۱۲۶- اگر $\frac{۳\pi}{۲} > x > \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)$ ، کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ:

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}(۲\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲-\sin^۲ x)$$

از طرفی $\frac{۳\pi}{۲} > x > \pi$ پس چون cos در ربع سوم مقداری منفی دارد خواهیم داشت: $\sqrt{|\cos^۲ x|}=-\cos x$

$$\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}(۲\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲-\sin^۲ x)=\frac{۱}{-\cos x}(۱-\sin^۲ x)=-\frac{\cos^۲ x}{\cos x}=-\cos x$$

پاسخ گزینه ۴ می باشد.

یادآوری

1. $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos x}$
2. $\sqrt{u^۲}=|u|$
3. $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$
4. $\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲۷- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ:

باید از مفهوم سرعت نسبی استفاده کنیم:

۱-در حالتی که قایق در خلاف جهت رودخانه حرکت کند و سرعت رودخانه را V فرض کنیم سرعت نسبی قایق برابر خواهد بود با:

$$V_R=۱۰۰-V$$

توجه شود که تمامی سرعت‌های داده شده در گزینه‌ها کمتر از سرعت قایق در آب راکد می‌باشد.

۲- در حالتی که قایق در جهت رودخانه حرکت کند سرعت نسبی قایق برابر خواهد بود با:

$$V_R = ۱۰۰ + V$$

با توجه به رابطه $x = vt$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۱۲۰۰ = (۱۰۰ - V) \times t_۱ \\ ۱۲۰۰ = (۱۰۰ + V) \times t_۲ \end{cases}$$

اختلاف دو زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه می‌باشد. پس:

$$\left\{\begin{matrix} t_۱ = \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - V} \\ t_۲ = \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + V} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta t = ۵ \Rightarrow ۵ = \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - V} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + V} = ۱۲۰۰\left(\frac{۱۰۰ + V - (۱۰۰ - V)}{(۱۰۰ - V)(۱۰۰ + V)}\right) = ۱۲۰۰\left(\frac{۲V}{۱۰^۴ - V^۲}\right)$$

$$\frac{۵}{۱۲۰۰} = \frac{۲V}{۱۰^۴ - V^۲} \Rightarrow V^۲ + ۴۸۰V - ۱۰^۴ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^۲ - ۴ac} = ۵۲۰ \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۴۸۰ + ۵۲۰}{۲} = ۲۰$$

پاسخ گزینه ۳ می‌باشد.

۱۲۸- مجموعه جواب نامعادله $۱ < \frac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳$، به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$ ۲) $\mathbb{R} - [-۴, ۶]$ ۳) $x > ۴$ ۴) $x < -۶$

پاسخ:

روش اول:

با در نظر گرفتن طرفین نامعادله به صورت مجزا خواهیم داشت:

$$\frac{۲x - ۳}{x + ۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۲x - ۳}{x + ۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x - ۴}{x + ۱} > ۰$$

x		-۱		۴	
$x - ۴$	-		-	۰	+
$x + ۱$	-	۰	+		+
$\frac{x - ۴}{x + ۱}$	+		-		+

با توجه به تعیین علامت عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x > ۴ \\ x < -۱ \end{cases}$$

$$\frac{2x-3}{x+1}<3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1}-3<0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1}>0$$

با توجه به تعیین علامت عبارت بالا خواهیم داشت:

x		-6		-1	
$x+6$	-	0	+		+
$x+1$	-		-	0	+
$\frac{x+6}{x+1}$	+		-		+

$$\begin{cases} x>-1 \\ x<-6 \end{cases}$$

با توجه به مجموعه جواب‌های به دست آمده خواهیم داشت:

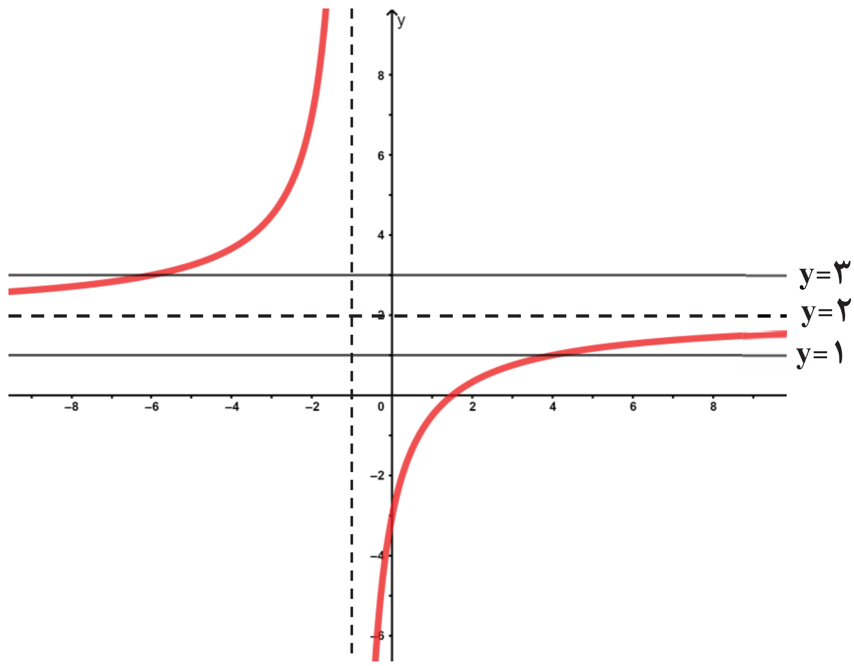
$$\begin{cases} x<-6 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow x\in\{\mathbb{R}-[-6,4]\}$$

روش دوم: رسم تابع $y=\frac{2x-3}{x+1}$

می‌توان برای راحت رسم کردن نمودار تابع فوق (با توجه به مخرج کسر) کسر را ساده‌تر مینویسیم.

$$y=\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+2-2-3}{x+1}=\frac{2(x+1)-5}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$$

با توجه به مجانب قائم و افقی تابع هموگرافیک، شکل نمودار آن به صورت زیر می باشد:



از محل تلاقی $y=۲-\frac{۵}{x+۱}$ با $y=۳$ و $y=۱$ به ترتیب خواهیم داشت: $x=۴, x=-۶$

باتوجه به نمودار تابع و همچنین نقاط به دست آمده پرواضح است که جواب گزینه ۲ می باشد.

روش سوم: عدد گذاری

با عدد گذاری هم می توان به جواب صحیح رسید. با جایگذاری عدد ۵- (باتوجه به اختلاف گزینه ها) تنها گزینه درست گزینه ۲ می باشد.

۱۲۹- گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟

۱) ۱۲۶   ۲) ۱۴۰   ۳) ۱۵۴   ۴) ۱۶۸

پاسخ:

۴ شاخه مختلف در هر دسته گل (چون ۸ نوع گل مختلف داریم) مساوی است با تعداد انتخاب ۴ گل از ۸ گل مختلف! برای ۵ شاخه و ۶ شاخه نیز به همین منوال است. پس:

$$\text{تعداد کل حالات}=\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۱۳۰- اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$، کدام است؟

۱) ۱/۵   ۲) ۲/۵   ۳) ۳/۵   ۴) ۴/۵

پاسخ:

$$۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲\Rightarrow\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a\geq ۰\Rightarrow a\leq\frac{۲}{۳}$$

$$۲a^۲+۴a=(۲-۳a)^۲\Rightarrow ۲a^۲+۴a=۴-۱۲a+۹a^۲\Rightarrow ۷a^۲-۱۶a+۴=۰$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^۲-۴ac}=\sqrt{۱۶^۲-۴\times۷\times۴}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\begin{cases}۲\\ \frac{۲}{۷}\end{cases}$$

با توجه به شرط $a\leq\frac{۲}{۳}$ مقدار $\frac{۲}{۷}$ قابل قبول خواهد بود. پس:

$$\frac{a+۱}{a}=\frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}}=۴/۵$$

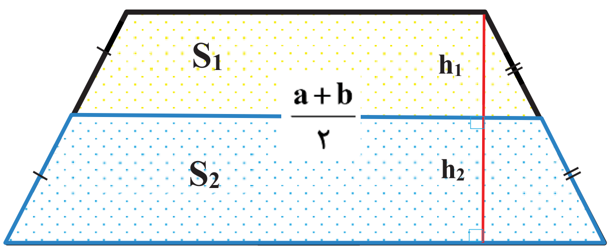
گزینه ۴ جواب صحیح می‌باشد.

۱۳۱- در یک ذوزنقه، پاره خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۵}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ:

با توجه به شکل مقابل و با ذکر این نکته که طول این پاره خط میانگین طول قاعده های ذوزنقه می‌باشد خواهیم داشت:



$$\frac{S_۲}{S_۱}=۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}\times h_۲\times\left(b+\frac{a+b}{۲}\right)}{\frac{۱}{۲}\times h_۱\times\left(a+\frac{a+b}{۲}\right)}=۲\Rightarrow\frac{۳b+a}{۳a+b}=۲\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱}{۵}$$

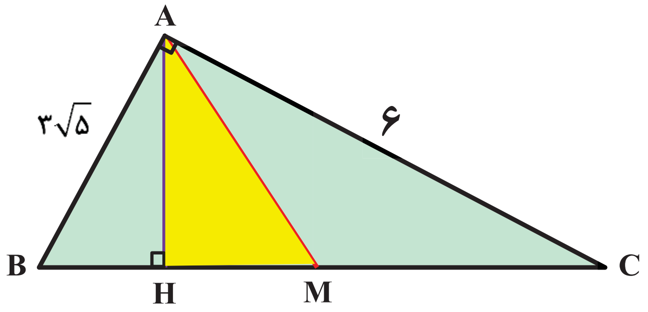
یادآوری

۱. طول پاره خطی که دو تا ساق رو نصف کند برابر میانگین مجموع طول دو تا قاعده ذوزنقه است
۲. با توجه به قضیه تالس می‌توان نشان داد که $h_۱=h_۲$

۱۳۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم $AB=۳\sqrt{۵}$, $AC=۶$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AHM است؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۵　　۴) ۱۸

پاسخ:



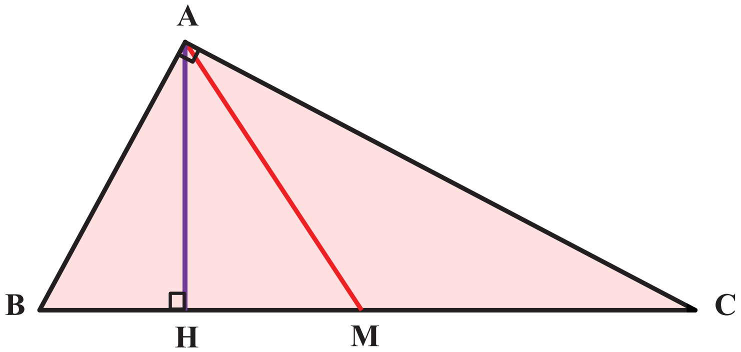
با توجه به شکل مقابل و داده های سوال خواهیم داشت:

$$AH \times BC = 3\sqrt{5} \times 6 = 18\sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 6^2} = 9 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$
$$MC = MB = \frac{9}{2} = 4/5$$

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow BH = 5 \Rightarrow MH = 5 - 4/5 = 0/5$$
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMH}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 9}{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 0/5} = 18$$

یادآوری

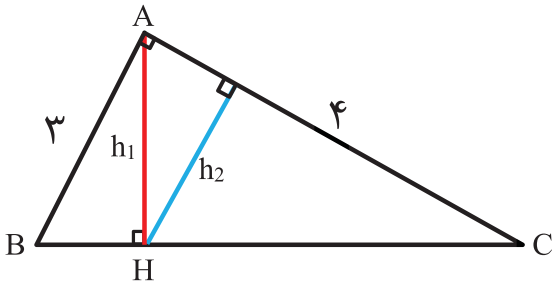
با توجه به شکل در مثلث ABC روابط زیر برقرار است:



۱. $AH \times BC = AB \times AC$
۲. $AB^2 = BH \times BC$
۳. $AC^2 = CH \times BC$
٤. $AM = \frac{BC}{2}$
۵. $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$
٦. $BC^2 = AB^2 + AC^2$

۱۳۳- در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دومثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$



پاسخ:

$$\begin{cases} AH\times BC=۱۲ \\ BC^۲=۳^۲+۴^۲ \end{cases} \Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}=h_۱$$

$$\triangle AHC \Rightarrow AH^۲+CH^۲=۴^۲ \Rightarrow CH=\frac{۱۶}{۵}$$

$$h_۲\times AC=CH\times h_۱ \Rightarrow h_۲=\frac{۴۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱}=\frac{۴}{۵}$$

۱۳۴-حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ:

صورت کسرها را طوری مینویسیم که بتوان ضرایب زوج تولید کرد.

$$\begin{cases} \sin(\frac{۱۷\pi}{۳})=\sin(\frac{۱۸-۱}{۳}\pi)=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\sin(\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \cos(-\frac{۱۷\pi}{۳})=\cos(\frac{۱۲+۵}{۶}\pi)=\cos(۲\pi+\frac{۵\pi}{۶})=\cos(\frac{۵\pi}{۶})=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(\frac{۱۶+۳}{۴}\pi)=\tan(۴\pi+\frac{۳\pi}{۴})=\tan(\frac{۳\pi}{۴})=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})=-۱ \\ \sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin(\frac{۱۲-۱}{۶}\pi)=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin(-\frac{\pi}{۶})=-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

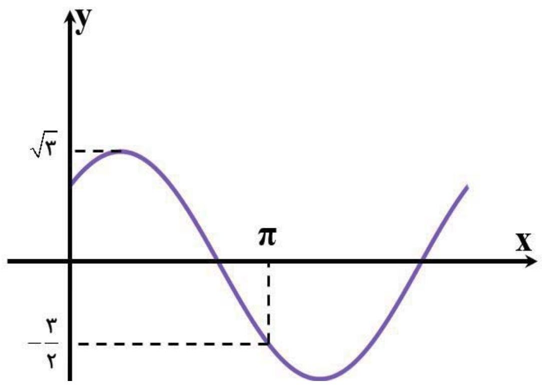
$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)+(-۱)\times\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

پاسخ گزینه ۳ می باشد.

۱۳۵ - شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

پاسخ:



با توجه به شکل تابع دو نکته زیر را می‌توان برداشت کرد:

۱-نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در ضابطه تابع صدق می‌کند.

۲-ماکسیمم مقدار تابع مقدار $\sqrt{3}$ می‌باشد.

با توجه به دو نکته فوق داریم:

$$-\frac{3}{2} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = a - b \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال می‌توان هم از تابع مشتق گرفت و برابر صفر قرار داده تا طول نقطه اکسترمم به دست آید و یا اینکه با توجه به شکل تابع می‌توان گفت زمانی مقدار تابع ماکسیمم است که مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ برابر یک باشد. در هر صورت معادله زیر به دست می‌آید:

$$y' = b\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3}$$

از حل دو معادله زیر جواب به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \\ a + b = \sqrt{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

در دستگاه بالا، از جایگذاری جواب‌ها نیز می‌توان سریعتر به جواب رسید. پاسخ گزینه ۳ می‌باشد.

۱۳۶-اگر $\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} = (0/4)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

مهندس یاری مدرس برتر ریاضی و فیزیک در آموزشگاه های اهواز
۰۹۳۷ ۱۰۵ ۰۸۸۹

پاسخ:

$$(0/4)^{2x-1}=\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1}=\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{3}\right)^{x^2}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{-(2x-1)}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2}\Rightarrow 3x^2=-2x+1\Rightarrow 3x^2+2x-1=0$$

$$a+c=b\Rightarrow 3-1=2\Rightarrow x=\begin{cases}-1\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

با توجه به اینکه به ازای $x=-1$ عبارت $9x+1$ منفی خواهد شد پس فقط $x=\frac{1}{3}$ قابل قبول خواهد بود.

$$\log_8(9x+1)=\log_{2^3}(9\times\frac{1}{3}+1)=\log_{2^3}4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$$

پس پاسخ گزینه ۱ می باشد.

یادآوری

۱. در تابع $y=\log_a x$ داریم: $\begin{cases}a>0,\ a\neq 1\\ x>0\end{cases}$

۲. $\log_{a^n} a^m=\frac{m}{n}$

۳. $(a^m)^n=a^{m\times n}$

٤. $a^m\times a^n=a^{m+n}$

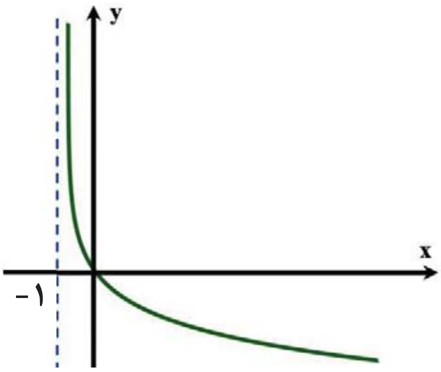
٥. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}\Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$

٦. $\begin{cases}a^m=a^n\Rightarrow m=n\\ \log m=\log n\Rightarrow m=n\end{cases}$

۱۳۷-شکل زیر نمودار تابع $y=\log_2 U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟

۱) $x+1$ ۲) $(x+1)^{-1}$ ۳) $x-1$ ۴) $1-x$

پاسخ:



۱- باتوجه به نمودار، تابع در نقطه $x=-1$ مجانب قائم دارد ← رد گزینه ۳ و ۴

۲- با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$ پس گزینه ۱ هم اشتباه می باشد.

پس گزینه ۲ جواب سوال می‌باشد.

۳- دقت کنید که در نقطه $x=0$ مقدار $y=0$ می‌باشد یعنی گزینه ۳ نادرست می باشد.

۴- از طرفی به ازای x های مثبت مقدار تابع منفی می‌باشد، با توجه به خاصیت لگاریتم برای مبنای ۲ باید مقدار پایه کمتر از ۱ و بزرگتر از صفر باشد. یعنی گزینه ای درست است که به ازای هر عدد مثبت مقدار پایه عددی بین ۰ و ۱ باشد و این یعنی فقط گزینه ۲.

۱۳۸- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|}; & x\neq -2\\ a\ ; & x=-2\end{cases}$ در نقطه $x=-2$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) ۱۲- ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ:

با تعیین علامت دامنه داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{x+2} & x>-2\\ -\dfrac{8+x^3}{x+2} & x<-2\\ a & x=-2\end{cases}$$

پیوستگی چپ نقطه $x=-2$ یعنی مقادیر کوچکتر از ۲-. پس از ضابطه دوم مقدار حد تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{8+x^3}{x+2}\right)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{HOP}\Rightarrow \lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{8+x^3}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{3x^2}{1}\right)=-12$$

پس باید مقدار حد با مقدار تابع در نقطه $x=-2$ برابر بوده و در نتیجه $a=-12$ می‌باشد.

دقت کنید که می‌توان از حذف عامل صفر کننده نیز به جواب حد رسید.(عامل صفر کننده $x+2$ می‌باشد)

$$\lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{8+x^3}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2^-}\left(-(x^2-2x+4)\right)=-12$$

پاسخ گزینه ۱ می باشد.

۱۳۹- احتمال موفقیت فردی در آزمون اول $0/7$ و در آزمون دوم $0/6$ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم $0/8$ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) $0/74$ ۲) $0/76$ ۳) $0/82$ ۴) $0/84$

پاسخ:

اگر احتمال موفقیت در آزمون اول $P(A)$ و احتمال موفقیت در آزمون دوم $P(B)$ و احتمال موفقیت در آزمون دوم به شرط موفقیت در آزمون اول $P(B|A)$ باشد:

$$\begin{Bmatrix} P(A)=0/7 \\ P(B)=0/8 \\ P(B|A)=0/8=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{Bmatrix}\Rightarrow P(A\cap B)=0/8\times 0/7=0/56$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7+0/6-0/56=0/74$$

جواب گزینه ۱ می باشد.

۱۴۰- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱)گروه اول ۲)گروه دوم ۳)یکسان ۴)نمی‌توان اظهار نظر کرد

پاسخ:

با استفاده از مفهوم ضریب تغییرات عملکرد دو گروه را می‌توان مورد بررسی قرار داد (رد گزینه ۴!!!)

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{X}}\Rightarrow\begin{Bmatrix} CV_1=\dfrac{\sqrt{25}}{80}=\dfrac{5}{80} \\ CV_2=\dfrac{\sqrt{16}}{72}=\dfrac{4}{72} \end{Bmatrix}\Rightarrow\frac{CV_2}{CV_1}=\frac{\frac{4}{72}}{\frac{5}{80}}=\frac{4\times 80}{5\times 72}<1$$

پس چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است یعنی عملکرد اعضای گروه نزدیک به هم بوده و کارعملکرد این گروه بهتر بوده. پس جواب گزینه ۲ می‌باشد.

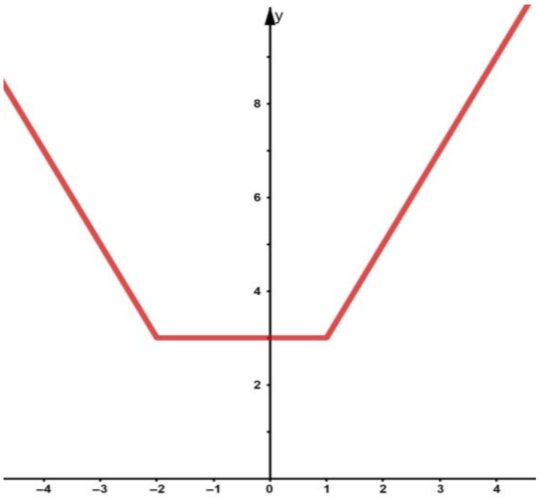
۱۴۱ - تابع با ضابطه $y=|x+2|+|x-1|$ ، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,-1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ:

با توجه به تعریف تابع قدر مطلق، تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\ge 1\\ 3 & -2\le x<1\\ -2x-1 & x<-2\end{cases}\Rightarrow f'=\begin{cases}2 & x\ge 1\\ 0 & -2\le x<1\\ -2 & x<-2\end{cases}$$



با توجه به مقدار مشتق تابع، در بازه $(-\infty,-2)$ تابع اکیداً نزولی است.پس گزینه ۱ جواب سوال می‌باشد.

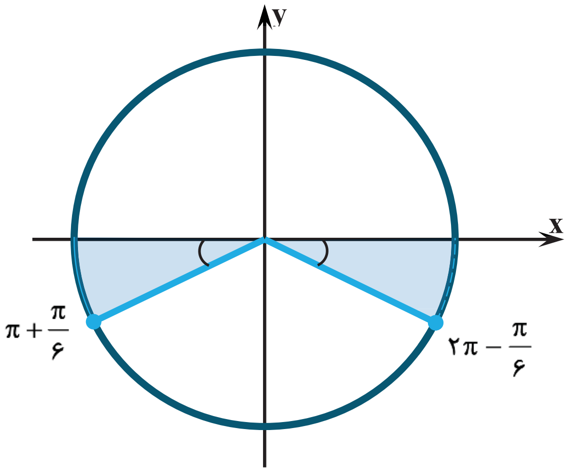
۱۴۲ - مجموع جواب های معادله مثلثاتی $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

پاسخ:

$$4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1\Rightarrow 4\sin x\times(-\cos x)=-2\sin 2x=1\Rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه $0\le x\le 2\pi$ پس $0\le 2x\le 4\pi$ پس تمام جواب هایی که در بازه $2x$ هستند رو باید در نظر بگیریم.



$$\begin{cases} 2x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 4\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 3\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_4 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5\pi$$

پس گزینه ۴ جواب صحیح می باشد.

۱۴۳-حد عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

پاسخ:

حد از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ است.

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to -8} \frac{2x+10}{6\times\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = -12$$

گزینه ۳ جواب صحیح می‌باشد.

۱۴۴- در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

پاسخ:

با توجه به تعریف تابع قدر مطلق، خواهیم داشت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x} & x > 0 \\ \text{تعریف نشده} & x \le 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه فقط همسایگی راست نقطه صفر تعریف شده پس گزینه ۱ و ۲ نادرست می باشند. پس:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پس گزینه ۴ پاسخ صحیح می باشد.

---

۱۴۵ - اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -1　　۲) $-\frac{1}{2}$　　۳) $-\frac{1}{4}$　　۴) صفر

پاسخ:

با توجه به هم ارزی رادیکالی داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4}\left|x+\frac{1}{8}\right| = 2x-2x-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

یادآوری

۱. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c} \equiv \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{a\times n}\right|$

۲. $|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

۱۴۶- در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$　　۲) $\frac{5}{12}$　　۳) $\frac{7}{12}$　　۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ:

حد فوق برابر مشتق تابع در نقطه $x=4$ است. پس:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)+2(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{7}{12}$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح می باشد.

یادآوری

۱. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

۲. $f=\dfrac{g}{h}\Rightarrow f'=\dfrac{g'\times h-h'\times g}{h^2}$

۱۴۷-تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\geq 2\\ -x^2+ax+b & x<2\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\geq 2\\ -x^2+ax+b & x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & x\geq 2\\ -2x+a & x<2\end{cases}$$

باید هم مشتق پذیری و هم پیوستگی تابع بررسی شود (با توجه به اینکه پارامتر b فقط در خود تابع هست نه مشتق آن).

تابع در هر شاخه پیوسته است و تنها کافی است تا در نقطه ۲ پیوسته و مشتق پذیر باشد.

برای مشتق خواهیم داشت: $f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow -1=-4+a\Rightarrow a=3$

برای پیوستگی خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Rightarrow 1=-4+6+b\Rightarrow b=-1$

پس گزینه ۲ جواب صحیح می‌باشد.

مهندس یاری مدرس برتر ریاضی و فیزیک در آموزشگاه های اهواز
۰۹۳۷ ۱۰۵ ۰۸۸۹

یادآوری

۱. تابع $f(x)$ برای نقطه a پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

۲. پیوستگی چپ برای نقطه a زمانی وجود دارد که $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

۳. پیوستگی راست برای نقطه a زمانی وجود دارد که $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

۴. تابع درنقطه a مشتق پذیر است زمانیکه هم تابع در این نقطه پیوسته باشد و هم در این نقطه مشتق راست و چپ داشته و با هم برابر باشند.

۱۴۸-اگر $g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ:

طبق فرضیات سوال خواهیم داشت:

$$(f(g(x)))' = g'(x)\times f'(g(x)) \Rightarrow (f(g(۲)))' = g'(۲)\times f'(g(۲))$$

$$\left\{\begin{array}{l} g(۲)=۵ \\ g'(x) = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow g'(۲) = \frac{-۳}{(۲-۱)^۲} = -۳ \end{array}\right\} \Rightarrow -۳\times f'(۵) = ۶ \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۴۹-در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[۱,۴]$، کدام است؟

۱) ۰/۲۵　　۲) ۰/۵　　۳) ۰/۴۵　　۴) ۰/۷۵

پاسخ:

آهنگ تغییر لحظه ای همان مشتق و آهنگ تغییر متوسط تغییرات تابع به تغییرات متغیر مستقل می باشد. پس:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = x + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۹}{۴} \\ \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{۱۱}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{۹}{۴} - \frac{۱۱}{۴}\right| = ۰/۵$$

پس پاسخ صحیح گزینه ۲ می باشد.

۱۵۰- در تابع با ضابطه $f(x)=x|x-۴|$ فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ:

روش اول:

طبق تعریف تابع قدرمطلق خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۴x & x\geq ۴ \\ -x^۲+۴x & x<۴ \end{cases} \Rightarrow f'=\begin{cases} ۲x-۴ & x\geq ۴ \\ -۲x+۴ & x<۴ \end{cases} \Rightarrow f'=۰ \Rightarrow x=۲, f(۲)=-۲^۲+۴\times۲=۴$$

نقاط بحرانی تابع نقاط به طول ۴ و ۲ می باشد. پس فاصله دو نقطه $(۴,۰)$, $(۲,۴)$ را به دست می‌آوریم.

$$AB=\sqrt{(y_۲-y_۱)^۲+(x_۲-x_۱)^۲}=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

روش دوم: رسم نمودار

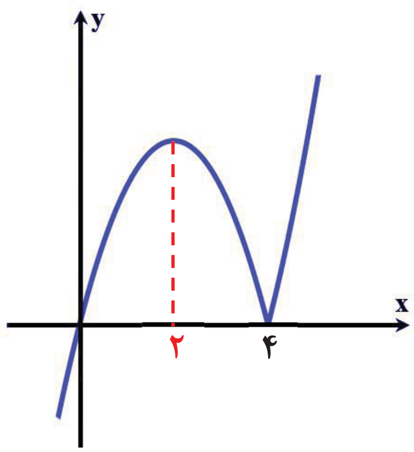
نمودار تابع به شکل روبرو است.

۱- نقطه x=۰ و x=۴ ریشه های تابع هستند .

۲- طول نقطه ماکسیمم نسبی میانگین طول ریشه های تابع می باشد (چرا؟)

۳- نقطه به طول ۴ می نیمم نسبی و نقطه به طول ۲ ماکسیمم نسبی است.

۴- پس فاصله دو نقطه $(۴,۰)$, $(۲,۴)$ برابر خواسته سوال است.



پس جواب سوال گزینه ۴ می باشد.

۱۵۱-بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و راس چهارم آن بر روی روی منحنی به معادله $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

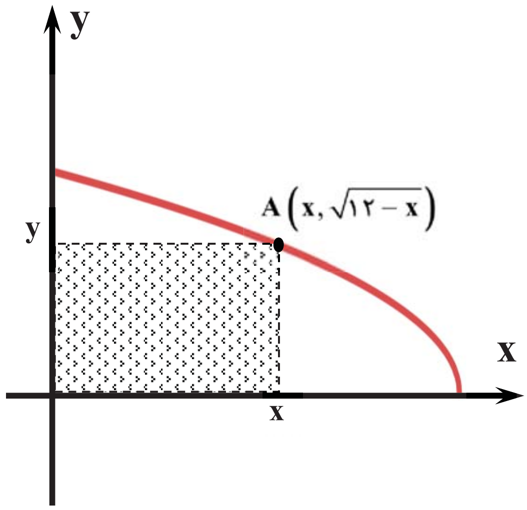
پاسخ:

با توجه به شکل روبرو برای تابع $S(x)$ خواهیم داشت:

$$S(x)=x\times f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$$

برای اینکه ماکسیمم مساحت را داشته باشیم باید از تابع مساحت مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم.

توجه داشته باشید که طول مستطیل روبرو برابر x و عرض آن برابر y خواهد بود. مساحت مستطیل برابر خواهد بود با طول در عرض آن.



$$S'(x)=۱\times\sqrt{۱۲-x}-x\times\frac{۱}{۲}(۱۲-x)^{-\frac{۱}{۲}}=۰\Rightarrow\left(\sqrt{۱۲-x}\right)^۲=\frac{x}{۲}\Rightarrow ۱۲-x=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=۸\Rightarrow f(۸)=۲$$

مقدار x برابر ۸ و مقدار y متناظر آن برابر ۲ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$S(x)=۲\times۸=۱۶$$

پس جواب صحیح گزینه ۳ می باشد.

۱۵۲- در یک بیضی کانونهای $(۲,-۱)$ و $(۲,۷)$، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز بیضی، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

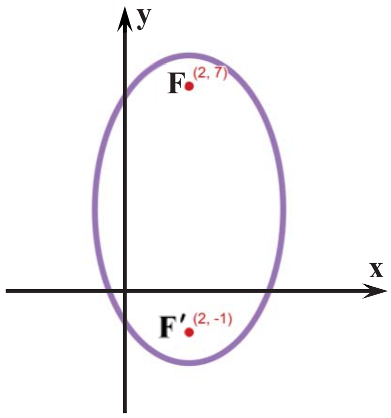
پاسخ:

با توجه به داده های مسئله بیضی قائم است و با استفاده از داده های مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}F(h,k\pm c)\\ a^۲=b^۲+c^۲\end{Bmatrix}\Rightarrow|۷-(-۱)|=۸=۲c\Rightarrow\begin{Bmatrix}c=۴\\ ۲b=۶\Rightarrow b=۳\end{Bmatrix}\Rightarrow a^۲=۱۶+۹\Rightarrow a=۵$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

شکل بیضی به صورت نمودار زیر است و ضابطه آن برابر خواهد بود با:



$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$

پس جواب صحیح گزینه ۴ می باشد.

یادآوری

۱- معادله بیضی قائم به صورت $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ می‌باشد.

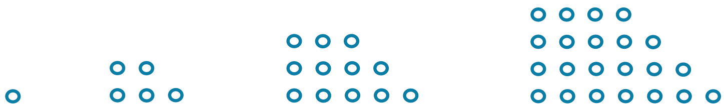
مختصات کانون ها $(h,k\pm c)$، و مختصات رئوس آن $(h,k\pm a)$

۲- معادله بیضی افقی به صورت $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ می‌باشد.

۳- مختصات کانون ها $(h\pm c,k)$، و مختصات رئوس آن $(h\pm a,k)$

۱۵۳- در الگوی زیر تعداد نقطه ها در شکل نهم کدام است؟

۱) ۱۱۷ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۳ ۴) ۱۲۵



مهندس یاری مدرس برتر ریاضی و فیزیک در آموزشگاه های اهواز
۰۹۳۷۱۰۵۰۸۸۹

پاسخ:

دسته	اول		دوم		سوم		...	نهم
الگو	۱{۱	○	۲{۲، ۳	○ ○ ○ ○ ○	۳{۳، ۴، ۵	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	...	۹{۹، ۱۰، ۱۱، ⋮، ۱۶، ۱۷

با توجه به جدول بالا می‌توان فهمید که هر دسته یک تصاعد عددی از اعداد متوالی است که جمله اول آن شماره دسته و تعداد جملات آن نیز شماره دسته می باشد. حال با توجه به اینکه دسته نهم با عدد ۹ شروع می‌شود و تعداد جملات نیز ۹ می باشد پس جمله آخر آن برابر خواهد بود با:

$$a-b+۱=a-۹+۱\Rightarrow a-۸=۹\Rightarrow a=۱۷$$

مجموع اعداد دسته نهم برابر خواهد بود با:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_۹=\frac{۹}{۲}(۹+۱۷)=۱۱۷$$

پس گزینه صحیح گزینه شماره ۱ می باشد.

یادآوری

دنباله تصاعد عددی $a_n=a_۱+(n-۱)d \quad \cdots \quad , \quad a_۲=a_۱+d \quad , \quad a_۱$ دارای ویژگی های زیر است:

۱- $\dfrac{a_m-a_n}{m-n}=d$

۲- $S_n=\dfrac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\dfrac{n}{۲}\big(۲a_۱+(n-۱)d\big)$

برای به دست آوردن تعداد اعداد متوالی طبیعی بین دو عدد a و b (با فرض اینکه b>a)از رابطه $n=b-a+۱$ استفاده می کنیم.

۱۵۴- اگر $x\geq ۱$; $f(x)=x^۲-۲x-۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$, $g(x)=\dfrac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع اند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ:

ابتدا ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم و سپس با ضابطه $g(x)$ برابر قرار خواهیم داد.

$$y=f(x)=x^{۲}-۲x-۳=x^{۲}-۲x+۱-۱-۳=(x-۱)^{۲}-۴\Rightarrow y+۴=(x-۱)^{۲}\Rightarrow\sqrt{y+۴}=x-۱\Rightarrow x=۱+\sqrt{y+۴}$$

$$\Rightarrow f^{-1}=۱+\sqrt{x+۴}$$

$$\begin{Bmatrix} f^{-1}=۱+\sqrt{x+۴} \\ g(x)=\dfrac{x-۹}{۲} \end{Bmatrix}\Rightarrow ۱+\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲}$$

با توجه به اینکه $x+۴$ مربع کامل است (با توجه به جواب گزینه‌ها) پس فقط گزینه ۱ و ۴ می توانند پاسخ باشند که با جایگذاری گزینه ۴ به دست می‌آید. دقت کنید که معادله فوق را می‌توان بسادگی حل کرد. جواب در ادامه آمده است، اما شما تا همین جا میتوانین پاسخ صحیح را انتخاب کنید.

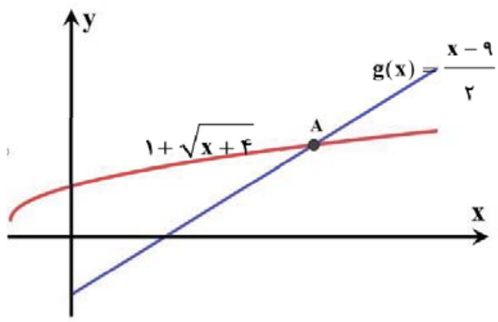
$$۱+\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲}-۱=\frac{x-۱۱}{۲}\Rightarrow ۴x+۱۶=x^{۲}-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^{۲}-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$x^{۲}-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^{۲}-۴ac}=۱۶\Rightarrow x=\frac{۲۶\pm۱۶}{۲}\begin{cases}۲۱\\۵\end{cases}$$

با توجه به اینکه در عبارت $۱+\sqrt{x+۴}=\dfrac{x-۹}{۲}$ طرف راست معادله باید مقداری مثبت باشد پس:

$x-۹>۰\Rightarrow x>۹$ و جواب ۲۱ قابل قبول است. نمودار دو تابع در شکل زیر رسم شده اند.

پس جواب صحیح گزینه شماره ۴ می باشد.



۱۵۵ - در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر سفید است؟

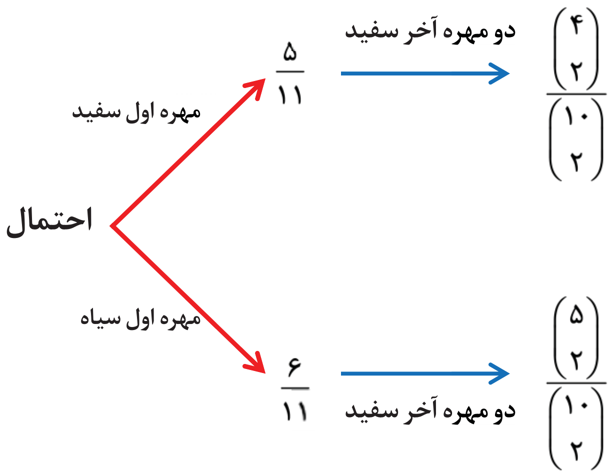
۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

پاسخ:

روش اول:

برای مهره اول دو حالت وجود دارد. یا سفید است یا سیاه. پس داریم:

پس احتمال اینکه در هر دو حالت دو مهره آخر سفید باشد از اصل ضرب محاسبه می‌شود. بنابراین داریم:



$$P=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۱۲}{۹۰}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۲۰}{۹۰}=\frac{۲}{۱۱}$$

روش دوم: زمانی که مهره اول را رویت نمی‌کنیم احتمالش برابر زمانی است که هیچ مهره‌ای بیرون نیامده باشد. پس به سادگی خواهیم داشت:

$$p=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{۲}{۱۱}$$

همیشه سالم باشید و شاداب!