



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی عمومی

چهارم تجربی

فصل ۱

احتمال

Shahryar Hossein Pour
09111430558

مسائل

۱- اگر ۴٪ زن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن که RH سرخ خون فردی منفی نباشد. $P(\text{دورن منفی}) = 0.14 \times 0.04 = 0.016$ برای دانستن RH منفی دورن لازم

$$RH = 1 - \frac{0.14}{0.14} = 0$$

۲- با مفروضات مسئله بالا مطلوب است احتمال آن که در خانواده‌ای دو فرزند از لحاظ خونی دارای یک نوع RH باشند.

$$0/19 \times 0/19 + 0/15 \times 0/15 =$$

$$\therefore \frac{1}{V_0} \delta V + \frac{1}{V_0} \delta V = \frac{1}{V_0} \delta V$$

۳- اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RH خون فرزندان را مستقل فرض کنید).

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B) = 0.19$$

۴- خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن که RH خون هر سه فرزند یکی

قانون قصم: هر کس فرزندش را بکشد

$$1 - \left(\frac{0.16 \times 0.16 \times 0.16}{0.16 \times 0.16 \times 0.16} + \frac{0.16 \times 0.16 \times 0.16}{0.16 \times 0.16 \times 0.16} \right) = 1 - (0.00064 + 0.00064) = 1 - 0.00128 = 0.99872$$

۵- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوب است احتمال آن که فرزند اول و دوم پسر و

فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

۶. چهار نفر از ۱۴ نفر $n(S) = 14$ و یک عضو $A = \{(\text{س}, \text{و}, \text{و}, \text{و})\}$ $P(A) = \frac{1}{14}$

۲- به دانش آموزی ۱۰ سؤال تستی چهار گزینه‌ای داده ایم. اگر او به سؤال‌ها به تصادف جواب

بدهد، احتمال آن که

الف- به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

ب- حداقل به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

الف) $P = \frac{1}{4}$ یک گزین درست است

$$\binom{10}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$- \binom{10}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

۳- در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد

چقدر است؟

$$\begin{aligned} & + - + - \frac{1}{4} - + - + \\ & \frac{\binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{4} = \frac{2 \times (0.25 + 0.25)}{4} \\ & = \frac{0.75}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

۴- احتمال آن که حسین دیر به مدرسه برسد ۰.۰۲ است، احتمال آن که در یک هفته دو روز دیر

برسد چقدر است؟

بر حسب قرارداد هفته، اوقات روز می‌سرم

$$\binom{7}{2} (0.02)^2 (0.98)^5 = 21 \times 0.0004 \times 0.9404 = 0.008$$

مسئله صفحه ۹

مسئله : کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن که کارمند مردی تحصیلات

دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد یعنی
اگر مرد باشد تحصیلات دانشگاهی داشته باشد

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{105}$$

مسئله صفحه ۱۴

مسئله : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

$$P(M) = P(A)P(M|A) + P(B)P(M|B)$$

$$= 0.52 \times 0.6 + 0.48 \times 0.68 = 0.6316$$

مسئله صفحه

مسئله: جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

X تعداد مهره‌های سفید است و ۳ مهره سفید نداریم

$X = 0, 1, 2, 3$
هیچ، یکی، دو، سه

	0	1	2	3
$P(n)$	$\frac{0}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{5}{70}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{4}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{2}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{1}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{3}}{\binom{8}{4}}$$

$$\binom{1}{4} = \frac{1!}{4!}$$

$$\frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{24}$$

مسائل صفحه ۱۹

مسائل

۱- نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذر ها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه احتمال آن که فقط ۱۸ دانه جوانه بزنند (جواب را ساده نکنید).

$$p = 0.9$$

$$P(X=k) = \binom{20}{k} (0.9)^k (0.1)^{20-k}$$

$$P(X=18) = \binom{20}{18} (0.9)^{18} \times (0.1)^2$$

فصل دوم

توابع معادلات

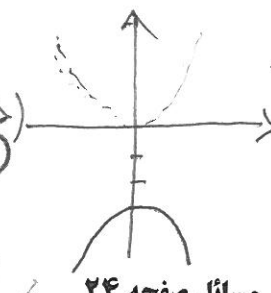
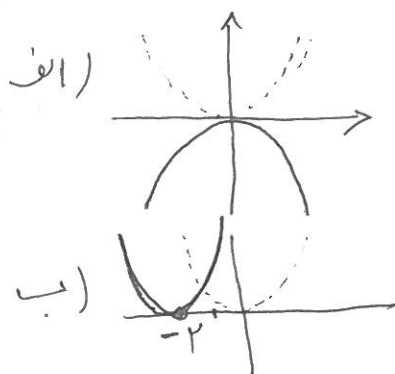
به روش انتقال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -x^2$

ب) $h(x) = (x+2)^2$

ج) $s(x) = (x-1)^2 + 2$

د) $t(x) = -x^2 - 3$



مسائل صفحه ۲۴

مسائل

۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3x^2 + 6x$

ب) $y = -2x^2 + 2x - 1$

ج) $y = 9x^2 + 6x + 1$

د) $y = (2-x)(4+x)$

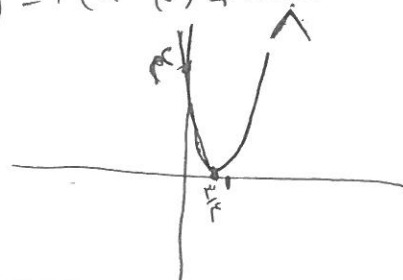
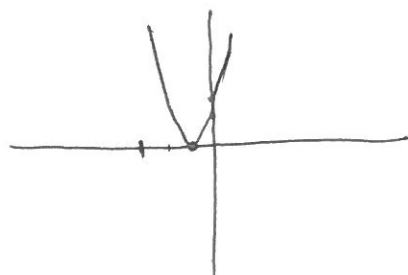
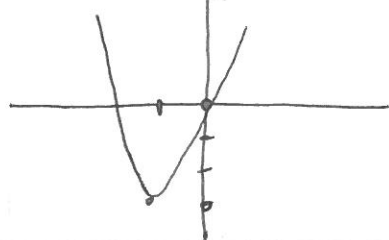
ه) $y = 2x^2 + 3$

و) $y = 2x^2 - 3x + 4$

الف) $y = 3(n^2 + 2n)$
 $y = 3(n^2 + 2n + 1 - 1)$
 $y = 3(n+1)^2 - 3$

ج) $y = 9n^2 + 4n + 1$
 $y = (3n+1)^2$
 $y = 9(x + \frac{1}{3})^2$

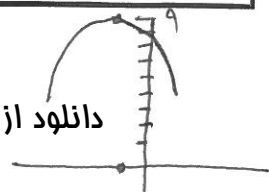
و) $y = 2n^2 - 3n + 4$
 $y = 2(x^2 - \frac{3}{2}x) + 4$
 $y = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}) + 4$
 $y = 2(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{8}$



گ) $y = (2-n)(2+n) = 4 - n^2$

$y = -(n^2 + 2n + 1 - 1) + 4 = -(n+1)^2 + 4$

دانلود از سایت ریاضی سرا



۲- شخصی که در لبه فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است تویی را با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است با $h = -5t^2 + 20t + 80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می خورد؟

ب) ماکزیم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیم ارتفاع می رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی گردد؟

د) دامنه این تابع را تعیین کنید.

$$h = -5(t^2 - 4t) + 80$$

$$\text{الف) } h=0 \rightarrow -5(t^2 - 4t) + 80 = 0$$

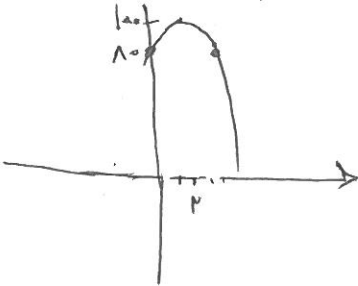
$$h = -5(t^2 - 4t + 4 - 4) + 80$$

$$(t-2)^2 = 20 \rightarrow t-2 = \pm\sqrt{20} \rightarrow t = \pm\sqrt{20} + 2$$

$$h = -5(t-2)^2 + 100$$

$$t = -\frac{20}{2 \times -5} = 2$$

$$h = -5(2)^2 + 20(2) + 80 = -20 + 40 + 80 = 100$$



$$t \geq 0 \quad (>)$$

۳- محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل

$$2(x+y) = 100$$

$$x+y = 50$$

$$y = 50 - x$$

$$S = xy = x(50-x) = -x^2 + 50x$$

$$x = -\frac{50}{2(-1)} = 25$$

$$y = 50 - x = 25$$

۴- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

$$f(x) = x + \frac{4}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2(\sqrt{x})\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4 \quad \text{ب) } f(x) = 4 \text{ کمترین مقدار}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = \frac{x^2 - 4x + 4 + 4x}{x} = \frac{(x-2)^2}{x} + 4 \geq 4$$

کمترین مقدار ۴

۱- معادله ای درجه دوم بنویسید که جواب های آن دو عدد زیر باشند.

الف) ۳ و ۴ ب) $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2}$ ج) $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$

الف) $(x-3)(x+4) = x^2 - x - 12 = 0$

ب) $(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}) = x^2 - (\frac{13}{6})x + 1 = 0 \rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$

ج) $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2}) = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 4 - 2 = x^2 - 4x + 2 = 0$

۲- مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب های معادله $-mx^2 + 3x + m - 1 = 0$

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

برابر ۲- شود.

$\frac{m-1}{-m} = -2 \rightarrow m-1 = 2m$
 $m = -1$

۳- مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب های معادله $2x^2 - 5x + a = 0$ معکوس یکدیگر باشند.

$\alpha, \frac{1}{\alpha}$

$\frac{c}{a} = \alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1 \rightarrow a = c$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$
 $\Delta = 25 - 16 = 9$
 $\frac{5 \pm 3}{4} < \frac{1}{2}$

۴- معادله سهمی را بنویسید که محور طول ها را در ۲ و -۲ و محور عرض ها را در ۲ قطع کند.

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

$y = ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} 2 = a(4) + b(2) + c = 0 \\ 2 = a(-2) + b(-2) + c = 0 \end{cases}$
 $4a + 2b = -c$
 $-2a - 2b = -c$

$\begin{cases} a(4) + b(2) + c = 0 \\ a(-2) + b(-2) + c = 0 \end{cases}$
 $4a + 2b = -c$
 $-2a - 2b = -c$

$\begin{cases} 2 = 0 + 0 + c \\ 2 = 0 + 0 + c \end{cases} \rightarrow c = 2$
 $\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -2a - 2b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases}$

۵- معادله درجه دوم بنویسید که جواب های آن معکوس جواب های $x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد.

$x_1 = \frac{1}{\alpha}$ $x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

$x_2 = \frac{1}{\beta}$ $x_1 x_2 = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-5}$

$(x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0) \times 5$
 $5x^2 - 3x - 1 = 0$

$y = a(x-2)(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x^2 - 4) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

$\begin{cases} 1 = a(-2)(2) \rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$

روش دوم

۱- عبارت های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

ب) $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

ج) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$

د) $|-(x-1)^2 - 3| = -(x-1)^2 - 3$

۲- اگر $1 < x < 3$ حاصل عبارت $|x-1| + |x-3|$ را به دست آورید.

$x-1 + 3-x = 2$

۳- در یک صفحه مختصات نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار

توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.

الف) $g(x) = |x+2|$

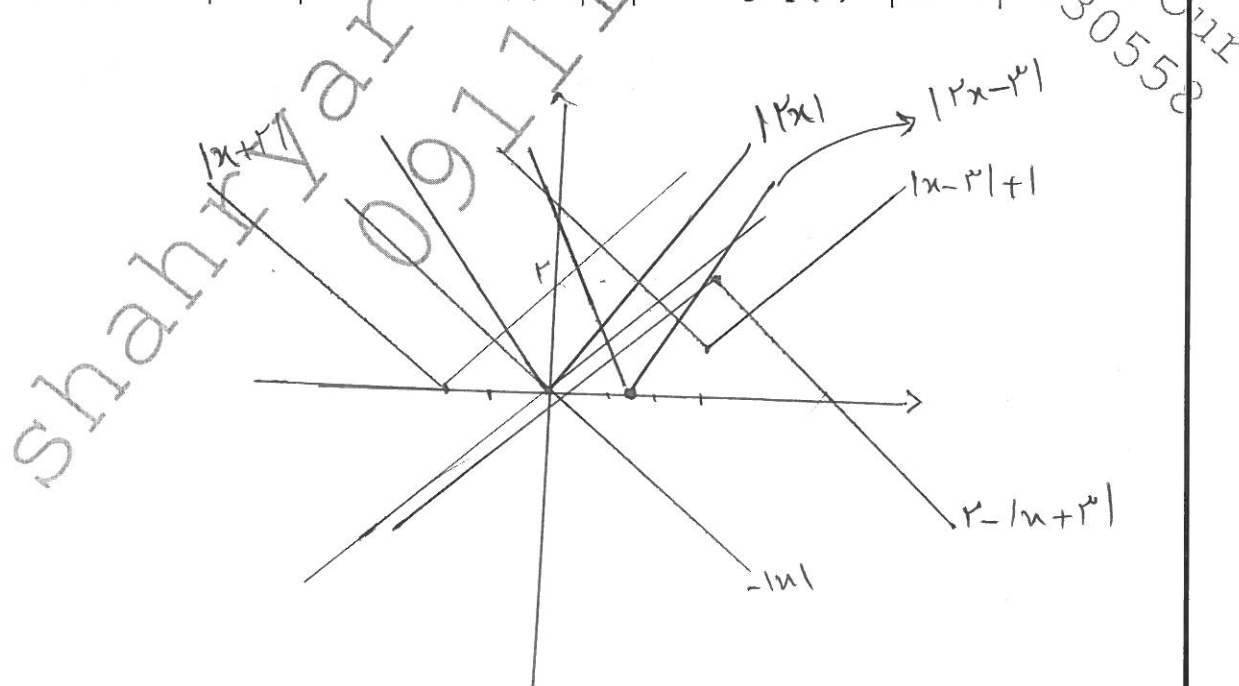
ب) $h(x) = -|x|$

ج) $k(x) = |x-3| + 1$

د) $s(x) = 2 - |x+3|$

ه) $t(x) = |2x|$

و) $p(x) = |2x-3|$



مسائل

۱- با استفاده از ویژگی ۲ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x داریم: $-|x| \leq x \leq |x|$

$$|x| \leq \underbrace{|x|}_{a \geq 0} \Rightarrow -|x| \leq |x| \leq |x|$$

۲- اگر $|x| > a$ و $a > 0$ نشان دهید $x < a$ یا $x > -a$ و برعکس.

$$(|x| > a) \rightarrow x^2 > a^2 \rightarrow (x-a)(x+a) > 0$$

$$x = a$$

$$x = -a$$

$$\begin{array}{c} -a \quad a \\ | \quad + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ x < -a \quad \vee \quad x > a \end{array}$$

۳- با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

و نتیجه بگیرید: $|x + y| \leq |x| + |y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$$\Rightarrow -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

۴- می توان نشان داد رابطه نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه

عدد حقیقی x_1 و x_2 و x_3 نشان دهید $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$

$$|x_1 + x_2 + x_3| = |(x_1 + x_2) + x_3| \leq |x_1 + x_2| + |x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

$$x < -a \rightarrow x + a < 0$$

$$x > a \rightarrow x - a > 0 \rightarrow (x + a)(x - a) > 0 \rightarrow x^2 - a^2 > 0 \rightarrow x^2 > a^2$$

۲- برعکس

$$\Rightarrow |x| > a$$

۵- معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $|2x-1|=3$

$$\begin{cases} 2x-1=3 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \\ 2x-1=-3 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

ب) $\frac{1}{|x+5|}=2 \rightarrow |x+5|=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x+5=\frac{1}{2} \rightarrow x=-\frac{9}{2} \\ x+5=-\frac{1}{2} \rightarrow x=-\frac{11}{2} \end{cases}$$

ج) $|x+\frac{2}{3}| \leq 1$

$$-1 \leq x+\frac{2}{3} \leq 1 \rightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

د) $\frac{3}{|x|} < 1 \rightarrow 3 < |x|$

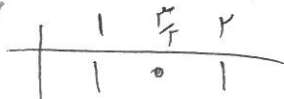
$$\begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$$

هـ) $|2x+1|=|x-2|$

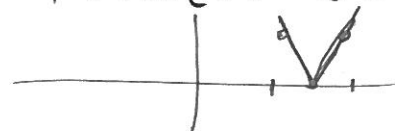
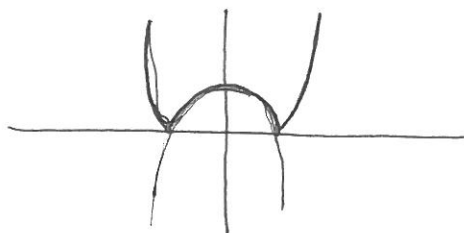
$$\begin{cases} 2x+1=x-2 \rightarrow x=-3 \\ 2x+1=-(x-2) \rightarrow 3x=1 \rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۶- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید :

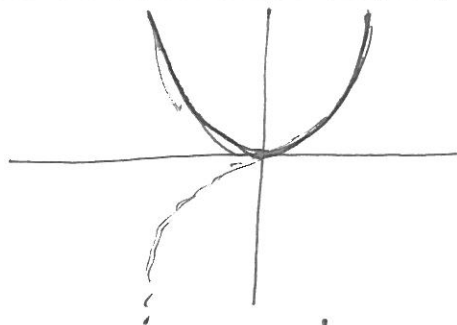
الف) $y=|3-2x|=|2x-3|=2|x-\frac{3}{2}|$



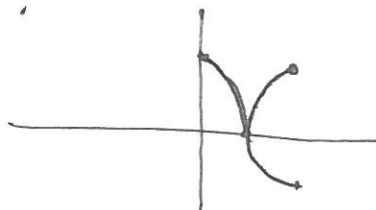
ب) $y=|1-x^2|$



ج) $y = |x^2|$



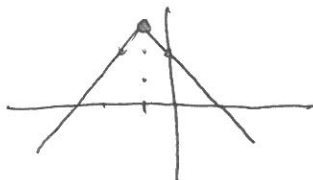
د) $y = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$



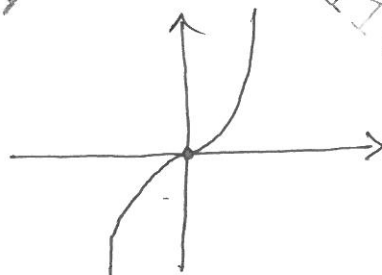
۷- هریک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدر مطلق) بنویسید.

سپس نمودار هریک را رسم کنید:

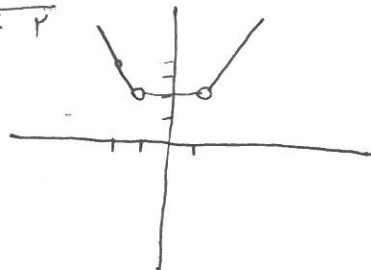
الف) $y = 3 - |x+1| = \begin{cases} 2-x-1=1-x & x \geq -1 \\ 1+x+1=2+x & x < -1 \end{cases}$



ب) $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



ج) $y = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -x+1-x-1=-2x & x < -1 \\ -x+1+x+1=2 & -1 \leq x < 1 \\ x-x+1+x+1=2x & x \geq 1 \end{cases}$



۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

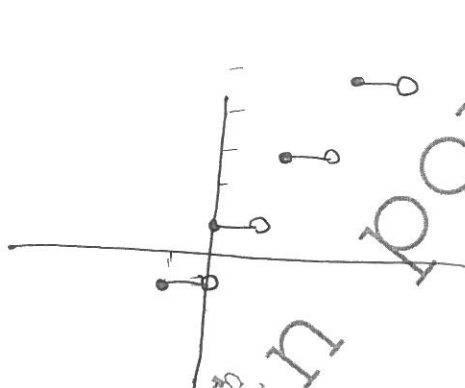
الف) $y = 2[x] + 1$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = -2 + 1 = -1$

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = 0 + 1 = 1$

$1 \leq x < 2 \rightarrow y = 2 + 1 = 3$

$2 \leq x < 3 \rightarrow y = 4 + 1 = 5$



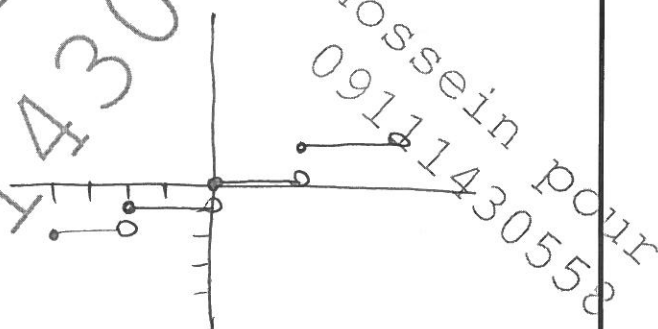
ب) $y = \left[\frac{x}{2} \right]$

$(-4 \leq x < -2 \rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \rightarrow y = -2)$

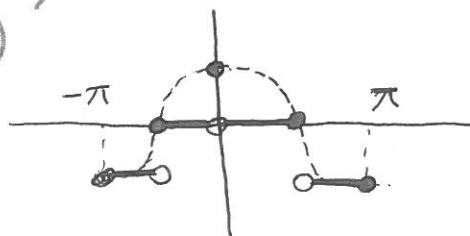
$-2 \leq x < 0 \rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \rightarrow y = -1$

$0 \leq x < 2 \rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \rightarrow y = 0$

$2 \leq x < 4 \rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \rightarrow y = 1$



ج) $y = [\cos x] : -\pi \leq x \leq \pi$



د) $y = [x^2] : -2 \leq x \leq 2$

$x = -2 \rightarrow x^2 = 4$

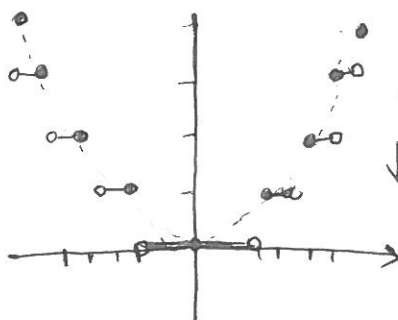
$-2 \leq x < -\sqrt{3} \rightarrow 3 \leq x^2 < 4$

$-\sqrt{3} \leq x < -\sqrt{2} \rightarrow 2 \leq x^2 < 3$

$-\sqrt{2} \leq x < -1 \rightarrow 1 \leq x^2 < 2$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow 0 \leq x^2 < 1$

$0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq x^2 < 1$



$1 \leq x < \sqrt{2} \rightarrow 1 \leq x^2 < 2$

$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \rightarrow 2 \leq x^2 < 3$

$\sqrt{3} \leq x < 2 \rightarrow 3 \leq x^2 < 4$

$x = 2 \rightarrow x^2 = 4$

۲- نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید (راهنمایی: ابتدا نشان دهید $0 \leq x - [x] < 1$)

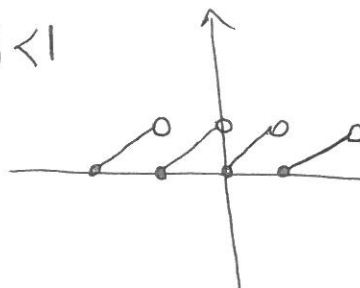
$$x = [x] + p, \quad 0 \leq p < 1$$

$$x - [x] = p \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = x - 1$$



۳- اگر $f(x) = [x+2] + [-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ نشان دهید $f(x) = 1$

$$f(n) = [n+2] + [-n] = [n] + 2 + [-n]$$

$$f(x) = -1 + 2 = 1$$

$$[n] + [-n] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴- با استفاده از نامساوی‌های $4n^2 < 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 4$ نشان دهید:

$$n \in \mathbb{N}: \left[\sqrt{4n^2 + 4n + 1} \right] = 2n$$

$$4n^2 < 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 4 \rightarrow \sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2 + 4n + 1} < \sqrt{4n^2 + 4n + 4}$$

$$2n < \sqrt{4n^2 + 4n + 1} < 2n + 2$$

$$\left[\sqrt{4n^2 + 4n + 1} \right] = 2n$$

۵- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x-3] = 4 \rightarrow 4 \leq x-3 < 5$
 $\Rightarrow 7 \leq x < 8$

ب) $[1-2x] = -5$

$$-5 \leq 1-2x < -4$$

$$-6 \leq -2x < -5 \rightarrow \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$$

۶- فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید :

$$[x+y] = [x] + [y] + 1 \text{ یا } [x+y] = [x] + [y]$$

$$x = [x] + P_1 \quad 0 \leq P_1 < 1$$

$$y = [y] + P_2 \quad 0 \leq P_2 < 1$$

$$x+y = [x] + [y] + P_1 + P_2$$

$$[x+y] = [x] + [y] + [P_1 + P_2]$$

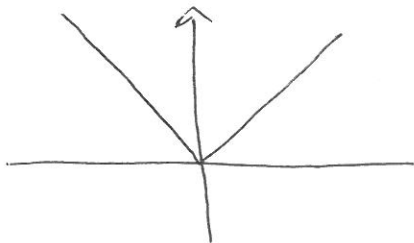
$$0 \leq P_1 + P_2 < 1 \Rightarrow [x+y] = [x] + [y] + [P_1 + P_2] = [x] + [y]$$

$$1 \leq P_1 + P_2 < 2 \Rightarrow [x+y] = [x] + [y] + 1$$

مسائل صفحه ۳۳

مسائل

۱- تعیین کنید تابع $y=|x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.



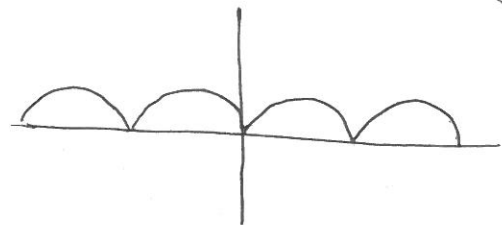
در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی

و در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است

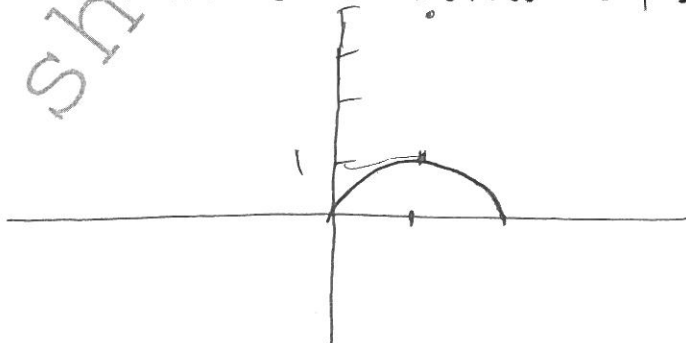
۲- تعیین کنید تابع $y=|\sin x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

$$k\pi \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{صعودی}$$

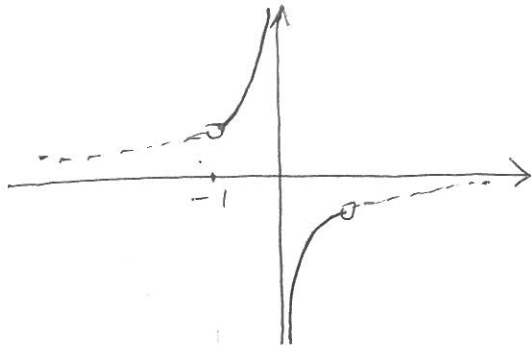
$$k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi \quad \text{نزولی}$$



۳- روی بازه $[0, 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0, 1]$ صعودی و روی بازه $[1, 2]$ نزولی باشد.



۴- روی بازه $[-1, 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $(0, 1]$ صعودی باشد ولی روی بازه $[-1, 1]$ صعودی نباشد.



تمرینات صفحه ۳۹

مسائل

۱- برای توابع $k(x)=2^x$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ و $f(x)=x^2+1$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.
 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ k$, $k \circ f$, $f \circ f \circ k$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1 \\ g \circ f(x) &= g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1} \\ f \circ k(x) &= f(2^x) = 2^{2x} + 1 \\ k \circ f(x) &= k(x^2 + 1) = 2^{x^2 + 1} \\ f \circ f \circ k &= f \circ f(2^x) = f(2^{2x} + 1) = (2^{2x} + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

۲- دامنه تابع $f(x)=3x+1$ را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{1-x}$ ترکیب $g \circ f$ قابل انجام باشد و $g \circ f$ را حساب کنید.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

$$1 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad D_g = (-\infty, \frac{1}{3}]$$

$$g \circ f(x) = g(3x+1) = \sqrt{1 - (3x+1)} = \sqrt{-3x}$$

۳- برای تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ آیا ترکیب fof قابل انجام است؟ دامنه f را به گونه ای محدود

کنید که fof قابل انجام باشد.

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid 1 - \sqrt{x} \geq 0\}$$

$$x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty) = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \leq 1\} \\ = \{x \geq 0 \mid x \leq 1\} = [0, 1]$$

۴- در تابع $y = \frac{ax+1}{x-c}$ آیا می توان a و c را به گونه ای تعیین کرد که این تابع وارون خود

باشد؟

$$y = \frac{ax+1}{x-c}$$

$$yx - yc = ax + 1$$

$$yx - ax = 1 + yc$$

$$x(y-a) = 1 + yc$$

$$x = \frac{1+yc}{y-a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{xc+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-c}$$

$$a=c$$

۵- دامنه تابع $y = x^2 + 2x$ را به گونه ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست

آورید.

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

$$y_1 = y_2 \rightarrow (x_1+1)^2 - 1 = (x_2+1)^2 - 1$$

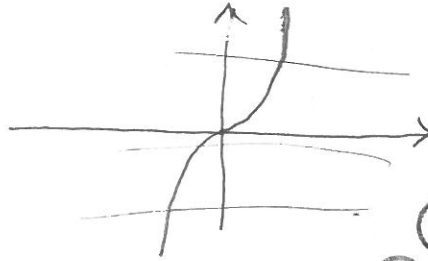
$$|x_1+1| = |x_2+1| \quad \boxed{x \geq -1} \rightarrow x_1+1 = x_2+1 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$y+1 = (x+1)^2 \rightarrow x+1 = \sqrt{y+1} \rightarrow x = \sqrt{y+1} - 1$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

۶- آیا تابع زیر وارون پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \end{cases}$$



بدیه و وارون پذیری است.

$$x \leq 0 \rightarrow y = x^2 \rightarrow |x| = \sqrt{y} \rightarrow x = -\sqrt{y} \rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

$$x > 0 \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \Rightarrow |x| = \sqrt{-y} \rightarrow x = \sqrt{-y}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y} & y \geq 0 \\ \sqrt{-y} & y < 0 \end{cases}$$

۷- ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

$$y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \rightarrow y(2^x + 1) = 2^x - 1$$

$$2^x y - 2^x = -1 - y$$

$$2^x (y - 1) = -1 - y$$

$$2^x = \frac{1+y}{1-y} \rightarrow \log_2 2^x = \log_2 \frac{1+y}{1-y}$$

$$x = \log_2 \frac{1+y}{1-y}$$

$$f^{-1}(y) = \log_2 \frac{1+y}{1-y}$$

$$\frac{2^{x_1} - 1}{2^{x_1} + 1} = \frac{2^{x_2} - 1}{2^{x_2} + 1}$$

$$\frac{2^{x_1} - 1}{2^{x_1} + 1} = \frac{2^{x_2} - 1}{2^{x_2} + 1}$$

$$2^{x_1} = 2^{x_2} \\ x_1 = x_2$$

تمرین: پنج جمله ابتدای هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید. (در صورت لزوم می‌توانید از

ماشین حساب استفاده کنید.)

الف) $a_n = 1 - 3n$ $a_1 = 1 - 3 = -2$ $a_2 = 1 - 6 = -5$ $a_3 = -7$ $a_4 = -9$ $a_5 = -11$

ب) $b_n = 3 \times (\frac{1}{2})^n$ $b_1 = \frac{3}{2}$ $b_2 = \frac{3}{4}$ $b_3 = \frac{3}{8}$ $b_4 = \frac{3}{16}$ $b_5 = \frac{3}{32}$

ج) $c_n = (-1)^{n+1}$ $c_1 = 1$ $c_2 = -1$ $c_3 = 1$ $c_4 = -1$ $c_5 = 1$

د) $d_n = \frac{1}{n+1}$ $d_1 = \frac{1}{2}$ $d_2 = \frac{1}{3}$ $d_3 = \frac{1}{4}$ $d_4 = \frac{1}{5}$ $d_5 = \frac{1}{6}$

ه) $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $e_1 = 2$ $e_2 = \frac{9}{4}$ $e_3 = \frac{64}{27}$ $e_4 = \frac{625}{256}$ $e_5 = \frac{7776}{3125}$

و) $f_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $f_1 = 1$ $f_2 = 3$ $f_3 = 6$ $f_4 = 10$ $f_5 = 15$

ز) $g_n = \frac{1}{9}(1 - 0.1^n)$ $g_1 = \frac{1}{9} \times 0.9 = \frac{1}{10}$ $g_2 = \frac{1}{9} \times 0.81 = \frac{9}{100}$ $g_3 = \frac{1}{9} \times 0.729 = \frac{81}{1000}$ $g_4 = \frac{1}{9} \times 0.6561 = \frac{729}{10000}$ $g_5 = \frac{1}{9} \times 0.59049 = \frac{6561}{100000}$

ح) $h_n = \frac{2n}{n+3}$

$h_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $h_2 = \frac{4}{5}$ $h_3 = \frac{6}{6} = 1$ $h_4 = \frac{8}{7}$ $h_5 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

۱- مجموع همه عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به دست آورید.

$$a_1 = 7 \quad a_n = 1000$$

$$a_n = 993$$

$$S_n = \frac{142}{2} (7 + 993) = 7107$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$993 = 7 + (n-1)7 \rightarrow n-1 = \frac{993-7}{7} \Rightarrow n = 142$$

۲- در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۱۹- و جمله دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله ابتدای

$$d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{31 - 19}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

این دنباله را به دست آورید.

$$a_5 = a + 4d = -19$$

$$a = -19 - 4(2.4) = -28.6$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2(-28.6) + 19)$$

$$= 10(-11.2 + 19) = 72$$

۳- دنباله‌ای حسابی مشخص کنید که جمله اول آن ۲- بوده و مجموع پنج جمله اول آن،

یک شصت و یکم مجموع پنج جمله بعدی باشد.

$$a = -2$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (S_4 + S_3 + S_2 + S_1 + S_0)$$

$$\frac{5}{2} (-2 + 4d) = \frac{1}{3} (5(-2) + (5+2+1+1+1)d) \Rightarrow -10 + 10d = \frac{1}{3} (-10 + 5d)$$

$$-30 + 30d = -10 + 5d$$

$$5d = -20 \quad d = -4$$

۴- نشان دهید $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$$a_1 = 1$$

$$d = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2(1) + (n-1)2) = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = n^2$$

۵- مجموع شش جمله ابتدای یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$\frac{S_6}{S_3} = 9 \rightarrow \frac{a(q^6-1)}{a(q^3-1)} = 9 \rightarrow \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q^3-1} = 9 \rightarrow q^3 = 8$$

$$q = 2$$

۶- احمد می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز ۰/۹۹ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

$$S_{20} = \frac{1000((0.99)^{20}-1)}{0.99-1} = \frac{1000(-0.1821)}{-0.01} = 18210$$

$$(0.99)^{20} \approx 0.8179 \quad S_n = \frac{1000}{1-0.99} = \frac{1000}{0.01} = 100000$$

۷- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 0.97$$

$$\frac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} \geq \frac{0.97}{1}$$

$$1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{0.97}{1}$$

$$-(\frac{1}{2})^n \geq -\frac{3}{100} \rightarrow (\frac{1}{2})^n \leq \frac{3}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100}$$

$$2^n \geq \frac{100}{3}$$

$$2^n \geq 33.33$$

$$n = 6$$

۸- با استفاده از دستور محاسبه مجموع جملات دنباله هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان

دهید.

الف) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

ب) $x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1(x^n - 1)}{x - 1} \Rightarrow x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$$

$$1 - x + x^2 - \dots - x^{n-1} + x^n = \frac{1((-x)^n - 1)}{-x - 1} = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

۹- با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\left(\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} + 1 \right) \right) \times b^n$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

۱- بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و

نه نزولی‌اند.

الف) $u_n = (-1)^{n+1}$

$u_1 = 1 \quad u_2 = -1 \quad u_3 = 1$

نه صعودی و نه نزولی

ب) $u_n = 3^{n-1}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3 > 1$ صعودی

ج) $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$

نزولی

د) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

نزولی

ه) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \frac{3n^2}{(n+1)^2}$

صعودی

و) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+2}{n} > 1$ صعودی

۲- دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

$f(n) = [n] \quad 0 < n < 1$

دنباله ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

۳- دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

$u_n = \log \frac{1}{n} \quad u_1 = \log 1 = 0 \quad u_2 = \log \frac{1}{2} \quad u_n = \log 0 = -\infty$

$u_n = \frac{-n^3}{n+1} \quad u_1 = -\frac{1}{2} \quad u_2 = -\frac{8}{3} = -2.6 \quad u_n = -\infty$

$$u_n = \log n$$

$$u_n = \frac{n^k}{n+1}$$

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$u_n = (-1)^n$$

۴- دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

$$u_1 = \log 1 = 0 \quad u_r = \log r$$

$$u_n = \log n \rightarrow +\infty$$

$$u_1 = \frac{1}{r} \quad u_r = r$$

$$u_n = +\infty$$

۵- دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶- دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

$$u_n = (-1)^n n$$

$$u_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$u_n = n \cos n\pi$$

$$u_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

۷- با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنباله $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ را محاسبه کنید. آیا این

دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

$$e_1 = 2 \quad e_2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$$e_3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27}$$

$$e_4 = (\frac{5}{4})^4 = \frac{625}{256}$$

$$e_5 = (\frac{6}{5})^5 = \frac{7776}{3125}$$

$$e_6 = (\frac{7}{6})^6 = \frac{117649}{46656}$$

$$e_7 = (\frac{8}{7})^7 = \frac{2097152}{823543}$$

$$e_8 = (\frac{9}{8})^8 = \frac{43046721}{16777216}$$

$$e_9 = (\frac{10}{9})^9 = \frac{1000000000}{387420489}$$

$$e_{10} = (\frac{11}{10})^{10} = \frac{25937424601}{10000000000}$$

$$2 < u_n < e$$

۸- پنج جمله نخست دنباله ای که جمله عمومی آن $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ است را محاسبه کنید. آیا

این دنباله کراندار است؟

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{27}$$

$$u_4 = \frac{1}{256}$$

$$u_5 = \frac{1024}{3125}$$

$$0 \leq u_n < e^{-1}$$

$$\rightarrow 0 \leq u_n < \frac{1}{e}$$

ب.

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$(1 - \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{-1}{n})^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۱- با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به صورت دیگر بنویسید.

الف) $3^4 = 81 \rightarrow \log_3 81 = 4$

ب) $10^{-3} = 0.001 \rightarrow \log_{10} 0.001 = -3$

ج) $5^{-2} = \frac{1}{25} \rightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$

د) $2^0 = 1 \rightarrow \log_2 1 = 0$

هـ) $8^{\frac{2}{3}} = 4 \rightarrow \log_8 4 = \frac{2}{3}$

و) $625^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{125} \rightarrow \log_{625} \frac{1}{125} = -\frac{3}{4}$

ز) $e^0 = 1 \rightarrow \log_e 1 = 0$

ح) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{128} \rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{128} = \frac{5}{2}$

۲- رابطه‌های داده شده را به صورت نمایی بنویسید.

الف) $\log_{10} 1 = 0 \rightarrow 1 = 10^0$

ب) $\log_8 64 = 2 \rightarrow 64 = 8^2$

ج) $\log_{10} 1000 = 3 \rightarrow 1000 = 10^3$

د) $\log_8 2 = \frac{1}{3} \rightarrow 2 = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

هـ) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \rightarrow 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2$

$$\text{و) } \log_{16} \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} = 16^{-\frac{3}{4}}$$

$$\text{ز) } \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$$

$$64 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$$

$$\text{ح) } \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$$

$$2 = 32^{\frac{1}{5}}$$

۳- مقدار لگاریتم‌های داده شده را به دست آورید.

$$\text{الف) } \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2$$

$$\text{ب) } \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$$

$$\text{ج) } \log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}$$

$$\text{د) } \log_6 6 = 1$$

$$\text{هـ) } \log_{27} \frac{1}{81} = \log_{3^3} 3^{-4} = -\frac{4}{3} \log_3 3 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{و) } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = \log_{2^{-1}} 2^{-5} = -5 \log_{2^{-1}} 2 = 5$$

$$\text{ز) } \log_e 1 = 0$$

$$\text{ح) } \log_e \sqrt{e} = \log_e e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_e e = \frac{1}{2}$$

۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \log_{\frac{1}{3}} x = -2 \rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\text{ب) } \log_2 (x-1) = 3 \rightarrow x-1 = 2^3 \rightarrow x = 8+1 = 9$$

$$\text{ج) } \log_{\frac{1}{9}} x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$د) \log(3x+1)=2 \rightarrow 3x+1=10^2 \Rightarrow 3x=99 \rightarrow x=33$$

$$هـ) \log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7 \quad \log(2x-1)(x-7) = \log 7$$

$$2x^2 - 15x + 7 = 7 \quad x(2x-15) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{15}{2}$$

$$و) 2\log x - \log(x+1) = 1$$

$$\log x^2 - \log(x+1) = 1 \rightarrow \log x^2 + x = 1$$

$$x + x = 10^1 = 10$$

$$x = 5$$

$$ز) (2^x-1)(2^x-3)=0$$

$$2^x - 1 = 0 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$2^x - 3 = 0 \rightarrow 2^x = 3 \rightarrow \log_2 2^x = \log_2 3 \rightarrow x = \log_2 3$$

$$ح) 10^{\log(x+1)} = 3$$

$$\log_{10} 10^{\log(x+1)} = \log_{10} 3 \rightarrow \log(x+1) = \log 3 \rightarrow x+1 = 3$$

$$x = 2$$

۵- از روابط زیر کدام درست و کدام نادرست است؟ a, b, c اعداد حقیقی مثبت و c مخالف

(صفر است.)

$$الف) \log_c a + \log_c b = \log_c(a+b) \quad \times$$

$$ب) \log_c a + \log_c b = \log_c(ab) \quad \checkmark$$

$$ج) \log_c a - \log_c b = \log_c\left(\frac{a}{b}\right) \quad \checkmark$$

$$د) \log_c a - \log_c b = \log_c(a-b) \quad \times$$

$$هـ) \log_c a^n = (n \log_c a) \quad \times$$

$$و) \log_c a^n = n \log_c a \quad \checkmark$$

$$ز) \log_{c^m} a^n = \frac{n}{m} \log_c a \quad \checkmark$$

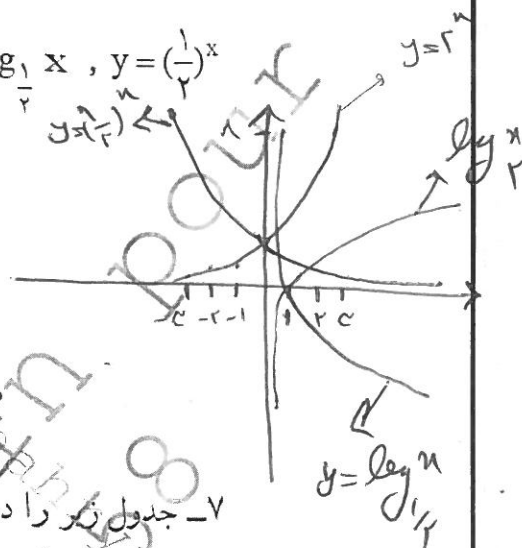
$$ح) \log_{c^m} a^n = m^n \log_c a \quad \times$$

۶- ابتدا جدول را کامل کنید. سپس نمودارهای توابع زیر را در یک صفحه مختصات رسم کنید.

$$y = \log_2 x, \quad y = 2^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	/	/	/	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	/	/	/	0	-1	-2	-3

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = (\frac{1}{2})^x$$



۷- جدول زیر را در نظر بگیرید:

لگاریتم عدد	0	0/301	0/477	...	0/699	...	0/845	1
عدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

هر عدد در ردیف دوم برابر است با ۱۰ به توان عدد نظیر از ردیف اول. برای مثال $10^{0/845} = 7$. جدول را کامل کنید و مقدار عددی هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید. (در جدول، لگاریتم اعداد با دقت تا سه رقم اعشار آمده است.)

الف) $\log(2 \times 10^7) =$ ب) $\log 32 =$ ج) $\log 56 =$

د) $\log 300000 =$ ه) $\log \sqrt{6} =$ و) $\log 392 =$

الف) $\log 2 + \log 10^7 = 0/301 + 7 = 7,301$

ب) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \times 0/301 = 1/505$

ج) $\log 56 = \log 7 \times 8 = \log 7 + \log 8 = 0/845 + 3 \log 2 = 0/845 + 3 \times 0/301 = 0/845 + 0/903 = 1/748$

د) $\log 300000 = \log 3 + \log 10^5 = \log 3 + 5 \log 10 = 0/477 + 5 = 5/477$

ه) $\log \sqrt{6} = \frac{1}{2} (\log 2 + \log 3) = \frac{1}{2} (0/301 + 0/477) = \frac{1}{2} (0/778) = 0/389$

و) $\log 392 = \log 2^3 \times 7^2 = 3 \log 2 + 2 \log 7 = 3 \times 0/301 + 2 \times 0/845 = 0/903 + 1/690 = 2/593$

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x-3)=2$

$$x-3=e^2 \rightarrow x=e^2+3$$

ب) $(e^x-5)(2e^x-7)=0$

$$e^x-5=0 \rightarrow e^x=5 \rightarrow \ln e^x=\ln 5 \rightarrow x \ln e=\ln 5 \rightarrow x=\ln 5$$

$$2e^x-7=0 \rightarrow e^x=\frac{7}{2} \rightarrow \ln e^x=\ln \frac{7}{2} \rightarrow x=\ln \frac{7}{2}$$

ج) $(e^x+3)^2-25=0$

$$(e^x+3)^2=25 \rightarrow \begin{cases} e^x+3=5 \rightarrow e^x=2 \rightarrow \ln e^x=\ln 2 \rightarrow x=\ln 2 \\ e^x+3=-5 \rightarrow e^x=-8 \end{cases}$$

د) $\ln(2x-5)=\ln(7-x)$

$$2x-5=7-x \rightarrow 3x=12 \rightarrow x=4$$

$$|e^x-1|=|3-re^x| \Rightarrow \begin{cases} e^x-1=3-re^x \rightarrow re^x=4 \rightarrow e^x=\frac{4}{r} \rightarrow \ln e^x=\ln \frac{4}{r} \rightarrow x=\ln \frac{4}{r} \\ e^x-1=-3+re^x \rightarrow re^x=2 \rightarrow e^x=\frac{2}{r} \rightarrow \ln e^x=\ln \frac{2}{r} \rightarrow x=\ln \frac{2}{r} \end{cases}$$

$$e^x=2 \rightarrow \ln e^x=\ln 2 \rightarrow x=\ln 2$$

ه) $\ln(2x-1)+\ln(x-7)=\ln 7$

$$\ln((2x-1)(x-7))=\ln 7$$

$$(2x-1)(x-7)=7 \rightarrow 2x^2-14x-x+7=7 \rightarrow 2x^2-15x=0 \rightarrow x(2x-15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{15}{2} \end{cases}$$

۲- اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که:

$$\begin{cases} \ln(2x+1) + \ln(3y-2) = \ln 3x + \ln(y+2) \\ \ln(x+1) - \ln(y+2) = -\ln 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(2x+1)(3y-2) = \ln 3x(y+2) \Rightarrow 2xy - 2x + 3y - 2 = 3xy + 6x \\ \ln \frac{x+1}{y+2} = \ln 3^{-1} \Rightarrow \frac{x+1}{y+2} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x+3 = y+2 \rightarrow y = 3x-1 \end{cases}$$

$$2xy - 2x + 3y - 2 = 0 \rightarrow 2x(3x-1) - 2x + 3(3x-1) - 2 = 0$$

$$6x^2 - 2x - 2x + 9x - 3 - 2 = 0$$

$$6x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 120 = 136$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{136}}{12}$$

$$\frac{4 + \sqrt{136}}{12}$$

$$\rightarrow y = \frac{4 + \sqrt{136}}{4} - 1$$

$$\ln x + \ln 2y = \ln(xy+2)$$

$$\ln(1-x) + \ln(y+1) = \ln(y-x-1)$$

$$\ln 2xy = \ln(xy+2)$$

$$\rightarrow 2xy = xy+2 \rightarrow xy=2$$

$$\ln(1-x)(y+1) = \ln y - x + 1$$

$$\ln y + 1 - xy - x = y - x - 1 \rightarrow xy = 2$$

بی نهایت جواب دارد (اعداد حقیقی دارد).

۳- جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $P(t)$ باشد، آنگاه $P(t) = 10000e^{0.06t}$. تا کی انتظار می رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

$$45000 = 10000 e^{0.06t}$$

$$4.5 = e^{0.06t} \rightarrow \ln 4.5 = \ln e^{0.06t} = 0.06t$$

$$t = \frac{\ln 4.5}{0.06} = \frac{1.8}{0.06} = 30 \text{ سال}$$

۴- در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می شود که $f(t) = 2000e^{0.35t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

$$10000 = 2000 e^{0.35t}$$

$$5 = e^{0.35t} \rightarrow \ln 5 = \ln e^{0.35t}$$

$$\ln 5 = 0.35t \quad t = \frac{\ln 5}{0.35} = \frac{1.6}{0.35} \approx 4.6$$

۶- قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، $f(t)$ دلار است، که $f(t) = 1200 + 8000e^{-0.25t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می شود؟

$$2000 = 1200 + 8000e^{-0.25t}$$

$$1000 = 8000e^{-0.25t} \quad e^{-0.25t} = \frac{1}{8}$$

$$\ln e^{-0.25t} = \ln 8^{-1} \rightarrow -0.25t = -\ln 8$$

$$t = \frac{\ln 8}{0.25} = 9.2$$

۷- چقدر طول می کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰

ریال شود؟

$$P(t) = 500000 e^{0.09t}$$

$$900000 = 500000 e^{0.09t}$$

$$\ln \frac{9}{5} = \ln e^{0.09t} \rightarrow \ln \frac{9}{5} = 0.09t \quad t = \frac{\ln \frac{9}{5}}{0.09} = 9.8$$

۸- مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل

کنید.

$$900000 = 500000 e^{0.12t}$$

$$\frac{9}{5} = e^{0.12t}$$

$$\ln \frac{9}{5} = \ln e^{0.12t} = 0.12t$$

$$t = \frac{\ln \frac{9}{5}}{0.12} = 2.9$$

۹- چقدر طول می کشد تا یک سرمایه گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در

سرمایه گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

$$P(t) = Ae^{0.08t}$$

$$2A = Ae^{0.08t}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0.08t} = 0.08t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.08} = 3.1$$

معادلات زیر را حل کرده و جواب های کلی آن ها را بیابید.

۱) $2\sin 2x - 1 = 0$

$$2\sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

۲) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$$2\cos x = -\sqrt{3} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$

۳) $\sin 2x + \sin x = 0$

$$\sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$2x = 2k\pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi + \pi + x \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

۴) $\tan x = 3 \cot x$

$$(\tan x = 3 \cot x) \tan x$$

$$\tan^2 x = 3 \rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} & x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} & x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۵) $2\sin^2 x - \sin 2x - 1 = 0$

$$\sin x = t$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$9) \sin rx = \cos\left(\frac{\pi}{r} - x\right)$$

$$\sin rx = \sin x \Rightarrow \begin{cases} rx = rk\pi + x \rightarrow x = rk\pi \\ rx = rk\pi + \pi - x \rightarrow rx = rk\pi + \pi \\ x = \frac{rk\pi + \pi}{r} \end{cases}$$

$$V) \sin rx \cos x - \cos rx \sin x = 1$$

$$\sin(rx - x) = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = rk\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$A) \cos rx - r \cos x + r = 0$$

$$r \cos^2 x - 1 - r \cos x + r = 0$$

$$r \cos^2 x - r \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = t \rightarrow rt^2 - rt + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = rk\pi \\ t = \frac{1}{r} &\Rightarrow \cos x = \frac{1}{r} \Rightarrow x = rk\pi \pm \frac{\pi}{r} \end{aligned}$$

$$9) \cos^r x - \sin^r x = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\cos rx = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow rx = rk\pi \pm \frac{\pi}{r} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

$$10) \cos x - \cos^r x = 0$$

$$\cos x (1 - \cos^r x) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\cos^r x = 1$$

$$\cos x = 1 \rightarrow x = rk\pi$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = rk\pi + \pi$$

۳۶

فصل سوم

مشق توابع

۱- متحرکی روی یک خط افقی حرکت می کند که قانون حرکت آن $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10$ است، در چه بازه زمانی متحرک در جهت مثبت خط، حرکت می کند؟ در کدام بازه زمانی متحرک در جهت منفی خط حرکت می کند؟ در کدام لحظه ها متحرک تغییر جهت می دهد؟

$$s' = t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$\begin{matrix} \nearrow t=2 \\ \searrow t=4 \end{matrix}$$

در جهت مثبت

+	2	-	4	+
	t		t	

- ۲- تویی را با سرعت اولیه $78/4$ متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبه
- الف) سرعت لحظه ای توپ در پایان یک ثانیه
 - ب) سرعت لحظه ای در پایان ۴ ثانیه
 - ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه
 - د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت
 - ه) مدتی که طول می کشد تا توپ به زمین برسد.
 - و) سرعت لحظه ای توپ وقتی که به زمین می رسد.

۳- منحنی به معادله $y = x^2$ مفروض است. نقطه‌ای واقع بر این منحنی به دست آورید که خط قائم بر منحنی در آن نقطه از نقطه $A(35, 22)$ بگذرد.

$$y = x^2 \rightarrow y' = 2x$$

$$x_0^3 - 21x_0 - 35 = 0$$

$$y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0} (x - x_0)$$

$$(22 - x_0^2) = -\frac{1}{2x_0} (35 - x_0) \times x_0$$

$$22x_0 - x_0^3 = -35 + x_0$$

۴- دو منحنی به معادلات $y = x^2 + \frac{1}{2}a^2$ و $y = \frac{1}{2}x^2 + ax$ مفروضند که در آن a یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این دو منحنی در نقطه $A(a, \frac{3}{2}a^2)$ دارای خط مماس مشترک می‌باشند. اصطلاحاً می‌گویند این دو منحنی در نقطه $A(a, \frac{3}{2}a^2)$ بر هم مماس هستند.

برای $y' = 2x \quad m_1 = 2a$

$y' = x + a \quad m_2 = a + a = 2a$

برای $(\frac{1}{2}x^2 + ax = x^2 + \frac{1}{2}a^2) \times 2$

$$x^2 + 2ax = 2x^2 + a^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \rightarrow x = a$$

۱- مشتق تابع $y=x^2$ را از طریق تعریف در نقطه دلخواه $x=a$ حساب کنید.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)((a+h)^2 + a(a+h) + a^2)}{h} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

۲- معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x + \frac{1}{x}$ را در نقطه به طول $x=1$ را بنویسید. معادله

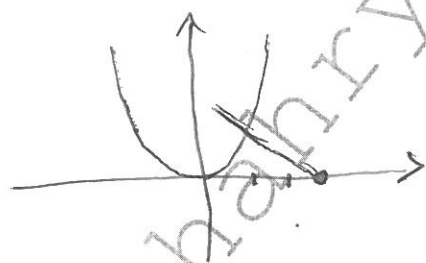
خط عمود بر نمودار این تابع را در نقطه به طول $x=-1$ بنویسید.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \quad m = 1 - \frac{1}{1^2} = 1 - 1 = 0$$

$$m_1 = 1 - \frac{1}{(-1)^2} = 1 - 1 = 0 \quad m'_1 = \frac{1}{0} \text{ تعریف نشده}$$

۳- آیا می توان خطی از نقطه $(3,0)$ گذراند که بر سهمی $y=x^2$ عمود شود؟ چند خط با این

ویژگی وجود دارد؟



$$y' = 2x$$

$$y - 0 = m(x - 3) \quad y = mx - 3m$$

$$m \times 2 = -1$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{خط}$$

۴- ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می‌کند تا بایستد. معادله حرکت

این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 30t$ است. t زمان بر حسب ثانیه است که از لحظه شروع ترمز اندازه‌گیری شده است و $x(t)$ بر حسب متر است.

الف) ماشین پس از طی چند متر می‌ایستد؟

ب) ماشین پس از ترمز کردن چند ثانیه طول می‌کشد که بایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ترمز کردن چقدر بوده است؟

د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می‌رسد؟

الف) $x'(t) = -t + 30 = 0 \Rightarrow t = 30$

$x(30) = -\frac{30^2}{2} + 30 \times 30 = -450 + 900 = 450$

۳۰ ثانیه

ح. ضریب t یعنی ۳۰

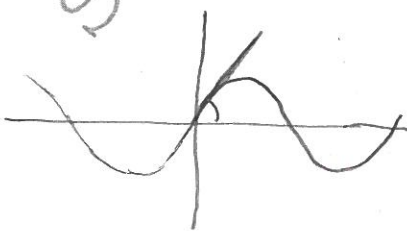
گ) $-t + 30 = 2$

$-t = -28$

$t = 28$

۵- منحنی نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه‌هایی محور x ها را قطع می‌کند؟ (زاویه خط مماس

بر نمودار تابع با محور x ها)



$y' = \cos x \Big|_{x=0}$

$m = 1$

$\tan \alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

۴۱

۶- ثابت کنید خط‌های $y=2$ و $y=-2$ بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ مماس هستند.

$$x + \frac{1}{x} = 2 \rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = -2 \rightarrow x + 2 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{x^2} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$m = 1 - \frac{1}{(\pm 1)^2} = 0 \rightarrow y = y_0 \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$y = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$y = -1 + \frac{1}{(-1)} = -2$$

۸- برای هر عدد ثابت c و تابع مشتق پذیر f ، با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید:

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

$$(cf)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

۹- برای سه تابع مشتق پذیر f, g, h ثابت کنید:

$$(f+g+h)'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

$$(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$(f+g+h)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f+g+h)(x+\Delta x) - (f+g+h)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x) + h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

۱۲- فرض می‌کنیم $f(x) = \begin{cases} -3x+5 & \text{اگر } x \leq 2 \\ x^2-2x-1 & \text{اگر } x > 2 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $f'_-(2)$ و

$f'_+(2)$ ، آیا این تابع در $x=2$ مشتق پذیر است؟

$$f'_-(2) = \lim_{n \rightarrow 2^-} \frac{f(n) - f(2)}{n - 2} = \frac{f(2) - f(2)}{2 - 2} = 2$$

$$f'_-(2) = -3$$

$$f'_+(2) = f'_-(2)$$

۱۳- فرض می‌کنیم $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{اگر } x \leq 3 \\ 3x+2 & \text{اگر } x > 3 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $f'_-(3)$ و

$f'_+(3)$ ، آیا این تابع در $x=3$ مشتق پذیر است؟

$$f'_+(3) = 3$$

$$f'_-(3) = 2$$

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

۱۴- تابع $y = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 2 \\ x^3, & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در نقطه $x=2$ مشتق پذیر

باشد اعداد ثابت a و b را به دست آورید.

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad (x \geq 2)$$

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$4a + 2b + 1 = 8$$

$$(4a + 2b = 7) \times 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2)$$

$$4a + b = 3(2)^2 = 12$$

$$-4a - 2b = -14$$

$$-3b = -2 \quad b = \frac{2}{3}$$

$$4a + \frac{2}{3} = 12 \rightarrow 4a = 12 - \frac{2}{3} = \frac{34}{3}$$

$$a = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$$

۱۰- با استفاده از مشتق حاصل ضرب توابع، مشتق توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ را حساب کنید.

برای مشتق تابع $y=x^n$ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را برای $y=x^4$ و $y=x^5$ ثابت کنید.

$$y = x \times x \Rightarrow 1 \times x + x \times 1 = 2x = y'$$

$$y = x^3 = x \times x^2 \Rightarrow 1 \times x^2 + x \times 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2 = y'$$

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = x^4 = x^2 \times x^2 \rightarrow y' = 2x \times x^2 + x^2 \times 2x = 4x^3$$

۱۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y = \sin(1+x^2)$

$$y' = 2x \cos(1+x^2)$$

ب) $y = \sin^2(x+1)$

$$y' = 2 \cos(x+1) \sin(x+1)$$

ج) $y = \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$

$$y' = \frac{\cos x (1+\cos x) + \sin x \times \sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{2 \sin x}{1+\cos x}$$

د) $y = \sin(\sin x)$

$$y' = \cos x \times \cos(\sin x)$$

مسائل صفحه ۷۸

۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

(ب) $y = xe^{x^2-1}$

(الف) $y = e^{2x} + e^{-x} + 2$

(د) $y = \sin x e^{\cos x}$

(ج) $y = \ln(1 + \cos^2 x)$

(الف) $y' = 2e^{2x} - e^{-x}$

(ب) $y' = e^{x^2-1} + 2xe^{x^2-1}$

(ع) $y' = \frac{-2\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} = \frac{-\sin 2x}{1 + \cos^2 x}$

(د) $y' = \cos x e^{\cos x} - \sin x \sin x e^{\cos x} = \cos x e^{\cos x} - \sin^2 x e^{\cos x}$

۲- تابع $y = xe^x$ را در نظر بگیرید که روی IR تعریف شده است.

(الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

(ب) نمودار این تابع در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

(ج) زاویه برخورد نمودار تابع با محور x ها چقدر است؟

(د) نمودار این تابع چه شکلی می‌تواند باشد؟

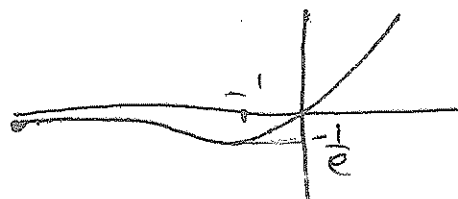
(الف) $y' = e^x + xe^x = e^x(x+1) \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

صعودی $(-1, +\infty)$ نزولی $(-\infty, -1)$

(ب) $y = xe^x = 0 \rightarrow x = 0$

(ج) $\tan \alpha = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad y' = e^0(0+1) = 1$

(د)



۳- توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده‌اند و مشتق آن‌ها در این نقاط چیست؟

الف) $\ln(\sin x)$ ب) $\ln|\cos x|$ ج) $\ln(x^2 - x)$ د) $\ln(|\ln x|)$

الف) $\ln \sin x \rightarrow \sin x > 0 \rightarrow (0 < x < \pi) + 2k\pi$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ب) $\ln |\cos x| \rightarrow |\cos x| > 0 \rightarrow \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\}$
 $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

ج) $\ln(x^2 - x) \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow 1 < x < \infty$
 $\mathbb{R} - [0, 1]$

$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

د) $\ln(|\ln x|) \rightarrow |\ln x| > 0 \rightarrow x > 0, x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

۴- هر ماده رادیواکتیو نیمه عمری دارد که با T نشان می‌دهیم. اگر مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t باشد، نیمه عمر T به معنای آن است که پس از گذشت T واحد زمانی مقدار ماده رادیواکتیو نصف می‌شود، یعنی برای هر t داریم

$$f(t+T) = \frac{1}{2} f(t)$$

تابع $f(t)$ به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است که A مقدار ماده رادیواکتیو در لحظه ابتدایی $t=0$ است. مقدار k را بر حسب T تعیین کنید.

$$t=0 \rightarrow f(T) = \frac{1}{2} f(0)$$

$$\rightarrow Ae^{kT} = \frac{1}{2} Ae^0$$

$$e^{kT} = \frac{1}{2} \rightarrow kT = \ln \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{-\ln 2}{T}$$

۵- برای یک عدد حقیقی b تابع $y(x)=x^b$ را در نظر بگیرید و با نوشتن آن به صورت $y(x)=e^{b \ln x}$ ثابت کنید.

$$(x^b)' = bx^{b-1}$$

$$y = x^b = e^{b \ln x} \rightarrow y' = (b \ln x)' e^{b \ln x} = \frac{b}{x} e^{b \ln x} = \frac{b}{x} (x^b) = bx^{b-1}$$

مسائل صفحه ۸۲

۱- نشان دهید که نقطه $A(1,1)$ روی نمودار معادله $x^2 + y^2 + x'y^2 - 3 = 0$ قرار دارد. اگر $y(x)$

تابعی باشد که توسط این معادله تعریف شده است و $y(1)=1$ ، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را

در نقطه A بنویسید.

$$x=1, y=1 \rightarrow 1+1+1-3=0 \quad \checkmark$$

$$y'_x = -\frac{2x^2 + 2xy^2}{4y^2 + 2yx^2} \quad m = -\frac{4+2}{4+2} = -1 \rightarrow y-1 = -1(x-1) \rightarrow y = -x+2$$

۲- در تمرین های زیر با استفاده از مشتق گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

الف) $x \sin y + y \cos x = 1$

ب) $y = \cos(x-y)$

ج) $x^2 y' = x' + y'$

الف) $y'_x = -\frac{\sin y - y \cos x}{x \cos y + \cos x}$

ب) $y'_x = -\frac{1 + \sin(n-y)}{1 - \sin(n-y)}$

ج) $y'_x = -\frac{2xy^2 - 2x}{2yx^2 - 2y}$

$$n \sin y + y \cos n - 1 = 0$$

$$y - \cos(n-y) = 0$$

$$n^2 y^2 - n - y^2 = 0$$

۳- معادله خط مماس بر منحنی به معادله $x^2 + y^2 + x^2 y^2 - 3 = 0$ در نقطه $A(1,1)$ را به دست آورید.

در سوال یک آمده است

۴- معادله خط مماس بر منحنی به معادله $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ در نقطه $A(4,4)$ را به دست آورید.

$$y'_x = - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$$

$$y - 4 = -1(x - 4) \quad y = -x + 8$$

۵- در چه نقطه‌ای از منحنی به معادله $x + \sqrt{xy} + y = 1$ خط مماس بر منحنی موازی با محور x ها است؟

$$x + \sqrt{xy} + y = 1 - \frac{3x}{4} \quad y = \left(\sqrt{1 - \frac{3x}{4}} - \sqrt{x} \right)^2$$

$$(\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x}}{2})^2 = 1 - \frac{3x}{4} \quad y' = 2 \left(\frac{-\frac{3}{8}}{2\sqrt{1 - \frac{3x}{4}}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{3x}{4}} - \sqrt{x} \right)$$

$$\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \pm \sqrt{1 - \frac{3x}{4}} \quad \sqrt{1 - \frac{3x}{4}} = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad 1 - \frac{3x}{4} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = 0 \rightarrow (1, 0)$$

۶- اگر $8y^2 - 2xy^2 = -16$ آنگاه تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطه $A(3,2)$ را به دست آورید.

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{-2xy^2}{16y - 4xy^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{4 - y^2} = - \frac{2 \times 3}{4 - 2^2} = - \frac{6}{0}$$

فصل چهارم

کاربرد مشتق

مسائل صفحه ۸۶

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix}$$

بحرانی $\{1, 2\}$

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$$

$$g'(x) = 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$2(3x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-8) = 1 + 96 = 97$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{6}$$

بحرانی $\left\{ \frac{1+\sqrt{97}}{6}, \frac{1-\sqrt{97}}{6} \right\}$

$$g(x) = x^{\frac{1}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \left(x^{-\frac{4}{5}} - \frac{12}{x^{\frac{4}{5}}} \right) = 0$$

$$x=0 \quad \text{بحرانی}$$

$$x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}} - 12 = 0$$

$$x = 12 \quad \text{بحرانی}$$

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} (3x^2 - 6x) (x^3 - 3x^2 + 2)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \frac{3x^2 - 6x}{(x^3 - 3x^2 + 2)^{\frac{4}{5}}} = 0$$

$$3x(x-2) = 0 \quad x=0, x=2 \quad \text{بحرانی}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \quad x = -1 \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & & 1 & -4 & 2 \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

www.karamath.ir

بحرانی $\left\{ \frac{4+2\sqrt{3}}{2}, \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \right\}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{6}x^{\frac{1}{6}} + 5$$

$$f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} = 0$$

$$\frac{5}{6} \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} \right) = 0$$

$$\frac{x^{\frac{1}{6}} - 1}{x^{\frac{1}{6}}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{6}} - 1 = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{6}} = 1 \Rightarrow x = 1$$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را در صورت وجود محاسبه کنید.

$[-1, 4] : g(x) = x^3 - 8x^2 + 16$

$$g'(x) = 3x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x(3x - 16) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = \frac{16}{3}$$

نکته: $x = \frac{16}{3} > 4$ پس در بازه $[0, 4]$ فقط $x = 0$ را در نظر می‌گیریم.

$$g(-1) = -1 - 8 + 16 = 9$$

$$g(0) = 16$$

$$g(4) = 64 - 128 + 16 = -48$$

پس $g(0) = 16$ ماکزیمم و $g(4) = -48$ مینیمم است.

$[-3, -1] : f(x) = x^3 + 5x - 4$

$$f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$$

پس تابع در بازه $[-3, -1]$ صعودی است.

$$f(-3) = -27 - 15 - 4 = -46 \text{ min}$$

$$f(-1) = -1 - 5 - 4 = -10 \text{ max}$$

$[-2, 1] : f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

نکته: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ بحرانی است.

$$f(-2) = 1$$

$$f(1) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \text{ max}$$

$$f(-1) = 0 \text{ min}$$

$[-5, 4] : f(x) = 1 - (x-3)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

نکته: $x-3=0 \Rightarrow x=3$ بحرانی است.

$$f(-5) = 1 - 8 = -7 \text{ min}$$

$$f(3) = 1 \text{ max}$$

$$f(4) = 1 - 1 = 0$$

$$[0, 64] : f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}} + 5$$

قسمت اول از صفحه قبل

$$f(0) = 5$$

$$f(4) = 1 - \frac{1}{4} \times 4^{\frac{2}{3}} + 5 \approx 1,2 \text{ min}$$

$$f(64) = 128 - \frac{1}{4} \times 64^{\frac{2}{3}} + 5 = 128 - 32 + 5 = 101 \text{ max}$$

$$[-2, 2] : f(x) = 2x^2 - 9x^2 + 12x + 40$$

$$f'(x) = 4x^2 - 18x + 12 = 0 \quad \begin{matrix} 4(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ x > 1 \quad x = 2 \end{matrix}$$

$$f(-2) = -14 - 36 - 24 + 40 = -34 \text{ min}$$

$$f(1) = 2 - 9 + 12 + 40 = 45$$

$$f(2) = 14 - 36 + 24 + 40 = 42$$

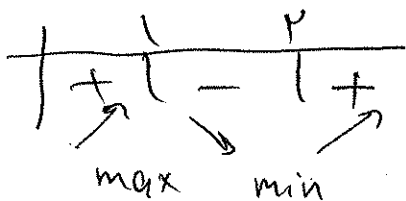
$$f(3) = 18 - 81 + 36 + 40 = 13 \text{ max}$$

مسائل صفحه ۸۹

در تمرین های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می نیمم نسبی توابع داده شده را به دست آورید.

$$y = 2x^2 - 9x^2 + 12x + 40$$

$$y' = 4x^2 - 18x + 12 = 0 \quad x = 1, x = 2$$



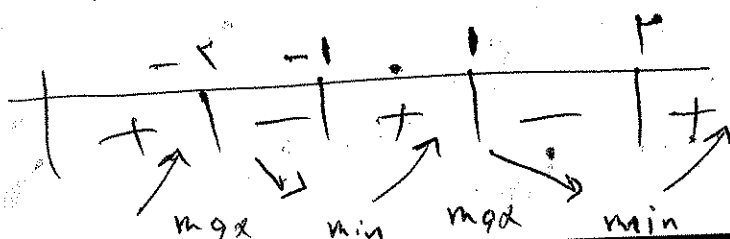
$$f(1) = 2 - 9 + 12 + 40 = 45$$

$$f(2) = 14 - 36 + 24 + 40 = 42$$

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 60x + 10$$

$$y' = 12x^2 - 30x + 60 = 0 \quad 12(x^2 - 8x + 10) = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



$$f(-2) = -9$$

$$f(-1) = -21$$

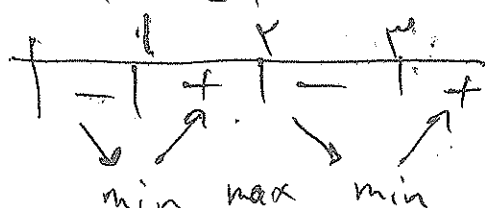
$$f(1) = 41$$

$$f(2) = -24$$

$$y = x^4 - 18x^3 + 22x^2 - 24x + 100$$

$$y' = 4x^3 - 54x^2 + 44x - 24 = 0$$

$$4 - 24 + 44 - 24 = 0 \rightarrow x = 1$$



$$y = x^4 - 12x^2 + 52x^2 - 96x + 100$$

$$y' = 4x^3 - 24x^2 + 104x - 96 = 0$$

$$4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$$

$$4x^3 - 20x^2 + 24x = 0$$

$$4(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0$$

$$x = 2 \quad x = 3$$

$$4(x^3 - 9x^2 + 16x - 24) = 0$$

۵- در تمرین های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

در تمرین یک دامنه \mathbb{R} است لذا اکثر مطلق ندارد

در تمرین ۲ صفر باشد تمرین یک است

در تمرین ۳ بر $(-\infty, 91]$ است لذا min مطلق ۹۱ است.

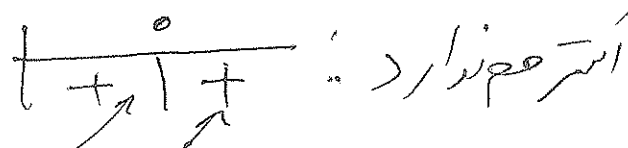
در تمرین ۴ بر $(-\infty, 77]$ است لذا min مطلق ۹۱ است

۶- ثابت کنید تابع $y = x^2$ همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و

می نیمم ندارد.

$$y' = 2x \geq 0$$

$$x = 0$$



۷- در تابع $y = 2x^2 - 9x + 30$ ثابت کنید پاره خطی که نقاط ماکزیم و می نیم روی نمودار تابع را به هم وصل می کند توسط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می شود.

$$y' = 4n^2 - 18n + 12 = 0 \quad n=1, n=2$$

$$(1, 20) \quad (2, 14)$$

$$y - 20 = \frac{-1}{1}(n-1) \quad y = 3x + 19$$

$$2n^2 - 9n + 12 = 0 \quad n = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 48}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$n = 1, 2$$

$$2n^2 - 9n + 12 = 0 \quad n = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$n = 1, 2$$

$$2n^2 - 9n + 12 = 0 \quad n = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$n = 1, 2$$

$$2n^2 - 9n + 12 = 0 \quad n = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$n = 1, 2$$

۸- ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + ax^2 + b$ در $(2, 2)$ یک ماکزیم یا می نیم نسبی داشته باشد.

$$(2, 2) \rightarrow 2 = 4 + 4a + b$$

$$f'(n) = 2n + 4a = 0 \quad n=2$$

$$4 + 4a = 0$$

$$a = -1$$

$$b = 2$$

۹- ضرایب a ، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ در $x=1$ دارای مقدار ماکزیم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $y=f(x)$ از نقطه $(2, -2)$ بگذرد.

$$7 = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$f'(n) = 2an + b = 0 \quad n=1$$

$$-2 = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$a + b + c = 7$$

$$2a + b = 0$$

$$4a + 2b + c = -2$$

$$2a + b = -9$$

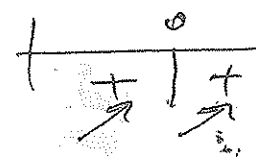
$$a = -9$$

$$b = -2a = 18$$

$$-9 + 18 + c = 7$$

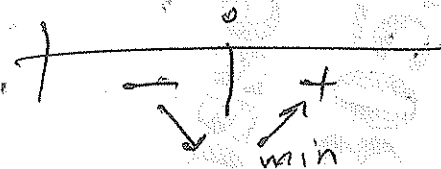
$$c = -2$$

۱۰- تابع $f(x) = x^{2n+1}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می نیمم نسبی ندارد.

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n} \geq 0$$


۱۱- تابع $y = x^{2n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در $x = 0$ دارای یک می نیمم مطلق است.

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} = 0 \quad x = 0$$



مسائل صفحه ۹۲

در مسائل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز در صورت وجود به دست آورید.

$$y = 16x^3 + 32x^2 + 24x - 5$$

$$y' = 48x^2 + 64x + 24$$

$$y'' = 96x + 64 = 0$$

$$48(x^2 + 4x + 4) = 0 \quad 48(x+2)^2 \geq 0$$

همواره رو به بالا است

$$y = x^3 - 8x^2 + 24x$$

$$y' = 3x^2 - 16x + 24$$

$$y'' = 6x - 16 = 0$$

$$12(x - 8/3) \geq 0$$

همواره رو به بالا است

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - 2x^2(x^2 - 1)(-2x)}{(x^2 - 1)^4} = 0$$

$$-2x(x^2 - 1)(x^2 - 1 - 2x^2) = 0$$

همواره صفر

$$x = 0$$

$$x = \pm 1$$

+	-	+	-	+
+	-	+	-	+

موجب • • • • •
منفی • • • • •

$$y = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{6}x^2 - x^2$$

$$y' = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x - 2x$$

$$y'' = x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

+	-	+	-	+
+	-	+	-	+

موجب • • • • •
منفی • • • • •

$$f(-2) = \frac{4}{12} + \frac{4}{6} - 4 = \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3}$$

$$f(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$y = x^2 + 3x^2 - 2x + 2$$

$$y' = 2x + 6x - 2 = 0$$

$$y'' = 2 + 6 = 8$$

$$x = -1$$

+	-	+	-	+
+	-	+	-	+

موجب • • • • •
منفی • • • • •

$$f(-1) = -1 + 3 + 2 + 2 = 6$$

۶- نقاط ماکزیم و می نیم نسبی و نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$ بدست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره خط واصل بین نقاط ماکزیم و می نیم نسبی است.

$$y' = 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 + 36 = 100$$

$$\frac{8 \pm 10}{6} < -\frac{1}{3}$$

$$y = 27 - 36 - 9 + 10 = -8$$

$$y = -\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + 1 + 10 = -\frac{13}{27} + 11 = \frac{296}{27}$$

$$y'' = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{64}{27} - \frac{64}{9} - \frac{4}{3} + 10 = \frac{64 - 192 - 36 + 270}{27} = \frac{46}{27}$$

۷- $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ ، ضرایب a, b, c, d را چنان تعیین کنید که این تابع در $(0, 3)$ دارای

یک ماکزیمم یا می نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در $(-1, 1)$ یک نقطه عطف داشته باشد.

$$3 = 0 + 0 + 0 + d \rightarrow d = 3$$

$$y' = 2ax^2 + 2bx + c = 0 \rightarrow 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$-1 = a + b + 0 + 3 \rightarrow a + b = -4$$

$$y'' = 4ax + 2b = 0$$

$$\rightarrow a - 2a = -4$$

$$a = 2$$

$$4a + 2b = 0 \rightarrow b = -4a$$

$$b = -8$$

۸- اگر $y = ax^2 + bx^2$ ، ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در

نقطه $(1, 2)$ دارای یک نقطه عطف باشد.

$$2 = a(1)^2 + b(1)^2 \rightarrow \underline{a + b = 2}$$

$$y' = 2ax^2 + 2bx = 0$$

$$2a(1)^2 + 2b(1) = 0$$

$$2a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} -2a - 2b = -4 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$a = -4$$

$$-4 + b = 2 \rightarrow b = 6$$

۹- طول نقاط عطف یک منحنی به معادله $y = (x^2 - 7x + 14)e^x$ را بدست آورید.

$$y' = (2x - 7)e^x + (x^2 - 7x + 14)e^x = (x^2 - 5x + 7)e^x$$

$$y'' = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = e^x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\{1, 2\}$$

مسائل صفحه ۱۰۷

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

$$D: \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$y' = 3x^2 + 8x - 2 = 0$$

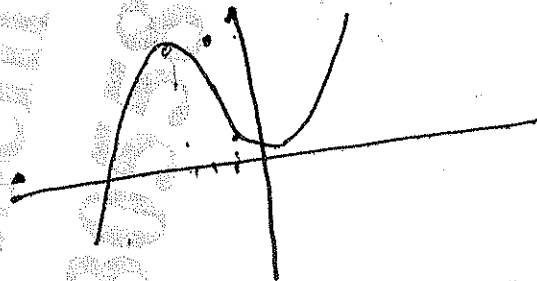
$$\Delta = 64 + 24 = 88$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{88}}{6} < \frac{1}{3}$$

$$y'' = 6x + 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$y = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y''	-	-	0	+	+
y	$-\infty$	28	$\frac{506}{27}$	$\frac{284}{27}$	$+\infty$



$$y' = 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = -\frac{2}{3}$$

$$y' = 12x^2 + 2 \neq 0$$

همواره مثبت و رو به بالا

$$y = x^3 + x^2 + 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
y'	-	0	+	+
y''	+	+	+	+
y	$-\infty$	$\frac{1}{27}$	1	$+\infty$



$$D: \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ جانب چپ}$$

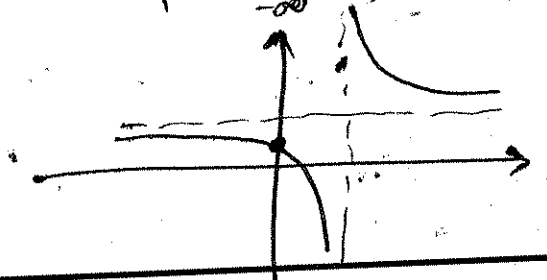
$$y = \frac{2}{3} \text{ جانب راست}$$

$$y = \frac{-10 + 9}{(3x - 5)^2} = \frac{-1}{(3x - 5)^2} < 0$$

$$y' = \frac{0 + 2(3x - 5)}{(3x - 5)^3} = \frac{2}{(3x - 5)^2}$$

$$y = \frac{2x - 2}{3x - 5}$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y''	+	+	+
y	$\frac{2}{3}$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$



$x^2 + 1 \neq 0$ تابع $y = \frac{x}{x^2+1} - 2$

میان افقی $y=0$

$y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1=0$
 $x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

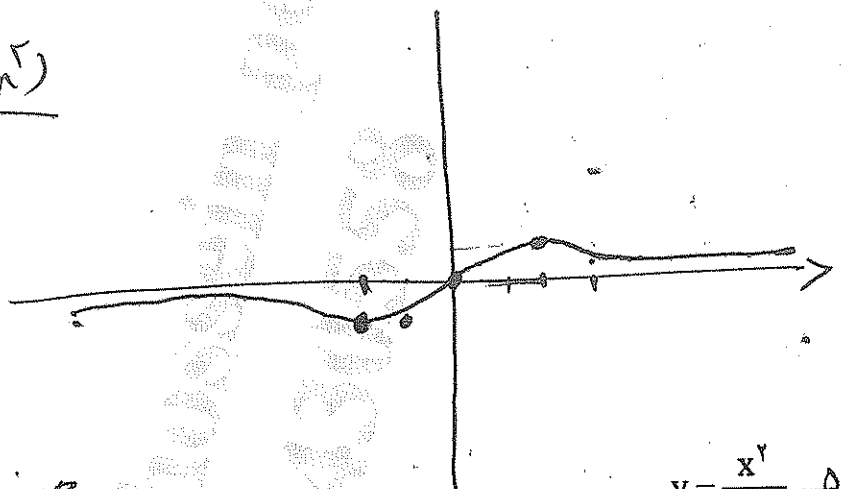
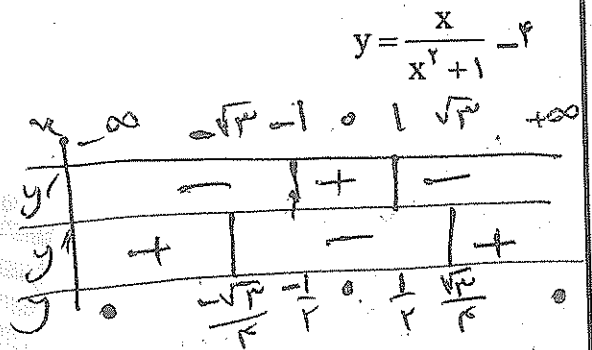
$y'' = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 2x^2 \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$= \frac{-2x(x^2+1)(x^2+1+2x^2)}{(x^2+1)^4}$

$x=0 \Rightarrow y=-2$

$x^2=1$

$x=\pm 1$



میان عمودی $x-1=0 \rightarrow x=1$

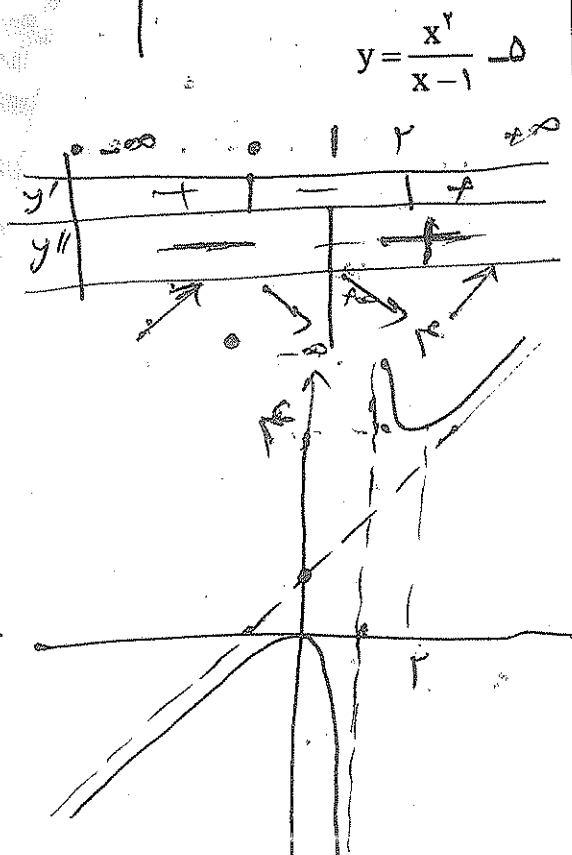
$y = \frac{x-1}{x^2+1}$
 $y' = \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$
 $y'' = \frac{(x^2+1)^2 - 2x(x-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$y' = \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

$x=0, x=1$

$y'' = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2(x-1)}{(x^2+1)^4}$

$(x^2+1)(x^2+1-4x^2(x-1))=0$



$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow x^2 > 1 \quad \begin{matrix} x > 1 \\ x < -1 \end{matrix}$$

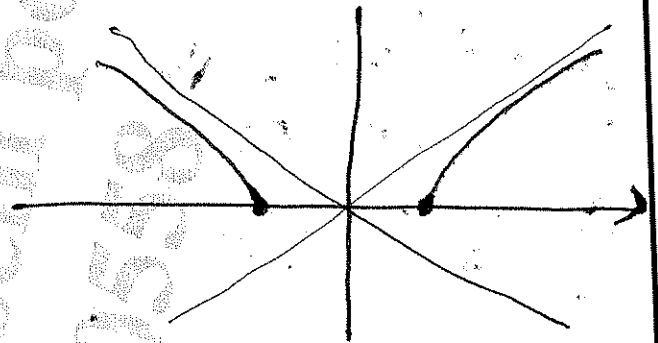
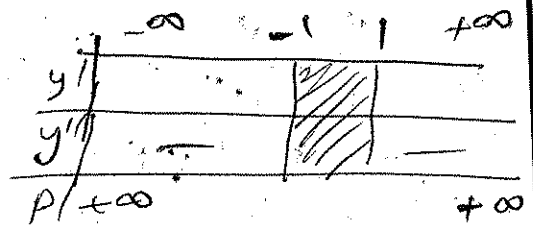
$$y' = \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{نقطه}$$

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = 0$$

$$\frac{x^2-1 - x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty \quad y = |x| \leq \pm x$$

$$y = \sqrt{x^2-1} - 1$$

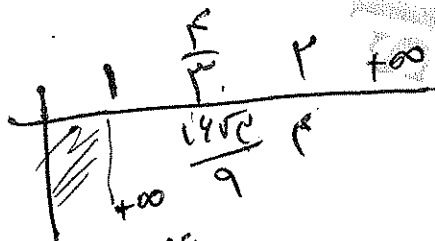


$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$y' = \frac{2x\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}x^2}{x-1}$$

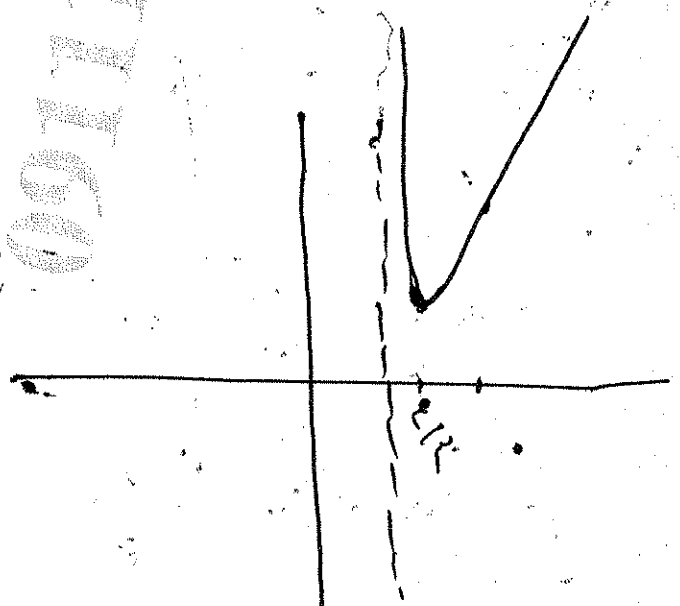
$$= \frac{2x(x-1) - x^2}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - x^2 &= 0 \quad \text{نقطه} \\ x^2 - 2x &= 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix} \end{aligned}$$



$$y = \frac{\frac{14}{9}}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} - y$$



مسائل صفحه ۱۱۹

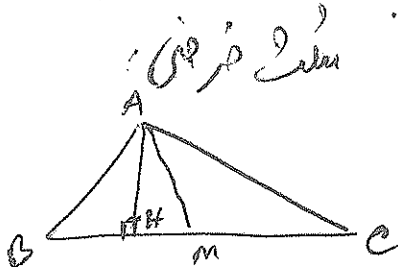
۱- مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ و $B(-2,-2)$ و $C(2,2)$ مفروض است.

الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.

ج) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید.

د) نقطه تلاقی میانه AM و ارتفاع BH را به دست آورید.



$$m_{BC} \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = (1, 0)$$

$$m_{AM} = \frac{4-0}{1-1} = \infty \quad x=1$$

$$\text{ب) } AM = \sqrt{(1-1)^2 + (4-0)^2} = 4$$

$$\text{ج) } m_{BC} = \frac{2+2}{2+2} = \frac{2}{2} \rightarrow m'_{AH} = -\frac{2}{2}$$

$$y-2 = -\frac{2}{2}(x-1) \rightarrow 2y-4 = -2x+2$$

$2y + 2x = 6$
ارتفاع AH

$$\text{د) } m_{AC} = \frac{2-4}{2-1} = -2 \quad m'_{BH} = \frac{2}{2}$$

$$y+2 = \frac{2}{2}(x+2) \quad 2y+2 = 2x+2$$

$2y = 2x$
 $y = x$

$$\begin{cases} 2y-2x=6 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow 2y=8 \quad y=4$$

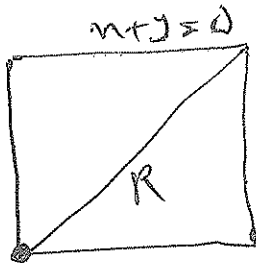
فصل پنجم

هندسه مختصاتی

۹

منحنی های درجه دوم

۲- طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x + y = 5$ و مختصات یک رأس آن $A(-2, 1)$ باشد را به دست آورید.



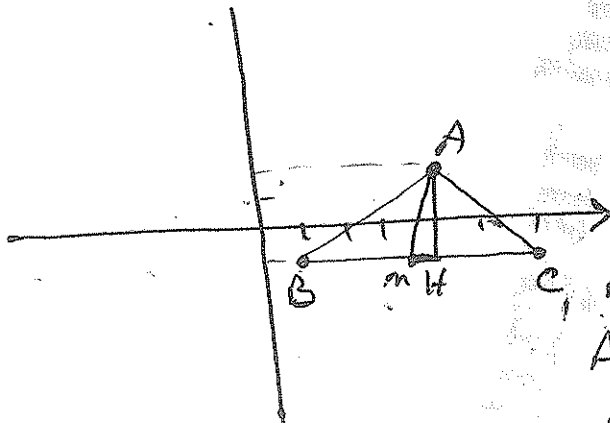
$A(-2, 1)$

$$d = \frac{|-2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$R = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۳- نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید.



$$|BC| = \sqrt{(6-1)^2 + (-1+1)^2} = 5$$

$$BM = \frac{5}{2}$$

$$BC \text{ قرار } y = -1$$

$$H(4, -1)$$

$$AH \text{ قرار } x = 4$$

$$BH = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+1)^2} = 3$$

$$MH = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

۴- دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 0x_1 - 11x_2 + 3x_3 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 9u_1 - 11u_2 = -17 \\ -4u_1 - 10u_2 = -99 \\ \hline -15u_2 = -92 \end{array}$$

$$x_1 = 1 - \delta \left(\frac{q_1}{c_1} \right) = \frac{181 - 109}{11} = \frac{72}{11}$$

$$n_p = -\delta - \frac{q_1}{\epsilon_1} + \frac{194}{\epsilon_1} = \frac{-r_1 \delta - q_1 + 194}{\epsilon_1} = \frac{-v_0}{\epsilon_1}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 9x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} -9u_1 - 1u_7 + 7u_2 = -19 \\ 9u_1 + 1u_7 - 7u_2 = 19 \end{array} \right. \\ \hline \bullet \quad +0 \quad +0 = -10 \end{array}$$

۱۰۴

[illegible]

$$\rightarrow \begin{cases} -10x - 42y = -112 \\ 80x + 40y = 120 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \times 171 - 2 &= 17 \\ 2 &= \Sigma \cdot \Sigma + 015 - 17 \\ 2 &= 9 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\Delta x + 14 \times 10^{-11} = 2\lambda$$

$$\Delta x = 2\lambda - 1.4 \times 10^{-10} = 1.4 \times 10^{-10}$$

مسائل صفحه ۱۲۴

۱- مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

$$w_x^2 + w_y^2 + f_x - 1 = 0 \quad (b)$$


$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \text{ (الف)}$$

$$V_X^T + V_Y^T + 112y = 0 \quad (c)$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0 \quad (7)$$

الف) $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

مرکز $\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ $R = \sqrt{2}$



ج) $r(n+1) + y - 1 = 0$
 $r(n+1) - r + y - 1 = 0 \rightarrow r(n+1) + y = 1$
 مرکز $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
 $(n+1) + y = \frac{1}{r}$
 $R = \frac{1}{\sqrt{r}}$

2.) $O(-\frac{4}{r}, \frac{r}{r}) = (3, 1)$

$$R = \frac{1}{F} \sqrt{(-9)^2 + (1)^2 - f(1)} = \frac{1}{F} \sqrt{82 - 1} = \frac{9}{F} = r$$

۲- چه نقاطی^۱ در نابرابری های زیر صدق می کنند؟

$$2x^2 + 2y^2 + x + y > 0 \quad (ب)$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0 \text{ (الف)}$$

جواب) $x^r + (x+r) - (x+y) - 1 \leq 0 \rightarrow (x+r)^r + y^r \leq 1$

فقط ورود داخل داروای بهرگز (۲۰-۲۰۰) و شمع ۴ قرار دارند

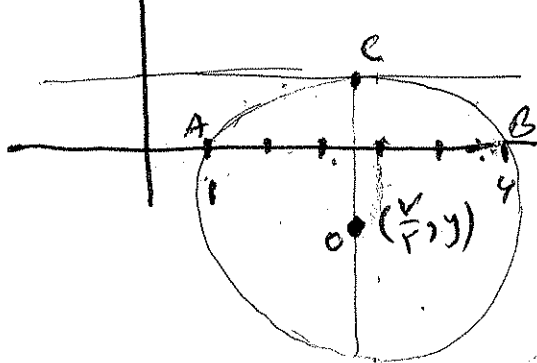
$$\rightarrow r\left(x^r + \frac{x}{p} + \frac{1}{19} - \frac{1}{19}\right) + r\left(y^r + \frac{y}{p} + \frac{1}{19} - \frac{1}{19}\right) \geq 0$$

$$\rightarrow \left(r\left(x + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{x} + r\left(y + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{y} \right) > 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{r} \right)^r + \left(y + \frac{1}{r} \right)^r > \frac{1}{r}$$

۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1,0)$ و $(6,0)$ گذشته و بر خط $y=1$ مماس باشد.

مرکز روی خط $y=1$ $x = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$

$$(x - \frac{7}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$$



$$OA = OC$$

$$\left(\sqrt{(\frac{7}{2}-1)^2 + (1/2-0)^2} \right)^2 = 1^2 - 1^2$$

$$\frac{25}{4} + y^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$2y = 1 - \frac{25}{4} = -\frac{21}{4} \quad y = -\frac{21}{8} \quad R = \left| -\frac{21}{8} - 1 \right| = \frac{29}{8}$$

۴- اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(6,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(0,3)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

$$|AM| = 2|BM|$$

$$\left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} \right)^2 = 4 \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} \right)^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 24y + 36$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x - 24y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0 \quad \text{مرکز } (-2, 4)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64} = 2\sqrt{5}$$

۶- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0,0)$ و $(17,7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x - 5y = 0$ واقع باشد.

محکمات مرکز $\begin{cases} x \\ \frac{6}{5}x \end{cases}$ حاصل مرکز را در نقطه قرار است

$$\sqrt{(x-0)^2 + (\frac{6}{5}x-0)^2} = \sqrt{(x-17)^2 + (\frac{6}{5}x-7)^2}$$

$$x^2 + \frac{36}{25}x^2 = x^2 - 34x + 289 + \frac{36}{25}x^2 - \frac{14}{5}x + 49$$

$$\frac{170 + 18}{25}x = 338$$

$$\frac{208}{5}x = 338$$

$$x = \frac{8 \times 338}{208} = 13$$

$$R = \sqrt{34 + \frac{1294}{25}}$$

www.karamath.ir

$$(x-4)^2 + (y-\frac{29}{8})^2 = 34 + \frac{1294}{25}$$

۷- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(7,1)$ و $(0,0)$ و $(-1,6)$ بگذرد. مرکز و شعاع این

دایره را بیابید.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

معادله دایره

$$(7,1) \rightarrow 49 + 1 + 7a + b + c = 0$$

$$(0,0) \rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$(-1,6) \rightarrow 1 + 36 - a + 6b + c = 0$$

$$a = -\frac{27}{5} = -5.4$$

$$x^2 + y^2 - 5.4x + 7y = 0$$

$$\begin{cases} 7a + b = -50 \\ (-a + 6b = -37) \times 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a + b = -50 \\ -7a + 42b = -259 \end{cases}$$

$$43b = -309 \quad b = -7.2$$

$$\text{مرکز } (2.7, -\frac{7}{2}) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 49}$$

۸- معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به دست آورید:

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$4x - 4y - 92 = 0$$

$$x - y - 23 = 0$$

۹- ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 12 = 0 \rightarrow x = -6$$

$$49 + y^2 + 28 + 2y - 10 = 0$$

$$y^2 + 2y + 67 = 0$$

$$49 + y^2 - 12 + 2y - 24 = 0$$

$$y^2 + 2y + 13 = 0$$

۱- برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل،

مماس خارج، یا متقاطع اند؟

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$OO' < 2\sqrt{5}$$

$$OO' < 2\sqrt{5}$$

داخل همد

$$O(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4 \times 4 - 16} = \frac{1}{2} \sqrt{20 + 16} = \frac{10}{2} = 5$$

$$O'(-1, 2)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$O(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \sqrt{5}$$

$$O'(-1, 2)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$OO' = R + R'$$

مماس خارج اند

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9 \quad (\text{ج})$$

$$O(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4 \times 4 - 16} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$OO' = 2\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 7$$

$$O(2, -3)$$

$$R = \sqrt{7}$$

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$R - R' < OO' < R + R'$$

متقاطع

$$O'(-1, 2)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4 \times 9} = \frac{2\sqrt{12}}{2} = \sqrt{12}$$

(د)

$$x^2 + (y-5)^2 = 5$$

$$O'(0, 5)$$

$$R' = \sqrt{5}$$

$$OO' > R + R'$$

خارج همد

۱۱- معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_1O_2 = 0$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (دو دایره متخارج)

(الف) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$

$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$

مسائل صفحه ۱۳۳

۱- مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

(الف) $y^2 - 2y + x - 1 = 0$

$y^2 - 2y = -x + 1$

$y^2 - 2y + 1 = -x + 2$

$(y-1)^2 = -(x-2)$

$S \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad 4p = -1 \rightarrow p = -\frac{1}{4}$

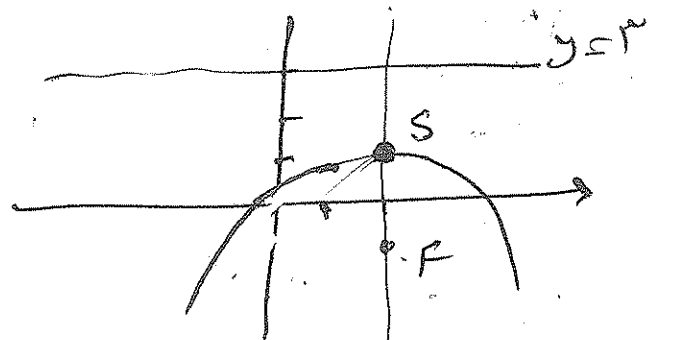
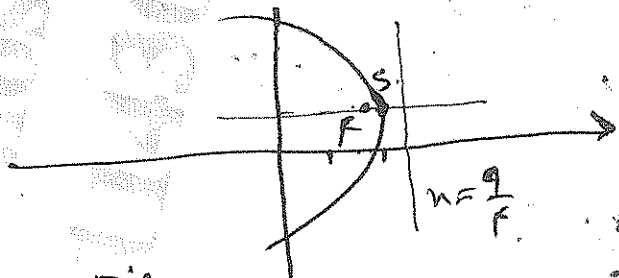
(ب) $xy = 4 + 2x - x^2$

$xy - 4 = -x^2 + 2x$

$xy - 4 - 4 = -x^2 + 4x - 4$

$x(y-1) = -(x-2)^2$

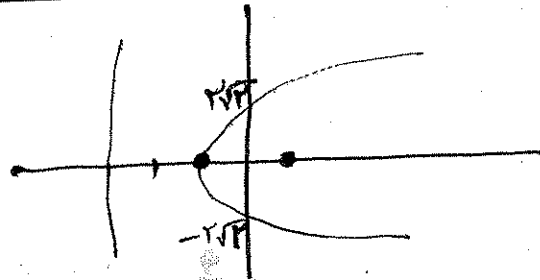
$(x-2)^2 = -x(y-1) \quad S \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad 4p = -8 \quad F \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad y = 1 + 2 = 3$
 $p = -2$



ب) $y^2 - 8x - 8 = 0$

$y^2 = 8x + 8$

$y^2 = 8(x+1)$



$FP = 8$ $S \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $F \begin{vmatrix} -1+2 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $2 = -1 - 2 = -3$
 $P = 2$

ن) $2y^2 + 6x - 4y = 0$

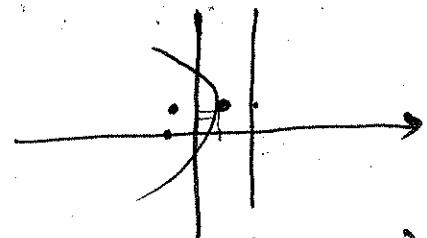
$2y^2 - 4y = -6x$

$y^2 - \frac{2}{1}y = -3x$

$y^2 - \frac{2}{1}y + \frac{1}{4} = -3x + \frac{1}{4}$

$(y - \frac{1}{2})^2 = -3(x - \frac{1}{12})$

$x = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{13}{18}$



$S \begin{vmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{12} \end{vmatrix}$ $FP = -5$ $F \begin{vmatrix} \frac{2}{9} - \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$
 $P = -\frac{1}{12}$

۲- معادله یک سهمی را بنویسید که $x=4$ خط هادی و $y=2$ محور تقارن آن و از نقطه $A(9,7)$ بگذرد.

بگذرد.

$F \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$

$x_0^2 - 18x_0 + 40 = 0$

$(x_0 - 5)(x_0 - 8) = 0$

$x_0 = 5$

$x_0 = 8$

$\sqrt{(9-x_0)^2 + (7-2)^2} = |9-4|$

$11 - 18x_0 + x_0^2 + 9 = 25$

$(y-2)^2 = 4(\frac{9}{4})(x - \frac{13}{4})$

$S \begin{vmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{2}{1} \end{vmatrix}$ $FP = 13 - 4$
 $P = \frac{9}{4}$

۳- معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(3,5)$ و معادله خط هادی آن $x = -3$ باشد.

$F \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ $S \begin{vmatrix} -3 \\ 5 \end{vmatrix}$ $x = -3$

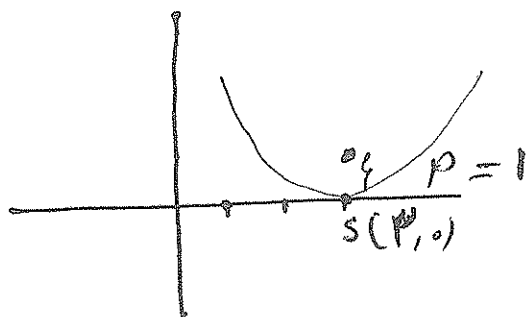
سهمی افقی

$P = |3 - (-3)| = 6$

$(y-5)^2 = 4(6)(x - (-3))$

$y^2 - 10y + 25 = 12x$

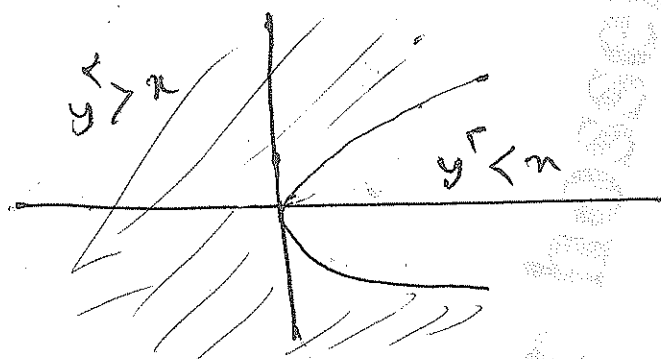
۴- معادله سهمی قائم مماس بر محور x ها که دارای کانون $F(3, 1)$ باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.



$$(x-3)^2 = 4p(y-0)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4y$$

۵- چه نواحی ای از صفحه در نابرابری های $y^2 > x$ و $y^2 < x$ صدق می کنند؟ «با رسم شکل».



۶- ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله $y^2 = 4px$ در نقطه $M(x_0, y_0)$ واقع بر آن به صورت $yy_0 = 2p(x + x_0)$ می باشد.

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 - 4px = 0$$

$$2yy' - 4p = 0$$

$$y' = \frac{2p}{y}$$

$$m = \frac{2p}{y_0}$$

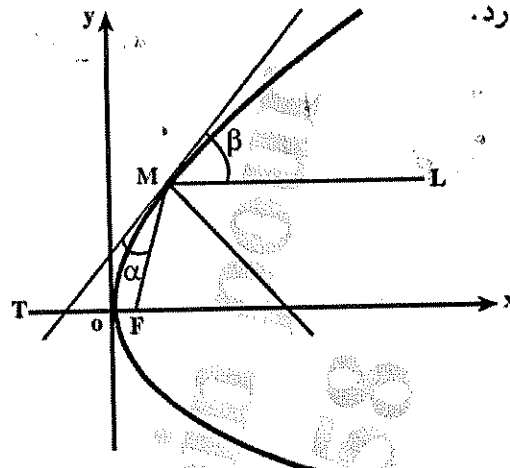
$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x - x_0)$$

$$yy_0 - y_0^2 = 2px - 2px_0$$

$$yy_0 - 4px_0 = 2px - 2px_0$$

$$yy_0 = 2px + 2px_0 = 2p(x + x_0)$$

۷- از نقطه $M(x, y)$ روی سهمی به معادله $y^2 = 4px$ مماس و قائم بر سهمی را رسم کرده‌ایم (شکل زیر). ثابت کنید $\alpha = \beta$. از اینجا نتیجه بگیرید که هر پرتوی که موازی محور سهمی بر سهمی بتابد از کانون سهمی می‌گذرد.



[راهنمایی: از مسأله ۶ و این ویژگی سهمی که فاصله هر نقطه آن تا کانون برابر فاصله آن از

خط هادی است استفاده کنید.]

$$yy_0 = 2p(x + x_0)$$

$$y = \frac{2p}{y_0}x + \frac{2px_0}{y_0}$$

$$\tan \beta = \frac{2p}{y_0}$$

$$M(x_0, y_0)$$

$$F(p, 0)$$

$$m = \frac{y_0 - 0}{x_0 - p} = \frac{y_0}{x_0 - p}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{2px_0 - 2p^2}{y_0(x_0 - p)} - \frac{2p}{y_0}}{\frac{x_0 - p + 2p}{x_0 - p}} \right| = \frac{-2p - 2px_0}{y_0(x_0 + p)} = \frac{2p}{y_0}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{2p}{y_0} - \frac{y_0}{x_0 - p}}{1 + \frac{2p}{x_0 - p}} \right|$$

۸- یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۷۵ سانتیمتر

می‌باشد. اگر قطر قاعده آینه ۱۶۰ سانتیمتر باشد، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

$$P = 75$$

$$y^2 = 4px \rightarrow y^2 = 4 \times 75 \times 10 \Rightarrow y^2 = 3000 \Rightarrow y = \sqrt{3000}$$

۹- ثابت کنید دایره‌ای که قطرش وتری از سهمی است که از کانون بر محور تقارن آن عمود

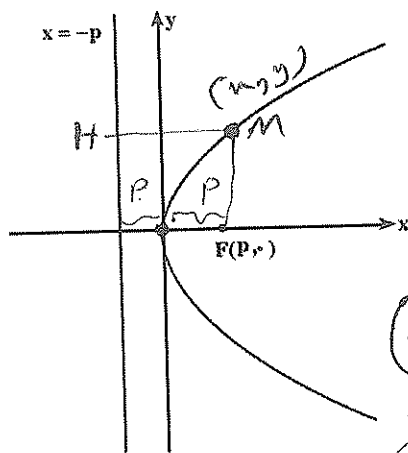
است، مماس بر خط هادی این سهمی است.

M محل برخورد دایره و سهمی است و در سهمی فاصله هر نقطه

از سهمی از کانون و خط هادی برابر است لذا

$$|AF| = |MH| \Rightarrow FH = R$$

محور خط هادی بر دایره مماس است زیرا در H بر شعاع عمود

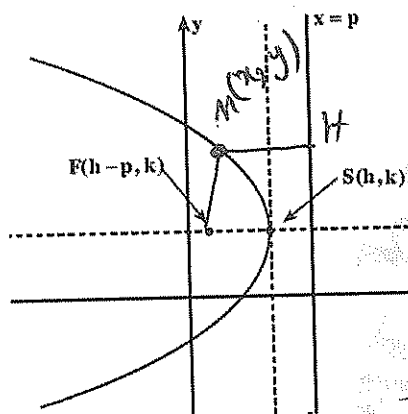


۱۰- با توجه به شکل مقابل نشان دهید $y^2 = 4px$ معادله

سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات است و دهانه آن رو به راست باز می‌شود.

$$|MF| = |MH|$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} &= |x+p| \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ y^2 &= 4px \end{aligned}$$

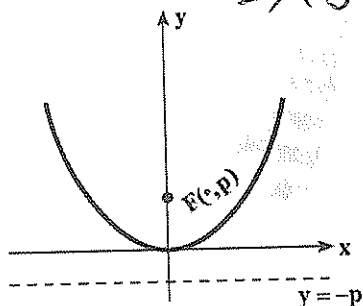


۱۱- با توجه به شکل مقابل نشان دهید که

معادله سهمی است به رأس (h, k) و دهانه آن رو به چپ باز می‌شود.

$$|MF| = |MH|$$

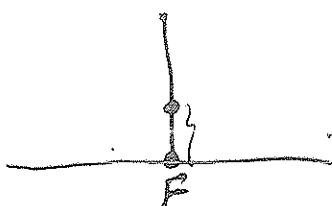
$$\begin{aligned} \sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-k)^2} &= |x-p| \\ x^2 - 2x(h-p) + (h-p)^2 + (y-k)^2 &= x^2 - 2px + p^2 \\ x^2 - 2xh + 2px + h^2 - 2hp + p^2 + (y-k)^2 &= x^2 - 2px + p^2 \\ \Rightarrow (y-k)^2 &= -4p(x-h) \end{aligned}$$



۱۲- به شکل مقابل توجه کنید. قانون F را به خط هادی

L نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. در حالتی که F بر خط L منطبق

شود، شکل سهمی چگونه تغییر می‌یابد؟



سهمی به صورت خط مماس بر خط هادی درمی‌آید.
فاصله هر نقطه آن از خط هادی و قانونی یکی است.

مسائل صفحه ۱۳۹

۱- معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(2, -2)$ و $F'(-4, -2)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $e = \frac{3}{5}$ باشد.

$$|FF'| = 2c \rightarrow |2+4| = 2c \rightarrow c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-2-2}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

بیضی افقی

۲- بیضی به معادله $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

$$4x^2 + 8x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\begin{matrix} \text{مرکز} \\ \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

$$F \left| \begin{matrix} -1 \\ 1+\sqrt{3} \end{matrix} \right. \quad F' \left| \begin{matrix} -1 \\ 1-\sqrt{3} \end{matrix} \right.$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \quad (AA') = 4$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = 1 \quad (BB') = 2\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$|FF'| = 2\sqrt{3}$$

۳- نقطه $M \begin{cases} x = 1 + 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$ مفروض است اولاً: ثابت کنید مکان هندسی نقطه M وقتی t تغییر کند، بیضی است. ثانیاً: نقطه‌ای از بیضی را که به ازای $t = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید، N می‌نامیم معادله خط مماس بر بیضی را در نقطه N بنویسید.

الف) $x - 1 = 3 \sin t \rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} = \sin^2 t$
 $y = 2 \cos t \rightarrow \frac{y^2}{4} = \cos^2 t \rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \sin^2 t + \cos^2 t$
 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\rightarrow N \begin{cases} x = 1 + 3 \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$
 $y - \sqrt{2} = \frac{2}{14} (x - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2})$
 $y' = - \frac{\frac{2}{9}(x-1)}{\frac{y}{2}} = - \frac{\frac{2}{9}(\frac{3\sqrt{2}}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = - \frac{2}{14}$

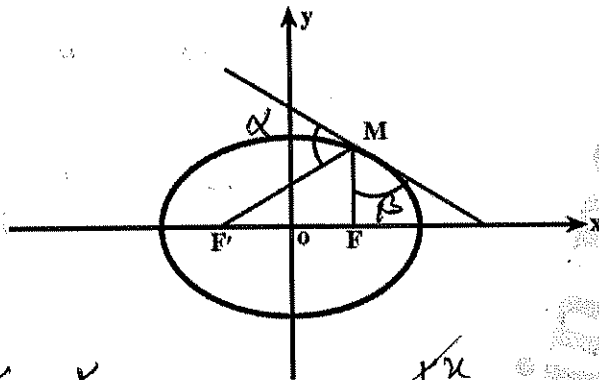
۵- به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c ، بیضی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در مبدأ مختصات بر محور x مماس است و از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد؟

$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow c=0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 14 + 1 + 4a - b = 0 \quad 4a - b = -15$

$y=0 \rightarrow \Delta=0 \quad 4x^2 + ax = 0$
 $a^2 = 0 \rightarrow a=0 \rightarrow b=-15$

۶- ویژگی بازتابندگی بیضی: بیضی وار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می آید. آینه را با نقره اندود کردن درون رویه بیضی وار می سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانون ها ساطع شود به کانون دیگر باز می تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می کنند و از این ویژگی بیضی وار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می کنند. مطابق شکل مقابل نشان دهید که خطوط گذرنده از نقطه M واقع بر بیضی و دو کانون آن با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می دهند.

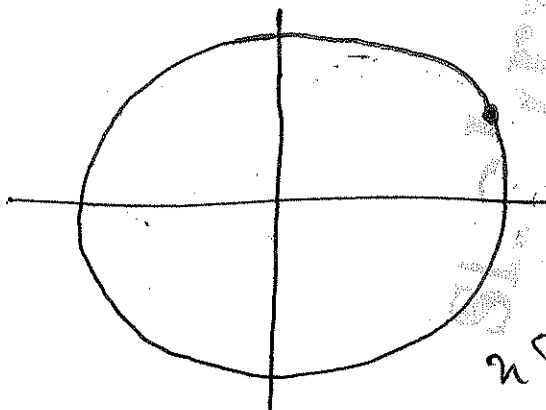


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y'_x = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_0}{y_0} \quad M(x_0, y_0)$$

$$MF = \frac{0 - y_0}{c - x_0} = \frac{y_0}{x_0 - c} \quad \tan \alpha = \left| \frac{-\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 - \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} \times \frac{y_0}{x_0 + c}} \right| = \left| \frac{y_0}{a^2} \right|$$

$$MF' = \frac{0 - y_0}{-c - x_0} = \frac{y_0}{-c - x_0}$$

۷- معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه های واقع بر دایره $x^2 + y^2 = 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کنند.



$$(x, \frac{4}{3}y) = (x', y')$$

$$x = x'$$

$$y = \frac{4}{3}y'$$

$$x^2 + \frac{16}{9}y'^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1 \quad \text{بیض افقی به مرکز (۰،۰)}$$

قطرهای ۹، ۸

مسائل صفحه ۱۴۷

مسائل

۱- جدولی‌های زیر را رسم کنید:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{ب})$$

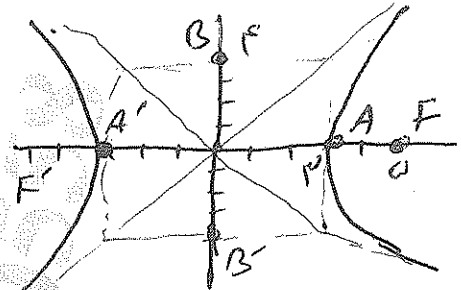
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \quad (\text{د})$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \quad (\text{ج})$$

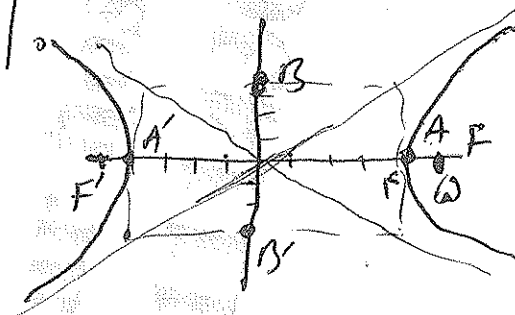
الف) $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
 $b^2 = 16 \rightarrow b = 4$
 $c^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow c = 5$

محورها



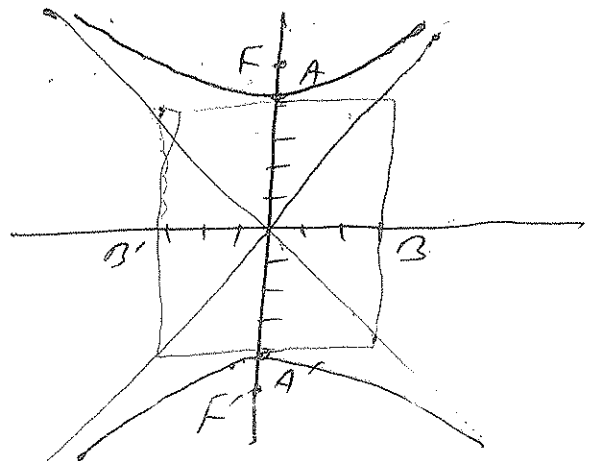
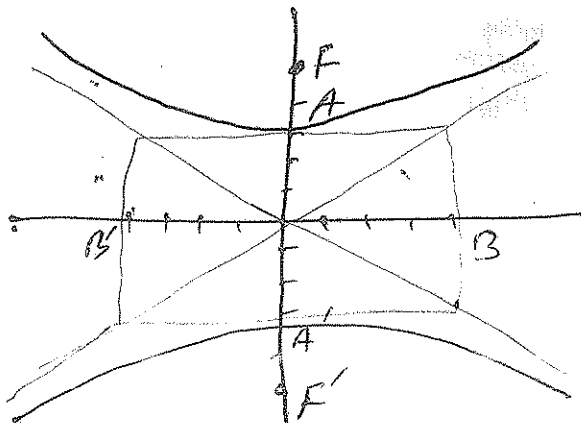
ب) $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
 $b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
 $c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

محورها



ج) $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
 $b^2 = 16 \rightarrow b = 4$
 $c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

د) $\frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{9} \leq 1$
 $a = 4 \quad b = 3 \quad c = 5$



در تمرین های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون ها و ثابت های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید.
سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

$$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 36$$

$$4(y+3)^2 - 9(x-2)^2 = 1$$

$$5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 2$$

$$4x^2 = y^2 - 4y + 8$$

$$4y^2 = x^2 - 4x$$

$$4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$$

-۲

-۳

-۴

-۵

-۶

-۷

-۸

$$۲) \frac{(x-2)^2}{۴} - \frac{(y+3)^2}{۹} = 1 \quad \begin{matrix} ۲ \\ -۳ \end{matrix} \quad \begin{matrix} A/۴ \\ A'/-۳ \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۲ \\ -۳ \end{matrix} \quad \begin{matrix} B/۴ \\ B'/-۳ \end{matrix}$$

$$a^2=4 \rightarrow a=2$$

$$b^2=9 \rightarrow b=3$$

$$c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$F/2+\sqrt{13}$$

$$F'/2-\sqrt{13}$$



$$۱) 5x^2 - 16x + 14 - 14 - 5y^2 + 10y - 5 + 5 + 31 = 0$$

$$5(x-2)^2 - 5(y-1)^2 = -20$$

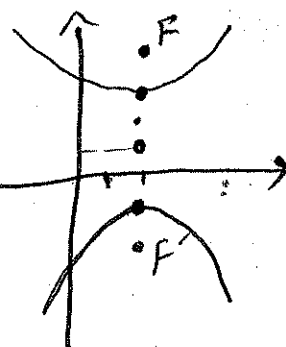
$$\frac{(y-1)^2}{۴} - \frac{(x-2)^2}{۵} = 1$$

$$\begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} \quad \begin{matrix} A/۴ \\ A'/-۱ \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} \quad \begin{matrix} B/2+\sqrt{5} \\ B'/2-\sqrt{5} \end{matrix} \quad \begin{matrix} F/۲ \\ F'/-۲ \end{matrix}$$

$$a^2=4 \rightarrow a=2$$

$$b^2=5 \rightarrow b=\sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{4+5} = 3$$



$$۵) ۵x^2 + ۲۰x + ۲۰ - ۲۰ - ۴y^2 + ۸y - ۴ + ۴ = ۲$$

$$۵(x+۲)^2 - ۴(y-۱)^2 = ۱۸$$

$$\frac{(x+۲)^2}{\frac{۱۸}{۵}} - \frac{(y-۱)^2}{\frac{9}{۲}} = 1$$

$$a^2 = \frac{۱۸}{۵} \quad a = ۳\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

$$b^2 = \frac{9}{۲} \rightarrow b = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$c = \sqrt{\frac{۱۸}{۵} + \frac{9}{۲}} = \sqrt{\frac{۳۶+۴۵}{۱۰}} = \frac{9}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\begin{array}{c|c} -۲ & \\ \hline ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۲+۳\sqrt{\frac{۲}{۵}} & \\ \hline ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۲-۳\sqrt{\frac{۲}{۵}} & \\ \hline ۱ & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} -۲ & \\ \hline ۱+\frac{۳}{\sqrt{۲}} & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۲ & \\ \hline ۱-\frac{۳}{\sqrt{۲}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} -۲+\frac{9}{\sqrt{۲}} & \\ \hline ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۲-\frac{9}{\sqrt{۲}} & \\ \hline ۱ & \end{array}$$

$$۶) ۴x^2 - y^2 - ۴y + ۸$$

$$۴x^2 - y^2 + ۴y - ۴ = ۴$$

$$۴x^2 - (y-۲)^2 = ۴$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{(y-۲)^2}{۴} = 1$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

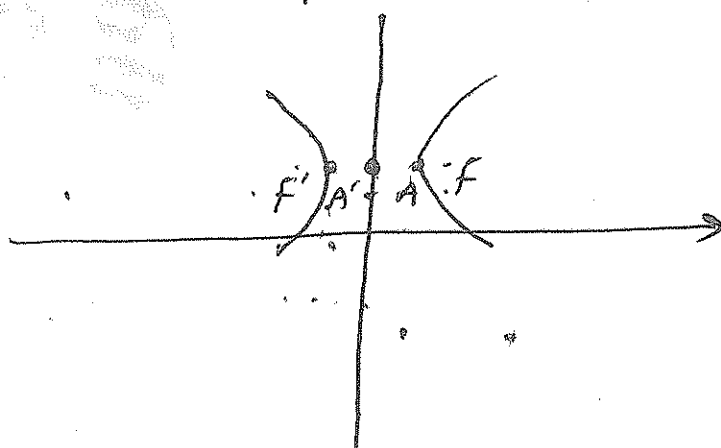
$$b^2 = ۲ \rightarrow b = \sqrt{۲}$$

$$c = \sqrt{۵}$$

$$\begin{array}{c|c} ۰ & \\ \hline ۲ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} ۱ & \\ \hline ۲ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۱ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} -۲ & \\ \hline ۴ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \sqrt{۵} & \\ \hline ۲ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -\sqrt{۵} & \\ \hline ۲ & \end{array}$$



۹- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $xy = a^2$ (و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره خط BC است.

$$y'_x = -\frac{y}{x} \rightarrow m = -\frac{y_0}{x_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

$$B \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2y_0 \end{array} \right) \quad C \left(\begin{array}{c} 2x_0 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$M_{BC} = \left(\begin{array}{c} \frac{0+2x_0}{2} = x_0 \\ \frac{2y_0+0}{2} = y_0 \end{array} \right) = A$$

۱۰- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره خط BC است.

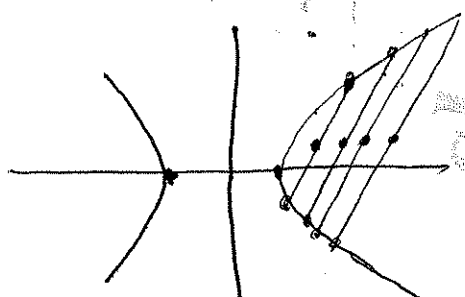
$$y'_x = \frac{2x}{-2y} \rightarrow m = -\frac{x_0}{y_0} \rightarrow m' = \frac{y_0}{x_0}$$

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

$$B \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2y_0 \end{array} \right) \quad C \left(\begin{array}{c} 2x_0 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$M_{BC} = \left(\begin{array}{c} \frac{0+2x_0}{2} = x_0 \\ \frac{2y_0+0}{2} = y_0 \end{array} \right) = A$$

۱۱- خطوط موازی با شیب m و تریایی بر هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ ایجاد می‌کنند، ثابت کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.



$$y = mx + n$$

$$x^2 - m^2x^2 - 2mnx - n^2 = 1$$

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnx - n^2 - 1 = 0$$

$$\text{نقطه وسط} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2mn}{2(1 - m^2)} = \frac{mn}{1 - m^2}$$

$$y = m \left(\frac{mn}{1 - m^2} \right) + n = \frac{m^2n + n - m^2n}{1 - m^2} = \frac{n}{1 - m^2} \quad \left(\frac{mn}{1 - m^2}, \frac{n}{1 - m^2} \right)$$

$$\text{خط موازی} = \frac{\frac{n}{1 - m^2}}{\frac{mn}{1 - m^2}} = \frac{1}{m} \rightarrow y = \frac{1}{m}x$$

مسائل دوره‌ای فصل

۱- سهمی به معادله $y = x^2$ مفروض است. فرض کنیم A نقطه‌ای واقع بر این سهمی غیر از مبدأ مختصات باشد. مماس بر سهمی در نقطه A محورهای x و y را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه B وسط پاره خط AC است.

۲- مماس بر هذلولی به معادله $xy = a^2$ ($a \neq 0$ عددی ثابت) در یک نقطه واقع بر آن محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند؛ ثابت کنید مساحت مثلث OBC عددی ثابت است (O مبدأ مختصات است).

۳- در چه نقاطی از سهمی به معادله $y = x^2$ قائم بر سهمی از نقطه $A(0, a)$ می‌گذرد؟ $a > \frac{1}{4}$.

۴- ثابت کنید هذلولی $x^2 - y^2 = 2$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - \frac{3}{4} = 0$ در نقاط $A(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ و $B(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ بر هم مماس هستند.

۵- بر سهمی به معادله $y = x^2 + 5x + 10$ نقطه‌ای به دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط $y = 6x + 7$ باشد.

۶- بر بیضی به معادله

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

نقاطی را به دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط $y = 4x + 7$ باشد.

۷- نقطه $A(x, y)$ با مختصات پارامتری

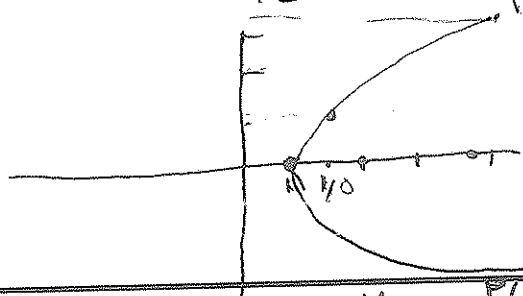
$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ و } y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

مفروض است که در آن $t \in \mathbb{R}$. به ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس

بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

الف)

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=-1$	$t=-2$	$t=3$
$\frac{e^0+e^{-0}}{2} = 1$	$\frac{e^1+e^{-1}}{2} = 1.5$	$\frac{e^2+e^{-2}}{2} = 1.8$	$\frac{e^{-1}+e^1}{2} = 1.5$	$\frac{e^{-2}+e^2}{2} = 1.8$	$\frac{e^3+e^{-3}}{2} = 2.1$
$\frac{e^0-e^{-0}}{2} = 0$	$\frac{e^1-e^{-1}}{2} = 1.2$	$\frac{e^2-e^{-2}}{2} = 1.9$	$\frac{e^{-1}-e^1}{2} = -1.2$	$\frac{e^{-2}-e^2}{2} = -1.9$	$\frac{e^3-e^{-3}}{2} = 2.1$



ب)
$$\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} - \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = 1$$

۷- نقطه $A(x, y)$ با مختصات پارامتری

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ و } y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

مفروض است که در آن $t \in \mathbb{R}$. به ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید وقتی t در \mathbb{R} تغییر می‌کند نقطه A بر یک هذلولی حرکت می‌کند. معادله این هذلولی را به دست آورید.

۸- ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی a ، خط مستقیم به معادله $y = ax + \sqrt{4a^2 + 9}$ بر بیضی به معادله

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

مماس است.

۹- ثابت کنید دایره به معادله $x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0$ و سهمی $y = x^2$ در دو نقطه $A(2, 4)$ و $A(-2, 4)$ بر هم مماس هستند.

$$1) \quad y = x^2 \quad y' = 2x$$

$$A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$$

$$m = 2x_0$$

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$$

$$C \left| \begin{matrix} y_0 - 2x_0^2 = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2 \\ x_0 - \frac{y_0}{2x_0} = x_0 - \frac{x_0^2}{2x_0} = \frac{x_0}{2} \end{matrix} \right.$$

$$m_{AC} = \left| \begin{matrix} \frac{x_0 + 0}{2} = \frac{x_0}{2} \\ \frac{y_0 - x_0^2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{matrix} \right| = 0 = B$$

$$2) \quad xy = a^2 \rightarrow y = \frac{a^2}{x} \rightarrow y' = -\frac{a^2}{x^2} \quad y' = -\frac{a^2}{x_0^2}$$

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0)$$

$$B \left| \begin{matrix} x_0 + \frac{x_0 y_0}{a^2} = x_0 + x_0 = 2x_0 \end{matrix} \right.$$

$$C \left| \begin{matrix} y_0 \end{matrix} \right.$$

$$S = \frac{1}{x} \times x y_0 = y_0 \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$y' = rx \quad m = rx_0 \quad m' = -\frac{1}{rx_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{rx_0}(x - x_0)$$

$$a - y_0 = -\frac{1}{rx_0}(-x_0)$$

$$a - \frac{1}{r} = y_0$$

از نقطه $A(0, a)$ می‌گذرد

$$\rightarrow y = x^r \rightarrow x = \pm \sqrt{a - \frac{1}{r}}$$

$$1) \left| a - \frac{1}{r} \right| \left| a - \frac{1}{r} \right|$$

$$x^r = y + r \rightarrow y^r + r + y^r - ry - \frac{r}{r} = 0$$

$$ry^r - ry + \frac{1}{r} = 0 \rightarrow ry^r - ry + 1 = 0 \rightarrow (y-1)^r = 0 \rightarrow y = \frac{1}{r}$$

$$x^r = \frac{1}{r} + r = \frac{9}{r} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{r}} \quad A\left(\frac{9}{r}, \frac{1}{r}\right) \quad B\left(-\frac{9}{r}, \frac{1}{r}\right)$$

$$y' = rx + 0 \rightarrow m_1 = rx_0 + 0$$

$$y' = 9 \rightarrow m_p = 9 \quad m_1 = m_p \rightarrow rx_0 + 0 = 9 \rightarrow rx_0 = 9 \rightarrow x_0 = \frac{9}{r}$$

$$y = \frac{1}{r} + \frac{9}{r} + 10 = \frac{1+10+9}{r} = \frac{20}{r}$$

$$y' = -\frac{\frac{9}{r}}{\frac{14}{r}} \rightarrow m = -\frac{9x_0}{14y_0}$$

$$-\frac{9x_0}{14y_0} = -\frac{9}{14} \quad rx_0 = -9y_0$$

$$y = rx + 10 \rightarrow y' = r$$

$$\left(-\frac{9}{r}y_0\right)^r + \frac{y_0^r}{14} = 1 \Rightarrow \frac{11y_0^r}{9 \times 14} + \frac{y_0^r}{14} = 1 \quad 9y_0^r + y_0^r = 14$$

$$10y_0^r = 14 \quad y_0^r = \frac{14}{10} \rightarrow y_0 = \pm \sqrt[10]{\frac{14}{10}} \Rightarrow x_0 = -\frac{9}{r} \left(\pm \sqrt[10]{\frac{14}{10}}\right)$$

$$A \left| \begin{array}{c} -\frac{9}{r\sqrt[10]{10}} \\ \frac{14}{r\sqrt[10]{10}} \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{c} \frac{9}{r\sqrt[10]{10}} \\ -\frac{14}{r\sqrt[10]{10}} \end{array} \right.$$

$$1) \frac{x^2}{4} + \frac{(an + \sqrt{4a^2 + 9})^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{a^2 n^2 + 4a^2 + 9 + 2an\sqrt{4a^2 + 9}}{9} = 1$$

$$9x^2 + 4a^2 n^2 + 14a^2 + 12an\sqrt{4a^2 + 9} = 36$$

$$(9 + 4a^2)x^2 + 12an\sqrt{4a^2 + 9} + 14a^2 = 0$$

فصل ششم

$$\Delta = (12a\sqrt{4a^2 + 9})^2 - 4(9 + 4a^2)(14a^2)$$

$$= 44a^2(9 + 4a^2) - 44a^2(9 + 4a^2) = 0 \quad \checkmark$$

انتگرال

$$9) x^2 + x^2 - 9x^2 + 14 = 0$$

$$x^2 - 8x^2 + 14 = 0$$

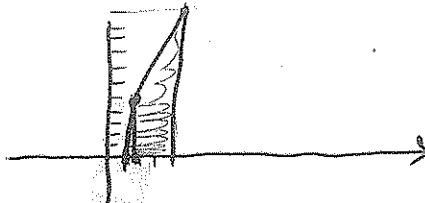
$$(x^2 - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$A \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

مسائل صفحه ۱۵۹

مقدار انتگرال‌های معین تمرین‌های ۱-۱۰ را حساب کنید.

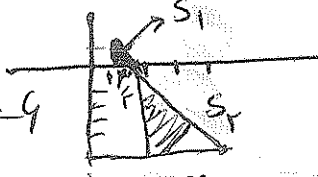
$$۱) \int_0^1 (2x+3)dx = \frac{1}{2} (2)(0+1) = 2$$



$$\frac{1}{2} \frac{2}{1} = 1$$

$$۲) \int_0^1 (3-2x)dx = S_1 - S_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$



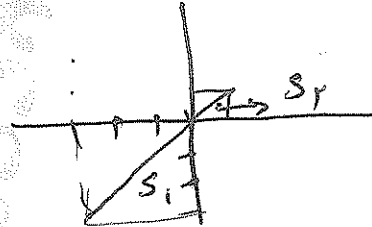
$$\frac{1}{2} \frac{1}{-0} = -\frac{1}{2}$$

$$3 - 2 \times 1 = 1$$

$$n = \frac{1}{2}$$

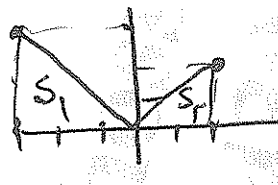
$$۳) \int_{-1}^1 x dx = -S_1 + S_2$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$



$$۴) \int_{-1}^1 |x| dx = S_1 + S_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



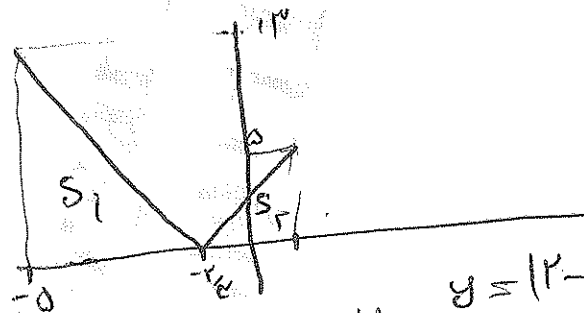
$$y = |1 \times n + 1| \frac{-0}{1} \frac{-1}{0} \frac{1}{0}$$

$$۵) \int_0^1 |3x+2| dx$$

$$= S_1 + S_2$$

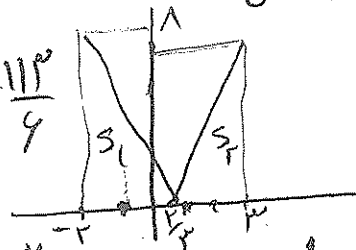
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times 0 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



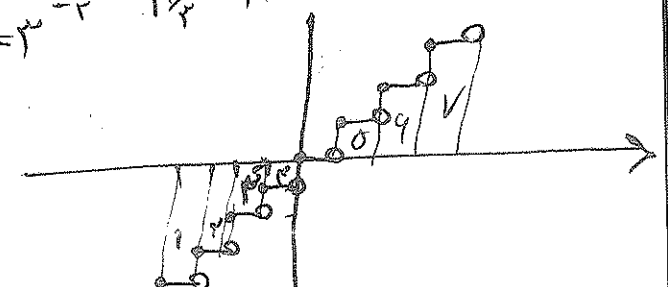
$$۶) \int_{-1}^1 |2-3x| dx = S_1 + S_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$



$$y = |2 - 3n| \frac{-2}{1} \frac{1}{0} \frac{2}{1}$$

$$۷) \int_{-1}^1 [x] dx = -S_1 - S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 2 \times 1 = 2$$

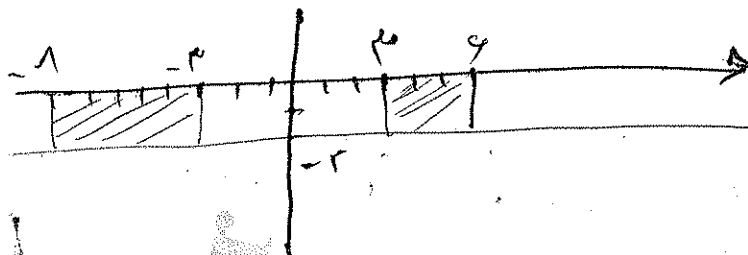


$$۸) \int_{-1}^1 [x] dx = -S_1 - S_2 - S_3 - S_4 + S_5$$

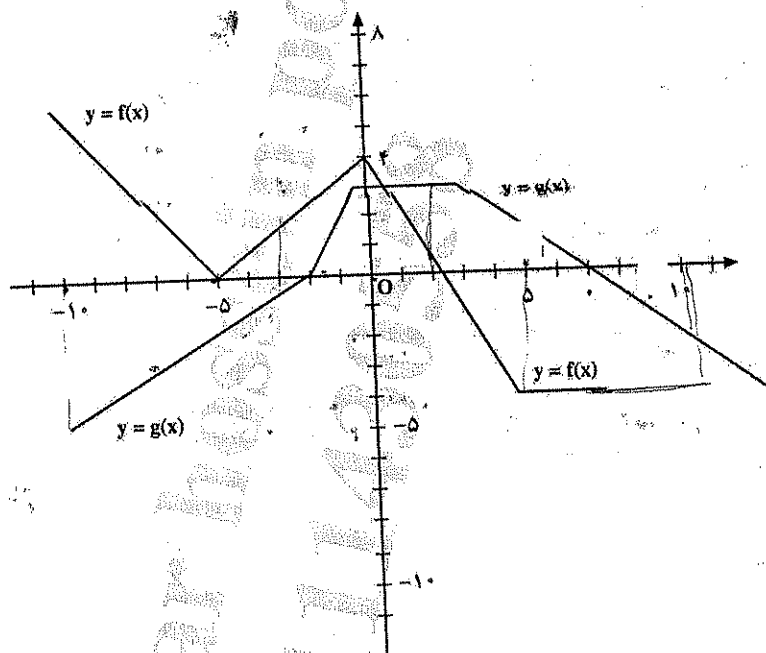
$$= -1 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = -4$$

$$۹) \int_{-۸}^{-۲} (-۲) dx = -۵ \times ۲ = -۱۰$$

$$۱۰) \int_{-۲}^۴ (-۲) dx = ۳ \times -۲ = -۶$$



با استفاده از نمودار توابع f و g نشان داده شده در زیر، انتگرال‌های معین تمرین‌های ۲۰-۱۱ را پیدا کنید.



$$۱۱) \int_{-۵}^۰ f(x) dx = \frac{1}{2} \times ۵ \times ۵ = ۱۰$$

$$۱۲) \int_{۰}^۵ f(x) dx = -\frac{1}{2} \times ۵ \times ۵ = -۱۰$$

$$۱۳) \int_{-۵}^۵ g(x) dx = \frac{1}{2} \times ۵ \times ۵ + \frac{1}{2} \times ۱ \times ۳ + ۳ \times ۳ = -۲۰ + \frac{۳}{۲} + ۹ = -\frac{۱۹}{۲}$$

$$۱۴) \int_{-۵}^۵ g(x) dx = \frac{1}{2} \times ۵ \times ۵ + ۴ \times ۳ + \frac{1}{2} \times ۵ \times ۵ = \frac{۳}{۲} + ۱۲ + ۹ = \frac{۳۹}{۲}$$

$$۱۵) \int_{-۵}^۵ f(x) dx = \frac{1}{2} \times ۵ \times \frac{۵}{۲} - \frac{1}{2} \times ۵ \times \frac{۵}{۲} = ۰$$

$$۱۶) \int_3^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^3 f(u) du = - \left(\frac{1}{2} x^2 x (2+2) + \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2} \right) = - \frac{40}{2}$$

$$۱۷) \int_0^1 g(x) dx = -\frac{1}{2} x^2 x^2 + \frac{1}{2} x^2 x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 x^4 - \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2}$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + 10 + 2 - \frac{10}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$۱۸) \int_0^2 f(x) dx = - \int_{-2}^0 f(u) du = - \left(\frac{1}{2} x^2 (3+2) + \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2} - \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2} \right) = -7$$

$$۱۹) \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 x^2 + \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2} - \frac{1}{2} x^2 x \frac{0}{2} = 10$$

$$۲۰) \int_0^5 g(x) dx = -\frac{1}{2} x^2 x^2 + \frac{1}{2} x^2 x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 x (3+2)$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + 12 + 0 = \frac{19}{2}$$

مسائل صفحه ۱۷۱

مسائل

 فرمولی به صورت $F(x) + C$ ، که در آن F یک تابع اولیه برای تابع زیر انتگرال است، برای هر

یک از انتگرال‌های نامعین زیر یابید.

$$۱- \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + x + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$۲- \int (3x^3 + 2x + 1) dx = 3 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{3}{4} x^4 + x^2 + x + C$$

$$۳- \int \frac{x^5}{x} dx = \frac{1}{2} \frac{x^6}{6} + C = \frac{1}{12} x^6 + C$$

$$۴- \int \sqrt{x} dx = \sqrt{x} x + C$$

$$۵- \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$۶- \int \frac{2}{x^3} dx = 2 \int x^{-3} dx = 2 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{x^2} + C$$

$$۷- \int (5 \sin(x) - 2 \cos(x)) dx = -5 \cos x - 2 \sin x + C$$

$$۸- \int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{5}{6} \sqrt[6]{x^6} + C$$

$$9 - \int x^{\frac{1}{3}} dx = \int_0^x x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$10 - \int \frac{x^2 - x^{-2}}{3} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{-1}}{-1} \right) + C = \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{9} x^{-1} + C$$

$$11 - \int \pi x^{100} dx = \pi x^{\frac{101}{101}} + C$$

$$12 - \int (\sin^2(x) + \cos^2(x)) dx = \int 1 dx = x + C$$

فرض کنیم G تابع مساحت با ضابطه تعریف $G(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt$ باشد در هر یک از تمرین های زیر y را پیدا کنید.

$$13 - y = G(x')$$

$$14 - y = G(x)$$

$$15 - y = (G(x))'$$

$$16 - y = x' G(x)$$

$$17 - y = G(x)$$

$$18 - y = \frac{G(x)}{x^2}$$

$$13) y' = 2x G'(x^2) = 2x \times \frac{\sin(x^2)}{1+x^4} \quad G'(x) = 1 \times \frac{\sin(x)}{1+x^2} = 0$$

$$14) y' = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$$

$$15) y' = 2 G'(x) G(x) = 2x \times \frac{\sin(x)}{1+x^2} \int_1^x \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt$$

$$16) y = 2x G(x) + x^2 G'(x) = 2x \int_1^x \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt + x^2 \times \frac{\sin(x)}{1+x^2}$$

$$17) y' = G''(x) = \frac{2 \cos(x)(1+x^2) - 2x \sin(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$18) y' = \frac{G'(x)/x^2 - 2x G(x)}{x^4} = \frac{\frac{\sin(x)}{1+x^2} \times x^2 - 2x \int_1^x \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt}{x^4}$$

با استفاده از دومین قضیه اساسی، انتگرال‌های معین مفروض در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴ را

محاسبه کنید:

$$19 - \int_{-1}^3 (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^3 = \left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) \\ = \frac{33}{2} + \frac{5}{6} = \frac{104}{6} = \frac{26}{3}$$

$$20 - \int_1^{2.5} (3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$21 - \int_4^9 \sqrt{x} dx$$

$$22 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (5 \sin x - 3 \cos x) dx$$

$$23 - \int_1^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

$$24 - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$$

$$20) \int_1^{2.5} \left(\frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + 1 \right) dx = \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right) \Big|_1^{2.5} = (12.5 + 3.125 + 2.5) - (1 + 1 + 1) =$$

$$18.625 + 2.125 - 3 = 17.75$$

$$21) \int_4^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}$$

$$22) -5 \cos x - 3 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (-5 \cos \pi - 3 \sin \pi) - (-5 \cos \frac{\pi}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{2}) \\ = 5 + 0 = 5$$

$$23) \int_1^2 1 dx = x \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$24) \int_{-2}^{-1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-1} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

۲۵- دانش آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انتگرال زیر را محاسبه کرده است:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

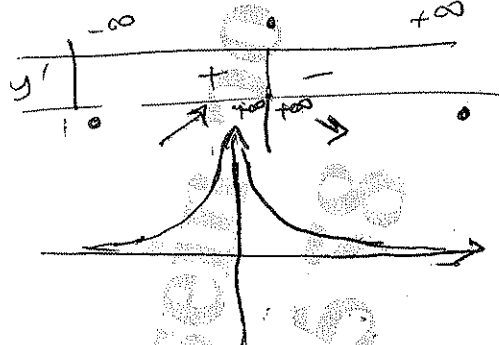
آیا این جواب قابل قبول است؟ خیر

نمودار $y = \frac{1}{x^2}$ را رسم کنید و بگویید که چرا جواب فوق قابل قبول نیست. اشتباه دانش آموز در کجاست؟

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{0 - 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$$

$x \rightarrow 0$
افقی

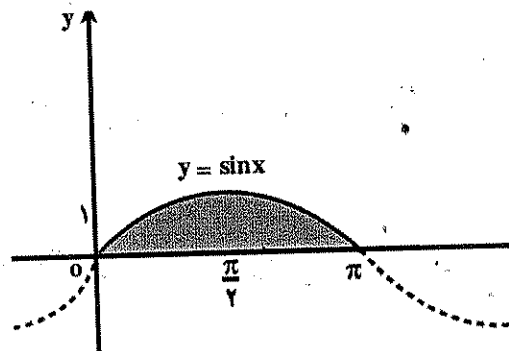


$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{x} \Big|_0^1$$

$$= -(-\infty + 1) - (1 - \infty) = +\infty$$

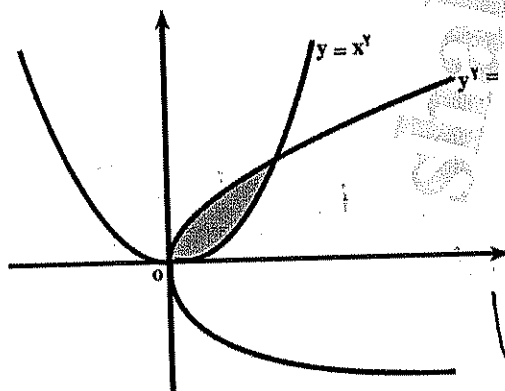
۲۶- مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y = \sin x$ را محاسبه کنید.



$$A = \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| = \left| -\cos x \Big|_0^{\pi} \right|$$

$$= |-1 - (-1)| = 2$$

۲۷- مساحت ناحیه هاشور زده در شکل زیر را محاسبه کنید.



$$y = x^2 \rightarrow y = \sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})^2$$

$$x = x^2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} (1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{1}{3}$$

۲۸- $\int_1^2 e^{2x} dx$ را محاسبه کنید.

۲۹- $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ را محاسبه کنید.

۳۰- $\int_1^5 \frac{xdx}{x^2+1}$ را محاسبه کنید.

۳۱- $\int_2^3 e^{5x} dx$ را محاسبه کنید.

$$۲۸) \int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2) = \frac{e^4 - e^2}{2}$$

$$۲۹) \int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

$$۳۰) \int_1^5 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_2^{26} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_2^{26} = \frac{1}{2} (\ln 26 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 13$$

$$x^2+1=t, 2x dx = dt$$

$$x=1 \rightarrow t=2$$

$$x=2 \rightarrow t=26$$

$$۳۱) \int_2^3 e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} \Big|_2^3 = \frac{1}{5} (e^{15} - e^{10}) = \frac{e^{10} - 1}{5}$$