

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



ریاضی نهم

درسنامه+مثال+نمونه سوالات امتحانی هماهنگ استانها



گردآورنده: جمیل اونق

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

تعریف مجموعه: به دسته ای اشیاء کاملا مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) از هم، مجموعه می‌گوییم.

مثال) مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی

تذکر: مجموعه را به صورت آکولاد $\{ \}$ نشان می‌دهیم.

تذکر: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A, B, C و نام گذاری می‌کنیم.

تذکر: اعضای مجموعه را معمولا با علامت «و» یا «،» یا «و» از یکدیگر جدا می‌کنند.

تذکر: در نوشتن اعضای یک مجموعه جابه جایی اعضا مهم نیست.

عضویت و عدم عضویت: به هر یک از اشیاء اعداد با کلمات یک مجموعه «عضو» گفته می‌شود. برای آنکه نشان دهیم شیئی عضو مجموعه ای

است با علامت \in نشان می‌دهیم و برای بیان عدم عضویت از علامت \notin استفاده می‌کنیم.

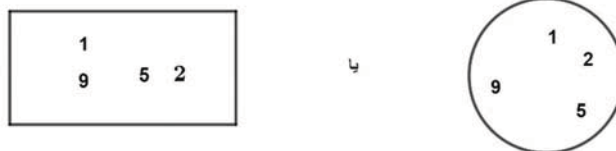
مثال) مجموعه را در نظر بگیرید.

$$A = \{-3, 5, 7\} \Rightarrow 5 \in A, \quad -3 \in A, \quad 10 \notin A$$

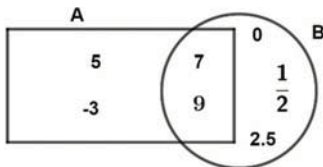
نمایش مجموعه‌های با استفاده از نمودار ون

گاهی اوقات اعضای مجموعه را داخل یک منحنی بسته یا خط شکسته قرار می‌دهند که به این نمایش مجموعه‌ها، نمودار ون می‌گویند.

$$A = \{1, 2, 5, 9\}$$



مثال) با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه‌های A, B را مشخص نمایید.



مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه تهی می‌نامند و به صورت \emptyset یا $\{ \}$ نمایش می‌دهند.

مثال) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از یک را نشان دهید.

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

دو مجموعه برابر: اگر تعداد اعضای دو مجموعه A, B برابر و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، در اینصورت دو مجموعه A و B برابر هستند و می نویسیم: $A = B$

(مثال) در مجموعه های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که دو مجموعه برابر باشد.

$$\left\{17, 3.5, 1, \dots, \frac{-2^4}{2^2}\right\} = \left\{\frac{7}{2}, -4, \dots, \frac{\sqrt{121}}{11} \text{ و } 5\frac{5}{5}\right\}$$

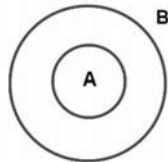
$$\left\{9, \dots, \sqrt{49}, \frac{1}{3}\right\} = \left\{3^2, 0.25, \dots, \sqrt{\frac{1}{9}}\right\}$$

$$\left\{-0.25, \dots, -4, \frac{3}{5}\right\} = \left\{\frac{3}{63}, \sqrt{\frac{9}{26}}, \dots, -\frac{1}{4}\right\}$$

(مثال) اگر دو مجموعه $A = \{6, 4a, 12\}$ ، $B = \{-3, 6, 5 - b\}$ برابر باشند، مقدار a و b را بدست آورید.

(مثال) دو مجموعه $A = \{x - 1, 5\}$ و $B = \{4, y + 3\}$ با هم مساوی اند مقادیر x و y را بدست آورید.

زیر مجموعه: اگر A, B دو مجموعه باشند و همه اعضای مجموعه A عضو مجموعه B باشند، در اینصورت A زیر مجموعه B است و می نویسیم: $A \subseteq B$



(مثال)

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \subseteq B$$

تذکره: اگر A زیر مجموعه B نباشد می نویسیم: $A \not\subseteq B$

تذکره: هر مجموعه زیر مجموعه خودش است: $A \subseteq A$

تذکره: مجموعه \emptyset زیر مجموعه هر مجموعه ای است: $\emptyset \subseteq A$

(مثال) تمام زیر مجموعه های $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید؟

نکته: به مجموعه تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، مجموعه ی توانی گفته می شود.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌هایی که یک مجموعه n عضوی برابر 2^n می‌باشد.

مثال) تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید و مشخص کنید کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$A = \{3, \emptyset, \{3, \emptyset\}\}$$

$$2) B = \{5, \{5\}, 3\}$$

$$3) C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$$

$$4) D = \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\}\}$$

$$3 \subseteq A, 3 \in A, \{3, \emptyset\} \subseteq A, \{3, \emptyset\} \in A, \{\{3, \emptyset\}\} \in A, \{\{3, \emptyset\}\} \notin A$$

$$3 \subseteq B, 3 \in B, \{3\} \subseteq B, \{3, 5\} \in B, \{3, 5\} \subseteq B, \{5\} \notin B, \{\{5\}\} \subseteq B, \{5, \{5\}\} \subseteq B$$

$$0 \subseteq C, 0 \in C, \{0, \emptyset\} \subseteq C, \{0, \emptyset\} \in C, \{\{0, \emptyset\}\} \in C, \{\{0, \emptyset\}\} \notin C, \{\{\emptyset\}\} \subseteq C, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq C$$

$$\emptyset \subseteq D, \emptyset \in D, \{\emptyset\} \subseteq D, \{\emptyset\} \in D, \{\{\}\} \in D, \{\{\}\} \subseteq D$$

نمایش مجموعه‌ها:

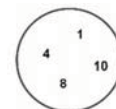
۱- به زبان فارسی: ویژگی مشترک اعضای یک مجموعه با عبارتهای فارسی بیان می‌شود.

مثال) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از 7

۲- با اعضاء: نمایش تک تک اعضا که بین دو آکولاد قرار گرفته اند.

$$A = \{1, 4, 8, 10\} \text{ (مثال)}$$

۳- با نمودار ون: همه اعضای یک مجموعه در داخل یک خط (منحنی) بسته قرار می‌گیرد.



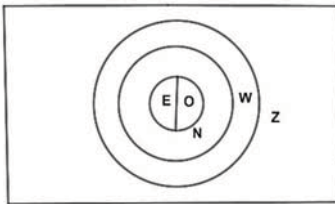
مثال)

۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی): برای نشان دادن یک مجموعه با نمادهای ریاضی باید یک متغیر را به عنوان نماینده اعضای مجموعه مشخص کنیم و ویژگی مشترکی که بین هم اعضای مجموعه قرار دارد را به زبان ریاضی به آن متغیر نسبت دهیم.
 مثال) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از 7 را به زبان ریاضی بنویسید.

تذکر: در نوشتن یک مجموعه به زبان ریاضی علامت « | » «به طوری که» یا «به شرطی که» یا «به قسمی که» خوانده می شود.

تذکر: مجموعه اعداد گویا را نمی توان با اعضا نشان داد، زیرا اولین عدد بزرگتر یا کوچکتر از هر عدد گویا مشخص نیست.

مجموعه اعداد مهم:



q $E = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2K | K \in N\}$ → مجموع اعداد طبیعی زوج

$O = \{1, 3, 5, \dots\} = \{2K - 1 | K \in N\}$ → مجموعه اعداد طبیعی فرد

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی Q ، مجموع اعداد گویا $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد حسابی $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه اعداد صحیح

مثال) اعضای مجموعه های زیر را مشخص کنید؟

$A = \{3x - 2 | x \in N, x < 4\}$

$B = \{-5x | x \in Z, -2 \leq x < 1\}$

$C = \{\frac{1}{x} | x \in N, x \leq 5\}$

$D = \{2x | x \in Z, -2 \leq x \leq 4\}$

$E = \{3x | x \in N, -2 \leq x < 3\}$

$F = \{x^3 - 1 | x \in W, x \leq 5\}$

مثال) مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

$D = \{1, 8, 27, 64\}$

$E = \{4, 8, 12, \dots, 44\}$

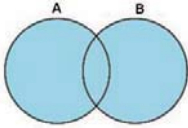
$F = \{1, 2, 4, \dots\}$

$$G = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

$$H = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36} \right\}$$

$$I = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

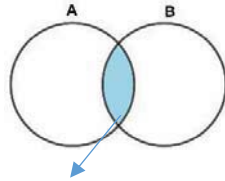
درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها



اجتماع: اجتماع دو مجموعه A ، B مجموعه های است شامل همه اعضایی که یا در A یا در B یا در هر دوی آن ها وجود دارد میباشد و با نماد $A \cup B$ نشان می دهیم و به زبان ریاضی و ون به صورتهای زیر می باشد.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

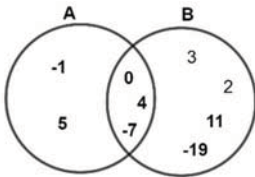
اشتراک: اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که هم در A و هم در B (در هر دوی آن ها) هستند و با نماد $A \cap B$ نشان می دهیم.



$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

$A \cap B$

(مثال) با توجه به نمودار مقابل مجموعه های A و B را با اعضایشان مشخص کنید و $A \cup B$ و $A \cap B$ را به دست آورید؟



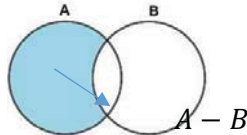
(مثال) اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$ و $B = \{2K | K \in \mathbb{Z}, -4 < x < 4\}$ باشند.

(الف) مجموعه های A ، B ، $A \cap B$ و $A \cup B$ را با اعضایشان تشکیل دهید.

(ب) مجموعه $A \cap B$ را به زبان ریاضی بنویسید.

تفاضل دو مجموعه: مجموعه های $A - B$ مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

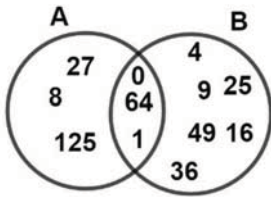
$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$



قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می دهیم.

(مثال) تعداد عضوهای $A = \{2, 3, 7\}$ می شود برابر 3 یعنی $n(A) = 3$

مثال) با توجه به نمودار زیر به سوالات پاسخ دهید.



الف) مجموعه A ، B را با نماد ریاضی و با اعضا بنویسید.

ب) مجموعه $A \cup B$ را به دست آورید و زیر مجموعه ای از آن را بنویسید که عضوهای آن عدد طبیعی نباشد.

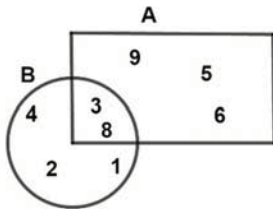
پ) مجموعه $A - B$ را به دست آورید؟ $A - B$ چند زیر مجموعه دارد؟

ت) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید؟

$$n(A \cup B) =$$

$$A - (A \cup B) =$$

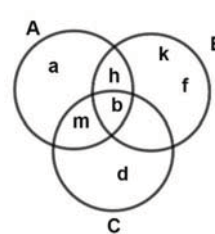
مثال) با توجه به شکل زیر اعضای مجموعه های زیر را بنویسید.



$$B - (A \cap B) =$$

$$A - B =$$

مثال) با توجه به نمودار زیر اعضای مجموعه خواسته شده را بنویسید.



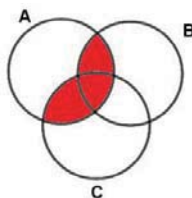
$$(A \cap B) \cap C =$$

$$(A - B) \cap C =$$

$$(A \cup B) - C =$$

$$(B - C) \cap A =$$

مثال) نمودار مقابل نمایش چه مجموعه ای است؟



مثال) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشند؟

الف) مجموعه های A و B را با نمودار ون نشان دهید؟

ب) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید؟

1) $B \subseteq A$

2) $\{1, 2\} \in A$

3) $4 \notin B$

4) $\emptyset \subseteq B$

ب) اعضای مجموعه مقابل را مشخص کنید؟

$A \cap B$

$B - A$

$A \cup B$

$A - B$

$B - \emptyset$

$A \cap \emptyset$

$B \cup \emptyset$

نکته:

| تفاضل | اشتراک | اجتماع |
|---|--|--|
| $A - \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $\emptyset \cup A = A$ |
| $\emptyset - A = \emptyset$ | $A \cap A = A$ | $A \cup A = A$ |
| $A - A = \emptyset$ | $(A \cap B) \subseteq A$ | $A \subseteq (A \cup B)$ |
| $B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset$ | $(A \cap B) \subseteq B$ | $B \subseteq (A \cup B)$ |
| | $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$ | $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$ |
| | | $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ و $B = \emptyset$ |

درس چهارم: مجموعه ها و احتمال

تعداد حالت‌های مطلوب
 احتمال رخ دادن یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد همه حالتها}}{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}$ یا $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

مثال) در کیسه ای 6 توپ آبی و 3 توپ قرمز وجود دارد یکی توپ به تصادف از کیسه خارج می کنیم احتمال اینکه:

الف) توپ آبی نباشد؟

ب) توپ قرمز یا آبی باشد؟

مثال) اگر تاسی را پرتاب کنیم چقدر احتمال دارد؟

الف) عدد رو شده فرد باشد؟

ب) عدد رو شده زوج باشد؟

پ) عدد رو شده عدد اول باشد؟

ت) عدد رو شده مضرب 3 باشد؟

ث) عدد رو شده بزرگتر از 4 باشد؟

ه) عدد رو شده کمتر از 3 باشد؟

مثال) فرض کنید دو تاس را با هم پرتاب می کنیم چقدر احتمال دارد؟

الف) هر دو تاس عدد اول باشد؟

ب) مجموع دو تاس 7 باشد؟

پ) مجموع دو تاس 10 باشد؟

ت) عدد تاس اولی زوج و عدد تاس دومی مضرب 5 باشد؟

ث) مجموع عددهای رو شده حداقل 11 باشد؟

مثال) فرض کنید خانواده ای دارای دو فرزند است چقدر احتمال دارد که:

الف) هر دو فرزند دختر باشد؟

ب) هر دو فرزند پسر باشد؟

پ) یک فرزند دختر و یک فرزند پسر باشد؟

مثال) فرض کنید سکه ای را دو بار پرتاب می کنیم چقدر احتمال دارد که:

الف) یک رو و یک پشت بیاید؟

ب) حداقل یک رو بیاید؟

پ) حداقل یک پشت بیاید؟

ت) اصلاً رو نیاید؟

مثال) اگر خانواده ای دارای سه فرزند باشند چه قدر احتمال دارد که

الف) این خانواده دارای 3 پسر باشد؟

ب) این خانواده دارای حداقل دو پسر باشد؟

مثال) در جعبه ای 4 مهره بنفش، 5 مهره سفید و 11 مهره سیاه وجود دارد. اگر 1 مهره به تصادف از این جعبه خارج کنیم چقدر احتمال دارد :

این مهره سفید باشد؟

این مهره سیاه نباشد؟

این مهره بنفش یا سفید باشد؟

این مهره سیاه یا سفید باشد؟

نمونه سوالات هماهنگ فصل اول

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید؟

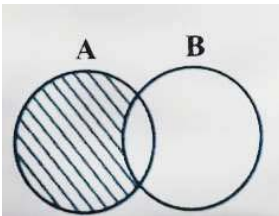
- (1) عبارت «عددهای اول بین 14 و 16» مجموعه تهی را مشخص می کند. (ص، غ)
- (2) عبارت «دو عدد طبیعی کوچکتر از 5» یک مجموعه را مشخص می کند. (ص، غ)
- (3) عبارت «سه شاعر ایرانی» یک مجموعه را مشخص می کند. (ص، غ)
- (4) هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. (ص، غ)
- (5) سه عدد طبیعی کوچک تر از 10 یک مجموعه را تشکیل می دهد. (ص، غ)
- (6) در پرتاب یک تاس احتمال آمدن مضرب 3 برابر با $\frac{1}{3}$ است. (ص، غ)
- (7) مجموعه $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تهی است. (ص، غ)
- (8) تساوی $\{\emptyset\} = \emptyset$ صحیح است. (ص، غ)
- (9) مجموعه ی اعداد گویای بین 7 و 8 مجموعه ی تهی می باشد. (ص، غ)
- (10) مجموعه $\{\}$ با مجموعه ی $\{\emptyset\}$ برابر است. (ص، غ)

۲- جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید.

- (1) در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد رو شده زوج باشد است.
- (2) یک مجموعه ی 3 عضوی زیر مجموعه دارد.
- (3) اجتماع دو مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ را مجموعه می نامند.
- (4) مجموعه ی $\{x \in \mathbb{Z} | 3x + 1 = 7\}$ شامل عضو است.

۳- گزینه ی درست را انتخاب کنید؟

(1) کدام گزینه قسمت هاشور خورده را نشان می دهد؟



- (1) $B - A$
- (2) $(A \cup B) - A$
- (3) $A - B$
- (4) $(A - B) \cup (B - A)$

(2) در پرتاب یک تاس چقدر احتمال دارد عدد رو شده اول باشد؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{5}{6}$

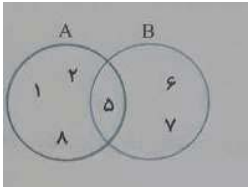
به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

(1) اگر خانواده دو فرزند داشته باشد چقدر احتمال دارد که این خانواده یک فرزند دختر و یک فرزند پسر داشته باشد؟

(2) 8- اگر $A = \{x^2 + 2 | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ باشد:

الف) مجموعه A را با اعضا نمایش دهید.

ب) مجموعه $A \cap B$ را مشخص کنید.



3) با توجه به نمودار مقابل به هر یک از قسمت های زیر پاسخ دهید؟

الف) $A \cup B =$ ب) $B - A =$ ج) $n(A \cap B) =$

4) مجموعه A را با عضوهایش مشخص کنید؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$$

5) تاسی را می اندازیم احتمال اینکه عدد رو شده کمتر از 3 باشد چقدر است؟

6) صورت دیگر مجموعه B را با نوشتن اعضا مشخص کنید؟

$$B = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$$

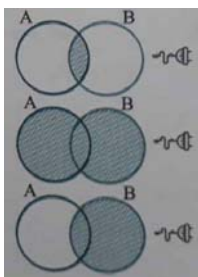
7) اگر $C \subseteq D$ باشد تساوی روبرو را کامل کنید؟

$$C \cap D =$$

8) در پرتاب یک تاس و یک سکه احتمال اینکه سکه رو و تاس زوج بیاید چقدر است؟

9) در مجموعه های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که مجموعه ها برابر باشند.

$$\left\{ \frac{7}{5}, -7, \dots, -0.75 \right\} = \left\{ \frac{7}{21}, \dots, -\frac{3}{4}, \sqrt{\frac{49}{25}} \right\}$$



10) هر یک از مجموعه های زیر را به نمودار مربوط به آن وصل کنید (یکی از نمودار ها اضافه است).
(

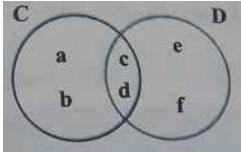
$$(A - B) \cup B$$

$$A \cap B$$

11) اگر تاسی را دوبار بندازیم چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده 6 باشد؟

12) مجموعه مقابل را با اعضایش مشخص کنید؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -3 < x \leq 2\} = \{ \quad \quad \}$$



(13) با توجه به نمودار مقابل حاصل تساوی زیر را به دست آورید؟

$$(C \cap D) \cup (C - D) =$$

(14) اگر تاسی را دوبار بندازیم چقدر احتمال دارد که هر دو عدد رو شده مضرب 3 باشند؟

(15) - اگر $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ و $B = \{5, 8, 9, 13\}$ باشند:

الف) مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

ب) مجموعه $B - A$ را با عضوهایش بنویسید؟

(16) مجموعه مقابل را با عضوهایش بنویسید؟

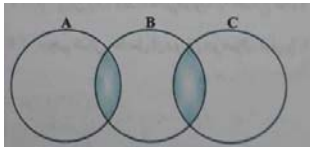
$$D = \{x^2 - 5 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$$

(17) خانواده ای دارای سه فرزند است چقدر احتمال دارد که این خانواده دقیقاً دارای دو دختر باشد؟

(18) جاهای خالی را در دو مجموعه ی زیر طوری کامل کنید که دو مجموعه برابر باشند؟

$$\left\{ -\frac{9}{3}, \dots, \dots, 0.75, -5 \right\} = \left\{ -\frac{1}{3}, -\sqrt{9}, \dots, \dots, \frac{3}{4} \right\}$$

(19) اگر $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ باشند در این صورت مجموعه $A - (A \cap B)$ را مشخص کنید؟



(20) مجموعه ی قسمت های سایه زده شده در نمودارِ ونِ زیر را بنویسید؟

(21) یک سکه و یک تاس را هم زمان پرتاب می کنیم احتمال این که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

فصل دوم: عددهای حقیقی

درس اول: عددهای گویا

عدد گویا: هر عددی را که بتوان به صورت یک کسر نشان داد با این شرط که صورت و مخرج آن اعداد صحیح باشد و مخرج آن مخالف صفر باشد عدد گویا نامیده می‌شود.

یعنی $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$ مجموع اعداد گویا را با Q نشان می‌دهند.

(مثال) عددهای مقابل اعداد گویا هستند.

$$\frac{3}{7}, \frac{-2}{5}, \frac{-6}{-11}, \frac{0}{4} = 0, -1, 3, 15$$

تذکر:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

نکته: طبق تعریف اعداد گویا اعداد صحیح، طبیعی و حسابی اعدادی گویا حساب می‌شوند یعنی:

$$N \subseteq Q \text{ و } Z \subseteq Q \text{ و } W \subseteq Q$$

مقایسه کسرها: برای مقایسه کسرها بهتر است مخرج مشترک بگیریم و بعد مقایسه کنیم که در اینصورت کسری که صورت آن بزرگتر است، عددی بزرگتری است.

(مثال) عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید؟

$$1) \frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$$

$$2) \frac{7}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, -0.25, -1.75$$

$$3) \frac{-1}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-7}{2}, \frac{-5}{3}$$

پیدا کردن کسرهایی بین دو کسر دلخواه: بین هر دو عدد گویا بشمار عدد گویا وجود دارد برای یافتن چند کسری یا اعداد گویا بین دو کسر دلخواه می‌توان از روشهای زیر استفاده کرد.

الف) یکسان سازی مخرجها: در این روش ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و سپس بین دو کسر مرتب شده، یک کسری مینویسیم که مخرج آن با مخرج دو کسر مساوی بوده و صورت آن عدد دلخواهی بین صورت دو کسر کناری باشد.

(مثال) بین کسرهایی زیر $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ یک عدد گویا بیابید؟

مثال) بین دو عدد $\frac{-2}{5}$ و $\frac{-1}{2}$ سه عدد گویا پیدا کنید؟

ب) میانگین: می‌دانیم میانگین هر دو عدد دلخواه بین آن دو عدد قرار می‌گیرد بنابراین با میانگین گرفتن از دو کسر دلخواه می‌توان کسر بین آنها را پیدا کرد.

مثال) یک عدد گویا ما بین $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{3}$ بیابید.

مثال) بین اعداد $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{3}$ دو عدد گویا بیابید.

پ) جمع کردن صورت با صورت و مخرج با مخرج: در این حالت یک کسری می‌نویسیم که صورت آن مجموع صورت‌ها و مخرج آن مجموع مخرج‌های دو کسر باشد.

مثال) یک عدد گویا بین دو عدد $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{7}$ بیابید.

مثال) بین دو عدد گویای $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ ، سه عدد گویا بیابید.

مثال) بین اعداد زیر با روش دلخواه 3 عدد گویا پیدا کنید؟

$$1) \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$$

$$2) \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$$

$$3) -\frac{4}{5}, -\frac{4}{7}$$

$$4) -\frac{1}{2}, -1$$

نمایش اعشاری اعداد گویا: هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری می‌باشد عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا سه حالت دارد که به صورت زیر می‌باشد:

الف) اعداد اعشاری مختوم یا متناهی: اعداد اعشاری مختوم یا متناهی اعدادی هستند که تعداد رقم‌های بعد از اعشار آن‌ها متناهی است مانند 3.7964

کسرهای تحویل ناپذیری که در مخرج آنها فقط عوامل اول 2 یا 5 وجود داشته باشد به عدد اعشاری مختوم تبدیل میشوند مانند

$$1) \frac{7}{4} = \frac{7}{2 \times 2} = 1.75 \quad 2) \frac{3}{20} = \frac{3}{2 \times 2 \times 5} = 0.15$$

ب) اعداد اعشاری متناوب ساده: اگر مخرج کسری تحویل ناپذیر را به عوامل اول تجزیه کنیم و عوامل اول 2 و 5 هیچ کدام نباشند در چنین کسرهایی اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم باقی مانده هیچ گاه به صفر نخواهد رسید و خارج قسمت مختوم به دست نمی آید بلکه در خارج قسمت مرتب رقم یا ارقامی تکرار می شود مانند

$$1) \frac{2}{3} = 0.666 \dots = 0.\bar{6}$$

$$2) \frac{1}{11} = 0.595959 \dots = 0.\overline{59}$$

پ) اعداد اعشاری متناوب مرکب: اگر مخرج کسرهای تحویل ناپذیر را تجزیه کنیم و در تجزیه آن عامل های 2 یا 5 وجود داشته باشد و درعین حال عامل های اول دیگری مانند 3 یا 7 یا 11 یا ... وجود داشته باشد با تقسیم صورت بر مخرج باقیمانده هیچ گاه صفر نمی شود و در خارج قسمت این اعداد علاوه بر ارقام تکراری، ارقام دیگری که تکرار نمی شوند دیده میشود. مانند:

$$1) \frac{1}{6} = 0.1666 \dots = 0.1\bar{6}$$

$$2) \frac{5}{6} = 0.833 \dots = 0.8\bar{3}$$

$$3) \frac{7}{15} = \frac{1}{3 \times 5} = 0.4666 \dots = 0.4\bar{6}$$

مثال) عدد اعشاری کدام یک از کسرهای زیر مختوم است؟

$$\frac{3}{20} \text{ (4)} \quad \frac{3}{7} \text{ (3)} \quad \frac{5}{6} \text{ (2)} \quad \frac{12}{45} \text{ (1)}$$

مثال) نوع نماد اعشاری کسرهای زیر را مشخص کنید؟

$$\frac{4}{18} \text{ (4)} \quad \frac{21}{45} \text{ (3)} \quad \frac{1}{9} \text{ (2)} \quad \frac{8}{3} \text{ (1)}$$

مثال) نمایش اعشاری کدام عدد متناوب مرکب است؟

$$\frac{3}{5} \text{ (4)} \quad \frac{5}{6} \text{ (3)} \quad \frac{1}{2} \text{ (2)} \quad \frac{7}{11} \text{ (1)}$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید؟

$$1) \left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$2) \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5 \frac{1}{3}$$

$$3) -\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$4) \frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}}$$

$$5) 4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}}}$$

$$6) \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \div (1 \div \frac{1}{2})}$$

$$7) \frac{1\frac{2}{5} - 3}{2 - \frac{3}{4 - \frac{5}{6 - 7}}}$$

$$8) \frac{\frac{1}{3} - 2}{2 + \frac{1}{3}} \div \frac{2 \times \frac{1}{3}}{2 \div \frac{1}{3}}$$

درس دوم: عدد های حقیقی

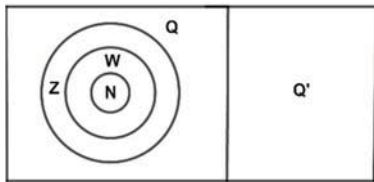
اعداد گنگ یا اصم: هر عددی که گویا نباشد گنگ است یا به عبارت دقیق تر اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن ها نامتناهی و دارای دوره تناوب نمی باشند را اعداد گنگ می نامیم و با Q' یا Q^c نامگذاری می کنیم. مانند

$$\sqrt{2}, \sqrt{10}, 1 + \sqrt{3}, \pi$$

نکته: جذر اعدادی که مربع کامل نباشند گنگ است مانند:

$$\sqrt{15}, \sqrt{10}, \sqrt{0.9}, \sqrt{7.35}, \dots$$

تذکر: در نمودار ون مجموعه های Q, Z, W, N و Q' به صورت زیر می باشند.



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$$

تذکر: مجموعه اعداد گویا و گنگ دو مجموعه جدا از هم هستند یعنی اشتراک ندارند به عبارت دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

مثال) کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است؟

الف) $\frac{3}{7} \in Q$

ب) $\sqrt{5} \in Q'$

پ) $2.30300300030 \dots \in Q'$

ت) $-3 \in Q'$

ث) $\frac{\sqrt{9}}{4} \in Q'$

ج) $\sqrt{7} \in Q$

نکته:

۱- جمع دو عدد گویا و گنگ همواره گنگ است.

$$2 \in Q \text{ و } \sqrt{2} \in Q' \rightarrow 2 + \sqrt{2} \in Q'$$

۲- ضرب عددی گنگ در عددی گویا به غیر از صفر عددی گنگ است؟

$$3\sqrt{5} \in Q'$$

۳- ضرب دو عدد گنگ ممکن است گنگ یا گویا باشد؟

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in Q'$$

و

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in Q$$

۴- جمع دو عدد گنگ ممکن است گنگ یا گویا باشد

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \in Q' \text{ و } (2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) =$$

نمایش هندسی اعداد گنگ: برای نمایش اعداد گنگ روی محور از روشهای هندسی استفاده میکنیم که در مثالهای زیر حالتهای مختلف آنها را نشان می دهیم.

مثال) اعداد زیر را روی محور نشان دهید؟

- 1) $\sqrt{2}$
- 2) $\sqrt{5}$
- 3) $\sqrt{6}$
- 4) $-\sqrt{10}$
- 5) $-\sqrt{17}$
- 6) $-\sqrt{13}$
- 7) $2 + \sqrt{5}$
- 8) $-6 + \sqrt{2}$
- 9) $-1 - \sqrt{5}$
- 10) $1 - \sqrt{5}$
- 11) $1 + \sqrt{10}$
- 12) $-2 - \sqrt{13}$

نکته: بین هر دو عدد دلخوا (گنگ یا گویا) بی شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد.

مثال) دو عدد گنگ بین $\sqrt{13}$ و $\sqrt{15}$ بنویسید؟

مثال) پنج عدد گنگ کوچکتر از 3 بنویسید؟

مثال) 3 عدد گنگ بین $\sqrt{10}$ و $\sqrt{11}$ بنویسید؟

مثال) پنج عدد گنگ بین $\sqrt{46}$ و $\sqrt{50}$ بنویسید؟

مثال) بین دو جفت اعداد زیر چهار عدد گنگ بنویسید؟

- | | | | |
|-----------|----------|--------------------------------|-----------|
| 1) -2 , 5 | 2) 6 , 7 | 3) $\sqrt{3.1}$, $\sqrt{3.2}$ | 4) -1 , 0 |
|-----------|----------|--------------------------------|-----------|

مثال) اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

- 1) $1 + \sqrt{5}$
- 2) $-3 - \sqrt{17}$
- 3) $-2 + \sqrt{6}$

- 4) $-3 + \sqrt{14}$
 5) $3 - 2\sqrt{7}$
 6) $1 - \sqrt{5}$
 7) $-2 + \sqrt{11}$

اعداد حقیقی: از اجتماع مجموعه های گویا و گنگ مجموعه اعداد حقیقی به دست می آید یعنی



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \quad \text{و} \quad Q' \subseteq R$$

$$QUQ' = R$$

محور اعداد حقیقی: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ است پس اعداد حقیقی را می توان با خط ممندی روی محور نشان داده یک خط از ابتدای مجموعه تا انتهای مجموعه رسم می کنیم اگر نقطه ی ابتدایی ی انتهای عضو مجموعه باشند توپر و در غیر اینصورت تو خالی رسم می کنیم.

مثال) اعضای مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in R \mid -4 \leq x < 1\}$$

$$B = \{x \in R \mid 0 < x \leq 3\}$$

$$C = \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$$

$$D = \{x \in R \mid -8 \leq x \leq -4\}$$

$$E = \{x \in R \mid x \geq 2\}$$

$$F = \{x \in R \mid x < 4\}$$

مثال) طرف دوم تساوی را کامل کنید؟

- 1) $Q \cap Q' =$ 2) $Q \cap Z =$ 3) $Q' \cap R =$ 4) $QUQ' =$
 5) $NUZ =$ 6) $R - Q' =$ 7) $Z \cap N =$ 8) $R \cap Q =$

درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی

قدر مطلق: فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدا، قدر مطلق a می نامیم و با علامت $|a|$ نوشته می شود بنابراین قدر مطلق صفر مساوی صفر و قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است و قدر مطلق هر عدد عدد منفی، قرینه آن است به طور کلی قدر مطلق هر عددی به غیر صفر مثبت است.

مثال)

- 1) $|5| = 5$ 2) $|-6| = -(-6) = +6$ 3) $|-9| = -(-9) = 9$

تذکره: در حالت کلی هر عدد حقیقی x داریم: $|x| = |-x|$

۱- قدر مطلق حاصلضرب دو عدد مساوی حاصل ضرب قدرمطلق آنهاست: یعنی

$$|a \times b| = |a| \times |b| \xrightarrow{\text{مثال}} |(-5) \times (-4)| = |-5| \times |-4| = 5 \times 4 = 20$$

۲- قدر مطلق حاصل تقسیم دو عدد مساوی حاصل تقسیم قدرمطلق آن دو عدد است. یعنی

$$(y \neq 0) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \xrightarrow{\text{مثال}} \left| \frac{-8}{7} \right| = \frac{|-8|}{|7|} = \frac{8}{7}$$

-۳

$$|a + b| \leq |a| + |b| \xrightarrow{\text{مثال}} |-7 + 4| \leq |-7| + |4| \Rightarrow |-3| \leq 7 + 4 \Rightarrow 3 \leq 11$$

-۴

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

(مثال)

$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

-۵

$$|a| - |b| \leq |a - b| \xrightarrow{\text{مثال}} |7| - |10| \leq |7 - 10| \Rightarrow 7 - 10 \leq |-3| \Rightarrow -3 \leq 3$$

(مثال) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید؟

$$1) \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} =$$

$$2) \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} =$$

$$3) \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} =$$

$$4) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} =$$

$$5) |\sqrt{5} - 3| + 2\sqrt{5} =$$

$$6) |4 - 3^2 x(-2 + 5)| =$$

$$7) |2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 3| =$$

$$8) \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} =$$

$$9) \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{5}| =$$

$$10) \sqrt{(1 - \sqrt{10})^2} - |\sqrt{10} - 1| =$$

$$11) |7 - 5\sqrt{3}| =$$

$$12) |3\sqrt{5} - 7| =$$

مثال) اگر a و b هر دو مثبت باشند حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید؟

$$1) |a| - |b| + |a + b| =$$

$$2) |2a| + |b| - |a + b| =$$

نمونه سوالات هماهنگ فصل دوم

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید؟

(1) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. (ص، غ)

(2) هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی است. (ص، غ)

(3) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. (ص، غ)

(4) $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح 2 و 3 قرار دارد. (ص، غ)

(5) هر عدد گویا یک عدد حقیقی است. (ص، غ)

(6) $\sqrt{18} \in \mathbb{R}$ است. (ص، غ)

۲- جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید.

(1) نمایش اعشاری کسر $\frac{2}{5}$ است (مختوم/متناوب)

(2) ما بین دو عدد -2 و -3 عدد گنگ وجود دارد.

(3)

۳- گزینه ی درست را انتخاب کنید؟

(1) کدام یک از اعداد زیر نمایش اعشاری مختوم دارد؟

(1) $\frac{7}{30}$ (2) $\frac{1}{55}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{3}{17}$

(2) نمایش اعشاری کدام یک از کسرههای زیر مختوم است؟

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{7}{15}$

(3) کدام گزینه کامل شده ی تساوی $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \dots\dots\dots$

(1) \mathbb{N} (2) \mathbb{Z} (3) \mathbb{Q}' (4) \mathbb{W}

(4)

۴- به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

$$\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{10} =$$

(1) حاصل عبارت مقابل را به صورت ساده شده بنویسید.

(2) داخل \square علامت \in و \notin و \subseteq یا $\not\subseteq$ قرار دهید.

$\mathbb{R} \square \mathbb{Z}$ (ب)

$3.7 \square \mathbb{Q}$ (الف)

(3) بین دو عدد 3 و 4 دو عدد گنگ بنویسید؟

(4) حاصل عبارت مقابل را بنویسید؟

$$\sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} =$$

(5) بین دو عدد 5 و 6 یک عدد گویا و یک عدد گنگ بنویسید؟

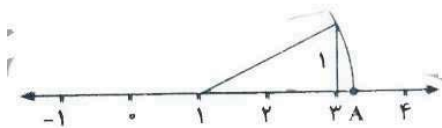
(6) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید؟

$$\sqrt{(\sqrt{14} - 4)^2} =$$

(7) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید؟

$$\sqrt{(4 - \sqrt{10})^2} =$$

(8) نقطه ی A در شکل مقابل چه عددی را نشان می دهد؟



(9) حاصل عبارت روبرو را با برداشتن قدر مطلق بنویسید؟

$$|2 - \sqrt{5}| - \sqrt{5} =$$

(10) حاصل عبارت روبرو را به دست بیاورید؟

$$\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{7})^2}$$

(11) بین دو عدد 3 و 4 دو عدد گنگ بنویسید؟

(12) عدد $2 + \sqrt{3}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

(13) عبارت مقابل را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید؟

$$|\sqrt{5} - 3\sqrt{7}| =$$

(14) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید؟

$$\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) \div 7\frac{1}{2} =$$

(15) دو عدد گویا بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ بنویسید؟

(16) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید؟

$$\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} =$$

(17) - داخل \square علامت مناسب \in یا \notin قرار دهید؟

$$\sqrt[3]{-64} \square \mathbb{Q}, \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \square \mathbb{Q}'$$

(18) اگر $a = -4$ و $b = \sqrt{3}$ باشند حاصل عبارت $|a + b|$ را بدست آورید؟

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است را استدلال می نامند.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد را اثبات می گوئیم.

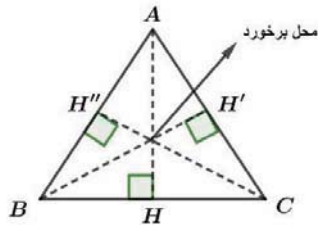
انواع استدلال

۱- **استدلال استقرایی:** نتیجه گیری براساس مشاهده ها حواس پنجگانه و آزمایش ها می باشد. (معتبر و قابل اطمینان نیست)

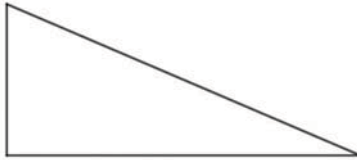
۲- **استدلال استنتاجی:** نتیجه براساس قوانین و اصول پذیرفته شده می باشد (حکم و قابل اطمینان است).

ارتفاع یک مثلث: هر مثلث سه ارتفاع دارد که در یک نقطه متقاطع هستند در هر مثلث ارتفاع ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند و محل برخورد ارتفاع ها بستگی به نوع مثلث دارد.

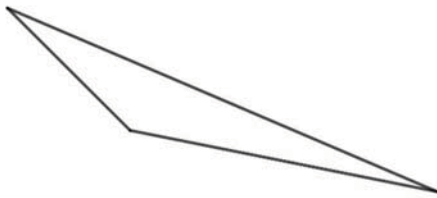
الف) مثلث با سه زاویه تند: محل برخورد ارتفاع ها درون مثلث



ب) مثلث با زاویه قائمه، ارتفاع های هر مثلث قائمه الزاویه روی راس قائمه یکدیگر را قطع می کنند.



پ) مثلث با یک زاویه باز: سه ارتفاع (امتداد ارتفاع ها) در خارج از مثلث یکدیگر را قطع می کنند.



درس دوم: آشنایی با اثبات درهندسه

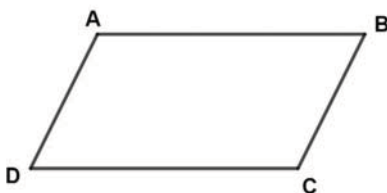
فرض مسئله: اطلاعات داده شده در مسئله را فرض می نامند.

حکم مسئله: خواسته مسئله و مجهولات مربوط به آن حکم مسئله هستند.

تذکر: اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله باید انجام دهیم تشخیص فرض و حکم مسئله است.

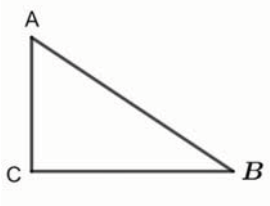
مثال) در مسئله های زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

مسئله: در هر متوازی الاضلاع ضلع های روبرو با هم و زاویه های روبرو با هم برابرند.



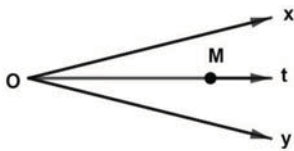
$$\text{فرض: } \begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AD} \parallel \overline{BC} \end{cases} \quad \text{حکم: } \begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \\ \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$$

مسئله ۲: در هر مثلث اگر مجموع دو زاویه تند 90° باشد آن مثلث قائم الزاویه است؟



تعمیم دادن نتیجه استدلال برای همه اعضای مجموعه

زمانی می توانیم درستی نتیجه به دست آمده از استدلال را به هم هاعضای کی مجموعه تعمیم دهیم که تمام ویژگیهایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر اعضای آن مجموعه وجود داشته باشد.



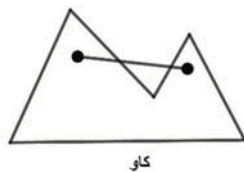
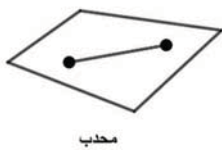
مثال (الف) در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و سپس ثابت کنید:

در نقطه M روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد ثابت کنید فاصله اش از دو ضلع زاویه یکسان است.

(ب) آیا در قسمت (الف) برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای هر نقطه روی نیمساز برقرار است کافی است؟

چند ضلعی محدب و مقعر

یک چند ضلعی محدب (کوثر) است هرگاه هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن را به هم وصل کنیم تماماً درون آن چند ضلعی قرار بگیرد و یا هیچ کدام از زاویه های داخل آنها بزرگتر از 180° نباشد به چند ضلعی هایی که محدب نباشند مقعر (کاو) میگوییم



درس سوم: هم نهشتی مثلثها

حالتهای هم نهشتی مثلثها

- ۱- دو ضلع و زاویه بین (ض ض ض)
 - ۲- دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
 - ۳- سه ضلع (ض ض ض)
- برای همه مثلثها

- ۴- وتر و یک ضلع (و ض)
مختص مثلث قائم الزاویه
- ۵- وتر و یک زاویه تند (و ز)

نکته: خط مماس بر دایره فقط در یک نقطه با دایره مشترک است و خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

نکته: از هر نقطه خارج دایره می توان فقط دو مماس رسم کرد.

مثال) ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع های مقابل به هم برابر هستند.

مثال) ثابت کنید در هر مستطیل، قطرهای با یکدیگر برابرند.

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

گام های برای حل مسئله هندسی

۱- درک و فهم مسئله

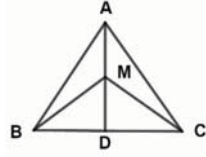
۲- رسم شکل

۳- مشخص کردن فرض و حکم مسئله

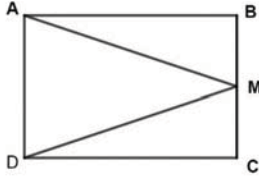
۴- راهبرد حل مسئله

مثال) ثابت کنید در هر مستطیل قطرهای با هم برابرند.

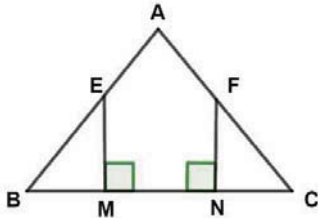
مثال) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه راس از دو سر قاعده برابر است. ($MB = MC$)



مثال) در مستطیل زیر M وسط BC است ثابت کنید مثلث AMD متساوی الساقین است.



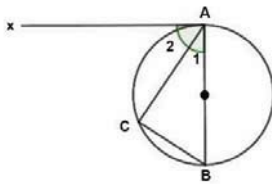
مثال) مثلث ABC متساوی الساقین و E و F وسط ساق ها هستند چرا طول پاره خط های BM و CN برابر است؟



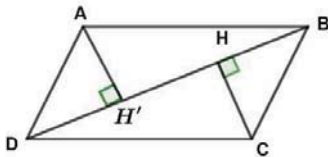
مثال) نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده ارتفاع میانه و عمود منصف نیز هست.

مثال) نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

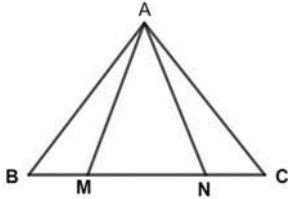
مثال) در شکل مقابل AB قطر دایره است و نیم خط Ax بر دایره در نقطه A مماس است ثابت کنید؟ $\hat{A}_2 = \hat{B}$



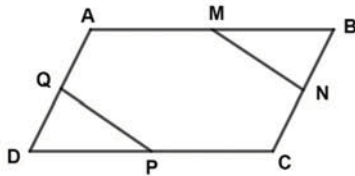
مثال) ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع فاصله رئوس روبرو یک قطر تا آن قطر با هم برابر است؟



مثال) در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین است M و N روی قاعده طوری قرار دارد که $BM = NC$ می باشد نشان دهید مثلث AMN متساوی الساقین است.



مثال) در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و M و N وسط اضلاع AB و CD هستند. ثابت کنید: $MN = PQ$



مثال) در شکل مقابل $ABCD$ لوزی است و نقطه های M و N وسط های اضلاع CB و CD نشان دهید $AM = AN$

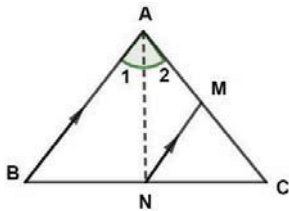
مثال) ثابت کنید قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند.

مثال) ثابت کنید در هر دوزنقه متساوی الساقین قطرها با هم برابرند.

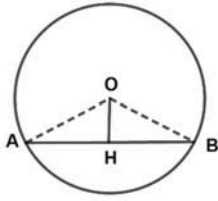
مثال) ثابت کنید در هر متوازی الاضلاعی که دو قطر عمود بر هم داشته باشد یک لوزی است.

نکته: در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

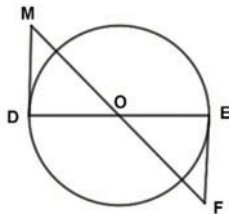
مثال) در مثلث ABC پیماره خط AN نیمساز زاویه A می باشد و $AB \parallel MN$ ثابت کنید AMN متساوی الساقین است.



مثال) ثابت کنید خطی که از مرکز دایره بر وتر دلخواه عمود می شود، آن وتر را نصف می کند



مثال) در شکل زیر O مرکز دایره و خط های DM و EF بر دایره مماس اند. چرا $EF = DM$ ؟



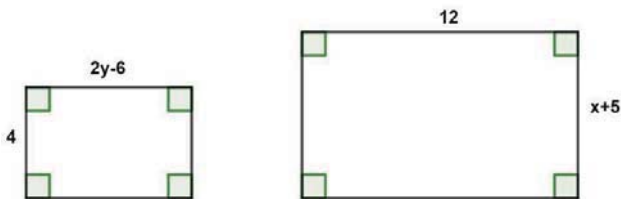
درس پنجم: شکل های متشابه

شکل های متشابه: هرگاه در دو شکل ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد به آن دو شکل متشابه گوئیم.

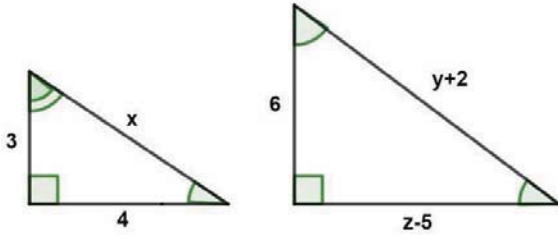
نکته:

- ۱- دو مربع دلخواه همواره متشابه اند
 - ۲- دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه اند.
 - ۳- هر دو شک همنهشت با هم متشابه اند.
 - ۴- دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه های نظیر برابر نباشند (ممکن است متشابه باشد یا نباشد)
 - ۵- دو مستطیل دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر نکرده باشند.
 - ۶- دو مثلث متساوی الساقین دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه های نظیر با هم برابر نبوده یا اضلاع متناظر متناسب نباشند.
- نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه نسبت تشابه می گویند.

مثال) دو مستطیل زیر با هم متشابه اند مقدار x و y را به دست آورید (نسبت تشابه آن ها $\frac{2}{3}$ است).



مثال) دو مثلث زیر با هم متشابه اند مقادیر x , y و z را بدست آورید؟



مثال) دو مربع متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{4}{25}$ است اگر ضلع مربع کوچکتر 10 باشد محیط مربع بزرگتر را بیابید.

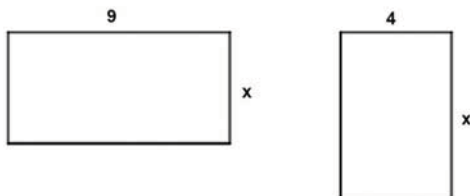
مثال) دو مثلث ABC و DEF با هم متشابه اند و نسبت تشابه آن ها 2 اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه 3 و 5 و 6 و اضلاع DEF به اندازه $x-3$ ، 10 و $2y+8$ باشند مقادیر x و y را بدست آورید؟

مثال) مثلث ABC با اضلاع 4، 5 و 8 با مثلث DEF با اضلاع $x-1$ ، 10 و $x+7$ متشابه اند. اندازه ضلع های هر دو مثلث از کوچک به بزرگ نوشته شده است مقدار x را بدست آورید.

مثال) اگر مقیاس یک نقشه $\frac{1}{10000}$ باشد و فاصله میدان الف تا میدان ب در نقشه برابر 3 سانتی متر باشد در واقعیت میدان الف تا میدان ب چقدر است؟

مثال) در یک نقشه با مقیاس $\frac{1}{30000}$ اگر فاصله دو نقطه در نقشه 4 سانتی متر باشد فاصله این دو نقطه در دنیای واقعی چند متر است؟

مثال) دو مستطیل مقابل متشابه اند مقدار x را تعیین کنید؟



نکته:

۱- نسبت محیط های دو n ضلعی با نسبت متشابه دو شکل مساوی است. (نسبت محیطها = نسبت تشابه)

۲- نسبت مساحت های دو n ضلعی با مجذور (توان دوم) نسبت متشابه دو شکل مساوی است.

$$\text{نسبت مساحتها} = (\text{نسبت تشابه})^2 \quad \text{یا} \quad \text{نسبت مساحتها} = \sqrt{\text{نسبت تشابه}}$$

مثال) نسبت مساحتهای دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است اگر اندازه ضلع پنج ضلعی بزرگتر 6 باشد اندازه ضلع پنج ضلعی کوچکتر چند است؟

مثال) اگر نسبت مساحتهای دو مربع متشابه $\frac{9}{25}$ باشد و اندازه ضلع مربع کوچکتر 6 سانتی متر باشد اندازه محیط مربع بزرگتر را بیابید؟

نکته: در دو مثلث متشابه

۱- نسبت محیطها با نسبت تشابه برابر است.

۲- نسبت ارتفاع های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

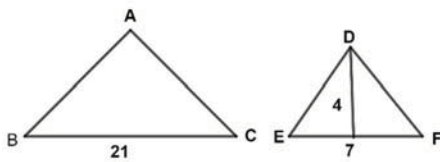
۳- نسبت میانه های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

۴- نسبت نیم سازهای متناظر با نسبت تشابه برابر است.

۵- نسبت مساحتها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال) نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه $\frac{16}{25}$ است نسبت ارتفاع های متناظر دو مثلث را به دست آورید؟

مثال) مثلث های ABC و DEF متشابه اند مساحت مثلث ABC را بدست آورید؟



مثال) شکلی را با دستگاه کپی بزرگ کرده ایم عدد روی دستگاه 25٪ را نشان می دهد نسبت تشابه این دو شکل چند است؟

نمونه سوالات هماهنگ فصل سوم

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید؟

1) هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه هستند. (ص ، غ)

(2) استفاده از حواس برای اثبات یک موضوع کافی است. (ص، غ)

(3) دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند. (ص، غ)

(4) دو مربع دلخواه همواره متشابه اند. (ص، غ)

۲- جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید.

(1) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد می گوئیم.

۳- به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

(1) آیا استدلال مسئله ی زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسئله: نشان دهید مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° درجه است.

اثبات: یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم. چون زاویه ی خارجی هر راس آن 120° درجه است پس مجموع زوایای خارجی هر سه راس 360° درجه می باشد. بنابراین نتیجه می گیریم مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° درجه است.

(2) در شکل زیر متوازی الاضلاع $ABCD$ متوازی الاضلاع است و Q, P, N, M وسط های اضلاع متوازی الاضلاع



میباشند ثابت کنید $MN = PQ$

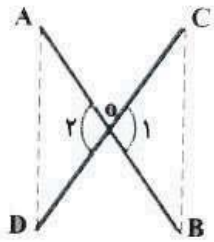
(3) آیا استدلال زیر درست است؟ پاسخ دهید؟

$ABCD$ مستطیل است $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است} \\ \text{چهار ضلعی } ABCD \text{ متوازی الاضلاع است} \end{cases}$

(4) در اثبات زیر جاهای خالی را کامل کنید؟

«دو پاره خط AB و CD یکدیگر را در نقطه ی O نصف کرده اند.

نشان دهید: $AD = BC$



$$\left. \begin{array}{l} AO = OB \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow A\hat{O}D \cong C\hat{O}B \Rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

(5) در اثبات زیر جاهای خالی را کامل کنید؟

| | |
|-----|---|
| فرض | $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 . \dots\dots\dots$ |
|-----|---|

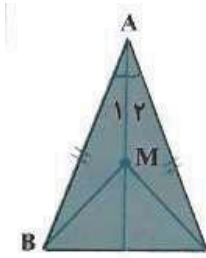
متساوی الساقین، فاصله هر نقطه ی دلخواه روی

حکم

$$MB = MC$$

«نشان دهید در هر مثلث

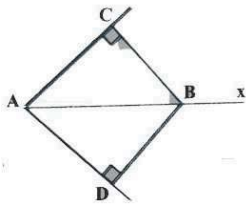
نیمساز زاویه ی از دو سر قاعده برابر است $MB = MC$ »



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} \Rightarrow MB = MC$$

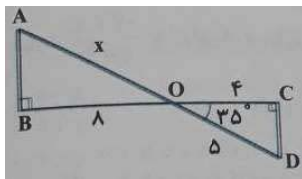
(.....)

آن (6) در شکل مقابل Ax نیمساز زاویه A می باشد ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است؟



(7) دو لوزی متشابه اند و نسبت تشابه آنها $\frac{3}{5}$ است اگر اندازه ضلع لوزی کوچک 12 سانتی متر باشد اندازه ضلع لوزی بزرگ چقدر است؟

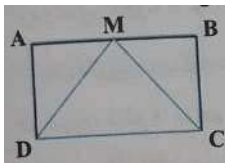
(8) - در شکل داده شده مثلث های AOB و COD متشابه اند با توجه به این شکل به سوالات زیر پاسخ دهید:



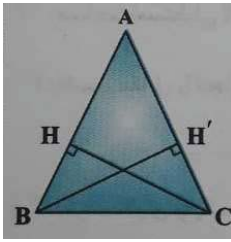
الف) زاویه A چند درجه است؟

ب) اندازه ی x را به دست آورید؟

(9) چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل است و M وسط ضلع AB است ثابت کنید مثلث MDC متساوی الساقین است.



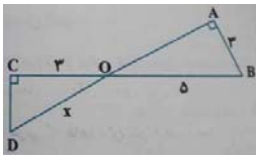
(10) مثلث ABC متساوی الساقین است اگر BH' و CH ارتفاع های وارد برساق ها باشند ثابت کنید: $BH' = CH$



11) برای مسئله زیر فقط فرض و حکم را بنویسید. (نیاز به اثبات نیست)

در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط BE و AF طوری رسم کنید که دو زاویه ی A_1 و B_1 برابرند اثبات کنید که BE و AF مساویند.

12) دو مثلث قائم الزاویه ی OAB و OCD متشابه هستند مقدار x چقدر است؟



فصل چهارم: توان و ریشه

درس اول: توان صحیح

توان منفی: اگر a یک عدد غیر صفر و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

یعنی اگر عدد صحیح غیر صفری از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن عدد قرینه می شود.

مثال) حاصل عبارتهای زیر را با توان مثبت بیابید؟

1) $9^{-2} =$

2) $(-2)^{-5}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

1) $a^0 = 1$, $a \neq 0$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

3) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

4) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

5) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

6) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

7) $(a^m)^n = a^{mn}$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را به صورت عددی تواندار بنویسید؟

1) $8^{-5} \times 2^{-10} \div 16 =$

2) $20^{-8} \div 5^{-8} \times 4^6 =$

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{-4} =$

4) $\frac{3^2 \times 12^0 \times 27}{9^{-2} \times 3^{-3}} =$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} =$

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-7} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} =$

7) $\frac{7^{20} \times 5^{16}}{5^{14} \times 7^{22}} =$

8) $\frac{8^2 \times 2^{-5}}{2^4 \times 8^{-3}} =$

9) $25^{10} \times 125^{-2} =$

10) $\frac{8^2 \times 2^{-5}}{2^4 \times 8^{-3}} =$

11) $\frac{(0.25)^{-8} \times 25^5}{(125)^{-4} \times 8^{-2}} =$

12) $\frac{-1^{-1}}{-2^{-2} \div 3^{-3}} =$

13) $(0.8)^{-12} \div (1.25)^{20}$

14) $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(1\frac{2}{5}\right)^{-3} =$

15) $(0.2)^5 \times (25)^{-2} =$

مثال) اعداد زیر را باهم مقایسه کرده و از کوچک به بزرگ بنویسید؟

1) 81^2 , 27^4 , 3^5 , 9^{10}

2) 2^{-3} , 5^{-3} , 2^3 , $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

3) $(-7)^2$, $(-1)^{21}$, 10^{-90} , -2^{-4}

4) 16^3 , 8^4 , 2^{11} , 32^2

مثال) جرم اتم هیدروژن حدود 10^{24} گرم است. جرم یک وزنه ۱۰۰ گرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

مثال) حاصل عبارات زیر را به صورت اعداد تواندار بنویسید؟

1) $3^{1382} + 5 \times 3^{1383} + 3^{1384}$

2) $\frac{2^7(4^3 + 4^3)}{16^3}$

3) $3^6 + 3^6 + 3^6 + 3^7 + 3^7 + 3^8 + 3^8 =$

4) $2^{99} + 2^{99}$

معادلات توانی: هر معادله‌ای که مجهول آن در توان قرار گرفته باشد معادله توانی نامیده می‌شود. برای حل این نوع معادله‌ها ابتدا پایه‌ها را در دو طرف تساوی یکسان می‌کنیم، سپس از این خاصیت استفاده می‌کنیم که اگر دو عبارت تواندار با پایه‌های مساوی برابر باشند باید توان‌های آنها نیز برابر باشند، یعنی

$$a^n = a^m \quad \rightarrow \quad m = n$$

مثال) معادله‌های توانی زیر را حل کنید.

1) $5^x \div 5^{-3} = 5^4$

2) $5^{12} \div 5^x = 5^{21}$

3) $9^x \times 27^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

$$4) \left(\frac{1}{5}\right)^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-7} = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$5) 8^{2-x} = (0.25)^{2x}$$

درس دوم : نماد علمی

نماد علمی: برای نوشتن اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچک و برای راحتی در محاسبه با این اعداد آن ها را به صورت حاصل ضرب یک عدد بین 1 و 10 با خود یک ($1 \leq a < 10$) در توانی از 10 نمایش می دهند یعنی به صورت $a \times 10^n$ که $1 \leq a < 10$ و $n \in Z$ میباشد که به آن نماد علمی می گویند.

مثال اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید؟

- 1) 2160000
- 2) 61000000
- 3) 319000000000
- 4) 0.0000392
- 5) 0.00000798
- 6) 0.000000000704

مثال نمایش اعشاری هر یک از اعداد زیر را بنویسید؟

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $6.94 \times 10^5 =$ | 2) $3.42 \times 10^{-3} =$ |
| 3) $4.2 \times 10^8 =$ | 4) $3.14 \times 10^{-8} =$ |
| 5) $1.4142 \times 10^6 =$ | 6) $60.271 \times 10^{-4} =$ |

مثال اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

مثال قطر خورشید حدود 1.4×10^9 متر و قطر زمین حدود 1.3×10^7 متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر زمین است؟

مثال فاصله مریخ از زمین 9.17×10^7 کیلومتر و فاصله کیوان از زمین 6.287×10^8 کیلومتر است با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیار به زمین نزدیکتر است؟

مثال عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید؟

$$1.5 \times 10^{-2} \quad \text{و} \quad 1.2 \times 10^6 \quad \text{و} \quad 5.35 \times 10^{-2} \quad \text{و} \quad 3.7 \times 10^{-2}$$

مثال) جرم خورشید برابر $1.989,000,000,000,000,000,000,000$ آن را با نماد علمی نشان دهید؟

درس سوم: ریشه گیری

مربع دو عدد 5 و -5 برابر 25 یعنی $5^2 \times (-5)^2 = 25$ به همین دلیل دو عدد 5 و -5 ریشه ی دوم عدد 25 میگویند و با نمادهای $\sqrt{25}$ و $-\sqrt{25}$ نمایش می دهند یعنی $\sqrt{25} = 5$ و $-\sqrt{25} = -5$

ریشه های دوم عدد $\frac{81}{4}$ اعداد $\frac{9}{2}$ و $-\frac{9}{2}$ هستند یعنی

$$\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} \text{ و } -\sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{9}{2}$$

ریشه ی دوم: به طور کلی اگر b یک عدد مثبت باشد \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه ی دوم عدد b می نامند.

نکته:

۱- اعداد منفی ریشه دوم ندارند

۲- هر عدد مثبت دو ریشه قرینه هم دارد.

ریشه سوم: اگر $a^3 = b$ ریشه سوم عدد b همان a است و به صورت $\sqrt[3]{b} = a$ نمایش می دهند. مانند

$$5^3 = 125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$$

$$(-3)^3 = -27 \rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

نکته:

۱- همه اعداد حقیقی (چه مثبت و چه منفی) ریشه ی سوم دارند.

۲- هر عدد فقط یک ریشه ی سوم دارد.

مثال) حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

1) $\sqrt{81} =$

2) $\sqrt{4^2} =$

3) $\sqrt{(-3)^2} =$

4) $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} =$

5) $\sqrt[3]{7^3} =$

6) $\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} =$

7) $\sqrt{0.16} =$

8) $\sqrt[3]{\%64} =$

$$9) -\sqrt[3]{(-5)^3} =$$

ضرب و تقسیم رادیکالی

۱- برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

$$1) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

۲- برای هر دو عدد a و b دلخواه داریم:

$$1) \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید؟

$$1) \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} =$$

$$2) \frac{\sqrt{36} \times \sqrt{64}}{\sqrt{144} \times \sqrt{16}} =$$

$$3) \frac{\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} =$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$$

$$5) \sqrt[3]{-25} \times 2\sqrt[3]{4} =$$

$$6) \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \times \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} =$$

$$7) 3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4}$$

$$8) \frac{\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{-8}}{\sqrt{81} \times \sqrt[3]{-64}} =$$

$$9) \sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{4} =$$

$$10) \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} =$$

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکالی

برای جمع و تفریق رادیکال ها قانون خاصی وجود ندارد و فقط می توان جملاتی که قسمت رادیکالی آن ها مثل هم باشند جمع یا تفریق کرد یعنی جملاتی که فرجه و عبارت اخل رادیکال آنها یکسان است قابل جمع و تفریق هستند.

مثال) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$1) 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$$

$$2) 5\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} =$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید؟

$$1) \sqrt{32} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} =$$

$$2) \frac{\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} =$$

$$3) 2\sqrt{12} + \sqrt{27} + 5\sqrt{3} =$$

$$4) 2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} =$$

$$5) (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$$

$$6) (\sqrt{2} + \sqrt{18})(\sqrt{2} - \sqrt{18}) =$$

$$7) -\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[3]{2} =$$

$$8) 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128} =$$

$$9) (\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{75}) \div \sqrt{3} =$$

$$10) \sqrt{800} + 3\sqrt{50} =$$

$$11) 4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{192} + 3\sqrt[3]{24} =$$

$$12) 2\sqrt{48} - 7\sqrt{3} =$$

$$13) 2\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{40} + 8\sqrt[3]{135} =$$

$$14) 5\sqrt{160} + \sqrt{90} + 2\sqrt{40} =$$

$$15) \sqrt[3]{56} - 3\sqrt[3]{7} =$$

$$16) \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{686} =$$

گویا کردن مخرج کسرها: گاهی اوقات لازم است تا درر محاسبه های کسری مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی می باشند طوری نوشته

شوند که مخرج فاقد رادیکال باشد این کار را گویا کرن مخرج کسرمی نامند برای اینکه منظور صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب می کنیم تا

مخرج از حالت رادیکالی خارج شود

مثال) مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید؟

$$1) \frac{5}{2\sqrt{3}} =$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{5}} =$$

$$3) \frac{7}{2\sqrt[3]{3}} =$$

$$4) \frac{9}{\sqrt[3]{4}} =$$

5) $\frac{18}{4\sqrt[3]{5^2}} =$

7) $\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} =$

9) $\frac{7}{2\sqrt[3]{3}} =$

11) $\frac{7}{\sqrt[3]{5^2}} =$

6) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}} =$

8) $\frac{4}{\sqrt[3]{b}} =$

10) $\frac{9}{\sqrt[3]{4}} =$

12) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4^2}} =$

نمونه سوالات هماهنگ فصل چهارم

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید؟

1) اگر $a^2b < 0$ باشد آنگاه b منفی است. (ص، غ)2) عدد $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ از عدد 9^{-1} کوچکتر است. (ص، غ)

3) ریشه ی سوم 125 عدد 5 میباشد. (ص، غ)

4) ریشه سوم 8 عدد 2 می باشد. (ص، غ)

5) عبارت $100^\circ < 0.9^{10}$ صحیح میباشد. (ص، غ)

۲- جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید.

1) حاصل عبارت $5^{-2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^6$ به صورت عددی توان دار برابر است.2) اگر a عددی غیر صفر و n عددی طبیعی باشد حاصل a^{-n} با است $\left(-a^n / \frac{1}{a^n}\right)$ 3) حاصل عبارت $(-2)^{-2}$ برابر است با4) ریشه سوم $-\frac{8}{125}$ برابر است با5) حاصل عبارت $2^0 + ((+2)^{-1})^{-1}$ برابر است.6) برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ صورت و مخرج آن را در ضرب می کنیم.

۳- گزینه ی درست را انتخاب کنید؟

1) نماد علمی عدد 0.00029 کدام است؟

1) 2.9×10^{-4} (1) 2) 29×10^{-4} (2) 3) 2.9×10^4 (3) 4) 29×10^4 (4)

2) نماد علمی مربوط به عدد 4025 کدام مورد است؟

1) 40.25×10^4 (1) 2) 4.025×10^4 (2)3) 40.25×10^2 (3) 4) 4.025×10^3 (4)3) حاصل عبارت $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{641}{100}(4) \quad \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\right)^2(3) \quad \frac{25}{2}(2) \quad \frac{25}{4}(1)$$

(4) حاصل عبارت $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ برابر کدام گزینه است؟

$$5\sqrt{3}(4) \quad \sqrt{15}(3) \quad 3\sqrt{13}(2) \quad \sqrt{39}(1)$$

۴- به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

(1) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\frac{\sqrt{20} + 2\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$$

(2) مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

$$\frac{2}{7\sqrt{3}} =$$

(3) عبارت روبرو را ساده کنید؟

$$\sqrt{8} + \sqrt{50} - 3\sqrt{2} =$$

(4) قطر یک سلول گلبول قرمز حدود 0.00000734 میلی متر می باشد این عدد را به صورت نماد علمی بنویسید؟

(5) - عبارت مقابل را ساده کنید؟

$$4\sqrt{2} - \sqrt{18} =$$

(6) نماد علمی 5240000 را بنویسید؟

(7) مخرج کسر مقابل را گویا کنید؟

$$\frac{3}{\sqrt{7}}$$

(8) حاصل عبارت زیر را بدست آورید؟

$$\frac{\left(\frac{6}{10}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

(9) نماد علمی عدد 245.94 را بنویسید؟

(10) مخرج کسر مقابل را گویا کنید؟

$$\frac{3}{2\sqrt{7}}$$

(11) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید؟

$$\frac{3^7 \times 5^{-8}}{5^3 \times 3^{-4}} =$$

(12) عبارت مقابل را ساده کنید؟

$$\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - 7\sqrt{3} =$$

(13) مخرج کسر زیر را گویا کنید؟

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

(14) حاصل عبارت زیر را با نماد علمی نمایش دهید؟

$$523000 =$$

(15) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید؟

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-9} \times 2^9}{(8^2)^3} =$$

(16) عبارت مقابل را ساده کنید؟

$$3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} =$$

(17) مخرج کسر مقابل را گویا کنید؟

$$\frac{2}{3\sqrt{7}} =$$

(18) حاصل عبارت $3 \times 10^{-4} \times 7 \times 10^2$ را با نماد علمی بنویسید؟

(19) حاصل عبارت مقابل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید؟

$$\frac{3^7 \times 5^7}{15^{-4}}$$

(20) قطر زمین حدود 13000000 متر است این عدد را با نماد علمی نمایش دهید؟

(21) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید؟

$$\sqrt{54} + 5\sqrt{6} =$$

(22) مخرج کسر زیر را گویا کنید؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} =$$

(23) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید؟

$$\frac{8^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{2^5 \times 2^{-8}} =$$

(24) حاصل عبارت زیر را به صورت عددی توان دار بنویسید؟

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}} =$$

(25) حاصل عبارت مقابل را به صورت نماد علمی نمایش دهید؟

$$3 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^9 =$$

(26) عبارت مقابل را ساده کنید؟

$$\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5} =$$

فصل پنجم: عبارتهای جبری

درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله‌ای‌ها: هر عبارت را که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی (عدد حسابی) یک یک چند متغیر باشد، یک جمله ای می‌نامیم.

(مثال) تمام عبارتهای زیر یک جمله ای هستند.

$$2x, \quad -6x, \quad 5y^3, \quad \frac{2}{5}, \quad -7, \quad z^5, \quad 14, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{mx^2}{9}, \quad \sqrt{5}, \quad x^2y^3z^5$$

تذکر: هر عدد ثابت حقیقی به تنهایی یک جمله ای محسوب می‌شود.

نکته: فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که در آن $a \in IR$ و X متغیر و $n \in w$ می‌باشد یعنی حتماً توان متغیر باید عضو اعداد حسابی باشد مثلاً عبارت $5\sqrt{x}$ یک جمله ای نیست.

تذکر: اگر متغیر در توان باشد، (5^x) ، یا متغیر زیر رادیکال باشد، $(2\sqrt{y})$ و یا متغیر در قدر مطلق باشد، $(|xy|)$ ، آن گاه یک جمله ای نیستند.

یک جمله ای متشابه: هر گاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارتهای حرفی (متغیر) یکسان و توان‌های متغیرهای متناظر هم، با هم برابر باشند، یک جمله‌ای‌ها با هم متشابه هستند به عنوان مثال تمام یک جمله‌ای‌های زیر متشابه هستند.

$$2x^3y, -\frac{3}{4}x^3y, \sqrt{3}x^3y, \frac{x^3y}{8}$$

درجه ی یک جمله‌ای‌ها:

درجه یک جمله ای نسبت به هر یک از متغیرها: در هر یک از جمله ای توان هر متغیر را درجه یک جمله ای نسبت به آن متغیر می‌گوییم. مثلا در یک جمله ای $3\sqrt{7}x^5y^3z$ درجه نسبت به متغیر x برابر با 5 و درجه نسبت به متغیر y برابر 3 و درجه نسبت به متغیر z برابر یک می‌باشد.

درجه یک جمله ای نسبت به تمام متغیرها: مجموع توان هر متغیرها را درجه آن یک جمله ای نسبت به تمام متغیرها می‌باشد.

مثال): در یک جمله‌ای‌های زیر، درجه نسبت به هر یک از متغیرها و درجه نسبت به تمام متغیرها را مشخص کنید.

| درجه نسبت به تمام متغیرها | درجه نسبت به هر یک از متغیرها |
|---------------------------|-------------------------------|
| $35x^7y^6n^3$ | |
| $-\sqrt{2}y^2z^9m$ | |
| $(5a^2x^3)^2$ | |

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها: دو یا چند یک جمله ای را در صورتی با هم جمع یا از هم تفریق کرد که جمله‌ها متشابه باشند. برای این منظور کافی است ضریب‌های عددی جمله‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم.

ضریب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها: برای به دست آوردن حاصل ضرب دو یک جمله ای کافی است ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را در هم ضرب کنیم.

چند جمله‌ای‌ها: حاصل جمع (یا تفریق) تعدادی یک جمله ای غیر متشابه را چند جمله ای می‌گویند اگر چند جمله ای دارای یک جمله باشد، آن را یک جمله ای و اگر دارای دو جمله باشد، آن را دو جمله ای و ... می‌نامند.

تذکره: چند جمله ای می‌تواند یک جمله ای یا جمع جبری چند یک جمله ای باشد.

درجه چند جمله‌ای‌ها:

درجه چند جمله ای نسبت به متغیر: درجه یک چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر، عبارت است از بزرگترین توان آن متغیر در چند جمله‌ای ساده شده.

درجه چند جمله ای نسبت به چند متغیر: درجه چند جمله‌ای نسبت به چند متغیر عبارت است از درجه جمله‌ای که بزرگترین درجه را نسبت به آن متغیر دارد.

مثال): درجه چند جمله‌ای‌های زیر را نسبت به هر یک از متغیرهایش و همچنین نسبت به همه متغیرها را معین کنید.

1) $5x^2 + 9y^3 + 4x^2y^3 + x^4y - 5y^5x - 6$

2) $x^2y - 3xy^3 + \sqrt{2}x^4y^2 - 2x^3y^8$

چند جمله‌ای استاندارد: اگر همه جمله‌های یک چند جمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی یک متغیر

(از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم چند جمله‌ای به دست آمده را نسبت به آن متغیر، یک چند جمله‌ای استاندارد می‌گوییم.

مثال: چند جمله‌ای‌های زیر را نسبت به متغیر x مرتب کنید؟

$$1) 2ax + 6a^3x^4 + 4x^5a^2 - 7$$

$$2) 5x^2 + 6 - 3x + 7x^4 - 3x^3 - 7x^6 - 3x^3 + 5x^7$$

ضرب چند جمله‌ای در چند جمله‌ای: برای ضرب چند جمله‌ای در چند جمله‌ای، ابتدا جمله‌ی اول چند جمله‌ای اول را در تک تک جمله‌های چند جمله‌ای دوم ضرب می‌کنیم و سپس جملات دوم و و سپس نتیجه به دست آمده را ساده می‌کنیم.

$$(5x^3 - 3x)(x^4 - 1)$$

مفهوم اتحاد: اگر دو عبارت به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیر هایشان مقدار یکسانی داشته باشند، در اینصورت برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

مثال: آیا $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است؟

مفهوم معادله: معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از مقادیر متغیر یا متغیرها به تساوی عددی تبدیل می‌شود. مثلاً تساوی $3x + 12 = 6$ یک معادله است زیرا به ازای $x = 2$ تساوی برقرار است و سایر مقادیر مثلاً $x = 1$ یا $x = 300$ تساوی برقرار نمی‌باشد.

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

اتحاد مربع دو جمله‌ای برای مجموع

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{جبری}$$

$$(دومی + اولی) = (دومی)^2 + 2(اولی)(دومی) + (اولی)^2 \quad \text{کلامی}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای برای تفاضل:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) =$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{جبری}$$

$$(دومی - اولی) = (دومی)^2 - 2(اولی)(دومی) + (اولی)^2 \quad \text{کلامی}$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید؟

1) $(3x + 2)^2 =$

2) $(2x + y)^2 =$

3) $(3a - 5)^2 =$

4) $(x + 3y)^2 =$

5) $(3z - 2b)^2 =$

6) $(1 - x)^2 =$

7) $\left(8x - \frac{1}{2}\right)^2 =$

8) $\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 =$

9) $(3x + 9)^2 =$

10) $(c - 1)^2 =$

مثال) حاصل توان های زیر را با استفاده از اتحاد ها حساب کنید؟

1) $99^2 =$

2) $101^2 =$

3) $98^2 =$

4) $102^2 =$

5) $999^2 =$

6) $1001^2 =$

مثال) به کمک اتحاد مربع دو جمله ای ، درستی تساوی های زیر را ثابت کنید؟

1) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

2) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

3) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \quad (a \neq 0)$

۱- تجزیه به کمک فاکتورگیری:

- 1) ابتدا ب م م ضرایب را بدست می آوریم.
- 2) متغیرهای مشابه را با کمترین توان به دست می آوریم.
- 3) تک تک جمله ها را به عامل فاکتور تقسیم می کنیم و حاصل را بعد از عامل فاکتور درون پرانتز می نویسیم.

(مثال): عبارت زیر را تجزیه کنید؟

$$\text{الف) } 25y^4 + 30y^3$$

۲- تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله ای: هرگاه عبارتی دارای 3 جمله باشد و به فرم $(\text{دومی})^2 + 2(\text{اولی})(\text{دومی}) \pm (\text{اولی})^2$ باشد برای تجزیه می توان از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده کرد.

(مثال) چند جمله ای های زیر را تجزیه کنید.

$$1) x^2 + 2xy + y^2 =$$

$$2) x^2 + 9y^2 - 6xy =$$

$$3) x^2 - 10x + 25 =$$

$$4) 2y^2 + 4y + 2 =$$

$$5) 2x^3 + 8x^2 + 8x =$$

$$6) a^3 - 2a^2 + a =$$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها:

اتحاد مزدوج

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

جبری

$$(\text{دومی} + \text{اولی})(\text{دومی} - \text{اولی}) = (\text{دومی})^2 - (\text{اولی})^2$$

کلامی

مثال) با استفاده از اتحاد مزدوج حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$1) (2x + y)(2x - y) =$$

$$2) \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$3) (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) =$$

$$4) (x - 10)(10 + x) =$$

$$5) \left(\frac{1}{4} - x\right)\left(\frac{1}{4} + x\right) =$$

$$6) (z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) =$$

$$7) (x - 2)(x + 2) =$$

$$8) (x - 5y)(x + 5y) =$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: هرگاه عبارتی به صورت تفاضل دو عبارت مربع کامل باشد، میتوانیم برای تجزیه آن از اتحاد مزدوج استفاده کنیم.

یعنی عبارت $a^2 - b^2$ را به صورت $(a + b)(a - b)$ تجزیه کنیم؟

مثال) عبارتهای زیر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید؟

$$1) 9x^2 - 25 =$$

$$2) 4a^2 - 16 =$$

$$3) 36 - y^2 =$$

$$4) x^2 - y^2 =$$

$$5) 2a^2 - 3b^2 =$$

اتحاد یک جمله مشترک:

دو جمله‌ای‌های $(x + a)$ و $(x + b)$ دارای جمله‌های مشترک x هستند حاصل ضرب این دو پرانتز را می‌توانیم به کمک اتحاد جمله مشترک بدست آوریم.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک به دست آورید.

$$1) (x + 5)(x + 2) =$$

$$2) (x + 4)(x - 3) =$$

$$3) (x + 3)(x + 4) =$$

$$4) (x - 1)(x + 2) =$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک: اگر عبارتی دارای سه جمله باشد که فقط یک جمله ی آن مربع کامل باشد، می‌توانیم از تجزیه به کمک

اتحاد و جمله مشترک استفاده کنیم.

گام اول: جذر جمله مربع کامل را می گیریم این همان جمله ی مشترک است.

گام دوم: دو پرانتز باز می کنیم و جمله ی مشترک را ابتدای دو پرانتز می نویسیم.

گام سوم: دو عدد پیدا می کنیم که حاصل جمع آن عددی باشد که در عبارت جبری در جمله مشترک ضرب شده است و حاصل ضرب آن ها عددی باشد که در عبارت جبری سوال عددی بدون حضور جمله ی مشترک است.

مثال): عبارتهای زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کنید.

$$1) x^2 - 8x + 15$$

$$2) x^2 - 13x + 36$$

$$3) 4x^2 + 18x + 18$$

$$4) x^2 - 2x - 3$$

$$5) x^2 + 7x + 12$$

$$6) x^2 + 7x - 18$$

$$7) y^2 - y - 20$$

$$8) x^2 - 2x - 35$$

اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc$$

مثال) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$1) (3x + 4y + 1)^2 =$$

$$2) (y^2 - 3y - 2)^2 =$$

$$3) (y + y^2 + y^3)^2 =$$

درس سوم: نابرابری ها و نامعادله ها

مفاهیم نمادهایی نامساوی ها برای دو عدد حقیقی a و b چهار حالت نیز وجود دارد:

$$1) a > b \text{ یعنی مقدار } a \text{ از } b \text{ بیشتر است.}$$

$$2) a \geq b \text{ یعنی مقدار } a \text{ از } b \text{ بیشتر و یا با آن برابر است.}$$

$$3) a < b$$

$$4) a \leq b$$

1- اگر دو طرف یک نابرابر را با عددی مانند، جمع کنیم (یا تفریق کنیم) ، نابرابری برقرار است یعنی:

$$a > b \rightarrow a + c > b + c \quad \text{و} \quad a - c > b - c$$

2- اگر $a < b$ و $c > 0$ آنگاه $ac < bc$

3- اگر $a < b$ و $c < 0$ آنگاه $ac > bc$

4- اگر $a < b$ و $c > 0$ آنگاه $a \div c < b \div c$

5- اگر $a < b$ و $c < 0$ آنگاه $a \div c > b \div c$

نامعادله: نامعادله یک نامساوی شامل مجهول است که آن نامساوی به ازای بعضی از مقادیر مجهول برقرار می باشد.

مجموعه جواب نامعادله: همه جواب های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می دهند که آن را مجموعه جواب آن معادله می نامند.

مثال: مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورید؟

1) $2(x - 3) + 5 < 5 - x$

2) $\frac{y - 3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

3) $3 - 2x \geq (1 - x)$

4) $-2 - \frac{y}{4} \leq \frac{1 + y}{3}$

5) $3(x + 1) \geq 2x + 5$

$$6) 3(x - 1) \geq 6x$$

$$7) 3x + 1 \leq 19$$

$$8) 5(x + 2) \geq 4x - 3$$

$$9) 3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$$

$$10) -8 - 9x \geq 4x + 5$$

$$11) \frac{7x}{6} \leq \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2}$$

$$12) 3(x - 1) \geq 6x$$

مثال) اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می توان نتیجه گرفت $a > b$ ؟

مثال): اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ نشان دهید $a > b$ است؟

الف) حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها بنویسید؟

1) $(2x - 1)^2 =$

2) $(x - 4)(x + 4) =$

3) $(2a - 2)(2a + 2) =$

4) $(x + y)(x - y) =$

5) $(2x + 5)(2x - 3) =$

6) $(x + 2)^2 =$

7) $(2x - 5)^2 =$

8) $(3 - 4a)(3 + 4a) =$

9) $(5x + 1)(5x + 3) =$

10) $\left(\frac{1}{4} + x\right)\left(\frac{1}{4} - x\right) =$

ب) عبارات زیر را تجزیه کنید.

1) $y^2 - 5y - 6 =$

2) $x^2 - 12x + 32 =$

3) $x^2 + 10x + 25 =$

4) $x^2 - x - 6 =$

5) $x^2 + 5x + 6 =$

6) $x^2 - 9 =$

7) $9a^2 - b^2 =$

8) $x^2 - 13x + 36 =$

پ) نامعادله ی زیر را حل کرده و سپس مجموعه جواب را روی محور نشان دهید.

1) $3x \leq 7x + 8$

2) $4x - 6 \geq 2x - 8$

3) $5(x - 1) \leq 3x + 3$

4) $2(x - 5) \leq x + 2$

$$5) 3x + \frac{1}{2} \geq 2x + \frac{3}{4}$$

$$6) 11 - 2x \geq 4(-x + 1) - 3$$

فصل ششم: خط و معادله ی خطی

درس اول: معادله خط

معادله خط: هر معادله به شکل $y = ax + b$ که در آن a و b عدد های ثابت و x و y دو متغیر هستند را یک معادله خط می نامند.

مثال: جدول زیر را کامل کنید و بگویید آیا رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن رابطه خطی است یا خیر؟

| | | | | | |
|--------------|---|---|---|--|---|
| ضلع (x) | 0 | 1 | 2 | | 7 |
| محیط (y) | 0 | 4 | | | |

مثال: آیا رابطه بین ضلع یک مربع و مساحت آن یک رابطه خطی است یا خیر؟

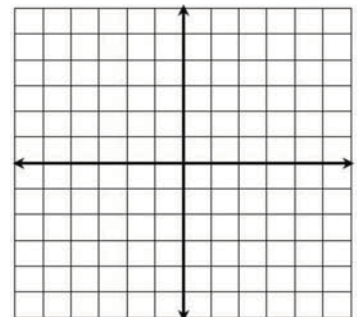
| | | | | | |
|---------------|---|---|---|----|---|
| ضلع (x) | 1 | 2 | 5 | | 9 |
| مساحت (y) | 1 | 4 | | 49 | |

روش رسم یک خط

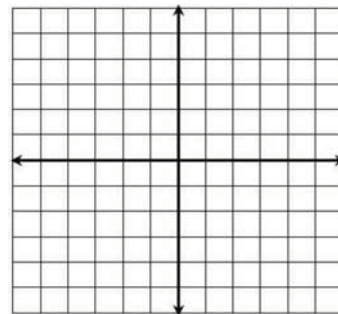
برای رسم خط به فرم $y = ax + b$ به روش نقطه یابی عمل می کنیم به این صورت که برای x دو مقدار دلخواه انتخاب می کنیم و برای هر کدام از مقادیر x با گذاشتن در معادله $y = ax + b$ دو مقدار y را بدست می آوریم نقاط $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بدست آمده را در محور مختصات به صورت نقطه نشان می دهیم و به هم وصل می کنیم تا یک خط راست به دست آید.

مثال: خط های زیر را روی محور مختصات رسم کنید.

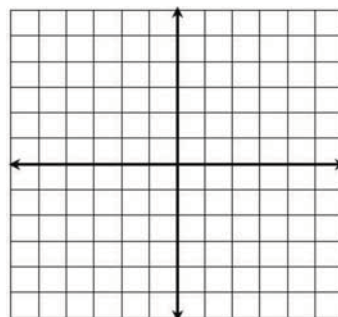
$$1) y = 3x - 1$$



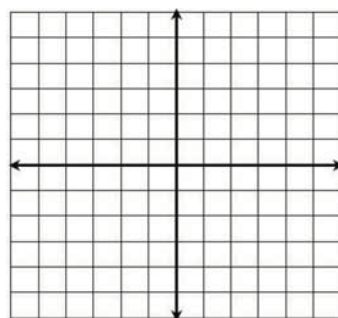
$$2) y = 2x + 1$$



3) $y = -2x - 2$



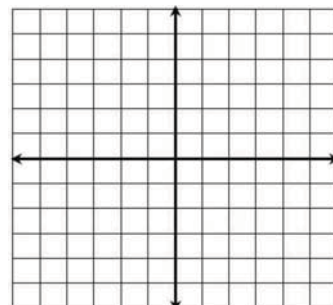
4) $y = -x - 1$



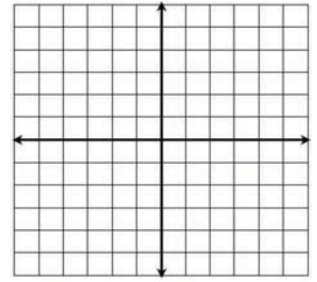
تذکر: بهتر است دو مقدار دلخواه برای x را 0 و 1 انتخاب کنیم.

تذکر: زمانیکه ضریب x در معادله خط کسری باشد بهتر است برای x مقادیر 0 و مخرج کسر ضریب x را انتخاب کنیم.

5) $y = \frac{3}{2}x - 1$



$y = -\frac{3}{4}x + 1$



تلاقی (محل برخورد) خط با محور های مختصات:

برای بدست آوردن محل برخورد خط با محور y ها به جای x عدد صفر قرار می دهیم و مقداری که برای y بدست می آید همان محل برخورد خط با محور y ها می باشد و برای یافتن محل تلاقی خط با محور x ها به جای y صفر قرار می دهیم و عددی را که برای x به دست می آید همان نقطه برخورد با محور x ها می باشد.

مثال): مختصات محل برخورد خط های زیر را با محور های مختصات را به دست آورید؟

$$1) y = 3x - 2$$

$$2) y = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$3) y = 4x + 1$$

$$4) y = \frac{1}{3}x - 1$$

نکته: معادله ای که به فرم $y = ax$ باشد مبدا گذر نام دارد. مانند $y = -4x$ و $y = 2x$ و $y = \frac{1}{2}x$

نکته: شرط اینکه نقطه ای روی خط قرار گیرد آنست که مختصات نقطه در معادله صدق کند یعنی با قرار دادن طول و عرض نقطه به جای x و y در معادله، رابطه ای صحیح برقرار شود.

مثال): آیا نقطه ای $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 5$ قرار دارد؟

مثال): آیا نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -\frac{1}{2}x - 2$ قرار دارد؟

نکته: برای بدست آوردن مختصات نقطه ای به طول عدد دلخواه کافی است عدد دلخواه را به جای x در معادله قرار دهیم و y را بدست آوریم.

مثال: مختصات نقطه ای به طول 2- را در خط $y = -\frac{1}{2}x - 2$ به دست آورید.

تذکر: برای بدست آوردن مختصات نقطه ای به عرض عدد دلخواه کافی است عدد دلخواه را به جای y در معادله قرار دهیم و x را به دست آوریم.

مثال: مختصات نقطه ای به عرض 3 را در خط $y = 3x - 4$ را بدست آورید.

مثال: محل برخورد خط $y = -\frac{3}{2}x - 1$ را با محور مختصات بدست آورید؟ آیا نقطه $\left[-\frac{2}{2}\right]$ روی این خط قرار دارد؟ مختصات نقطه ای به عرض 4- را پیدا کنید؟

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدا

شیب خط: در معادله خط $y = ax + b$ به ضریب x یعنی a شیب خط گفته می شود.

عرض از مبدا: در معادله خط $y = ax + b$ به b عرض از مبدا گفته می شود عرض از مبدا در اصل نقطه ای است که خط محور عرض ها را قطع می کند.

مثال: شیب و عرض از مبدا خط های زیر را به دست آورید؟

$$1) y = -3x + 1$$

$$2) y = 2x - \frac{1}{2}$$

$$3) y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

نکته: برای نوشتن معادله خط کافی است شیب و عرض از مبدا آن را داشته باشیم.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه 4 قطع کند و شیب آن 2 باشد.

نکته: دو خط که شیب های یکسانی دارند با هم موازی هستند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 2x - 4$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 4x - 5$ موازی و از مبدا مختصات بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن 3 و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

مثال: معادله ی خطی که با خط $y = 4x - 5$ موازی باشد و از نقطه ی $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ نیز بگذرد را بنویسید.

نکته: شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ می گذرد عبارتست از:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{شیب خط})$$

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ می گذرد برای چه عددی است؟

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ را بنویسید؟

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را بنویسید؟

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را بنویسید؟

مثال: شیب خطی که از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ و مبدا مختصات می گذرد را به دست آورید؟

نکته: طول نقطه ای که در آن نقطه به خط محور طول ها را قطع می کند ، طول از مبدا گویند.

نکته: صورت کلی معادله های خطی به صورت $ax + by = c$ است این نوع خطوط را باید به فرم استاندارد $y = ax + b$ تبدیل کنیم.

مثال: معادله ی خط های زیر را به صورت استاندارد نوشته و شیب و عرض از مبدا آن ها را به دست آورید.

1) $3x + 2y = 5$

2) $-3x + 2y = 2$

3) $-4x + 2y = 4$

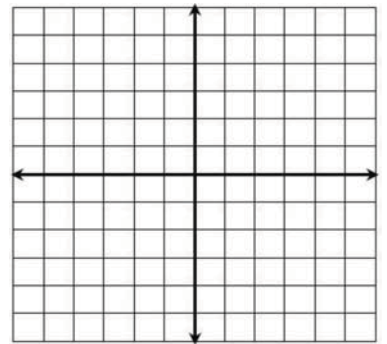
مثال: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $4x + 2y = 6$ موازی باشد و از مبدا مختصات بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $2x + 3y = 1$ موازی بوده و عرض از مبدا آن 4 باشد.

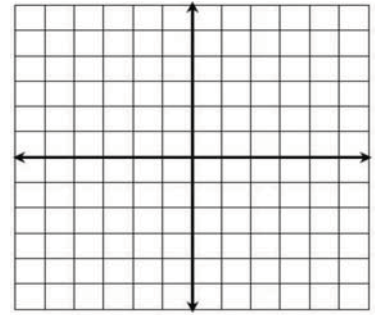
نکته: برای رسم خط به فرم $ax + by = c$ ، یک بار $x = 0$ و بار دیگر $y = 0$ قرار می دهیم.

مثال: خط به معادله های زیر را رسم کنید؟

1) $-2x + 3y = 6$



2) $3x - 2y = 1$



خطوط موازی با محور مختصات:

حالت کلی خطوط به معادله $y = m$ موازی محور x ها (طول ها) و خطوط به معادله $x = n$ موازی محور y ها (عرض ها) است که در آن m و n اعداد معلوم و ثابتی هستند.

نکته: نقطه برخورد خط $y = m$ و $x = n$ نقطه $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ می باشد و زاویه بین آن ها همیشه 90° است و شیب خط $x = n$ تعریف نشده و عرض از مبدا هم ندارد و شیب خطوط $y = m$ صفر و عرض از مبدا آنها همان m است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که موازی محور طول ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که موازی محور عرض ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

مثال: خط های $y = -3$ و $x = \frac{1}{2}$ را رسم کنید؟

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را بنویسید؟

نکته:

$$(1) \text{ معادله محور طول ها } (x \text{ ها}): y = 0$$

(2) معادله محور عرض ها (y) : $x = 0$

(3) معادله نیمساز ناحیه اول و سوم: $y = x$

(4) معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم: $y = -x$

درس سوم: دستگاه معادله های خطی

منظور از حل دستگاه معادله های خطی پیدا کردن نقطه برخورد دو خط یا پیدا کردن x و y می باشد که به دو روش انجام می شود.

1- روش حذفی: در این روش یکی از معادله ها یا هر دو معادله را در عددی ضرب می کنیم که ضرایب x یا ضریب y در هر دو قرینه شود سپس معادله را جمع می کنیم تا یکی از مجهول ها حذف شود معادله جدید یک مجهولی است و با روش های قبلی حل می کنیم. سپس از به دست آوردن جواب یکی از مجهول ها آن را در یکی از معادله به دلخواه قرار می دهیم و مجهول دیگر را به دست آوریم.

مثال): دستگاه های معادلات خطی زیر را به روش حذفی حل کنید؟

1)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + y = -3 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + y = -2 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$$

2- روش جایگذاری: در این روش یک متغیر را برحسب متغیر دیگر در یکی از معادله ها به دست آورده و در معادله دیگر جایگذاری می کنیم که با این کار معادله یک مجهولی می شود و معادله را حل می کنیم و یکی از مجهول ها را بدست می آوریم ، سپس آن را در یکی از معادلات به دلخواه قرار می دهیم و مجهول دیگری را به دست می آوریم.

مثال): دستگاههای معادلات خطی را زیر را به روش جایگذاری حل کنید؟

$$1) \begin{cases} x - 3y = -7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

مثال): دستگاه معادله های خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید؟

$$1) \begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{y+1}{2} = 0 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4y = 11 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 17 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3(x - 3y) + x = 24 \\ 5x - (x + y) = 11 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5(y + 4x) = 2(-x + y) - 54 \\ y + (4x - 3y) = 2y - 28 \end{cases}$$

مثال): مقادیر x و y را در دستگاه مقابل تعیین کنید.

$$1) 3^{x-5y+9} = 5^{2x+3y-8}$$

$$2) \begin{cases} 4^{2x+4y+18} = 8^{x-y-6} \\ x + y = -14 \end{cases}$$

مثال): مقادیر x و y را در دستگاه مقابل تعیین کنید.

$$\begin{cases} 5^{x-y+3} = 1 \\ 4^{x+2y} = 2^{-16} \end{cases}$$

مثال): در یک مزرعه 19 مرغ و گاو وجود دارد اگر تعداد پاهای آن ها 58 تا باشد چند مرغ و گاو در این مزرعه وجود دارد؟

مثال): مجموع سن زهرا و خواهرش 28 است اگر زهرا از خواهرش دو سال بزرگتر باشد سن هر کدام را بدست آورید؟

$$\text{نکته: در دستگاه } \begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases} \text{ داریم:}$$

الف) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، آن گاه دستگاه دارای یک جواب است. (دو خط متقاطع)

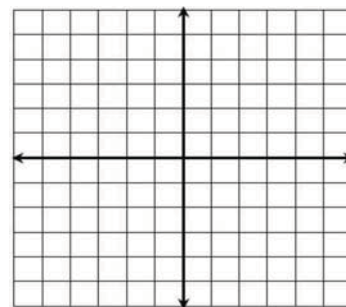
ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه جواب ندارد. (دو خط موازی هستند)

پ) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی شماری وجود دارد. (دو خط منطبق بر هم هستند)

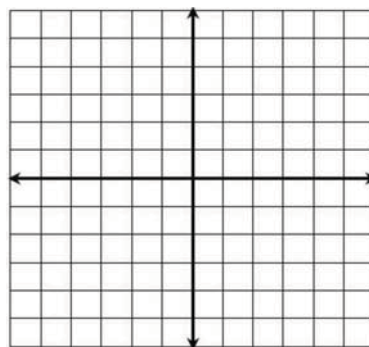
نمونه سوالات هماهنگ استانها (فصل ششم)

۱) خط های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید؟

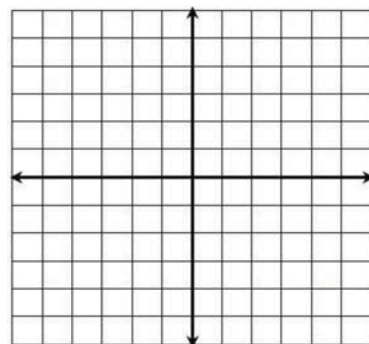
$$1) 2x - 3y = 6$$



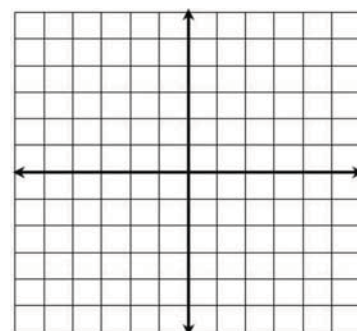
2) $y = 3x - 2$



3) $y = -2x + 2$



4) $y = \frac{2}{3}x - 1$



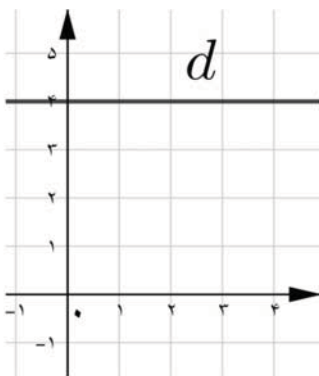
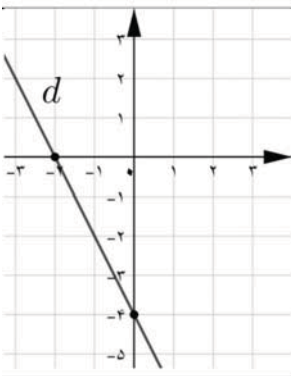
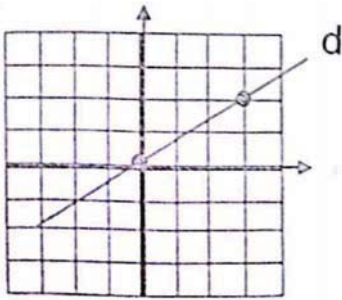
۲) مختصات نقطه ای روی خط $y = 2x - 5$ بنویسید که عرض آن برابر 1 باشد.

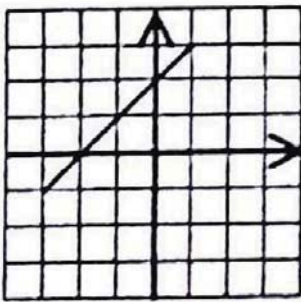
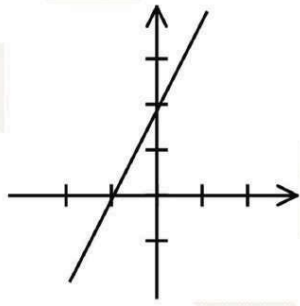
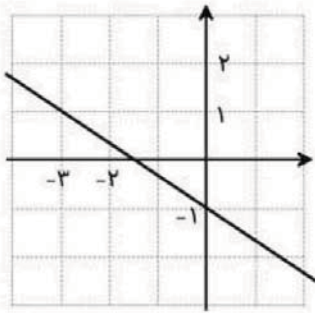
۳) مختصات نقطه ای از خط $y = 3x - 5$ را بدست آورید که طول آن -2 باشد.

۴) خط دلخواهی را روی محور مختصات رسم کنید که شیب و عرض از مبدا آن منفی باشد.

۵) شیب و عرض از مبدا خط $y = -2x + 10$ را پیدا کنید.

۶) با توجه به شکل‌های زیر معادله خطها را بنویسید.





۷) دستگاه معادلات زیر را با روش دلخواه حل کنید؟

$$1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 3x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

۸) محل برخورد خط های زیر با محورهای مختصات را پیدا کنید؟

$$1) 2x - 5y = 10$$

$$2) y = 2x + 4$$

۹) معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = 2x + \frac{5}{2}$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۰) معادله خطی را بنویسید که شیب آن -6 و محور y ها را در $+3$ قطع کند.

(۱۱) معادله خطی را بنویسید که موازی محور y ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

(۱۲) معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

(۱۳) معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = 2x + 3$ موازی بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ بگذرد.

(۱۴) شیب خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

(۱۵) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

- (1) - اگر شیب های دو خط برابر باشند ، آن دو خط موازی هستند.
- (2) - خط $y = 2x - 1$ از مبدا مختصات می گذرد.
- (3) - معادله $y = 2x + 3$ بی شمار جواب دارد.
- (4) - معادله خط که از نقاط $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر $x = -1$ است.
- (5) - خط $2x + 3y = 0$ از مبدا مختصات می گذرد.
- (6) - شیب خط $y - 3x = 1$ برابر با -3 است.
- (7) - نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 5x + 3$ قرار دارد.
- (8) - نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 1$ قرار دارد.

(۱۶) در جای خالی عدد یا کلمه مناسب قرار دهید.

- (1) - در خط $y = 5x + 7$ عدد 7 را می نامند.
- (2) - معادله خطی که موازی محور طول ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد ، به صورت است .
- (3) - از برخورد دو خط $x = 3$ و $y = 2$ نقطه $\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ به دست می آید.

(4) - معادله خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می کند برابر است با

(5) - معادله خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر با است.

فصل هفتم: عبارتهای گویا

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

عبارت گویا: عبارت گویا کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای هستند.

عبارتهای زیر گویا هستند:

$$\frac{3x+4}{(x+2)(x-1)}, \quad \frac{\sqrt{7}x}{x^3+1}, \quad \frac{2x-7}{x^2+3x}, \quad \frac{-a}{b}, \quad \frac{x^3}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad 7, \quad -11, \quad \frac{x}{y}$$

نکته: عبارتهایی که صورت و یا مخرج آن ها، متغیر زیر رادیکال و یا در داخل قدر مطلق باشد که قابل ساده کردن نباشد، آن عبارت گویا نیست.

عبارتهای زیر گویا نیستند:

$$\frac{\sqrt{x}}{2}, \quad |a-b|, \quad \frac{2}{\sqrt{x-3}}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad |x+y|, \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{-2x}$$

نکته: برای پیدا کردن مقدار عددی عبارت گویا کافی است مقدارهای مورد نظر را به جای متغیرها قرار داده و پس از ساده کردن مقدار عبارت گویا را بدست آوریم.

مثال: هر یک از عبارتهای زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$1) \frac{2x+1}{3x-1} = \quad (x=1)$$

$$2) \frac{-3x-1}{x+2} = \quad \left(x = -\frac{1}{2}\right)$$

نکته: همان طور که میدانیم اگر مخرج کسر صفر شود آن کسر تعریف نشده است. بنابراین در عبارت گویا اگر به ازای مقداری از متغیر مخرج کسر صفر شود، به آن مقدار را حذف کنیم. برای بدست آوردن این مقداری کافی است از ساده کردن عبارت گویا مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و معادله را حل کنیم.

مثال: عبارتهای زیر را به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

$$1) \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$2) \frac{2x-4}{(x+7)(x-2)}$$

3) $\frac{2x + 1}{2x - 1}$

4) $\frac{2x}{8x - 16}$

5) $\frac{8x - 9}{x - 7}$

6) $\frac{8x + 5}{2}$

7) $\frac{7 + x}{x}$

8) $\frac{x}{x^2 - 1}$

9) $\frac{3x}{x^2 + 4}$

10) $\frac{a + 2}{a^2 - 7a + 12}$

11) $\frac{2y}{y(2y - 6)}$

ساده کردن یک عبارت گویا: صورت و مخرج کسر را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری می نویسیم و سپس عبارتهای مساوی 1 از صورت و مخرج با هم ساده می کنیم.

مثال): عبارتهای گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید؟

1) $\frac{3 - x}{x^2 - 5x + 6}$

$$2) \frac{6x^2 + 12x}{12x + 24}$$

$$3) \frac{24x^2}{12x^2 - 6x}$$

$$4) \frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y}$$

$$5) \frac{1 - t^4}{t^2 + 1}$$

$$6) \frac{16x^2 - 9y^2}{8x - 6y}$$

$$7) \frac{6xy}{3x^2}$$

$$8) \frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 1}$$

$$9) \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 4}$$

درس دوم: محاسبات عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا: ضرب و تقسیم عبارتهای گویا دقیقا همانند ضرب و تقسیم اعداد گویا می باشد و با همان قوانین انجام می شود لذا برای ضرب عبارتهای گویا صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad . \quad (b \neq 0 \ . \ d \neq 0)$$

برای تقسیم نیز عبارت گویای اول را در معکوس عبارت گویای دومی ضرب می کنیم.

مثال) ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید؟

$$1) \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6} \times \frac{x + 3}{x + 4} =$$

$$2) \frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} =$$

$$3) \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} \times \frac{x - 3}{x} =$$

$$4) \frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{7 - m}{m^2 - 1} =$$

$$5) \frac{2x + 6}{x^3} \div \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2} =$$

$$6) \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18} =$$

$$7) \frac{x^2 - 9}{x + 2} \times \frac{2x + 4}{x + 3} =$$

$$8) \frac{1 - c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2} =$$

$$9) \frac{x + 3}{x} \div \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2} =$$

$$10) \frac{3a}{a + 1} \times \frac{a^2 - 1}{6a^2 + 3a} =$$

$$11) \frac{x+5}{x^2} \times \frac{x^3}{x^2+7x+10} =$$

$$12) \frac{15x^2}{4xy} \div \frac{25x^3}{16y^4} =$$

جمع و تفریق عبارتهای گویا: همانند جمع و تفریق اعداد گویا عمل می‌کنیم بدین صورت ک. م. م. مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

مثال) جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$$1) \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} =$$

$$2) \frac{3x}{2x+6} + \frac{x}{x+3} =$$

$$3) \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} =$$

$$4) \frac{x}{x-y} - 1 =$$

$$5) \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} =$$

$$6) \frac{8}{x} + \frac{5}{x} =$$

$$7) \frac{3x}{2x+6} + \frac{x}{x+3} =$$

$$8) \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x} =$$

$$9) \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x + 4}{x + 2} =$$

$$10) \frac{a}{a^2 + 3a + 2} + \frac{4}{a + 2} =$$

$$11) \frac{3x + 2}{5 + x} + \frac{2x - 4}{x + 5} =$$

$$12) \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9} - \frac{5x - 10}{x + 3} =$$

عبارتهای گویای مرکب: به عبارتهای گویای که صورت و مخرج آن خود یک عبارت گویا است، عبارت مرکب می گویند.

ساده کردن عبارتهای گویای مرکب: برای ساده کردن عبارتهای مرکب میتوان صورت و مخرج را به طور جداگانه ساده کرد و سپس آن ها را در هم تقسیم نمود و یا اینکه از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب و مخالف صفر ضرب کرد.

مثال): حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$1) \frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{18}{x^2}}{1 + \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2}} =$$

$$2) \frac{1 + \frac{x}{x^2 - y^2}}{1 - \frac{y}{x - y}} =$$

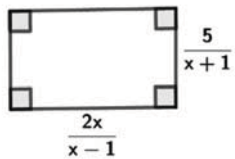
$$3) \frac{\frac{x}{x+4} - \frac{4}{x-4}}{\frac{4}{x+4} - \frac{x}{x-4}}$$

$$4) \frac{1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2}}{b - \frac{b}{b-a}}$$

$$5) \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}{1 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x}}$$

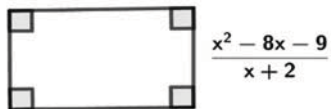
$$6) \frac{\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3}}{\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2-9}}$$

مثال): مساحت و محیط مستطیل زیر را حساب کنید؟



مثال): مساحت یک مستطیل بر حسب cm به صورت $2m^2 - 4m + 2$ و عرض آن $m - 1$ می باشد طول این مستطیل را بر حسب m به دست آورید.

مثال): طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید. (مساحت مستطیل $x^2 - 81$ است).



درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها

الف) تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای: از قوانین ساده کردن کسر ها و قوانین توان ها استفاده می کنیم.

مثال): حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$1) \frac{21x^4y^2z}{-7x^2yz} =$$

$$2) \frac{6x^4y^5z}{12x^2y^6z^2} =$$

ب) تقسیم چند جمله ای به یک جمله ای: تک تک جملات صورت را به مخرج تقسیم می کنیم.

مثال): حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

$$1) \frac{8m^3 + 6m^2 + m}{2m}$$

$$2) \frac{15x^4y + 25x^2y^2 - 30xy^3}{5xy}$$

$$3) \frac{8x^4y^2 - 2x^3y^3 + 6xy}{-4x^2y^2}$$

$$4) \frac{24x^3y^2z - 20x^2y^3z + 14x^2z^3}{15x^3y^3z^3}$$

پ) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای:

مرحله اول: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد از بالاترین توان به کمترین توان متغیر می نویسیم.

مرحله دوم: اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم .

مرحله سوم: خارج قسمت به دست آمده در مرحله قبل را در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل را زیر مقسوم می نویسیم و کم می کنیم. (در واقع عبارت دومی را قرینه می کنیم.)

مرحله چهارم: چند جمله ای به دست آمده را مانند یک مقسوم علیه جدید می گیریم و مرحله دوم و سوم را تکرار می کنیم. این عمل را آنقدر تکرار می کنیم تا درجه عبارت باقیمانده از مقسوم علیه کمتر باشد.

مثال): حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

1) $x^2 + 3x - 2 \mid \frac{x-1}{x-1}$

2) $x^3 - 27 \mid \frac{x-3}{x-3}$

3) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \mid \frac{x+3}{x+3}$

4) $3x + x^2 + 4 \mid \frac{x+2}{x+2}$

5) $6x^2 + 7x - 24 \mid \frac{2x-3}{2x-3}$

6) $x^2 + 7x + 11 \mid \frac{x-2}{x-2}$

7) $-x^3 + 8x - 12 \mid \frac{x+6}{x+6}$

8) $4x^2 + 6x + 11 \mid \frac{2x-1}{2x-1}$

9) $8x^2 - 10x + 9 \mid \frac{4x+3}{4x+3}$

10) $-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \mid \frac{1-x^3}{1-x^3}$

11) $x^3 + 2x - 5 \mid x-1$

12) $2x^3 - 4x^2 + 2x \mid x-1$

مثال): اگر خارج تقسیم $x^2 - 7x + b$ بر $x + a$ برابر $x - 2$ و باقیمانده مساوی 5 باشد، مقادیر a و b را بیابید.

مثال): مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $6x^3 - 5x^2 - x - k$ بر $2x - 1$ بخش پذیر باشد.

مثال): به ازای چه مقداری از k چند جمله ای $x^3 + 2x^4 - x + k - 1$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است؟

نمونه سوالات هماهنگ استانها (فصل هفتم)

۱) عبارت های زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

1) $\frac{5x - 7}{2 - 3x}$

2) $\frac{3x}{4x - 8}$

3) $\frac{x + 7}{x - 2}$

۲) حاصل عبارتهای زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید؟

$$1) \frac{m^2 - 16}{m + 4}$$

$$2) \frac{a}{a + b} + \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$3) \frac{x^2 - 9}{x(x + 3)}$$

$$4) \frac{2x}{6x^2 + 8x} + \frac{5}{3x + 4}$$

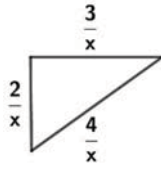
$$5) \frac{x - 3}{x^2 - 7x + 12} \times \frac{x - 4}{2x + 5}$$

$$6) \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18x}$$

$$7) \frac{2x + 6}{5 - x} \div \frac{x + 3}{x - 5}$$

$$8) \frac{a^2 - a - 6}{a - 3} \div \frac{a + 2}{a + 3}$$

۳) رابطه ای بنویسید که محیط شکل زیر را بر حسب x بیان کند.



۴) خارج قسمت و باقیمانده تقسیم های زیر را محاسبه نمایید؟

1) $4x^2 - x + 5 \mid x+1$

2) $2x^2 - 7x - 15 \mid x-5$

2) $x^2 + 7x + 4 \mid x+2$

4) $2x^2 - 7x - 17 \mid x-5$

5) $x^2 + 5x - 14 \mid x-2$

6) $-x^2 + 8x - 12 \mid x+2$

7) $2x^2 - 7x - 15 \mid x-5$

۵) حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید؟

1) $\frac{3x}{x-2} - \frac{4x-1}{x-2}$

$$2) \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-1} =$$

$$3) \frac{x-2}{2x} - \frac{x}{x+2} =$$

$$4) \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} =$$

$$5) \frac{5}{x(x+1)} - \frac{x}{x+1} =$$

۶) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید؟

(1) $-\frac{5}{\sqrt{x}}$ یک عبارت گویا است.

(2) - درجه عبارت $x^2 + 2x^3 + 4x$ نسبت به x مساوی 4 است.

(3) - عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ با عبارت $\frac{zx+y}{t}$ برابر است.

(4) - ساده شدن عبارت $\frac{ax+a}{a}$ برابر است با $x+a$.

(5) - حاصل $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ برابر با $\frac{a^2-b^2}{ab}$ است.

۷) در جای خالی عدد یا کلمه مناسب قرار دهید؟

(1) - عبارت $\frac{x+7}{x-2}$ به ازای x مساوی تعریف نشده است.

(2) - درجه عبارت $7x^2y^3 - 6x^2y$ نسبت به متغیرهای x و y برابر است.

(3) - عبارت گویای $\frac{x}{x-9}$ به ازای تعریف نشده است.

(4) - ساده شده عبارت $\frac{2-x}{x-2}$ مساوی است.

(5) - عبارت $\frac{-8x}{2x+6}$ به ازای x برابر با تعریف نشده است.

(6) - درجه عبارت $\frac{1}{2}x^2y^2 + 3xy^2 - 4$ نسبت به x و y برابر است.

(7) - درجه ی عبارت $x^7 + 5x^2y - 4x^3y^3$ نسبت به همه ی متغیرها است.

(8) - عبارت گویای $\frac{3x}{x+5}$ به ازای عدد تعریف نشده است.

فصل هشتم: حجم و مساحت

درس اول: حجم و مساحت کره

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{منشوری} \\ 2 - \text{کروی} \\ 3 - \text{هرمی} \end{array} \right\} \text{انواع حجم های هندسی (سال هفتم)}$$

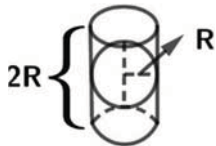
دایره: به مجموعه ی نقاطی از صفحه که فاصله ی همه آنها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک اندازه ثابت باشند، دایره می گویند
این اندازه ثابت، شعاع دایره نامیده می شود (شعاع دایره = R)

کره: به مجموعه نقاطی از فضا که فاصله همه آنها از نقطه ی به نام مرکز به یک اندازه ثابت باشند، کره

می گویند. این فاصله ثابت، شعاع کره نامیده می شود. (شعاع کره = R)

کره محاط شده و استوانه محیط شده: اگر کره ای را درون استوانه طوری قرار دهیم که کره از اطراف بالا و پایین براستوانه مماس شود، گوئیم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز به کره محیط شده است.

تذکر: حجم 3 تا نیمکره محاط شده در استوانه برابر حجم استوانه است. یعنی



$$\text{حجم 3 تا نیمکره} = \text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

با توجه به اینکه حجم 3 تا نیمکره برابر حجم استوانه بود داریم:

$$\text{حجم نیمکره} = \frac{1}{3} (\text{حجم استوانه}) = \frac{1}{3} (2\pi R^3) = \frac{2}{3} \pi R^3$$

در نتیجه

$$\text{حجم کره} = 2 (\text{حجم نیمکره}) = 2 \times \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{و} \quad \text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

مثال: حجم نیمکره به قطر 10cm سانتی متر را به دست آورید؟

مثال: حجم کره به شعاع 3cm سانتی متر را به دست آورید؟

مثال: کره ای در استوانه ای به قطر و ارتفاع 20cm محاط شده است؟

الف) حجم کره را به دست آورید؟

ب) حجم استوانه را به دست آورید؟

پ) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید؟

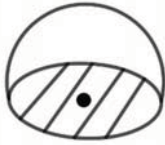
مساحت کره: مساحت کره ای به شعاع R برابر است با:

$$S = 4\pi R^2 \qquad \text{مساحت نیم کره} = 2\pi R^2$$

مثال): مساحت کره به شعاع 3 سانتی متر را حساب کنید؟

مثال): مساحت نیم کره به قطر 10cm سانتی متر را حساب کنید؟

مثال): مساحت قسمت رنگی 12.56 سانتی متر مربع است. مساحت رویه نیمکره را به دست آورید؟



مثال): نیم کره ای به شعاع 5cm سانتی متر را از آب پر کرده و در استوانه ای به شعاع قاعده 5cm سانتی متر می ریزیم ارتفاع آب را محاسبه کنید؟

مثال): شعاع سیاره کروی شکل تقریباً 12000000 کیلو متر است شعاع را به صورت نماد علمی برحسب کیلومتر بنویسید و مساحت سیاره را حساب کنید؟

مثال): استوانه ای با شعاع قاعده 2 سانتی متر و ارتفاع 3 سانتی متر داریم اگر نیم کره ای به شعاع 1 سانتی متر داشته باشیم، چند بار نیم کره را از آب پر کنیم تا ظرف استوانه شکل پر شود؟

مثال): حجم کره ای $\frac{32}{3}\pi$ است مساحت کره را به دست آورند؟

مثال): حجم استوانه ای 600 سانتی متر مکعب است حجم کره ای که در آن محاط شده چقدر است؟

مثال): عدد مساحت کره ای سه برابر عدد حجم آن است مساحت کره را محاسبه کنید؟

درس دوم: حجم هرم و مخروط:

هرم: هرم شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین (چند ضلعی محدب) به نام قاعده است

هرم منتظم: اگر قاعده هرم یک چند ضلعی و وجه های جانبی آن هم نهشت باشند، هرم را منتظم میگوییم.

اجزا هرم:

راس هرم: نقطه خارج از چند ضلعی (قاعده) را راس هرم می گویند.

ارتفاع هرم: به فاصله ی راس هرم تا قاعده ارتفاع هرم گفته می شود.

قاعده هرم: قاعده هرم یک چند ضلعی است که می تواند منتظم باشد یا منتظم نباشد.

وجه هرم: هر یک از مثلث هایی که بدنه هرم را می پوشانند ، یک وجه جانبی می نامند.

یال هرم: محل تقاطع هر دو وجه را یال هرم می گویند.

سهم هرم: ارتفاع مثلث های جانبی را سهم هرم می گویند.

نکته: وجه جانبی هم همگی مثلث شکل هستند.

نکته: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند ، حجم های آن ها با هم برابر است .

حجم هرم:

کلامی ارتفاع \times مساحت قاعده $\times \frac{1}{3} =$ حجم هرم

$$\text{حجم هرم} = V = \frac{1}{3}sh$$

مثال): حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع 5cm و ارتفاع هرم 9cm را حساب کنید؟

مثال): هرمی دارای قاعده مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه 8 و 4 است . اگر ارتفاع هرم 9cm سانتی متر باشد، حجم هرم را به دست آورید؟

تذکر: واحد حجم متر مکعب (m^3) یا سانتی متر مکعب cm^3 است؟

مخروط: مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز دایره است.

حجم مخروط:

$$\Rightarrow \text{حجم استوانه} = s \cdot h \quad . \quad \text{حجم استوانه} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \cdot s \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

مثال: حجم مخروط به شعاع قاعده 2cm و ارتفاع 6cm را حساب کنید؟

نکته: از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن مخروط به دست آورید. (ارتفاع مخروط طول ضلعی است که حول آن مثلث را دوران دادیم و شعاع قاعده طول ضلع قائمه دیگر است)

مثال: حجم مخروطی را حساب کنید که از دوران مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه 3 و 4 حول ضلع 4 به دست آمده است.

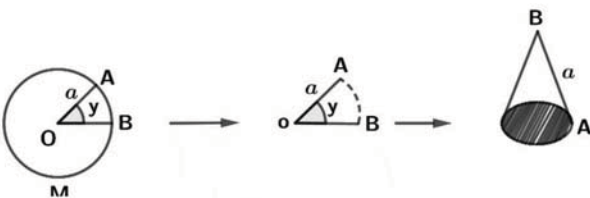
کار در کلاس صفحه ی 139 کتاب

برای ساختن مخروط به روش زیر عمل می کنیم اگر دایره ای به شعاع a داشته باشیم و از آن قطعی با زاویه دلخواه جدا می کنیم و سپس دو شعاع آن را به هم می چسبانیم یک مخروط ساخته می شود.

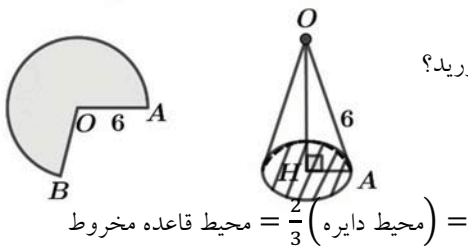
شعاع دایره $= a =$ مولد مخروط

طول کمان $\widehat{AB} =$ محیط قاعده مخروط

مساحت قطاع بریده شده $=$ مساحت جانبی مخروط



مثال: حجم حاصل از $\frac{2}{3}$ سطح دایره ای به شعاع 6 که به شکل مخروط در آمده است را به دست آورید؟



$$= (\text{محیط دایره}) \cdot \frac{2}{3} = \text{محیط قاعده مخروط}$$

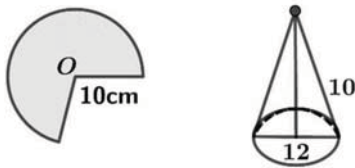
$$= \frac{\text{محیط قاعده مخروط}}{\pi} = \text{قطر قاعده مخروط}$$

$$\text{شعاع قاعده مخروط} = \frac{\text{قطر قاعده مخروط}}{2}$$

فیثاغورس: ارتفاع

$$V = \frac{1}{3} \cdot s \cdot h$$

مثال کتاب: علی با قسمتی از دایره ای به شعاع 10cm ، مخروطی به قطر قاعده 12cm ساخته است حجم این مخروط را به دست آورید؟



مثال: قاعده منشور و هرمی همنهشت هستند و ارتفاع یکسان دارند.

الف) حجم هرم چند برابر حجم منشور است؟

ب) حجم منشور چند برابر حجم هرم است؟

نکته: اگر قاعده هرم و منشوری هم نهشت باشند و ارتفاع آن ها یکسان باشد داریم:

$$\text{حجم منشور} = \frac{1}{3} (\text{حجم هرم})$$

مثال: شعاع قاعده مخروط و استوانه ای برابر 10 سانتی متر و ارتفاع هر دو 12 سانتی متر است. حجم مخروط و استوانه را به دست آورید و

آن ها را مقایسه کنید؟

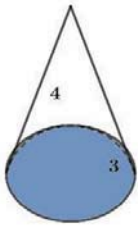
مثال: با قسمتی از دایره به شعاع 15 سانتی متر مخروطی به قطر قاعده 18 سانتی متر ساخته ایم. حجم مخروط را حساب کنید.

مثال: مخروطی به شعاع 10 سانتی متر و ارتفاع 15 سانتی متر را پر آب کرده داخل استوانه ای به شعاع قاعده 10 سانتی متر و ارتفاع 15

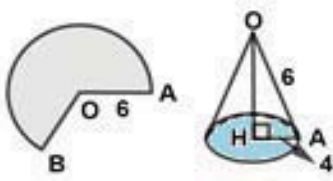
سانتی متر می ریزیم. ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟

مثال: با $\frac{3}{5}$ دایره ای، مخروطی با مولد 30 ساخته ایم حجم مخروط را حساب کنید؟

مثال): حجم مخروطی را حساب کنید که از دوران مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه 3 و 4 حول ضلع 4 به دست آمده است.



مثال): حجم حاصل از $\frac{2}{3}$ سطح دایره ای به شعاع 6 که به شکل مخروط در آمده را به دست آورید؟



$$\frac{2}{3}(\text{محیط دایره}) = \frac{2}{3}(2\pi r) = \frac{2}{3}(2 \times 3.14 \times 6) = 25.12 \text{ محیط قاعده ی مخروط}$$

$$25.12 \div 3.14 = 8 \text{ قطر قاعده و } 8 \div 2 = 4 \text{ شعاع قاعده ی مخروط}$$

$$(\text{ارتفاع مخروط})^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \text{ و ارتفاع } = \sqrt{20} \approx 4.5 \text{ cm} \Rightarrow \overline{OH} \approx 4.5$$

$$V = \frac{1}{3}s \cdot h \approx \frac{1}{3} \times (4 \times 4 \times 3.14) \times 4.5 = 75.36$$

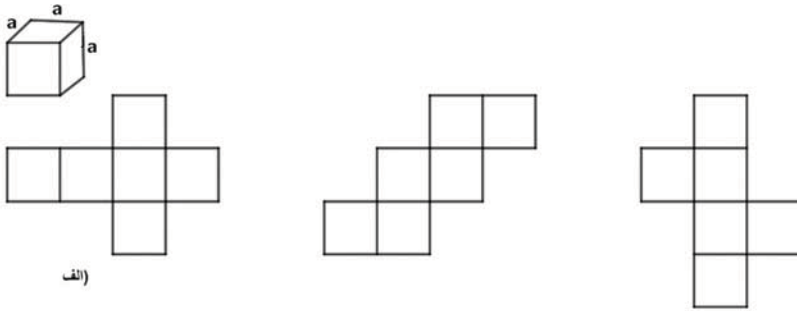
درس سوم: سطح و حجم

در دوره دبستان با گسترده کردن مکعب مربع و مکعب مستطیل و در کلاس هفتم با گسترده کردن انواع منشورها آشنا شدید و با توجه به اندازه ها، مساحت جانبی و مساحت کل آنها را به دست می آوردید.

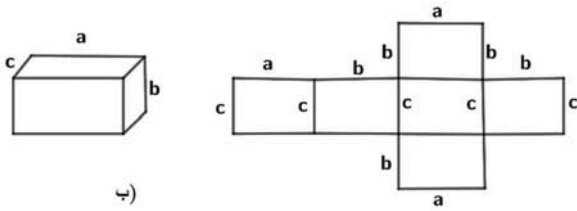
مثال 1: گسترده ی اشکال هندسی زیر را رسم کنید؟

شکل مقابل شش وجهی منتظم (مکعب مربع) است که شش مربع هم اندازه درست شده و گسترده ی آن را می توان به حالت های مختلف

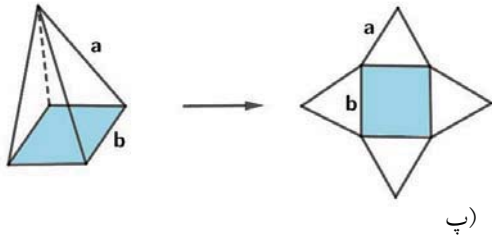
نشان داد و در اینجا سه حالت نمایش داده شده است؟



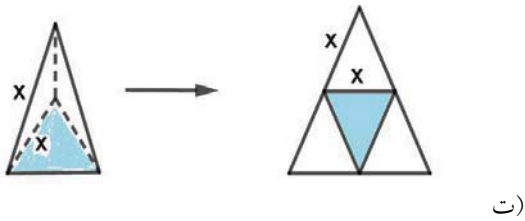
شکل مقابل مکعب مستطیل است و گسترده ی آن رسم شده است؟



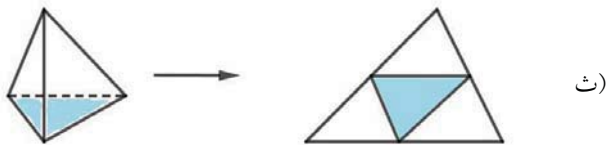
گسترده ی هرم مربع القاعده (پنج وجهی)



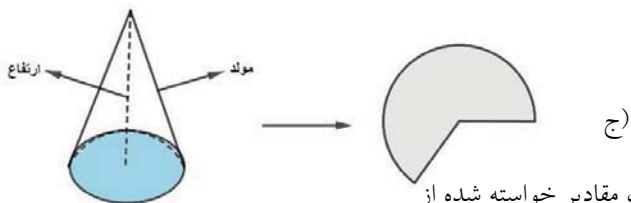
مثال) گسترده ی هرم مثلث القاعده (چهار وجهی منتظم)



مثال): گسترده ی هرم مثلث القاعده (چهار وجهی)

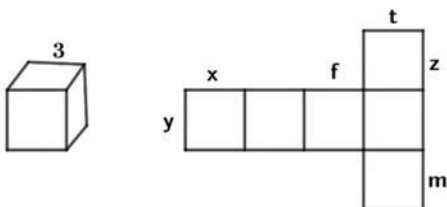


مثال): گسترده ی جانبی مخروط:



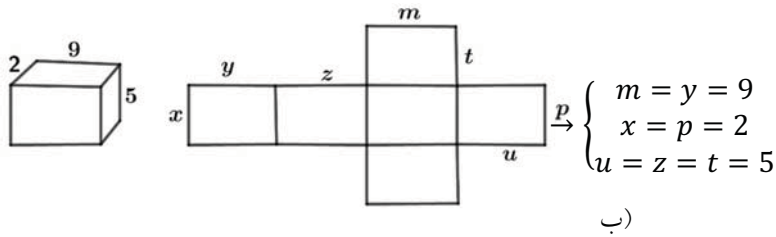
مثال): با توجه به اندازه های مشخص شده بر روی ابعاد حجم های فضایی، مقادیر خواسته شده از

اندازه ی اضلاع گسترده آنها را مشخص کنید؟

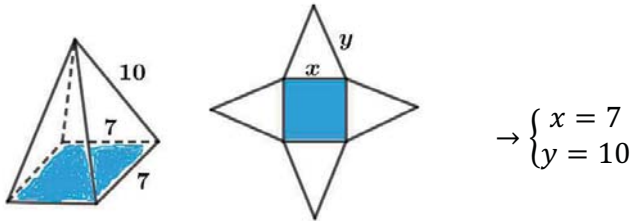


$$\rightarrow x = y = f = t = z = m = 3$$

(الف)

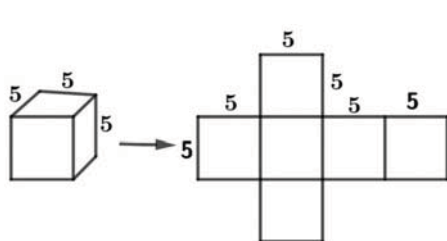


(ب)



(پ)

مثال) پیدا کردن سطح کل یک جسم می توانیم ابتدا آن را گسترده کرده و سپس مساحت تک تک اجزا آن را پیدا می کنیم و با هم جمع کنیم به عنوان مثال برای پیدا کردن سطح کل یک مکعب به ضلع 5 ابتدا مکعب را گسترده می کنیم. گسترده ی مکعب شامل شش مربع هم اندازه است. چون ابعاد همه ی مربع ها با هم برابر است. پس اگر مساحت یک مربع را پیدا کرده و در عدد 6 (تعداد مربع ها) ضرب می کنیم، مساحت کل مکعب به دست می آید.



$$\text{مساحت یک مربع} = 5 \times 5 = 25$$

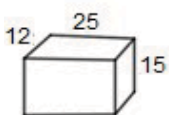
$$\text{مساحت کل مکعب} = 6 \times 25 = 150$$

به طور کلی مساحت کل مکعب از رابطه ی مقابل به دست می آید:

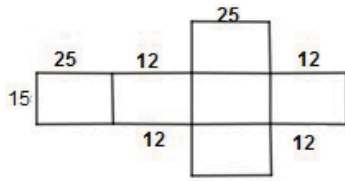
$$S = 6a^2 \quad (a = \text{اندازه ی یک ضلع})$$

مثال): مساحت کل مکعب مستطیل با ابعاد 25، 15 و 10 سانتی متر را به دو روش (از طریق فرمول و شکل گسترده ها به دست آورید.

روش اول: ابتدا گسترده ی مکعب مستطیل را رسم می کنیم، سپس هر کدام از اجزا گسترده را به دست می آوریم و بعد همه ی آنها را با هم جمع می کنیم تا مساحت کل مکعب مستطیل به دست آید.



$$\text{مساحت بدنه} = (25 + 12 + 25 + 12) \times 15 = 1110 \text{ cm}^2$$



$$\text{مساحت دو قاعده} = (12 \times 25) \times 2 = 600 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت کل} = 1110 + 600 = 1710 \text{ cm}^2$$

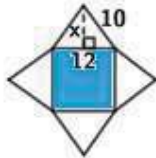
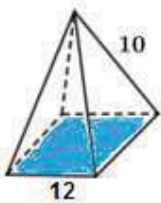
روش دوم: استفاده از فرمول: مساحت کل مکعب مستطیلی با ابعاد a ، b و a از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\text{مساحت کل مکعب مستطیل} = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = S = 2(a \times b + a \times c + b \times c)$$

$$\text{بنابراین:} \quad \text{مساحت کل} = S = 2(25 \times 12 + 25 \times 15 + 12 \times 15) = 2 \times 855 = 1710$$

اکنون برای پیدا کردن مساحت کل اشکال هرمی نیز آنها را گسترده می کنیم تا راحت تر بتوانیم مساحت سطوح آنها را حساب کنیم.

مثال: سطح کل هرم مربع القاعده ی منتظم به ضلع قاعده ی 12 و یال جانبی 10 را حساب کنید.



گسترده ی هرم را رسم می کنیم. مساحت یکی از مثلث ها ی تشکیل دهنده ی هرم را حساب کرده و چهار برابر می کنیم با استفاده از رابطه ی فیثاغورس داریم.

$$x^2 = 10^2 - 6^2 \rightarrow x^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{12 \times 8}{2} = 48 \quad \text{و} \quad \text{مساحت جانبی} = 48 \times 4 = 192$$

$$\text{مساحت کل} = 192 + \text{مساحت مربع} \rightarrow \text{مساحت کل} = 192 + 144 = 336 \text{ cm}^2$$

به طور کلی دو روش برای به دست آوردن مساحت کل هرم ها وجود دارد.

روش اول: گسترده سازی شکل و پیدا کردن مجموع مساحت های هر یک از سطوح

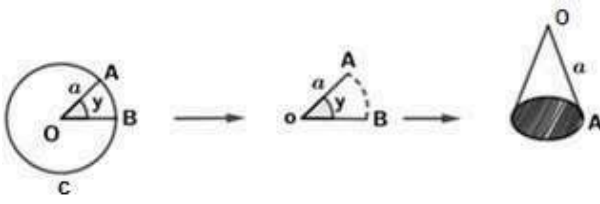
روش دوم: استفاده از فرمول: مجموع مساحت های مثلث های جانبی = مساحت جانبی هرم

$$\text{مساحت جانبی هرم منتظم} = \frac{\text{سهم} \times \text{محیط قاعده}}{2}$$

$$\text{مساحت قاعده ی هرم} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل هرم}$$

روش بدست آوردن طول قسمتی از کمان دایره

همان طور که در قسمت حجم بیان شد، برای ساختن یک مخروط می توانستیم قسمتی از دایره (قطاعی از دایره) را با نسبتی معین (مثلاً $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ...) یا زاویه ای مشخص جدا کنیم و سپس دو شعاع قطاع جدا شده یا قطاع باقی مانده را به هم بچسبانیم تا یک مخروط بسازیم؟



مولد مخروط = شعاع دایره ی اولیه $a =$

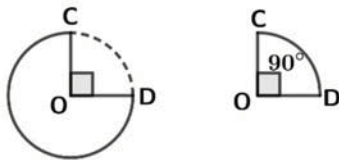
طول \widehat{AB} از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{2\pi a}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB}}{y^\circ} \Rightarrow \widehat{AB} \text{ کمان} = \frac{2\pi a y^\circ}{360^\circ}$$

تذکر: محیط دایره قاعده ی مخروط برابر با طول کمان \widehat{AB} یعنی همان کمانی که مقابل زاویه y می باشد.

تذکر: مساحت جانبی مخروط برابر مساحت قطاع بریده شده است.

مثال) $\frac{1}{4}$ دایره ای به شعاع 10 سانتیمتر را برداشته ایم و با کمک آن یک مخروط درست کرده ایم طول کمان CD را به دست آورید. شعاع قاعده مخروط را به دست آورید؟



$$\text{طول کمان } \widehat{CD} \text{ : روش اول} = \frac{1}{4} (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{4} (2\pi R) = \frac{1}{4} (2 \times 3.14 \times 10) = 15.7 \text{ cm}$$

$$\text{روش دوم: } \frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\widehat{CD}}{\theta_1} \Rightarrow \frac{2 \times 3.14 \times 10}{360^\circ} = \frac{\widehat{CD}}{90^\circ} \Rightarrow \widehat{CD} = \frac{2 \times 3.14 \times 10 \times 90^\circ}{360^\circ} = 15.7 \text{ cm}$$

از آنجا که محیط قاعده ی مخروط = طول کمان CD است $\Leftarrow \widehat{CD} = 15.7 \text{ cm}$ محیط قاعده

برای بدست آوردن شعاع قاعده باید از فرمول مقابل استفاده کنیم:

$$\text{قطر} = \frac{\text{محیط قاعده}}{3.14} = \frac{15.7}{3.14} = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

دوران سطح

الف) استوانه: با دوران دادن یک مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه، حاصل می شود.



دوران حول عرض:

ارتفاع استوانه = عرض مستطیل

شعاع قاعده ی استوانه = طول مستطیل

ارتفاع \times مساحت قاعده (دایره) = حجم

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi b^2 a$$

دوران حول طول:



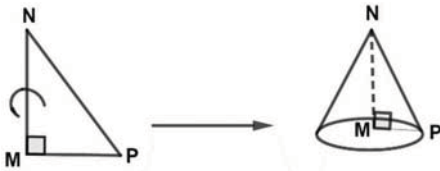
ارتفاع استوانه = طول مستطیل

شعاع قاعده ی استوانه = عرض مستطیل

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi a^2 b$$

ارتفاع × مساحت قاعده (دایره) = حجم

نکته: حجم حاصل از دوران مستطیل حول عرض آن، بیشتر از حجم حاصل از دوران مستطیل حول طول آن می باشد، بنابراین: $V_1 > V_2$

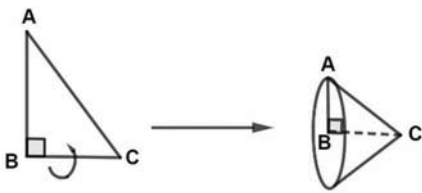


ب) مخروط: از دوران 360° مثلث قائم الزاویه حول هر ضلع قائمه آن، مخروط حاصل می شود.

$$r = \overline{PM} = \text{شعاع قاعده} = a$$

$$h = \overline{MN} = \text{ارتفاع (حول ضلعی که دوران می دهیم)} = b$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \times b$$



$$r = \overline{AB} = \text{شعاع قاعده} = b$$

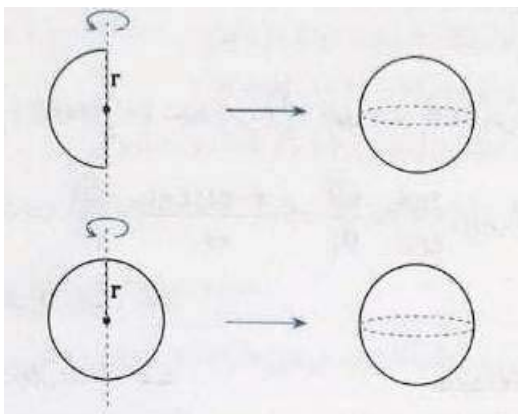
$$h = \overline{BC} = \text{ارتفاع (حول ضلعی که دوران می دهیم)} = a$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi b^2 a$$

نکته) حجم حاصل از دوران 360° مثلث قائم الزاویه حول ضلع کوچک تر بیشتر از حجم حاصل از دوران 360° مثلث قائم الزاویه حول ضلع

بزرگ تر می باشد، بنابراین: $V_1 > V_2$

پ) کره: از دوران 360° درجه ی یک نیم دایره با دوران 180 درجه ای یک دایره حول قطر آن کره به وجود می آید.



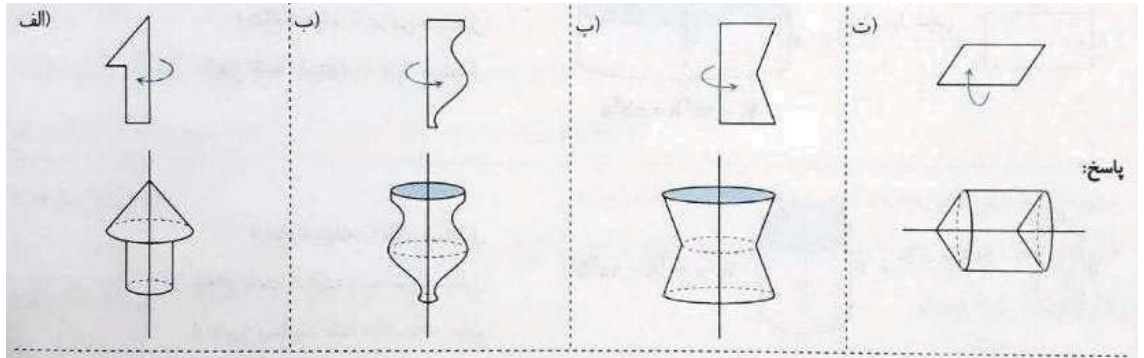
$$S = 4\pi r^2 = \text{مساحت کره به شعاع } (r)$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \text{حجم کره به شعاع } (r)$$

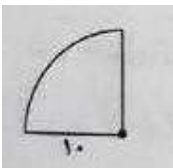
ت) نیمکره: از دوران 360° ربع دایره، حول شعاع آن، نیم کره حاصل می شود.



مثال 1: در هر شکل با توجه به محور دوران، حجم حاصل را مشخص کنید؟



مثال 2: حجم حاصل از دوران 360° یک ربع دایره به شعاع 10 سانتی متر را حول شعاع آن، پیدا کنید.



$$\text{حجم کره} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4(3.14)}{3} \approx 4187$$

چون از دوران ربع دایره، نیم کره حاصل می شود، پس:

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{\text{حجم کره}}{2} = \frac{4187}{2} \approx 2093.5$$

تذکره: نسبت حجم به سطح کل در مکعبی به ضلع a برابر با $\frac{1}{6}$ اندازه ی ضلع مکعب است.

$$\left. \begin{matrix} V = a^3 \\ S = 6a^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6} = \frac{1}{6}a$$

تذکره: نسبت حجم به سطح در کره برابر با $\frac{1}{3}$ شعاع کره است

$$\left. \begin{matrix} V = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ S = 4\pi r^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} = \frac{1}{3}r$$

تذکره: نسبت حجم به سطح کل در استوانه ای به شعاع a و ارتفاع a برابر است با $\frac{1}{4}$ اندازه ی شعاع یا ارتفاع آن (به شرط اینکه شعاع = ارتفاع

($a =$

$$\left. \begin{matrix} V = \pi r^2 h = \pi a^2 \times a = \pi a^3 \\ S = 2\pi r(h + r) = 2\pi a(a + a) = 2\pi a(2a) = 4\pi a^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{4}a$$

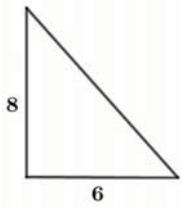
نمونه سوالات هماهنگ استانها (فصل هشتم)

۱) حجم هرمی که قاعده ی آن مستطیلی به ابعاد 5 و 6 سانتی متر و ارتفاع آن 10 سانتی متر است را محاسبه کنید؟

۲) قاعده ی یک هرم، مربعی به ضلع 7cm است. اگر ارتفاع هرم 12cm باشد، حجم هرم را به دست آورید؟

۳) اگر قطر یک کره برابر 12cm باشد، مساحت آن را به دست آورید؟

۴) مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع 6 و 8 سانتی متر را حول ضلعی که اندازه ی آن 8 سانتی متر می باشد دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



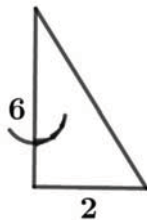
۵) مساحت کره ای به شعاع 7cm را به دست آورید؟

۶) می خواهیم یک نیمکره چوبی توپر را رنگ کنیم. اگر شعاع نیم کره 8cm باشد مساحت کل قسمت رنگ شده را به دست آورید؟

۷) نسبت حجم به سطح $\left(\frac{V}{S}\right)$ کره ای به شعاع 3 را بدست آورید؟

۸) حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی است به طول 7cm و عرض آن 3cm و ارتفاع آن 5cm باشد.

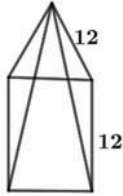
۹) حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه روبرو را به دست آورید.



(۱۰) حجم یک کره جغرافیایی به قطر 12cm سانتی متر را محاسبه کنید؟

(۱۱) حجم کره ای به شعاع 6 سانتی متر را به دست آورید؟

(۱۲) شکل زیر هرم منتظمی با قاعده مربع به ضلع 12 می باشد مساحت جانبی این هرم را به دست آورید؟



(۱۳) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید؟

- (1) - از دوران نیم دایره حول قطر آن یک کره به وجود می آید.
- (2) - اگر کره ای را با یک صفحه برش دهیم سطح بریده شده دایره است.
- (3) - اگر هر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آن ها برابرند.
- (4) - اگر شعاع کره ای 3 باشد حجم و مساحت کره، با هم برابر است.
- (5) - گنجایش مکعبی به ضلع 2 متر، هشت متر مکعب است.

(۱۴) در جای خالی عدد یا کلمه مناسب قرار دهید؟

- (1) - به فاصله راس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از راس بر قاعده وارد می شود هرم می گوئیم.
- (2) - با دوران دادن مستطیل حول ضلع آن به دست می آوریم.
- (3) - حجم کره ای به شعاع R از دستور (فرمول) به دست می آید.
- (4) - از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم اش به وجود می آید.
- (5) - از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم اش به دست می آید.
- (6) - مساحت کل یک مکعب به ضلع a برابر با است.
- (7) - حجم هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است.
- (8) - شکل مقابل گسترده ی یک است.
- (9) - اگر شعاع کره ای را دو برابر کنیم مساحت کره برابر

می شود.

