بسم الله الرحمن الرحیم

حل دو تمرین از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال چاپ جدید

در صفحات ۲۲۷ و ۲۳۰دو تمرین مطرح شده است که حل این دو تمرین کمی مشکل به نظر می رسد و احتمالا در چاپ جدیدکتاب انها حذف خواهند شد ولی حل این دو تمرین در زیر امده است

قبل از اینکه به حل این تمرین ها بپردازیم یک لم را مطرح می کنیم

لم : اگر $A > ۰$ یک عدد حقیقی باشد انگاه $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{A^{kx} - ۱}{A^{(k+۱)x} - ۱} = \dfrac{k}{k+۱}$

اثبات :

$$\lim \frac{A^{kx} - ۱}{A^{(k+۱)x} - ۱} = \lim \frac{\dfrac{A^{kx} - ۱}{x - ۰}}{\dfrac{A^{(k+۱)x} - ۱}{x - ۰}} = \frac{\left(A^{kx}\right)'\big|_{x=۰}}{\left(A^{(k+۱)x}\right)'\big|_{x=۰}} = \frac{kA^{kx} \ln A\big|_{x=۰}}{(k+۱)A^{(k+۱)x} \ln A\big|_{x=۰}} = \frac{k}{k+۱}$$

تمرین در کلاس صفحه ۲۲۷ :

۱) وقتی kافزایش می یابد یافتن مساحت زیر منحنی $y = x^k$ به مراتب مشکل و مشکل تر می گردد . در این مورد شاید تقسیم بازه به زیر بازه های مساوی کمتر کار ساز باشد . در عوض هرگاه طول بازه جزه را به نسبت یک دنباله هندسی اختیار کنیم ، کار محاسبه ساده تر خواهد شد مثلا اگر $b > a > ۰$و مراد محاسبه مساحت زیر منحنی محدود به $x = a$و $x = b$ بوده باشد قرار می دهیم $t = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{۱}{n}}$ و

$$x_۰ = a, x_۱ = at, x_۲ = at^۲, x_۳ = at^۳, \cdots, x_n = at^n = b$$

در این صورت طول بازه iام را (بر حسب t و البته aو b) حساب کنید و مانند مثال پیش دنباله s_nرا به دست اورده و حد گیری نمایید .

هرگاه جواب واحد سطح $A = \dfrac{b^{k+۱} - a^{k+۱}}{k+۱}$ را به دست اورده باشید از حل این مساله لذت ببرید ، در غیر این صورت محاسبات خود را یک بار دیگر چک کنید و یا از دبیر درس برای راهنمایی کمک بخواهید

در اینجا مساله را با دو روش حل کرده ایم (روش سومی نیز وجود دارد که ضرورتی برای بیان وجود ندارد) روش اول مبتنی بر راهنمایی کتاب و افراز نا منظم است و لی روش دوم از افراز منظم استفاده شده است

روش اول :

بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه نا منظم به صورت زیر افراز می کنیم

$$[a,b] = [a = x_۰ x_۱] \cup [x_۱, x_۲] \cup [x_۲, x_۳] \cup \ldots \cup [x_{n-۱}, x_n = b]$$

که در ان $x_i = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$ در این صورت

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x=\sum_{i=1}^{n}\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\right)^k (x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} a^k\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{ik}{n}}\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}-a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}}\right)=\sum_{i=1}^{n} a^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(i+1)k}{n}}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$$

$$=a^{k+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(i+1)k}{n}}=a^{k+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}n}\right)}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}}=a^{k+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}}$$

$$=\left(a^{k+1}-b^{k+1}\right)\times\left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}}\right)=\left(a^{k+1}-b^{k+1}\right)\left(\frac{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}-1\right)-\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}-1\right)}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}}\right)=\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\left(1-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}-1}\right)$$

در نتیجه

$$\lim s_n=\lim\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\left(1-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}-1}\right)=\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

$n\to\infty$

روش دوم:

بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه منظم به صورت زیر افراز می کنیم

$$[a,b]=[a=x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,x_3]\cup\ldots\cup[x_{n-1},x_n=b]$$

که در ان $\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$ ، با توجه به اینکه $0<x_{i-1}<x_i$ پس همواره داریم

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x_{i-1}^{\ k} \le x_i^{\ k-j} x_{i-1}^{\ j} \le x_j^{\ k} \qquad (\text{برای هر } 0 \le j \le k)$$

ولذا

$$(k+1)x_{i-1}^{\ k} \le \left(x_i^{\ k} + x_i^{\ k-1}x_{i-1} + x_i^{\ k-2}x_{i-1}^{\ 2} + \cdots + x_{i-1}^{\ k}\right) \le (k+1)x_{i-1}^{\ k}$$

و در نتیجه

$$x_{i-1}^{\ k} \le \frac{1}{k+1}\left(x_i^{\ k} + x_i^{\ k-1}x_{i-1} + x_i^{\ k-2}x_{i-1}^{\ 2} + \cdots + x_{i-1}^{\ k}\right) \le x_{i-1}^{\ k}$$

و بنابراین

$$x_{i-1} \le \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}\left(x_i^{\ k} + x_i^{\ k-1}x_{i-1} + x_i^{\ k-2}x_{i-1}^{\ 2} + \cdots + x_{i-1}^{\ k}\right)} \le x_i$$

حال $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$c_i = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}\left(x_i^{\ k} + x_i^{\ k-1}x_{i-1} + x_i^{\ k-2}x_{i-1}^{\ 2} + \cdots + x_{i-1}^{\ k}\right)}$$

در نتیجه

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c_i^{\ k}\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k+1}\left(x_i^{\ k} + x_i^{\ k-1}x_{i-1} + x_i^{\ k-2}x_{i-1}^{\ 2} + \cdots + x_{i-1}^{\ k}\right)(x_i - x_{i-1})$$

طبق اتحاد $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)$ داریم

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k+1}\left(x_i^{\ k+1} - x_{i-1}^{\ k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\left(x_n^{\ k+1} - x_0^{\ k+1}\right) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

مساله شماره ۱۳صفحه ۲۳۰

مساحت تحت منحنی به معادله $y = \frac{1}{x}$ را که بالای $y = 0$ و محدود به $x = a > 0$ و $x = b > a$ است به دست اورید

حل :

بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه نا منظم به صورت زیر افراز می کنیم

$$[a,b] = [a = x_0 x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n = b]$$

که در ان $x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$ در این صورت

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim s_n = \lim n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{k}}{k} = -\lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{k}-1}{k} = -\lim \frac{e^{k\ln\frac{a}{b}}-1}{k} = -\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$$

$$n\to\infty \qquad n\to\infty \qquad n\to\infty \qquad k\to 0$$

در قسمت اخر از مشتق تابع نمایی در صفحه ۱۶۲کتاب استفاده شده است

در اخر یک اشکال تایپی از کتاب در همین ص ۲۳۰ را اصلاح می کنم

تمرین ۱۱:

متن کتاب: ناحیه تحت $y = 4 - x^2 + 1$ بالای $y = 1$

تصحیح شده : ناحیه تحت $y = 4x - x^2 + 1$ بالای $y = 1$

موفق باشید : (پرویز رضایی استان فارس ۰۹۱۷۳۲۳۶۰۰۳)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا