



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

تشریح از مهندس امیر حسین خارکن

دبیر کلاس کنکور اصفهان ah.kharkan@gmail.com/۰۹۳۶۴۹۵۶۹۶۶

۱۰۱- گزینه ۱

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{3 \times 3}{2 \times 2}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{3 \times 2}{2 \times 2}} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{9}{2}} \times \\ (2 + \sqrt{3})^{\frac{6}{2}} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{4}{2}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{6}{2}} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times \\ ((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^{\frac{6}{2}} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times (4 - 3)^{\frac{6}{2}} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \times} \\ \sqrt[3]{\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2)}} = \sqrt[3]{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \\ \sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} + 1}} &= \sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} = \sqrt[3]{A} \Rightarrow A = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

۱۰۲- گزینه ۱

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \Rightarrow g(3) = f(a) = -2$$

چون حاصل $f(a)$ منفی است باید از ضابطه ای استفاده کنیم که حاصل $f(a)$ منفی شود.

$$\Rightarrow f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۱۰۳- گزینه ۴

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2^x}, f(x) = 2^x \stackrel{Df}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2^x} - 2^x \geq 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2^x} &\geq 2^x \end{aligned}$$

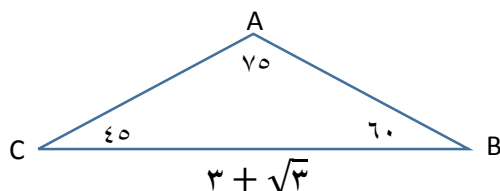
تذکر: $if |a| > 1, x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq x \Rightarrow \frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

	-1	0	+1	
$1-x^2$	-	+	+	-
x	-	-	+	+
$\frac{1-x^2}{x}$	+	-	+	-

$$D_f: (-\infty, -1] \cup (0, 1]$$

۱۰۴- گزینه ۴



$$\sin 70 = \sin(40 + 30) = \sin 40 \cos 30 + \cos 40 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} \Rightarrow \frac{\sin 70}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sin 30}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \Rightarrow 3\sqrt{3} + 3 = AC \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3} + 3}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{6\sqrt{3} + 6}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{4} = \frac{18\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$$

۱۰۵- گزینه ۳

$$t^{\wedge} - t^{\vee} + t^{\circ} - \dots - t + 1 = 1 - t + \dots + t^{\circ} - t^{\vee} + t^{\wedge} = S_q$$

$$a_q = t^{\wedge}, a = 1, q = -t \Rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$\Rightarrow S_q = \frac{1(1-(-t)^9)}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t}$$

$$t^9 - t^r + 1 = 1 - t^r + t^9 = S_r \quad a_q = t^9, a = 1 \Rightarrow S_r = \frac{1(1-(-t^r)^9)}{1-(-t^r)} = \frac{1+t^9}{1+t^r}$$

$$\frac{t^9 - t^r + 1}{t^9 - t^r + 1} = \frac{S_q}{S_r} = \frac{\frac{1+t^9}{1+t}}{\frac{1+t^9}{1+t^r}} = \frac{1+t^r}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^r)}{1+t} = 1 - t + t^r = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^r = \frac{4-2-2\sqrt{17}+1+2\sqrt{17}+17}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

۱۰۶-گزینه ۲

چون M روی خط $y = x - 1$ است مختصات $M(x, x - 1)$:

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (x-1-3)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2x^2 - 12x + 20}$$

$$BM = \sqrt{(x-4)^2 + (x-1-7)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 - 16x + 64} = \sqrt{2x^2 - 24x + 80}$$

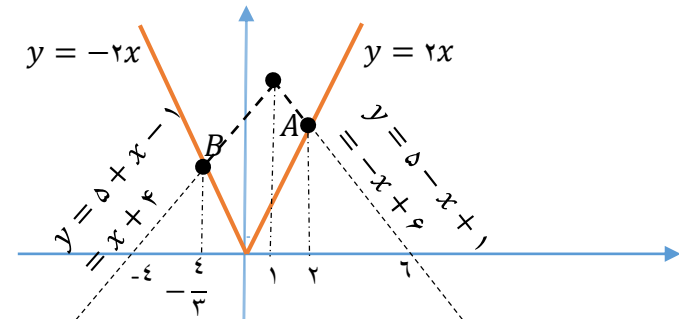
$$K = |AM - BM| = \left| \sqrt{2x^2 - 12x + 20} - \sqrt{2x^2 - 24x + 80} \right| = 2 \left| \sqrt{x^2 - 6x + 10} - \sqrt{x^2 - 12x + 40} \right|$$

می خواهیم $K = 0$ می نیمم شود پس باید $K' = 0$

$$K' = 0 \Rightarrow \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}} = \frac{2x-12}{2\sqrt{x^2-12x+40}} \Rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}} = \frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+40}}$$

تنها گزینه ای که در رابطه فوق صدق می کند گزینه ۲ است و $x = 0$

۱۰۷- گزینه ۳



$$\begin{cases} A: y = 2x = -x + 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ B: y = -2x = x + 6 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} \Rightarrow (-\frac{6}{3}, 2) \end{cases}$$

۱۰۸- گزینه ۲

$$ax + by = \wedge \Rightarrow by = \wedge - ax \Rightarrow y = \frac{\wedge}{b} - \frac{a}{b}x \xrightarrow{\text{معکوس}} x = \frac{\wedge}{b} - \frac{a}{b}y \xRightarrow{\times b} bx = \wedge - ay \Rightarrow \frac{\wedge - bx}{a} = y \Rightarrow \frac{\wedge}{a} - \frac{b}{a}x = y$$

$$2x - 3y = b \Rightarrow -3y = b - 2x \Rightarrow y = -\frac{b}{3} + \frac{2}{3}x$$

$$\begin{cases} y = \frac{\wedge}{a} - \frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{\wedge}{a} = -\frac{b}{3} \Rightarrow 24 = -ab \Rightarrow ab = -24 \\ y = -\frac{b}{3} + \frac{2}{3}x \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2a = -3b \Rightarrow 2a = 3b \Rightarrow a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}b \times b = -24 \Rightarrow b^2 = \frac{24 \times 2}{3} = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$\begin{cases} b = 4 \rightarrow a = -6 \rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \rightarrow a = 6 \rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

۱۰۹- گزینه ۴

$$K = \cdot \rightarrow \begin{cases} 2, 4 \text{ گزینه} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} = \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ 1, 3 \text{ گزینه} \Rightarrow \overbrace{\sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)}^{-} \overbrace{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)}^{+} = \overbrace{\cos^2}^{+} \dots \rightarrow \text{گزینه ۱, ۳ غلط} \end{cases}$$

$$K = ۱ \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} x = \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۴\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳} \qquad \cos^۲ \alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲}$$

$$\sin \frac{۴\pi}{۳} \cos \frac{۲\pi}{۳} = \cos^۲ \left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} \right) \rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times -\frac{۱}{۲} = \cos^۲ \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \cos ۲ \times \frac{\pi}{۱۲} \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \rightarrow \text{گزینه ۲ غلط}$$

راه دوم:

$$\sin ۴x \cos ۲x = \cos^۲ \left(x - \frac{\pi}{۴} \right) = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} (\sin x + \cos x) \right)^۲$$

$$\sin ۴x \cos ۲x = \frac{۱}{۲} (\sin ۶x + \sin ۲x), \quad \sin x + \cos x = ۱ + \sin ۲x$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲} (\sin ۶x + \sin ۲x) = \frac{۱}{۲} (۱ + \sin ۲x) \rightarrow \sin ۶x = ۱ \rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow$$

$$x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۲}$$

۱۱۰- گزینه ۱

$$\cos^{-۱} \left(-\frac{۲}{\sqrt{۵}} \right) = \overset{۰ < \alpha < \pi}{\tilde{\alpha}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{۲}{\sqrt{۵}}, \quad \frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$$

$$۱ + \tan^۲ \alpha = \frac{۱}{\underbrace{\cos^۲ \alpha}_{-\frac{۲}{\sqrt{۵}}}} \rightarrow \tan^۲ \alpha = \frac{۵}{۴} - ۱ = \frac{۱}{۴} \rightarrow \tan \alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan \left(۲ \cos^{-۱} \left(-\frac{۲}{\sqrt{۵}} \right) \right) = \tan (۲\alpha) = \frac{۲ \tan \alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha} = \frac{۲ \times -\frac{۱}{۲}}{۱ - \left(-\frac{۱}{۲} \right)^۲} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۴}} = \frac{-۴}{۳}$$

۱۱۱- گزینه ۲

$$\text{نکته: } \lim_{u \rightarrow ۰} \cos u \simeq ۱ - \frac{u^۲}{۲} \qquad \lim_{u \rightarrow ۰} \frac{\sin u}{u} \simeq ۱$$

$$\cos A - \cos B = -۲ \sin \frac{A+B}{۲} \sin \frac{A-B}{۲}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\Delta x^2}{2}\right)}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\Delta x^2 - x^2)}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x})} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sin \Delta x \sin -\frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} \times (\Delta x) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2} x) \times (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x})} = \frac{1}{2}$$

۱۱۲- گزینه ۱

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x\right), x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \left(1 + \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x\right)\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \left(1 + \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} =$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \left(1 + \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} \left(1 + \tan^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \times \left(1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \times \sqrt{2} =$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$$

۱۱۳- گزینه ۳

$$\left| \frac{2n-5}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{2(2n-5)-2(3n+2)}{3(3n+2)} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{6n-10-6n-4}{3(3n+2)} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{14}{3(3n+2)} <$$

$$\frac{1}{100} \Rightarrow 3n+2 > \frac{1400}{3} \Rightarrow 3n+2 > \frac{466}{3} \Rightarrow n > 155/3 \Rightarrow n \geq 156$$

۱۱۴- گزینه ۲

$$\lim_{P \rightarrow \pm \infty} [P] = P \quad \text{نکته:}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \right| \left[\frac{1}{x} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \times \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

۱۱۵- گزینه ۱

حد $\sin \pi x$ در $x \in \mathbb{Z}$ برابر صفر است.

$$(\sin 2\pi = 0, \sin -\pi = 0, \sin 0 \times \pi = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{Z}} \sin \pi x = 0$$

همچنین مقدار تابع $\sin \pi x$ در $x \in \mathbb{Z}$ نیز صفر است. پس داریم:

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (-1)^{[x]} \sin \pi x}_{\text{حد تابع}} = \underbrace{(-1)^{[x_0]} \sin \pi x_0}_{\substack{\text{همواره صفر} \\ \text{مقدار تابع}}} = 0 \Rightarrow$$

تابع در $x \in \mathbb{Z}$ پیوسته است.

۱۱۶- گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{\substack{-x \\ \text{چون } x \text{ منفی است}}} \right) = -\infty \times 0 = \text{مبهم}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 1}) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - (x^2 - 1))}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{x - |x|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{2x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۱۷- گزینه ۲

مشتق تابع در $\pm\infty$ برابر صفر است و چون شیب در بی نهایت صفر است، لذا گزینه ۱ و ۳ صحیح نمی باشد.

همچنین تابع برای $x < 0$ نزولی است، پس $y' < 0$ و همچنین تابع برای $x > 0$ صعودی است، پس $y' > 0$ و بنابراین از بین گزینه ۲ و ۴، گزینه ۲ که دارای این شرایط است، صحیح می باشد.

۱۱۸- گزینه ۳

نقطه مماس را $(\alpha, \underbrace{f(\alpha)}_{-\alpha^2+2\alpha+5})$ در نظر می گیریم و m را به صورت زیر می نویسیم:

$$m = f'(\alpha) = -2\alpha + 2 \xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y - (-\alpha^2 + 2\alpha + 5) = (-2\alpha + 2)(x - \alpha)$$

خط مماس از $A(2,9)$ می گذرد، پس:

$$9 + \alpha^2 - 2\alpha - 5 = (-2\alpha + 2)(2 - \alpha) \Rightarrow 9 + \alpha^2 - 2\alpha - 5 = -4\alpha + 2\alpha^2 + 4 - 2\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{2 + 6}{1 - 12} \right| = \frac{8}{11}$$

۱۱۹- گزینه ۱

ابتدا $gof(x)$ را تشکیل می دهیم.

$$\begin{aligned} gof(x) &= \frac{3}{4}f(x) + a|f(x)| = \frac{3}{4}(3x + |x|) + a|3x + |x|| \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4}(3x + x) + a|3x + x| = 3x + a|4x| = 3x + 4ax = (3 + 4a)x & \text{if } x \geq 0 \\ \frac{3}{4}(3x - x) + a|3x - x| = \frac{3}{2}x - 2ax = \left(\frac{3}{2} - 2a\right)x & \text{if } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$gof(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} gof(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} gof(x) = 0$$

پس شرط پیوستگی برقرار است.

$$(gof)'(x) = \begin{cases} 3 + 4a & x \geq 0 \\ \frac{3}{2} - 2a & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (gof)'_+(\cdot) = (gof)'_-(\cdot) \Rightarrow 3 + 4a =$$

$$\frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 4a = \frac{3}{2} - 3 \Rightarrow 4a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۲۰- گزینه ۳

$$g(x) = \sqrt{2x} f^{-1}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} f^{-1}(x) + \sqrt{2x} (f^{-1})'(x) \Rightarrow g'(2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f^{-1}(2) + \sqrt{2} (f^{-1})'(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 + 2 \times 3 = 8$$

$$\begin{cases} f(a) = 2 \\ f(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

۱۲۱- گزینه ۲

$$f(x) = e^{x-2x^2} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{(1-4x)}_{1-4x>0 \rightarrow x<\frac{1}{4}} \underbrace{e^{x-2x^2}}_{\text{همواره} +} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ صعودی}$$

$$f''(x) = -4e^{x-2x^2} + (1-4x)^2 e^{x-2x^2} =$$

$$\underbrace{e^{x-2x^2}}_{\text{همواره} +} \left(\underbrace{-4 + (1-4x)^2}_{-4 + (1-4x)^2 < 0 \rightarrow (1-4x)^2 < 4 \rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}} \right) < 0 \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین}$$

$$\left(x < \frac{1}{4}\right) \cap \left(-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$$

۱۲۲- گزینه ۲

از روی نمودار می توان فهمید $x = \frac{\pi}{4}$ جزء دامنه تابع نمی باشد، پس مخرج تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ صفر است ولی چون تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ مجانب قائم ندارد پس $x = \frac{\pi}{4}$ صورت تابع را نیز صفر می کند.

(دقت: اگر $x = \frac{\pi}{4}$ صورت تابع را صفر نمی کرد پس داشتیم $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ برای حد در $x = \frac{\pi}{4}$ داشتیم و این یعنی مجانب قائم، که در نمودار در $x = \frac{\pi}{4}$ مجانب قائم نداریم پس چنین حالتی اتفاق نمی افتد)

$$a \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow a = 1$$

۱۲۳- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{r-1} \int_1^r \frac{x^{r-1}}{x} dx = \frac{1}{r-1} \int_1^r \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{r-1} \left(\frac{x^r}{r} - \ln x\right) \Big|_1^r = \frac{1}{r-1} \left(\left(\frac{r^r}{r} - \ln r\right) - \left(\frac{1}{r} - \ln 1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{r-1} \left(r + \ln 1 - \ln r\right) = r + \frac{1}{r-1} \ln \frac{1}{r} = r + \frac{1}{r-1} \ln r^{-1} = r - \ln r^{\frac{1}{r-1}} = r - \ln \sqrt[r]{r} \end{aligned}$$

۱۲۴- گزینه ۴

$$\sqrt{x} - 2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| = \sqrt{x} - 2$$

$$\sqrt{x} - 2 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| = -\sqrt{x} + 2$$

$$\int_1^9 |\sqrt{x} - 2| dx = \int_1^4 (2 - \sqrt{x}) dx + \int_4^9 (\sqrt{x} - 2) dx = 2x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} -$$

$$2x \Big|_4^9 = 2x - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^4 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 2x \Big|_4^9 = 18 - \frac{2}{3} \sqrt{4^3} + \left(\left(\frac{2}{3} \sqrt{9^3} - 2 \times 9\right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{4^3} - 8\right)\right) = 18 - \left(\frac{2}{3} \times 8\right) + \left(\left(\frac{2}{3} \times 27\right) - 18\right) - \left(\frac{2}{3} \times 8 - 8\right) = 16 - \frac{4}{3} \times$$

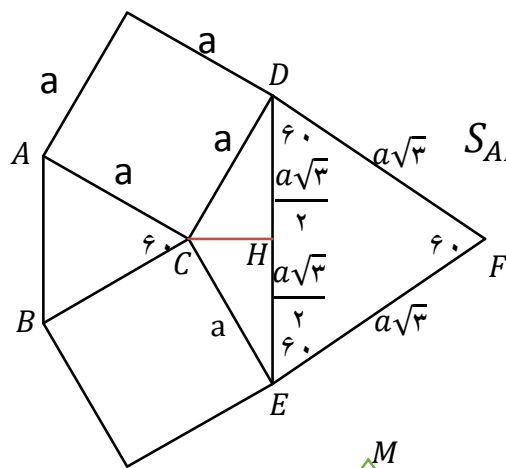
$$\left(\frac{2}{3} \sqrt{4^3} - 8\right) = 18 - \left(\frac{2}{3} \times 8\right) + \left(\left(\frac{2}{3} \times 27\right) - 18\right) - \left(\frac{2}{3} \times 8 - 8\right) = 16 - \frac{4}{3} \times$$

$$8 = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3}$$

۱۲۵-گزینه ۳

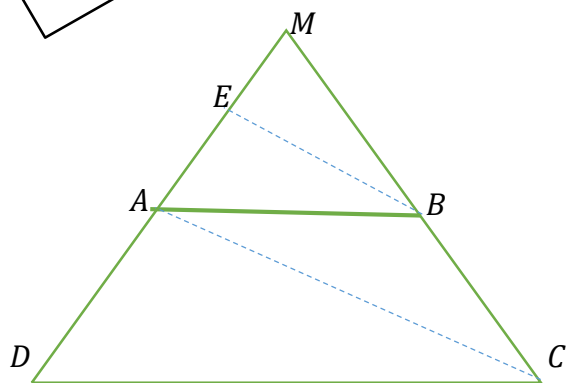
$$\cos \widehat{CDH} = \frac{DH}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH}{a} \rightarrow DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow HE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow DE = a\sqrt{3} \rightarrow DF = EF = a\sqrt{3}$$



$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_{DEF} = \frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 3$$

۱۲۶-گزینه ۲

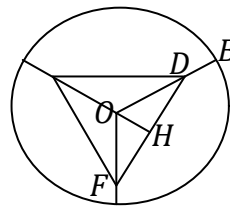
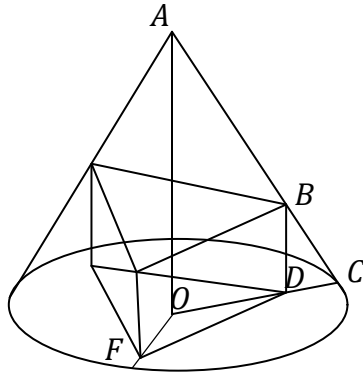


$$\begin{cases} EB \parallel AC \rightarrow \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{MC} \\ AB \parallel DC \rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{MC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{EA} = \frac{MA}{AD}$$

$$\rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{ME + 3}{7}$$

$$\Rightarrow 3ME + 9 = 7ME \Rightarrow 4ME = 9 \Rightarrow ME = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

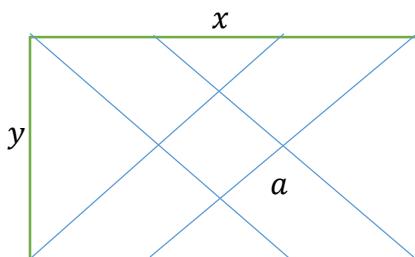
$$\Rightarrow AD = ME + EA + AD = 2\frac{1}{4} + 3 + 7 = 12\frac{1}{4}$$


$$\widehat{DOF} = 12, \widehat{ODH} = 3, DF = \sqrt{3} \rightarrow DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{ODH} = \cos \varphi = \frac{DH}{OD} \rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r}}{OD} \rightarrow OD = \sqrt{r}$$

$$\text{تالس: } BD \parallel OA \rightarrow \frac{BD}{OA} = \frac{CD}{OC} \rightarrow \frac{2}{OA} = \frac{2}{3} \rightarrow OA = 3$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi$$

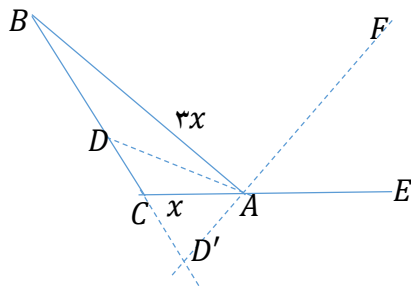


۱۲۸-گزینه ۴

شکل حاصل مربع به ضلع $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$ است.

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{r}}{r}(11 - 5) = 3\sqrt{r} \rightarrow S = a^r = (3\sqrt{r})^r = 9 \times r = 18$$

۱۲۹-گزینه ۳



$$AD: \text{نیمساز داخلی} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BD}{DC} = 3, BC = BD + DC = 12$$

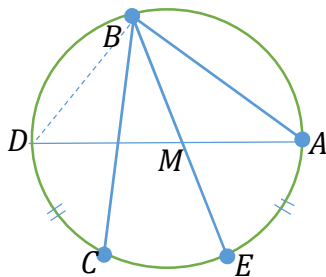
$$\rightarrow BD = 9, DC = 3$$

$$AD': \text{نیمساز خارجی } A \quad \frac{D'B}{DC'} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{DC' + 12}{D'C} = 3 \rightarrow DC' = 6$$

$$\widehat{CAB} + \widehat{BAE} = 180 \rightarrow \frac{\widehat{CAB}}{2} + \frac{\widehat{BAE}}{2} = 90 \rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{DAF} = 90$$

$$\rightarrow \widehat{DAF} = 90 \rightarrow \widehat{DAD'} = 90$$

$$\Rightarrow AD^2 + AD'^2 = DD'^2 = (DC + CD')^2 = (6 + 3)^2 = 81$$



۱۳۰-گزینه ۲

$$\widehat{BAD} = \widehat{DCB} = \frac{BC}{2} \quad \widehat{ABM} = \frac{AE}{2} = \frac{DC}{2} = \widehat{DBC} \Rightarrow \text{متشابه با } CBD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AM}{CD} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{AM}{3} \Rightarrow AM = \frac{18}{8} = 2.25$$

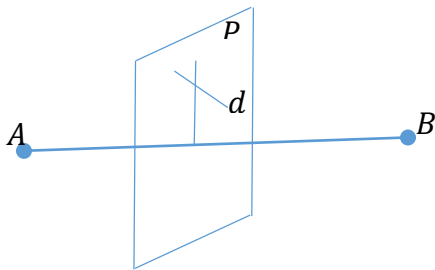
۱۳۱- گزینه ۱

دو نقطه دلخواه روی خط به دست می آوریم و دو تبدیل تجانس ذکر شده در سؤال را انجام می دهیم تا نقاط A' و B' به دست آید.

$$\begin{cases} A(3,0) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}} (4,5) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (-y,x)} (0, 4,5) \\ B(0,6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}} (0,9) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (-y,x)} (-9,0) \end{cases}$$

می توان خطی که از دو نقطه فوق می گذرد را به دست آورد ولی روش سریع تر چک کردن گزینه ای است که هر دو نقطه فوق در آن صدق می کند.

۱۳۲- گزینه ۴



فاصله هر نقطه واقع در صفحه عمود منصف AB تا نقاط A و B به یک اندازه می باشد. پس اگر d داخل صفحه عمود منصف باشد، فاصله تمام نقاط خط d از دو نقطه A و B به یک اندازه است و اگر d بیرون صفحه P باشد، مسئله جواب ندارد چون هیچ نقطه ای در d نیست که شرایط مسئله را داشته باشد چرا که تمام نقاطی که فاصله آن ها از A و B به یک اندازه است، در صفحه عمود منصف است. همچنین d صفحه P را قطع نمی کند، چون P عمود بر AB و $d \perp AB$ پس d یا داخل P یا موازی با آن است.

۱۳۳- گزینه ۱

$$\begin{cases} V_1 \cdot V_2 = 0 \rightarrow 2 - b + a = 0 & (1) \\ V_2 \cdot V_3 = 0 \rightarrow 2c + 3b + 2 = 0 & (2) \\ V_1 \cdot V_3 = 0 \rightarrow c - 3 + 2a = 0 & (3) \end{cases}$$

از (۱) $a = -2 + b$ و a را در (۳) جایگذاری می کنیم.

$$c - 3 + 2(-2 + b) = 0 \rightarrow c - 3 + 2b - 4 = 0 \rightarrow 2b + c = 7 \quad (۴)$$

$$\begin{cases} (۴): 2b + c = 7 \\ (۲): 2c + 3b = -2 \end{cases} \rightarrow c = -25, b = 16 \xrightarrow{(۱)} a = 14 \Rightarrow a + b + c = 5$$

۱۳۴- گزینه ۴

$$a \times c = d \times b, \quad a \times d = c \times b$$

$$A \times B = 0 \rightarrow A \parallel B, \quad A \times B = -B \times A$$

$$\begin{aligned} (a+b) \times (c+d) &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = d \times b + c \times \\ b + b \times c + b \times d &= -b \times d - b \times c + b \times c + b \times d = 0 \rightarrow a + \\ b &\parallel c + d \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۴

کوتاه ترین فاصله بین دو خط متنافر طول عمود مشترک دو خط است.

$$\text{فاصله عمود مشترک دو خط} = \frac{|n \cdot AB|}{|n|} = \frac{|(2, 2, -4) \cdot (1, 1, -2)|}{\sqrt{6}} = \frac{4+4+8}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

A و B دو نقطه دلخواه روی دو خط

$$A(1, 1, 1) \quad B(-1, -1, 5) \Rightarrow AB = (2, 2, -4)$$

$$n = u_1 \times u_2 = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2) \rightarrow |n| = \sqrt{6}$$

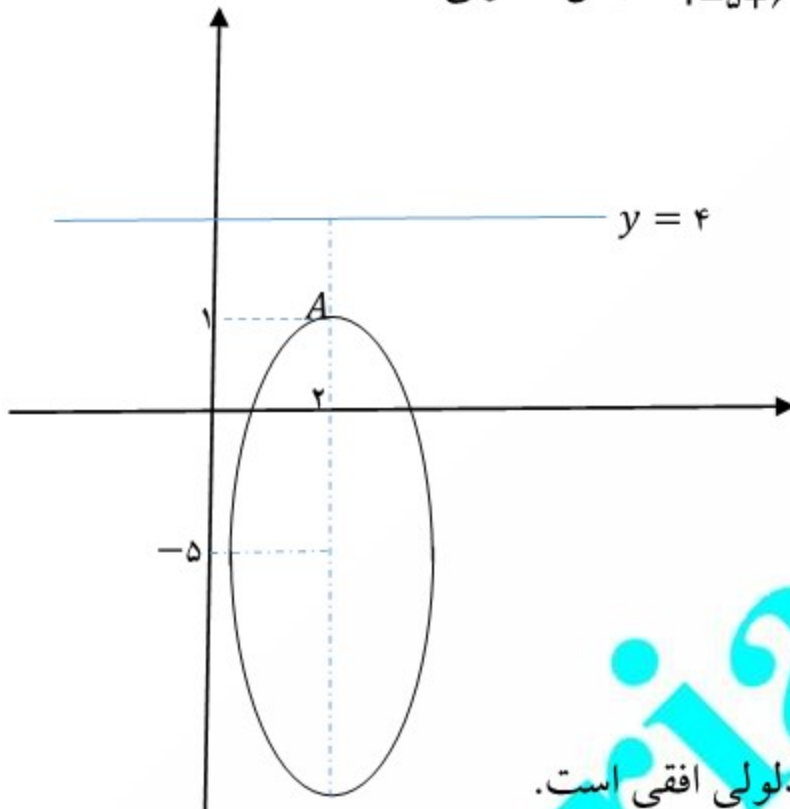
۱۳۶- گزینه ۳

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \quad y = 4: \text{فاصله تا خط} K = |y-4|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MA &= \frac{2}{3}K \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{2}{3}|y-4| \Rightarrow (x-2)^2 + \\ (y+1)^2 &= \frac{4}{9}(y-4)^2 \rightarrow 9(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 4(y-4)^2 \rightarrow 9x^2 + \\ 5y^2 - 36x + 50y &= 19 \rightarrow 9(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 10y) = 19 \rightarrow \end{aligned}$$

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5(y^2 + 10y + 25 - 25) = 19 \rightarrow 9(x - 2)^2 - 36 + 5(y + 5)^2 - 125 = 19 \rightarrow 9(x - 2)^2 + 5(y + 5)^2 = 18 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$$

$$\Rightarrow a = 6, b = \sqrt{20} \quad A|_{-5+6}^2 \Rightarrow \text{فاصله} = 3$$



۱۳۷- گزینه ۲

چون دو کانون دارای عرض یکسان است پس هذلولی افقی است.

مختصات مرکز هذلولی :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2} = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

$$2c = 1 + \sqrt{5} - (1 - \sqrt{5}) \rightarrow c = \sqrt{5}, \quad 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow 1 = (\sqrt{5})^2 - b^2 \rightarrow b = 2$$

شیب منفی

$$\text{معادله مجانب هذلولی افقی: } y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha) \rightarrow y - \beta = -\frac{b}{a}(x - \alpha)$$

$$\alpha) \rightarrow y + 2 = -2(x - 1) \rightarrow y + 2 = -2x + 2 \rightarrow y + 2x = 0$$

۱۳۸- گزینه ۲

از روش ساروس استفاده می کنیم.

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix} = 36x^2 + 36x^2 + 36x^2 - (216 + 27x^3 + 18x^3) = -35x^3 + 108x^2 - 216 = D$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18x^3 + 27x^3 + 216 - 36x^2 - 36x^2 - 36x^2 = -(-35x^3 + 108x^2 - 216) = -D$$

۱۳۹-گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{bmatrix}$$

$$A + B = A.B \rightarrow A = A.B - B \rightarrow A = (A - I).B \rightarrow (A - I)^{-1} \times A = B$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, |A - I| = 3, (A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{(A-I)^{-1}} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۴۰-گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -8 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1 + R_3 \rightarrow R_3]{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -5y + 2z = -3 \end{cases}, x = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2y - 3z = 4 - t \\ -5y + 2z = -3 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4y - 6z = 8 - 2t \\ -10y + 4z = -6 \end{cases} \Rightarrow -14y = -1 - 2t \Rightarrow$$

$$y = \frac{1+2t}{11}$$

$$2y - 3z = 4 - t \rightarrow z = \frac{4-t}{-3} + \frac{2}{3}y \rightarrow z = \frac{4-t}{-3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1+2t}{11}\right) = \frac{15t}{33} - \frac{42}{33}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1+2t}{11} \\ z = \frac{15t}{33} - \frac{42}{33} \end{cases}$$

سه صفحه فوق در خط فوق مشترکند.

تذکر: نیازی به دست آوردن خط فوق نبود اگر در حل دستگاه سه معادله سه مجهول همگن یک سطر به طور کامل صفر شد و دو سطر باقی مانده ضریبی از یکدیگر نبودند، سه صفحه در یک خط مشترک هستند.

۱۴۱- گزینه ۴

مجموع فراوانی نسبی برابر ۱ است.

$$0,1 + 0,25 + 0,2 + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0,45$$

$$\bar{x} = \sum \text{مرکز دسته} \times \text{فراوانی نسبی}$$

$$\bar{x} = 0,1 \times 8 + 12 \times 0,25 + 16 \times 0,2 + 20 \times 0,45 = 16$$

$$\delta^2 = \sum (\text{میانگین} - \text{مرکز دسته})^2 \times \text{فراوانی نسبی} = 0,1(8 - 16)^2 + 0,25(12 - 16)^2 + 0,2(16 - 16)^2 + 0,45(20 - 16)^2 = 17,6$$

۱۴۲- گزینه ۲

از آن جا که هر یک از اعداد ۶۴، ۶۵، ۷۷، ۵۰، ۶۶، ۷۰ و ۶۳ در مجموعه فوق فقط یک بار ظاهر شده اند پس مد باید از آن ها باشد چون اگر x عددی غیر از اعداد فوق باشد هیچ عددی دارای

فراوانی بیشتر نسبت به بقیه اعداد نیست و مد به طور یکتا مشخص نیست و لذا x هر کدام از ۷ عدد فوق شود میانه است که طبق صورت سؤال باید میانگین نیز باشد پس داریم:

$$x = \frac{63 + 70 + 66 + 50 + 77 + 65 + 64 + x}{8} \rightarrow 8x = 455 \rightarrow x = 65$$

۱۴۳- گزینه ۳

زوج مرتب های دو رقمی که مجموع آن ها ۱۱۰ می شود را به صورت زیر می نویسیم و بقیه را به صورت تک عدد

$$\{ \underbrace{10}_{\text{لانه اول}}, \underbrace{(11, 99)}_{\text{لانه دوم}}, \underbrace{(12, 98)}_{\text{لانه سوم}}, \dots, (54, 56), 55 \}$$

$$\text{تعداد لانه ها} = \frac{90 - 2}{2} + 2 = 46$$

پس ۴۶ لانه و ۹۰ کبوتر داریم اگر از ۹۰ عدد فوق حداقل ۴۷ عدد برداریم حداقل یک زوج مرتب وجود دارد که جمع آن ها ۱۱۰ می شود.

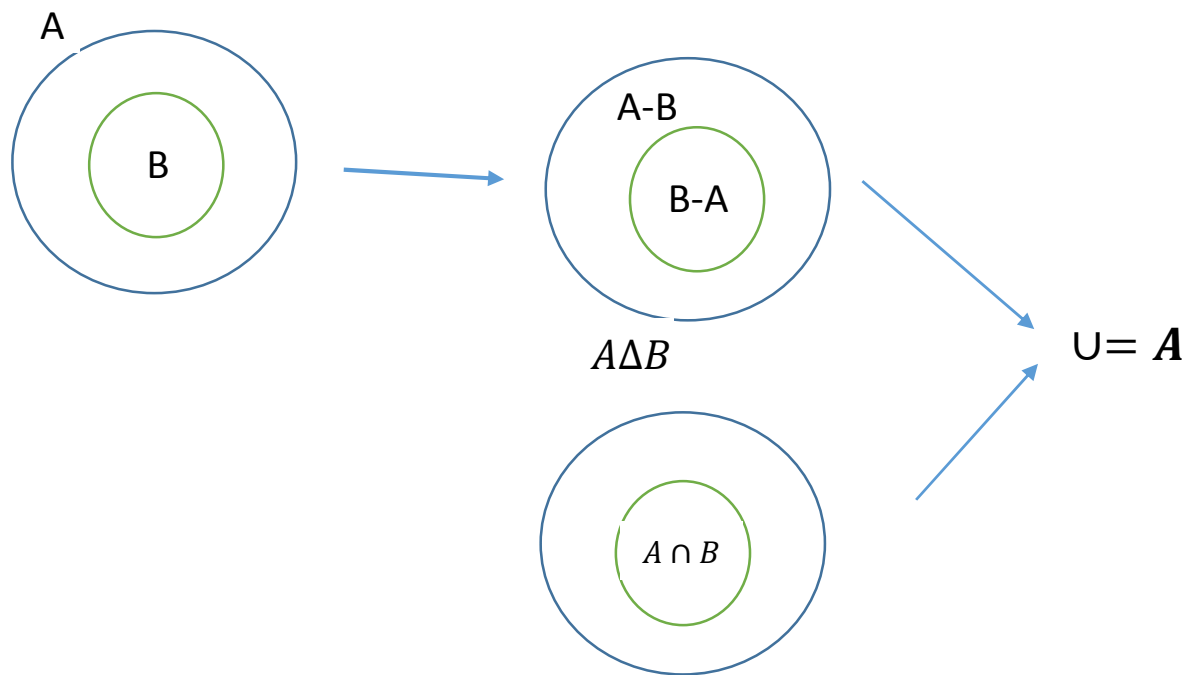
$$\begin{array}{r|l} 90 & 46 \\ \hline & 1 \end{array} \rightarrow 1+1=2$$

ایده حل سؤال: می خواهیم جمع اعداد ۱۱۰ شود، پس جفت

اعداد ۲ رقمی که مجموع آن ها ۱۱۰ می شود را با هم می نویسیم و حداقل تعداد دفعات برداشت گوی به طوری که حداقل یک زوج از زوج اعداد بیان شده را می توان داشت، حساب می کنیم.

۱۴۴- گزینه ۴

حالتی که در آن $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$ می شود، به صورت زیر است.



$$\rightarrow B \cap A' = \emptyset$$

۱۴۵-گزینه ۲

مجموعه A به صورت زیر است:

$$A = \{a, b, \{a, b\}, c\}$$

برای راحتی می توان $\{a, b\}$ را با d عوض کرد. یعنی

$$A = \{a, b, d, c\}$$

پس افرازهایی که به صورت ۳ عضو یک عضو یا ۴ عضو یک عضو نیست را می نویسیم.

افرازهای ۲ عضو ۲ عضو: $\{a, b\}\{c, d\} / \{a, c\}\{b, d\} / \{a, d\}\{b, c\}$

افرازهای ۴ عضو: $\{a, b, d, c\}$

پس کلاً ۴ افراز با شرایط مسئله وجود دارد.

۱۴۶- گزینه ۲

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ab = cd \text{ رابطه}$$

$$(a, b)R(a, b) \rightarrow ab = ab \rightarrow \text{انعکاسی دارد}$$

$$(a, b)R(c, d) \rightarrow ab = cd \rightarrow cd = ab \rightarrow (c, d)R(a, b) \rightarrow \text{تقارنی دارد}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, b)R(c, d) \rightarrow ab = cd \\ (c, d)R(e, f) \rightarrow cd = ef \end{array} \right\} \Rightarrow ab = ef \rightarrow (a, b)R(e, f) \rightarrow \text{ترایی دارد}$$

$$[(1, 4)] = \{(x, y) \in R^2 | xy = 1 \times 4\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = 4 \\ x = y \Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right. \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{نیمساز ربع اول}$$

۱۴۷- گزینه ؟

مجموع دو عدد رو شده مضرب ۳: A

$$B: \text{یک عدد مضرب ۳ نباشد} \rightarrow B = \underbrace{B_1}_{\text{اولین عدد مضرب ۳ نباشد}} \cup \underbrace{B_2}_{\text{دومین عدد مضرب ۳ نباشد}}$$

$$\underbrace{n(B)}_{\text{یک عدد}} = n(B_1 \cup B_2) = \underbrace{n(B_1)}_{\text{اولین عدد}} + \underbrace{n(B_2)}_{\text{دومین عدد}} - \underbrace{n(B_1 \cap B_2)}_{\text{هر دو عدد}} = 4 \times 6 +$$

$$\underbrace{6 \times 4}_{\text{مضرب ۳ نباشد}} - \underbrace{4 \times 4}_{\text{مضرب ۳ نباشد}} = 32$$

$A \cap B =$:مجموع مضرب ۳ و یک عدد مضرب ۳ نباشد

$$\{(1,2)(2,1)(5,1)(1,5)(5,4)(4,5)(4,2)(2,4)\}$$

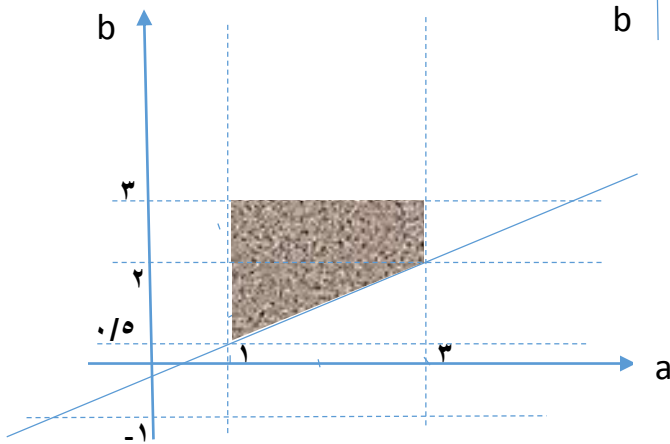
$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

۱۴۸- گزینه ۳

$$1 < a < 3, \quad -1 < b < 3, \quad 3a - 4b < 1$$

$$3a - 4b = 1$$

a	1	3
b	$\frac{1}{2}$	2



حال سؤال ایجاد شده : پایین خط داخل مستطیل جزء ناحیه است یا بالای خط داخل مستطیل ناحیه مورد نظر است . برای پاسخ به این سؤال یک نقطه تست مثلاً نقطه $A(1,3)$ را در نامعادله جایگذاری می کنیم : $3(1) - 4(3) < 1$. چون نقطه مورد نظر در نامعادله صدق می کند پس A داخل ناحیه است، پس بالای خط می شود.

$$P = \frac{\text{مساحت دوزنقه هاشور خورده}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\frac{((3-2) + (3-\frac{1}{2})) \times (3-1)}{2}}{4 \times 2} = \frac{7}{16}$$

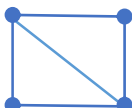
۱۴۹- گزینه ۳

$$p + q = 9$$

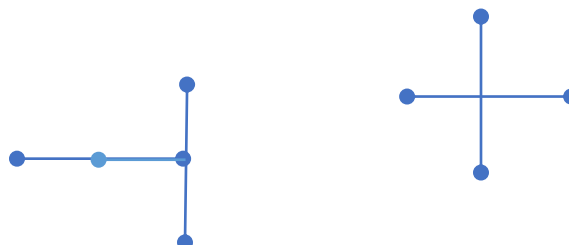
p	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
q	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

غیر ممکن

غیر هم بند

$$p = 4, q = 5 \rightarrow$$


$$p = 5, q = 4 \rightarrow \text{درخت چون } p = q + 1$$



پس کلاً ۴ گراف با شرایط مسئله وجود دارد.

۱۵۰- گزینه ۴

$$\overline{aba \ bab} = ۱۱۱q^۲ \rightarrow ۱۰^۵a + ۱۰^۴b + ۱۰^۳a + ۱۰^۲b + ۱۰a + b = ۱۱۱q^۲$$

$$۱۰۱۰۱۰a + ۱۰۱۰۱b = ۱۰۱۰۱ \times ۱۰a + ۱۰۱۰۱b = ۱۰۱۰۱(۱۰a + b) = ۷ \times ۱۳ \times ۱۱۱ \times (۱۰a + b) = ۱۱۱q^۲$$

$$\rightarrow ۷ \times ۱۳(۱۰a + b) = q^۲ \rightarrow ۱۰a + b = ۷ \times ۱۳ = ۹۱ \rightarrow a = ۹, b = ۱ \rightarrow a + b = ۱۰$$

۱۵۱- گزینه ۱

$$(abc)_۷ = (a.cb)_۴$$

دقت :

$$۰ \leq c, b \leq ۳$$

$$۱ \leq a \leq ۳$$

$$\rightarrow ۴۹a + ۷b + c = ۶۴a + ۴c + b$$

$$\rightarrow ۱۵a + ۳c = ۶b \rightarrow ۵a + c = ۲b \rightarrow a = ۱, c = ۱, b = ۳$$

$$\rightarrow a + b + c = ۵$$

۱۵۲- گزینه ۱

$$\begin{cases} d \mid ۵n + ۴ \xrightarrow{\times ۱۳} d \mid ۶۵n + ۵۲ \\ d \mid ۱۳n - ۳ \xrightarrow{\times -۵} d \mid -۶۵n + ۱۵ \end{cases} \rightarrow d \mid ۶۷ \rightarrow d = ۶۷ \rightarrow ۶۷ \mid ۵n + ۴ \rightarrow ۵n + ۴ = ۶۷q$$

$$۶۷q \equiv ۴ \pmod{۵} \xrightarrow{\times ۲} ۱۳۴q \equiv ۸ \equiv ۳ \pmod{۵} \rightarrow ۱۳۴q \equiv ۳ \pmod{۵} \text{ (به پیمانه ۵)}$$

$$۱۳۴q - ۱۳۵q \equiv ۳ \pmod{۵} \rightarrow -q \equiv ۳ \pmod{۵} \rightarrow -q = ۵K + ۳ \rightarrow q =$$

$$۵K' - ۳ \rightarrow ۵n + ۴ = ۶۷(۵K' - ۳) \rightarrow ۵n + ۴ = ۳۳۵K' - ۲۰۱ \rightarrow ۵n = ۳۳۵K' - ۲۰۵ \rightarrow n = ۶۷K' - ۴۱$$

$$\begin{cases} K' = ۱ \rightarrow n = ۶۷ - ۴۱ = ۲۶ \\ K' = ۲ \rightarrow n = ۱۳۴ - ۴۱ = ۹۱ \end{cases} \rightarrow \text{دو عدد دو رقمی برای } n \text{ وجود دارد}$$

۱۵۳- گزینه ۴

$$M(ROR) = M(R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۲ تا ۱ دارد.

۱۵۴- گزینه ۳

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 > 4, x_3 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \geq 5, x_3 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + x_2 + x_3 = 11 - 5 = 6 \\ x_1 = y_1 + 5, y_1 \geq 0, x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \binom{6+3-1}{3-1} = 28 \text{ تعداد جواب ها با شرایط فوق}$$

$$x_3 \text{ برای } \begin{cases} y_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + x_2 + y_3 = 6 - 5 = 1 \\ y_3 \geq 0, x_3 = y_3 + 5 \end{cases}$$

$$\binom{3+1-1}{3-1} = 3 \Rightarrow 28 - 3 = 25 \text{ تعداد جواب ها به شرط } x_1 > 4 \text{ و } x_3 \leq 4$$

۱۵۵- گزینه ۲

دو مهره ابتدایی سیاه: B_2 دو مهره ابتدایی سفید: B_1 مهره سوم سفید: A

از دو مهره ابتدایی یکی سفید و یکی سیاه: B_3

$$P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) + P(A|B_3) \times P(B_3) =$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{3}{5} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{2}{5} \times \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{5 \times 21} + \frac{18}{5 \times 21} + \frac{24}{5 \times 21} = \frac{3}{7}$$