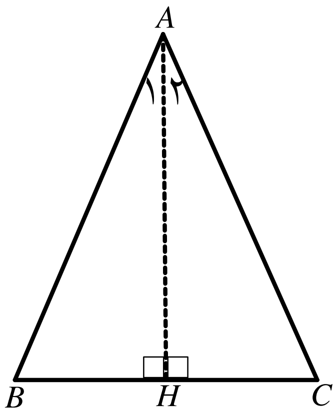
$$\begin{cases} \widehat{A}_۱+\widehat{B}_۱+\widehat{C}_۱=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ \\ \widehat{B}_۱+\widehat{B}_۲=۱۸۰^\circ \\ \widehat{C}_۱+\widehat{C}_۲=۱۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{B}_۱+\widehat{C}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۱۸۰^\circ+۱۸۰^\circ+۱۸۰^\circ$$

$$\Longrightarrow ۱۸۰^\circ+\widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۵۴۰^\circ \Longrightarrow \widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۵۴۰^\circ-۱۸۰^\circ$$

$$\Longrightarrow \boxed{\widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۳۶۰^\circ}$$

مثال: ثابت کنید در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم برابر هستند.



فرض: ABC یک مثلث متساوی‌الساقین است $(AB=AC)$.

حکم: $\widehat{B}=\widehat{C}$

اثبات:

$$\begin{cases} AB=AC \\ AH=AH \end{cases} \Longrightarrow A\overset{\Delta}{H}B \cong A\overset{\Delta}{H}C \ (\text{و ض}) \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \widehat{B}=\widehat{C}$$

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع هم میانه و هم نیمساز است.

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع هم میانه و هم نیمساز است.

نکاتی در مورد هم‌نهشتی مثلث‌ها:

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند، دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند، دارای زاویه متقابل به رأس هستند.

ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند، از برابری شعاع دایره استفاده می‌کنیم.

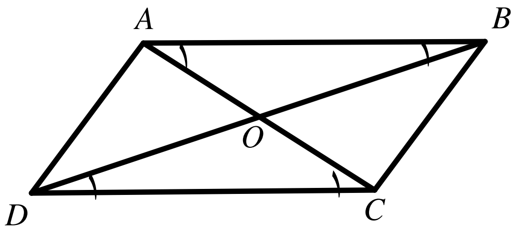
د) در مثلث متساوی‌الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه با هم برابر هستند.

هـ) در مثلث متساوی‌الساقین دو ساق و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابر هستند.

مثال: ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

فرض: $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

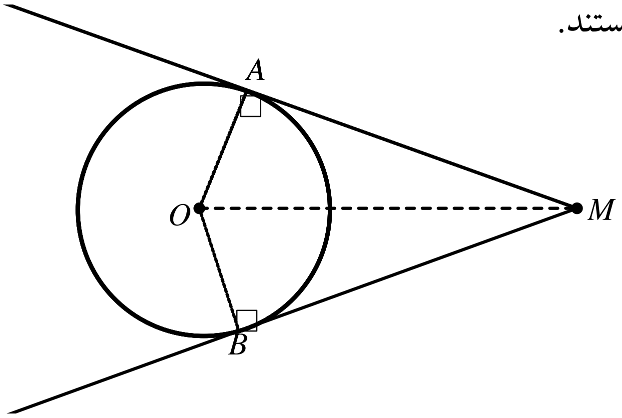
حکم: $OA = OC$ و $OB = OD$



اثبات:

$$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \\ AB = CD \\ \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \end{cases} \Longrightarrow O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D \ (\text{ز ض ز}) \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} OA = OC \text{ و } OB = OD$$

مثال: ثابت کنید طول دو مماس رسم شده از نقطه‌ای خارج دایره با هم برابر هستند.



فرض: O مرکز دایره و MA و MB بر دایره مماس هستند.

حکم: $MA = MB$

اثبات:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ OA = OB \\ OM = OM \end{cases} \Longrightarrow O\overset{\Delta}{A}M \cong O\overset{\Delta}{B}M \ (\text{و ض}) \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} MA = MB$$

۴.۳ حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه‌حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحلی را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه آن‌ها را توصیه می‌کنند.

قدم‌های حل مسئله:

۱. درک و فهم مسئله

۲. رسم شکل

۳. نوشتن فرض و حکم مسئله

۴. اثبات کردن (راهبرد حل مسئله)

یادآوری: در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

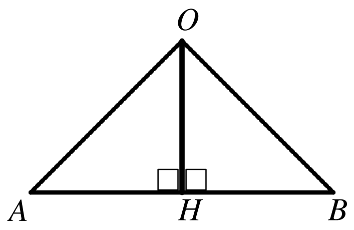
یادآوری: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

یادآوری: اندازه‌ی کمان AB، با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبروی آن برابر است.

مثال: نشان دهید هر نقطه که روی عمود منصف قرار داشته باشد، از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

قدم اول (درک و فهم مسئله): عمودمنصف خطی است که بر یک پاره‌خط عمود است و آن را نصف می‌کند.

قدم دوم (رسم شکل):



قدم سوم (نوشتن فرض و حکم):

فرض: OH عمودمنصف AB و O روی عمودمنصف قرار دارد.

حکم: $OA = OB$

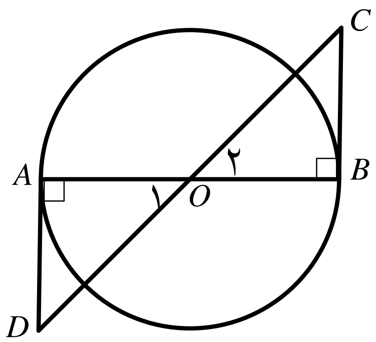
قدم چهارم (راهبرد حل مسئله):

$$\begin{cases} AH = HB \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \\ OH = OH \end{cases} \Longrightarrow O\overset{\Delta}{H}A \cong O\overset{\Delta}{H}B \text{ (ض ز ض) } \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} OA = OB$$

مثال: در شکل زیر O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. نشان دهید $AD = BC$.

قدم اول (درک و فهم مسئله): O مرکز دایره و AD و BC بر دایره مماس هستند.

قدم دوم (رسم شکل):



قدم سوم (نوشتن فرض و حکم):

فرض: O مرکز دایره و AD و BC بر دایره مماس هستند.

حکم: $AD = BC$

قدم چهارم (راهبرد حل مسئله):

$$\begin{cases} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OA = OB \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \end{cases} \Longrightarrow O\overset{\Delta}{A}D \cong O\overset{\Delta}{B}C \ (\text{ز ض ز}) \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AD = BC$$

۵.۳ شکل‌های متشابه

دو چندضلعی متشابه: هرگاه در دو چندضلعی همه‌ی ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه‌ی زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم متشابه‌اند.

نکته: زاویه‌های روبرو به اضلاع متناظر در شکل‌های متشابه با هم برابر هستند.

نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

نکته: دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه هستند.

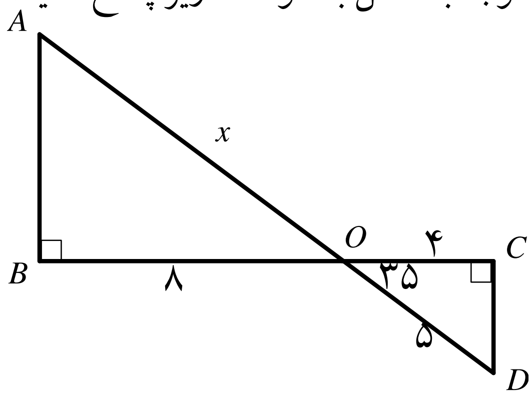
نکته: دو مستطیل همواره متشابه نیستند (زیرا ممکن است اضلاع به یک نسبت تغییر نکنند).

نکته: دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند.

مثال: در شکل مقابل، مثلث‌های AOB و COD متشابهند. با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) زاویه A چند درجه است؟

ب) اندازه x را به‌دست آورید.



الف) چون دو مثلث AOB و COD متشابه هستند، بنابراین اجزای متناظر در دو مثلث با هم برابر هستند:

$$A\widehat{O}B = C\widehat{O}D = ۳۵^\circ$$

بنابراین در مثلث AOB داریم:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+A\widehat{O}B = ۱۸۰^\circ \longrightarrow \widehat{A}+۹۰+۳۵ = ۱۸۰ \longrightarrow \widehat{A} = ۵۵^\circ$$

ب)
$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD} \longrightarrow \frac{۸}{۴} = \frac{x}{۵} \longrightarrow ۴\times x = ۸\times ۵ \longrightarrow ۴x = ۴۰ \longrightarrow x = \frac{۴۰}{۴} \longrightarrow \boxed{x = ۱۰}$$

مثال: مثلث ABC به ضلع‌های ۸، ۱۰ و ۱۶ با مثلث DEF به اندازه‌ی $۵x-۶$، ۳۰ و $۳y+۳$ متشابه است.

(اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است).

الف) مقدارهای x و y را بدست آورید.

$$\frac{۸}{۵x-۶}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱۶}{۳y+۳}$$

$$\frac{۸}{۵x-۶}=\frac{۱۰}{۳۰} \longrightarrow ۱۰\times(۵x-۶)=۸\times۳۰ \longrightarrow ۵۰x-۶۰=۲۴۰ \longrightarrow ۵۰x=۳۰۰ \longrightarrow x=\frac{۳۰۰}{۵۰} \longrightarrow \boxed{x=۶}$$

$$\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱۶}{۳y+۳} \longrightarrow ۱۰\times(۳y+۳)=۱۶\times۳۰ \longrightarrow ۳۰y+۳۰=۴۸۰ \longrightarrow ۳۰y=۴۵۰ \longrightarrow y=\frac{۴۵۰}{۳۰} \longrightarrow \boxed{y=۱۵}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید.

$$\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: در یک نقشه مقیاس ۱:۱۰۰۰ است. اگر فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۳ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه فاصله این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چند **متر** است؟

$$\frac{۱}{۱۰۰۰}=\frac{۳}{x} \longrightarrow ۱\times x=۱۰۰۰\times۳ \longrightarrow x=۳۰۰۰\ cm=۳۰۰۰\div۱۰۰\ m \longrightarrow \boxed{x=۳۰\ m}$$