

ریاضیات

سراسری خارج از کشور - ریاضی ۸۵

۱۰۱- گزینهی «۴»

می‌دانیم نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور x هاست، هرگاه:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4m^2 - 4(1)(m+2) < 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m - 8 < 0 \\ m > -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(m-2)(m+1) < 0 \\ m > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m > -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < m < 2$$

۱۰۲- گزینهی «۱»

به تابع‌های زیر توجه کنید:

$$f = \{(1, 2), (2, 0)\}$$

$$g = \{(1, 3), (3, -1)\}$$

$$\Rightarrow f \cup g = \{(1, 2), (2, 0), (1, 3), (3, -1)\}$$

رابطه‌ی فوق تابع نیست زیرا دو زوج مرتب متمایز با مولفه‌های اول یکسان در رابطه وجود دارد.

۱۰۳- گزینهی «۴»

ابتدا دامنه‌ی معادله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x + \frac{12}{5} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{-12}{5} \cap x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (*)$$

$$2 \log x = 1 + \log(x + \frac{12}{5}) \Rightarrow \log x^2 = \log 1 + \log(x + \frac{12}{5})$$

$$\Rightarrow \log x^2 = \log 1 \cdot (x + \frac{12}{5}) \Rightarrow x^2 = 1 \cdot x + 24$$

$$x^2 - 1 \cdot x - 24 = 0 \Rightarrow (x - 12)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta}^{2x+1} = \log_{\Delta}^{25} = \log_{\Delta}^{5^2} = 2 \log_{\Delta}^5 = 2$$

۱۰۴- گزینهی «۲»

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 3 \cdot d = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-5)} \begin{cases} -2 \cdot a_1 + 3 \cdot d = -75 \\ 5a_1 + 3 \cdot d = 3 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -78 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{5} \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10 \cdot d = 2 + 10 \cdot (\frac{1}{5}) = 4$$

۱۰۵- گزینهی «۳»

با توجه به معادله‌ی داده شده داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \Rightarrow k^2 = \beta + \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} = 2 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 4$$

۱۰۶-گزینه ی «۴»

$$\begin{aligned} 4 \cos 4^\circ - \frac{1}{\cos 2^\circ} &= \frac{4 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ} \\ &\xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}} \frac{4 \times \frac{1}{2} [\cos(4^\circ + 2^\circ) + \cos(4^\circ - 2^\circ)] - 1}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \cos 6^\circ + 2 \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ} \\ &= \frac{2(\frac{1}{2}) + 2 \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 2 \end{aligned}$$

۱۰۷-گزینه ی «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^3}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = -2\sqrt{2}$$

تذکر: دقت شود چون داخل قدر مطلق وقتی $(x \rightarrow 0^+)$ مثبت است قدر مطلق با علامت مثبت برداشته می شود.

۱۰۸-گزینه ی «۲»

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x[x], & -1 < x < 1 \\ ax+b, & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

پیوستگی در $x=-1$:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax+b = -a+b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -x = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a+b=1 \quad (1)$$

پیوستگی در $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 0 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax+b = a+b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بررسی کنید چرا تابع $y=x[x]$ در بازه ی $(-1,1)$ پیوسته است.

۱۰۹-گزینه ی «۳»

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{(*)} y' = (\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۱۱۰-گزینه ی «۴»

$$y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'|_{x=2} = 0 \\ (2,4): \text{ نقطه ی تماس} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow \text{معادله ی خط} : y-4 = 0(x-2) \Rightarrow y=4$$

بنابراین خط مماس، محور y ها را با عرض ۴ قطع می کند.

۱۱۱-گزینه ی «۳»

$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow -f \sin x \cos x + 2 \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x (-2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = 0 \\ -2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

حال با کمک آزمون مشتق دوم داریم:

$$f''(x) = -4 \cos 2x + 2 \cos x \Rightarrow \begin{cases} f''(-\frac{\pi}{3}) = 3 > 0 \Rightarrow \text{نسبی Min} \\ f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{نسبی Max} \\ f''(\frac{\pi}{3}) = 3 > 0 \Rightarrow \text{نسبی Min} \end{cases}$$

۱۱۲-گزینه ی «۱»

فرض می کنیم طول نقطه ی مورد نظر $\alpha (\alpha \geq 0)$ باشد، داریم:

$$f(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow f(\alpha) = \alpha\sqrt{\alpha} \Rightarrow B = (\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$$

باید فاصله ی نقاط A و B می نیم شود، داریم:

$$|AB| = d = \sqrt{(\alpha - 8)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 16\alpha + 64 + \alpha^3}$$

$$d'_\alpha = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 16}{2\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}} = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \Rightarrow \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$d = \sqrt{(2-8)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{36+8} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

۱۱۳-گزینه ی «۲»

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log(1 - \frac{1}{k^2}) = \sum_{k=2}^{\infty} \log(\frac{k^2-1}{k^2}) = \sum_{k=2}^{\infty} \log(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2})$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \log(\frac{k-1}{k}) = \sum_{k=2}^{\infty} \log(\log \frac{k-1}{k} - \log \frac{k}{k+1}) = \log \frac{2-1}{2} - \log \frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 1} = \log \frac{1}{2} - \log \frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 1}$$

$$\log \frac{1}{2} = \log \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \log(1/2 \cdot 2) = \log A \Rightarrow A = 1/2 \cdot 2$$

۱۱۴-گزینه ی «۴»

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{(x+1)(x-2)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-1, 2)$$

دنباله ی a_n به عدد ۲ همگراست. اما باید توجه داشت برای این که دنباله ی $\{f(a_n)\}$ همگرا باشد لازم است با توجه به دامنه ی تابع f وقتی $n \rightarrow +\infty$ دنباله ی a_n با مقادیر بیش تر از ۲ به ۲ همگرا باشد.

بنابراین داریم:

$$\frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n} > 2 \Rightarrow 2n^2 + b > 2n^2 + 6n \Rightarrow 6n > b$$

چون $n \rightarrow +\infty$ ، بنابراین با توجه به نامعادلات فوق b هیچ مقداری را نمی تواند اختیار کند.

$$f + g = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1-x}{x-\sqrt{x}}$$

ابتدا ریشه‌های مخرج کسرها را می‌یابیم داریم:

$$x - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} x^2 = x \Rightarrow x = 0, 1$$

$$x + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g) = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم تابع است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f + g) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= 1 - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم تابع نیست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی مشتق تابع f ، این تابع تنها در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x = \alpha \text{ در } f^{-1} \text{ شیب خط مماس بر } f^{-1} \text{ در } x = \alpha \Rightarrow \frac{-1}{\delta} = (f^{-1})'(\alpha)$$

هم‌چنین می‌دانیم که اگر $(\alpha, \beta) \in f^{-1}$ ، آنگاه $(\beta, \alpha) \in f$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)} \Rightarrow \delta = \frac{1}{\frac{\delta}{(\beta+2)^2}} \Rightarrow (\beta+2)^2 = 2\delta \Rightarrow \begin{cases} \beta = -7 & \text{ق ق} \\ \beta = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$f(\beta) = \alpha \Rightarrow f(3) = 1 \Rightarrow (3, 1) \in f \Rightarrow (1, 3) \in f^{-1}$$

هم‌چنین نقطه‌ی به‌دست آمده روی خط قائم نیز قرار دارد. داریم:

$$d : \delta y + x = b \xrightarrow{(1, 3) \in d} \delta \times 3 + 1 = b \Rightarrow b = 1\delta + 3$$

۱۱۸-گزینهی «۴»

با توجه به بازه‌ی داده شده تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin \pi x, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{در بازه‌ی } [0, 1) \text{ نمودار تابع } f \text{ موازی محور} \\ x \text{ هاست. بنابراین بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.} \end{array}$$

تذکر: روی خط $y = C$ بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی وجود دارد. زیرا مشتق برابر صفر است.

۱۱۹-گزینهی «۱»

با توجه به شکل، نمودار تابع f بر محور x ها در نقطه‌ی $x = 0$ مماس است، بنابراین معادله‌ی تلاقی آن با محور x ها ($y = 0$) ریشه‌ی

مضاعف می‌دهد. از طرفی مجانب مایل تابع از نقطه‌ی $(0, \frac{1}{4})$ می‌گذرد، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax}{2x + b} \Rightarrow x^2 + ax = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} a = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2x + b}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad | \quad 2x + b \\ -x^2 - \frac{1}{2}bx \quad | \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}b \\ \hline -\frac{1}{2}bx \quad | \\ +\frac{1}{2}bx + \frac{1}{4}b^2 \quad | \\ \hline \frac{1}{4}b^2 \end{array}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}b \xrightarrow{(0, \frac{1}{4})} \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{4}b \Rightarrow b = -2$$

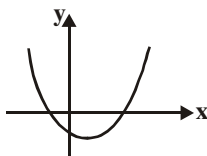
۱۲۰-گزینهی «۳»

با کمک قاعده‌ی هوییتال داریم: (دقت شود که حد فوق ابهام $\frac{0}{0}$ دارد.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{6x - 2} = \frac{-\pi^2(-1)}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

۱۲۱-گزینهی «۱»



تابع $f = x^4 - 4x + a$ تنها یک نقطه‌ی اکسترمم دارد و با توجه به ضریب x^4

این نقطه می‌نیمم نسبی است. بنابراین شکل تابع به صورت زیر است:

بنابراین برای این که تابع f یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی داشته باشد باید مقدار می‌نیمم نسبی و عرض از مبدا منفی باشند داریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^4 - 4x + a \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -3 + a < 0 \\ f(0) = a < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 3 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow a < 0$$

۱۲۲-گزینهی «۳»

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{\int_0^5 x\sqrt{x} dx}{5} = \frac{\int_0^5 x^{\frac{3}{2}} dx}{5} = \frac{\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\bigg|_0^5}{5} \\ &= \frac{\frac{2}{5}(5^{\frac{5}{2}} - 0)}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2 \times 25\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5} \\ f(x) = x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow f(\sqrt[3]{C}) = (C^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{6}} = \sqrt{C} \Rightarrow \sqrt{C} = 2\sqrt{5} \Rightarrow C = 20. \end{aligned}$$

۱۲۳-گزینهی «۱»

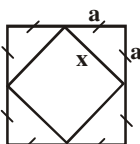
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{x} = u &\Rightarrow \frac{-\pi}{x^2} dx = du \\ \Rightarrow \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} dx &= -\frac{1}{\pi} \int \sin u du = +\frac{1}{\pi} \cos u \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi) = \frac{1}{\pi} (0 - (-1)) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

تذکر: دقت شود که با تغییر متغیر $\frac{\pi}{x} = u$ حدود انتگرال با توجه به تغییر متغیر، تغییر می‌کند.

۱۲۴-گزینهی «۲»

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (3x^2 - 2x - 5) dx = x^3 - x^2 - 5x + C \\ \xrightarrow{(0,3) \in F} C &= 3 \Rightarrow F(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3 \quad (1) \\ F'(x) = f(x) &= 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \\ F''(x) = f'(x) &= 6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} F''(-1) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Max نسبی} \\ F''(\frac{5}{3}) = 8 > 0 \Rightarrow \text{Min نسبی} \end{cases} \\ \xrightarrow{(1)} &F(-1) = 6 = \text{عرض ماکزیمم نسبی} \end{aligned}$$

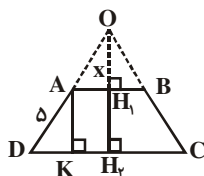
۱۲۵-گزینهی «۴»



مطابق شکل، کوچک‌ترین مربع محاطی مربعی است که هر رأس آن و وسط ضلع مربع اصلی قرار گیرد که در این صورت طول ضلع آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow \text{طول ضلع مربع کوچک} : x = a\sqrt{2} \\ X &= 2a \Rightarrow \frac{x}{X} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

۱۲۶-گزینهی «۲»

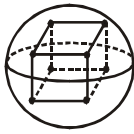


در مثلث قائم‌الزاویه DAK داریم:

$$\begin{aligned} DK &= \frac{CD - AB}{2} = \frac{15 - 9}{2} = 3 \\ AK &= \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow H_1H_2 = 4 \\ \text{در مثلث } ODH_2 &\text{ با خط موازی } AH_1, \text{ قضیه‌ی تالس را می‌نویسیم:} \end{aligned}$$

$$\frac{OH_1}{OH_2} = \frac{AH_1}{DH_2} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{15} \Rightarrow 15x = 2x + 8 \Rightarrow x = 6$$

۱۲۷-گزینه «۲»

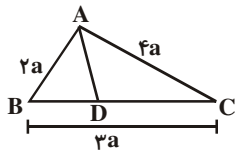


چنانچه a طول یال مکعب و R شعاع کره باشد، با توجه به شکل داریم:

$$a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \text{حجم کره } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2} \\ \text{حجم مکعب } V_2 = a^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\pi\sqrt{3})$$

۱۲۸-گزینه «۳»



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{4a} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$$

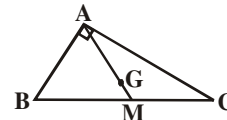
$$\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$$

۱۲۹-گزینه «۲»

$$a = \sqrt{(2\sqrt{11})^2 + 8^2} = \sqrt{44 + 64} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

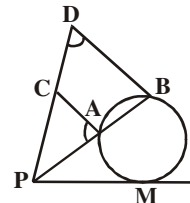
چنانچه G نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها (مرکز ثقل) و M وسط وتر مثلث باشد، آنگاه:

$$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{6}a = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$$



۱۳۰-گزینه «۴»

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PC \cdot PD = PA \cdot PB \quad (1)$$



$$PM^2 = PA \cdot PB \quad (2)$$

از طرفی برای مماس PM و قاطع PAB داریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} PM^2 = PC \cdot PD = 9 \times (9 + 7) = 9 \times 16 \Rightarrow PM = 12$$

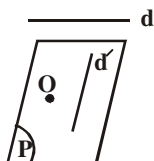
۱۳۱-گزینه «۱»

$$\text{تصویر } A: A' = (2(-1) - 8, 2(3) - 1) = (-10, 5)$$

$$\text{تصویر } B: B' = (2(-1) - (-2), 2(3) - 5) = (0, 1)$$

$$\text{خط گذرا از } A' \text{ و } B': \frac{y-1}{x-0} = \frac{5-1}{-10-0} \Rightarrow \frac{y-1}{x} = \frac{-2}{5} \Rightarrow 5y - 5 = -2x \Rightarrow 5y + 2x = 5$$

۱۳۲-گزینه «۴»



مطابق شکل اگر $d \parallel P$ باشد، آنگاه تمام خطوط گذرا از O و

مقاطع با d' با خط d نقطه اشتراکی ندارند.

۱۳۳-گزینهی «۱»

سه بردار $a \times b$ ، $b \times d$ و $c \times d$ بر بردار d عمودند، پس هر سه موازی صفحه‌ای‌اند که آن صفحه بر بردار d عمود است.

۱۳۴-گزینهی «۳»

چون قدر مطلق مؤلفه‌های اول و دوم بردار a با هم برابر است پس: $|\cos \alpha| = |\cos \beta|$

از طرفی طبق فرض داریم $\gamma = 45^\circ$ ، پس برای کسینوس زوایای هادی بردار a داریم:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

توجه کنید چون $a_x = 1$ و $a_y = -1$ ، پس $\cos \alpha > 0$ و $\cos \beta < 0$. بنابراین $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ می‌شود.

۱۳۵-گزینهی «۲»

فرض می‌کنیم تقاطع این خط با صفحه‌ی xy نقطه‌ی $P = (a, b, 0)$ باشد. داریم:

$$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow (a-2, b+1, -1) \parallel (0, 4, -2) \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ \frac{b+1}{4} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

۱۳۶-گزینهی «۴»

اگر معادله‌ی این صفحه به صورت $2x - y + 2z + d = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{|d-5|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Rightarrow |d-5| = 6 \Rightarrow \begin{cases} d=-1 \Rightarrow P_1: 2x-y+2z-1=0 \\ d=11 \Rightarrow P_2: 2x-y+2z+11=0 \end{cases}$$

غ ق ق $\Rightarrow y = -1$ تقاطع صفحه‌ی P_1 با محور y ها

$y = 11$ تقاطع صفحه‌ی P_2 با محور y ها

۱۳۷-گزینهی «۱»

$$x^2 + ay^2 - 2x + a - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + ay^2 = 4-a \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{4-a}{a}} + \frac{(x-1)^2}{4-a} = 1$$

چون بیضی قائم است، پس:

$$\begin{cases} \frac{4-a}{a} > 0, 4-a > 0 \\ \frac{4-a}{a} > 4-a \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$$

۱۳۸-گزینهی «۴»

$O' = (4, \beta)$: مرکز دایره

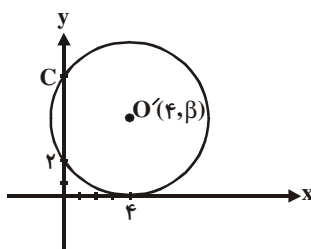
$$O'A = O'B = R \Rightarrow \beta = \sqrt{16 + (\beta-2)^2}$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 16 + \beta^2 - 4\beta + 4 \Rightarrow \beta = 5$$

نقطه‌ی تقاطع دیگر دایره با محور y ها را $C = (0, a)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$O'C = R \Rightarrow \sqrt{16 + (a-5)^2} = 5 \Rightarrow (a-5)^2 = 9$$

$$\Rightarrow a-5 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ a=2 \end{cases} \text{ (نقطه‌ی B)}$$



۱۳۹-گزینهی «۲»

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

باید درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^* را بیابیم که برابر است با:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{22}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{از طرفی } |A| = 12 + 9 + 24 - (8 + 12 + 27) = -2$$

$$\frac{A_{32}}{|A|} = \frac{6}{-2} = -3$$

پس درایه‌ی موردنظر برابر است با:

۱۴۰-گزینهی «۳»

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = a \\ 7x + 4y + 9z = b \end{cases}$$

چنانچه سطر اول را در عدد ۳ و سطر دوم در عدد ۲ ضرب کنیم و حاصل را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$7x + 4y + 9z = 3 + 2a$$

دستگاه فوق بی‌شمار جواب دارد اگر و فقط اگر داشته باشیم $b = 2a + 3$.

۱۴۱-گزینهی «۳»

$$f_3 = F_3 - F_2 = x - 17 \quad \text{فراوانی مطلق دسته‌ی وسط (سوم)}$$

$$n = F_3 = 6 \quad \text{کل داده‌ها}$$

$$90^\circ = \frac{f_3}{n} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{f_3}{n} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x-17}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x-17=1 \Rightarrow x=18$$

مطابق فرض داریم:

$$f_4 = F_4 - F_3 = 48 - x = 48 - 18 = 30 \quad \text{فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم}$$

۱۴۲-گزینهی «۱»

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 1/2$$

چنانچه میانگین داده‌ها (یعنی \bar{x}) را به هر یک از داده‌ها اضافه کنیم آنگاه انحراف معیار تغییر نکرده (یعنی $\sigma' = \sigma$) ولی میانگین داده‌ها

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} = \frac{1}{2} CV = \frac{1/2}{2} = 1/4$$

دو برابر می‌شود (یعنی $\bar{x}' = 2\bar{x}$)، پس:

۱۴۳-گزینهی «۲»

$$B' \subset A' \Rightarrow A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = B - A$$

$$\Rightarrow (A \Delta B) \cup (A \cap B) = (B - A) \cup A = B$$

۱۴۴-گزینهی «۱»

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} A \cap B = \emptyset$$

$$A - B = A - (A \cap B) = A - \emptyset = A$$

۱۴۵-گزینهی «۴»

این رابطه هم‌ارزی نیست زیرا خاصیت ترابایی ندارد. داریم:

$$(1,2)R(1,4), (1,4)R(2,4)$$

$$\text{ولی } (1,2) \not R (2,4)$$

۱۴۶- گزینهی «۳»

خواننده‌های روزنامه‌ی (الف): A

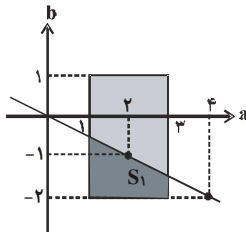
خواننده‌های روزنامه‌ی (ب): B

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - (0/3 + 0/25 - 0/9) = 1 - 0/46 = 0/54$$

۱۴۷- گزینهی «۳»

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} > \frac{1}{2} \Rightarrow -2b > a \Rightarrow a + 2b < 0$$



مطابق شکل، آن قسمتی از مستطیل که زیر محور x ها قرار دارد

توسط خط $a + 2b = 0$ نصف می‌شود، پس مساحت ناحیه‌ی مطلوب برابر است با:

$$S_1 = \frac{1}{2} (3-1) \times (2-0) = 2$$

$$S = 3 \times 2 = 6 \text{ : مساحت مستطیل}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر: } P_1 = \frac{S_1}{S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۱۴۸- گزینهی «۲»

مضرب ۱۲

$$P(4 \cap \overline{6}) = P(4 - 6) = P(4) - P(4 \cap 6)$$

عددی که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۶ باشد، مضرب ۱۲ است. بنابراین باید تعداد مضرب‌های ۴ را به‌دست آورده و تعداد مضرب‌های ۱۲

را از آن کم کنیم:

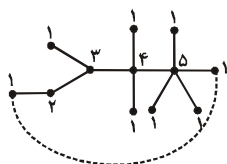
$$P = \frac{\left[\frac{500}{4}\right] - \left[\frac{500}{12}\right]}{500} = \frac{125 - 41}{500} = \frac{84}{500} = 0/168$$

۱۴۹- گزینهی «۲»

گراف همبند فاقد دور درخت است. اگر مرتبه‌ی درخت P باشد با توجه به دنباله‌ی درجات رئوس این درخت داریم:

$$\{5, 4, 3, 2, 1, 1, \dots\}$$

$P-4$



مطابق نمودار رسم شده، چنانچه یال خط‌چین را رسم کنیم،

دوری به طول ۶ حاصل می‌شود که بیش‌ترین طول ممکن را دارد.

۱۵۰- گزینهی «۱»

$$\begin{cases} a \equiv 5 \equiv 4 \times 9 + 5 \equiv 41 \\ a \equiv 6 \equiv 5 \times 7 + 6 \equiv 41 \end{cases} \Rightarrow a \equiv 41 \text{ : عدد اول}$$

۱۵۱- گزینهی «۲»

$$(11n - 3, 2n + 7) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 11n - 3 \xrightarrow{\times 2} d \mid 22n - 6 \\ d \mid 2n + 7 \xrightarrow{\times 11} d \mid 22n + 77 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 83 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 83$$

$$2n + 7 = 83k \xrightarrow{k=1} 2n + 7 = 83 \Rightarrow n = 38 \quad \text{اگر } d = 83 \text{ باشد آنگاه:}$$

پس کمترین مقدار n برای آن که $d = 83$ باشد برابر $n = 38$ است که در آن صورت $11n - 3$ نیز مضرب ۸۳ خواهد بود. پس به ازای $n \leq 37$ ، دو عدد داده شده نسبت به هم اول‌اند.

۱۵۲- گزینهی «۱»

$$18a \equiv 12b \xrightarrow{\div 6} 3a \equiv 2b \text{ (گزینهی ۴)}$$

$$2b \equiv 3a \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \text{ (گزینهی ۲)} \Rightarrow 2b \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv b \Rightarrow 3a \equiv 2b \equiv b \text{ (گزینهی ۳)}$$

۱۵۳- گزینهی «۳»

$$M(ROR) = M^T(R) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(ROR) \text{ درایه‌ی سطر اول و ستون سوم } (0) \Rightarrow b = 0 \odot b) \oplus (1 \odot 1) \oplus (1 \odot 0 = 0 = (0)$$

$$M(ROR) \text{ درایه‌ی سطر سوم و ستون اول } (1) \Rightarrow a = 1 \odot a) \oplus (0 \odot 0) \oplus (1 \odot 1 = 1 = (1)$$

۱۵۴- گزینهی «۴»

پیشامد مطلوب آن است که مهره‌ی شماره ۲ در بین ۴ مهره‌ی انتخاب شده باشد که در آن صورت احتمال این پیشامد برابر است با:

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۱۵۵- گزینهی «۴»

$$\sum_{i=1}^5 P(X=i) = 1 \Rightarrow \frac{\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2^5 - 1}{a} = 1 \Rightarrow a = 31$$

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = \frac{\binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{a} = \frac{5+1}{31} = \frac{6}{31}$$

فیزیک

سراسری خارج از کشور - ریاضی ۸۵

۱۵۶- گزینهی «۱»

$$\begin{cases} x = 5t + 15 \Rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = 5 \frac{m}{s} \\ y = 10t - 5t^2 \Rightarrow V_y = \frac{dy}{dt} = 10 - 10t \end{cases}$$

سرعت متحرک در لحظه‌ای کمترین مقدار است که مؤلفه‌ی قائم سرعت آن کمینه شود. چون مؤلفه‌ی افقی سرعت متحرک ثابت است.

بنابراین برای به‌دست آوردن لحظه‌ای که سرعت متحرک کمینه است، داریم:

$$V_y = 0 \Rightarrow 10 - 10t = 0 \Rightarrow t = 1s$$

۱۵۷- گزینهی «۱»

متحرکی با شتاب کم‌تر شروع به حرکت می‌کند، دیرتر به نقطه‌ی B می‌رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیش‌تر در راه است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow[a'=\frac{m}{s}}{a=\frac{2m}{s}} \frac{1}{2} \times 2 \times (t+3)^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 \Rightarrow t+3=2t \Rightarrow t=3s$$

بنابراین متحرکی با شتاب کم‌تر شروع به حرکت کرده، ۶s در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (3+3)^2 = 36m$$

۱۵۸- گزینهی «۳»

حرکت دو گلوله نسبت به هم یکنواخت است و داریم:

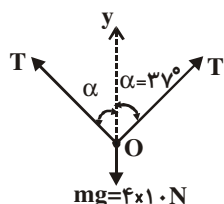
$$h = (V - (-V))t \Rightarrow h = 2Vt = 2 \times 20 \times 2 = 80m$$

۱۵۹- گزینهی «۱»

نقطه‌ی مورد نظر در معادله‌ی مسیر پرتابه صدق کند، بنابراین داریم:

$$y = \frac{-10}{2 \times V_0^2 \times 0.36} x^2 + \frac{4}{3} x \xrightarrow[y=3/2m]{x=4/8m} 3/2 = \frac{-10}{0.72 \times V_0^2} \times 4/8^2 + \frac{4}{3} \times 4/8 \Rightarrow V_0 = 10 \frac{m}{s}$$

۱۶۰- گزینهی «۲»



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2T \cos \alpha = mg \Rightarrow T = \frac{40}{2 \times \cos 37^\circ} = 25N$$

۱۶۱-گزینه ی «۲»

ابتدا شتاب مجموعه را به دست می آوریم:

$$10 + 10 = (5 + 3)a \Rightarrow a = 2/5 \frac{m}{s^2}$$

مطابق شکل زیر، وزنه ی ۵ کیلوگرمی، نیروی N را بر وزنه ی ۳ کیلوگرمی وارد می کند و داریم:

$$\begin{array}{c} \vec{a} = 2/5 \frac{m}{s^2} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{10} \boxed{3 \text{ kg}} \xleftarrow{N} \end{array} \end{array}$$

$$10 - N = ma \Rightarrow 10 - N = 3 \times 2/5 \Rightarrow N = 2/5 N$$

۱۶۲-گزینه ی «۴»

$$V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{R_e + 2R_e}{R_e + R_e}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

۱۶۳-گزینه ی «۲»

$$E_{\text{وج}} = E_{\text{پرتاب}} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 10^2 = 25 J$$

۱۶۴-گزینه ی «۱»

$$E_{\text{مرکز گرا}} = m \omega^2 r \Rightarrow 2 = 0.4 \times \omega^2 \times 0.2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{s}$$

۱۶۵-گزینه ی «۱»

$$W_T = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = \Delta K \Rightarrow mgh + Mg \mu d \cos 18.0^\circ = \Delta K$$

$$5 \times 2 + 10 \times \mu \times 2 \times (-1) = 8 \Rightarrow \mu = 0.1$$

۱۶۶-گزینه ی «۱»

$$\frac{1}{2} m V^2 = m' L_F \Rightarrow \frac{1}{2} \times 55/5 \times 6^2 = m' \times 333 \times 10^{-3} \Rightarrow m' = 0.03 \text{ kg} \Rightarrow m' = 3 \text{ g}$$

جرم یخ ذوب شده در مقایسه با جرم قالب یخ ناچیز است و بنابراین می توان از تغییرات جرم یخ در ضمن صفر شدن سرعت آن صرف نظر کرد.

۱۶۷-گزینه ی «۳»

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = m_1 C \Delta \theta \\ Q_2 = m_2 C \Delta \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta Q = \Delta m C \Delta \theta \Rightarrow (1200 - 300) = \Delta m = 400 \times 30 \Rightarrow \Delta m = 75 \times 10^{-3} \text{ kg} = 75 \text{ g}$$

۱۶۸-گزینه ی «۱»

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{300} = \frac{P_2}{273} \Rightarrow P_2 = \frac{273}{300} P_1 \Rightarrow \% \frac{\Delta P}{P_1} = -\frac{27}{300} \times 100 = -9\%$$

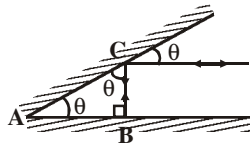
۱۶۹-گزینه ی «۲»

چون در ضمن فرآیند ab دمای گاز افزایش می یابد، انرژی درونی گاز کامل هم بالا می رود و گاز روی محیط بیرون کار انجام می دهد و از آن گرما می گیرد و با بالا رفتن حجم گاز و ثابت ماندن جرم آن، چگالی گاز کاهش می یابد. در نهایت چون فرآیند به صورت یک خط راست گذرا از مبدأ در دستگاه V - T می باشد، فرآیند ab هم فشار است.

۱۷۰-گزینه ی «۲»

چون درب یخچال باز است، تنها انرژی الکتریکی که موتور یخچال مصرف می کند، سبب افزایش دمای اتاق می شود.

۱۷۱- گزینهی «۳»



مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر 180° است، بنابراین داریم:

$$\theta + \theta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۱۷۲- گزینهی «۲»

$$m = \frac{q}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2q$$

$$p - q = 3 \cdot \text{cm} \Rightarrow 2q - q = 3 \cdot \text{cm} \Rightarrow q = 3 \cdot \text{cm}, p = 6 \cdot \text{cm}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 2 \cdot \text{cm} \Rightarrow r = 2f = 4 \cdot \text{cm}$$

۱۷۳- گزینهی «۴»

در حالت اول جسم روی $2F$ عدسی همگرا قرار دارد و بزرگ‌نمایی برابر ۱ است، بنابراین بزرگ‌نمایی تصویر در حالت دوم دو برابر این مقدار و برابر ۲ است و می‌توان نوشت:

$$m_2 = \frac{q_2}{p_2} \Rightarrow 2 = \frac{q_2}{p_2} \Rightarrow q_2 = 2p_2$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p_2} + \frac{1}{2p_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow p_2 = \frac{2f}{3}$$

بنابراین باید جسم را به اندازه‌ی $p_1 - p_2 = \frac{f}{3}$ به عدسی نزدیک کنیم.

۱۷۴- گزینهی «۳»

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow 6 \times \rho_1 = 10 \times 100 \Rightarrow \rho_1 = \frac{5000}{3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

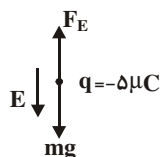
دقت کنید سؤال دارای این اشکال ساختاری است که مایع چگال‌تر در پایین‌ترین جا قرار نگرفته است.

۱۷۵- گزینهی «۴»

علت خاصیت موینگی، بزرگ‌تر بودن نیروی چسبندگی سطحی بین مولکول‌های مایع و لوله از نیروی چسبندگی بین مولکول‌های مایع است.

۱۷۶- گزینهی «۲»

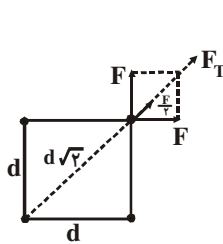
نیروی الکتریکی باید نیروی وزن ذره را خنثی کند، بنابراین باید به سمت بالا بر جسم وارد شود و می‌توان نوشت:



$$F_E = mg \Rightarrow Eq = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{q} = \frac{0.01 \times 10}{5 \times 10^{-6}} \Rightarrow E = 2 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

چون بار ذره منفی است، جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت نیروی الکتریکی و به سمت پایین می‌باشد.

۱۷۷-گزینه ی «۴»



$$F = \frac{kq^2}{d^2}$$

$$F_T = 2F \times \cos 45^\circ + \frac{F}{2} = (\sqrt{2} + \frac{1}{2})F$$

$$\Rightarrow F_T = (2\sqrt{2} + 1) \frac{F}{2} = (2\sqrt{2} + 1) \frac{kq^2}{2d^2}$$

۱۷۸-گزینه ی «۲»

کلید k باز است. $\Rightarrow V_1 = \varepsilon$ $\xrightarrow{V_1 = V_2} Ir = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon r}{R+r} = 0$
 کلید k بسته است. $\Rightarrow V_2 = \varepsilon - Ir$

بنابراین مقاومت درونی مولد ناچیز بوده و در مقایسه با مقاومت خارجی مدار ناچیز می باشد.

۱۷۹-گزینه ی «۳»

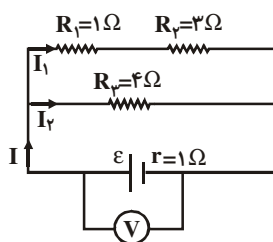
$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{6^2}{12} = 3 \Omega$$

$$R_T = R + R = 6 \Omega$$

$$I_{\text{کل}} = \frac{V_T}{R_T} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

$$q = It \Rightarrow t = \frac{q}{I} = \frac{48 \times 3600}{2} = 24 \times 3600 \text{ s} \Rightarrow t = 24 \text{ h}$$

۱۸۰-گزینه ی «۲»



$$P_1 = 4 \text{ W} \Rightarrow I_1^2 R_1 = 4 \Rightarrow I_1 = 2 \text{ A} \Rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

$$I = I_1 + I_2 = 4 \text{ A}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow 4 = \frac{\varepsilon}{\frac{4}{2} + 1} \Rightarrow \varepsilon = 12 \text{ V}$$

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow V = 12 - 4 \times 1 = 8 \text{ V}$$

۱۸۱-گزینه ی «۲»

بنابر رابطه ی $R = \rho \frac{l}{A}$ ، مقاومت لامپ L_1 کم تر از لامپ L_2 است و بنابر رابطه ی $P = \frac{V^2}{R}$ ، توان مصرفی آن بالاتر است، لذا لامپ

L_1 با نور بیش تری روشن می شود، چون مقاومت الکتریکی کم تری دارد.

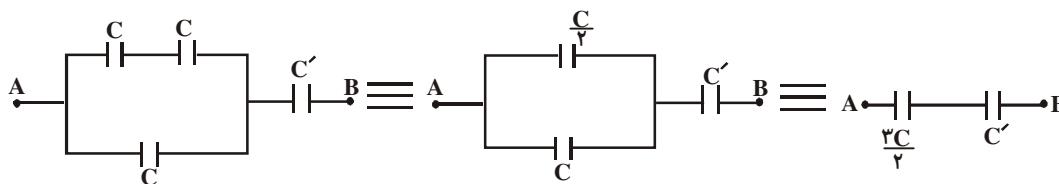
۱۸۲-گزینه ی «۱»

$$q_1 = C_1 V_1 = 5 \times 10^{-6} \times 100 \Rightarrow q_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ C} \Rightarrow q'_1 = q_1 - 10^{-3} = 4 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$q'_1 = C_1 V \text{ مشترک} \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-6} \times V \text{ مشترک} \Rightarrow V \text{ مشترک} = 80 \text{ V}$$

$$q'_2 = C_2 V \text{ مشترک} = 10^{-3} = C_2 \times 80 \Rightarrow C_2 = 12.5 \mu\text{F}$$

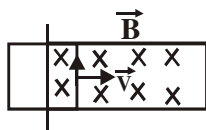
۱۸۳- گزینهی «۲»



$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{\frac{3C}{2}} + \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{4}{3C'} = \frac{2}{3C} + \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{1}{3C'} = \frac{2}{3C} \Rightarrow C' = \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{C}{C'} = 2$$

۱۸۴- گزینهی «۱»

در مدت زمانی که حلقه به طور کامل در داخل میدان مغناطیسی قرار دارد، شار مغناطیسی گذرا از آن ثابت است و بنابراین نیروی محرکه‌ی القایی برابر صفر است، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) می‌توانند جواب سؤال باشند. برای به‌دست آوردن جهت نیروی محرکه‌ی القایی در لحظه‌ی ورود به میدان می‌توان چنین استدلال کرد:



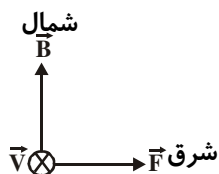
در مدت ورود حلقه به میدان شار گذرا از حلقه افزایش می‌یابد، بنابراین لازم است جهت جریان القایی پادساعت گرد و در جهت مثبت مثلثاتی باشد تا میدانی برون‌سو القا کرده با آثاری مغناطیسی‌ای که تولید می‌کند، با تغییر شار مغناطیسی یعنی عامل به‌وجود آورنده‌ی جریان مخالفت کند، بنابراین گزینه‌ی «۱» صحیح است.

۱۸۵- گزینهی «۴»

با بستن کلید و افزایش تدریجی جریان در سیم‌لوله مطابق شکل در حلقه‌ی B میدانی به سمت راست در آن القا می‌شود و بنا بر قانون لنز، جهت جریان القایی در حلقه‌ی B در جهت ۲ است. همچنین در حلقه‌ی A هم میدانی به سمت راست القا شده و جهت جریان القایی باز هم در جهت «۲» خواهد بود.

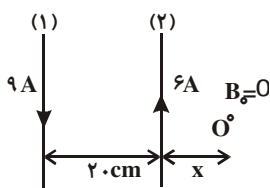


۱۸۶- گزینهی «۴»



مطابق شکل مقابل، جهت نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذره‌ی باردار بنابر قاعده‌ی دست راست به سمت شرق خواهد بود.

۱۸۷-گزینه «۲»



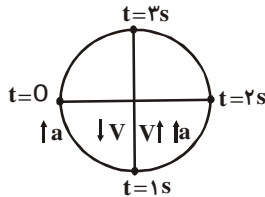
$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| \Rightarrow \frac{I_1}{r_1 + x} = \frac{I_2}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{20 + x}{x} \Rightarrow 3x = 40 + 2x \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی O از سیم (۱) برابر ۲۰ + ۴۰ = ۶۰ cm است.

۱۸۸-گزینه «۲»

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ s}$$



بنابراین زمانی که نوسانگر، ۹۰° تغییر فاز می‌دهد برابر ۱s است و با توجه به

دایره‌ی مرجع رسم شده شتاب و سرعت نوسانگر در بازه‌ی زمانی ۱s تا ۲s

در جهت مثبت محور xها می‌باشد.

۱۸۹-گزینه «۳»

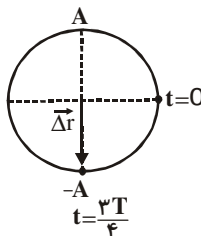
در نقطه‌ی M انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر با هم برابرند، لذا داریم:

$$u = k \Rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2) \Rightarrow 2x^2 = A^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

۱۹۰-گزینه «۲»

$$\Delta\phi = k\Delta x \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda} \times 0.4 \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

۱۹۱-گزینه «۴»



با گذشت زمان و و پیش روی موج نقطه‌ی M به طرف بالا حرکت می‌کند،

بنابراین فاز اولیه‌ی نقطه‌ی M برابر صفر است و برای محاسبه‌ی جابه‌جایی

ذره‌ی M در مدت صفر تا $t = \frac{3T}{4}$ داریم:

$$\Delta r = -A$$

همچنین با توجه به تعریف طول موج که میزان پیش روی موج در یک دوره (T) است، موج در مدت زمان $\frac{3T}{4}$ به اندازه‌ی $\frac{3\lambda}{4}$

پیش‌روی می‌کند.

۱۹۲-گزینه «۲»

بیش‌ترین سرعت متوسط زمانی حاصل می‌شود که جابه‌جایی بیشینه باشد. با توجه به این که تغییر فاز نوسانگر در مدت ۰.۲s برابر

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{5\pi}{3} \times 0.2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

است، بیش‌ترین سرعت متوسط ذره زمانی حاصل می‌شود که مثلاً ذره از فاز $-\frac{\pi}{6}$ به فاز

$\frac{\pi}{6}$ برسد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta x_{\max} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A = 0.6 \text{ m}$$

$$\bar{v}_{\max} = \frac{\Delta x_{\max}}{\Delta t} = \frac{0.6}{0.2} = 3 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

۱۹۳-گزینهی «۳»

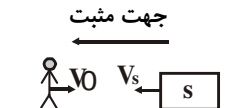
$$B = 1 \cdot \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 37 = 1 \cdot \log \frac{I}{1 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow 37 = \log \left(\frac{I}{1 \cdot 10^{-12}} \right)$$

$$\Rightarrow 37 + 12 = \log \left(\frac{I}{1 \cdot 10^{-12}} \right) \Rightarrow \log 1 \cdot 10^3 + \log \Delta = \log \frac{I}{1 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow \log (\Delta \times 1 \cdot 10^3) = \log \frac{I}{1 \cdot 10^{-12}}$$

$$\Rightarrow I = 1 \cdot 10^{-12} \times \Delta \times 1 \cdot 10^3 \Rightarrow I = \Delta \times 1 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2}$$

۱۹۴-گزینهی «۴»

$$\frac{f_o}{V - V_o} = \frac{f_s}{V - V_s} \Rightarrow \frac{480}{V - V_o} = \frac{f_s}{V - V_s} \Rightarrow f_s = 16 \cdot \text{Hz}$$



۱۹۵-گزینهی «۴»

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad n = \frac{C}{V} \Rightarrow V = \frac{C}{\frac{4}{3}} = \frac{3C}{4} = \frac{3}{4\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

۱۹۶-گزینهی «۳»

$$\Delta t = nT \xrightarrow{T = \frac{\lambda}{V}} \Delta t = \frac{\lambda}{V} = \frac{0.6 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-15} \text{ s}$$

۱۹۷-گزینهی «۳»

$$K = \frac{ke^2}{r} \Rightarrow \frac{K_m}{K_n} = \frac{r_n}{r_m} \Rightarrow \left(\frac{V_m}{V_n} \right)^2 = \frac{r_n}{r_m} = \left(\frac{n}{m} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_n} = \frac{n}{m} \xrightarrow{m=4} \frac{V_f}{V_f} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۹۸-گزینهی «۲»

$$K_{\max} = hf - W_0$$

با توجه به رابطه‌ی فوتوالکتریک اینشتین داریم:

که خطی راست است که با محور f در مقداری مثبت که برابر f_0 یعنی بسامد قطع است، تقاطع می‌کند و بنابراین گزینهی «۲» یا منحنی

B قبول است.

۱۹۹-گزینهی «۳»

ایزوتوپ‌های یک عنصر عدد اتمی یکسان دارند، ولی دارای نوترون‌های متفاوت و در نتیجه جرم متفاوتی هستند.

۲۰۰-گزینهی «۱»

در نیم‌رسانای نوع n، الکترون اضافی حاصل از ناخالصی، بر روی ترازوی قرار می‌گیرد به نام ترازدهنده که در فاصله‌ی بسیار کمی در زیر

نوار رسانش قرار دارد.

شیمی
سراسری خارج کشور ریاضی ۸۵

۲۰۱- گزینهی «۱» مطابق مدل اتمی بور، الکترون موجود در اتم هیدروژن، در حالت پایه در پایین ترین سطح انرژی یعنی در نزدیک ترین مدار نسبت به هسته (مدار $n=1$) قرار دارد.

۲۰۲- گزینهی «۲» $n=4 \Rightarrow l=0, 1, 2, 3$

$n=4 \Rightarrow$ حداکثر گنجایش تعداد الکترون $= 2 \times 4^2 = 32$

۲۰۳- گزینهی «۳»

${}_{29}\text{Cu}: [{}_{18}\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1 \Rightarrow {}_{29}\text{Cu}^+: [{}_{18}\text{Ar}] 3d^{10}$ و تعداد $e^- = 18 + 10 = 28$

${}_{30}\text{Zn}: [{}_{18}\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 \Rightarrow {}_{30}\text{Zn}^{2+}: [{}_{18}\text{Ar}] 3d^{10}$ و تعداد $e^- = 18 + 10 = 28$

۲۰۴- گزینهی «۲» فلزهای گروه ۱ جدول تناوبی به فلزهای قلیایی معروفند و ${}_{37}\text{Rb}$ یکی از آنها می باشد.

۲۰۵- گزینهی «۴» $A: \dots\dots\dots 3s^1 \Rightarrow s$ از دسته ی $1 =$ شماره گروه \Rightarrow از دسته ی A

$B: \dots\dots\dots 3p^3 \Rightarrow p$ از دسته ی $3 + 12 = 15 =$ شماره گروه \Rightarrow از دسته ی B

$C: \dots\dots\dots 3p^5 \Rightarrow p$ از دسته ی $5 + 12 = 17 =$ شماره گروه \Rightarrow از دسته ی C

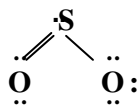
$A < B < C$: انرژی نخستین یونش و $C < B < A$: شعاع اتمی \Rightarrow

۲۰۶- گزینهی «۴» انرژی شبکه ی بلور هر جامد یونی، مقدار انرژی آزاد شده هنگام تشکیل یک مول آن از یونهای گازی سازنده ی آن است.

۲۰۷- گزینهی «۱»

H_2O	NH_3	CH_4	CO_2	
۴	۴	۴	۲	تعداد قلمرو الکترونی اتم مرکزی
۲	۱	۰	۰	تعداد جفت ناپیوندی اتم مرکزی
104.5°	107°	109.5°	180°	اندازه ی زاویه ی پیوندی

۲۰۸- گزینهی «۳»



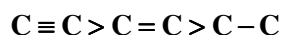
$= 3$ تعداد قلمروی الکترونی اتم مرکزی

$= 1$ تعداد جفت الکترون ناپیوندی اتم مرکزی

خمیده = شکل هندسی

۲۰۹- گزینهی «۴» پس از تشکیل پیوند $\text{H}-\text{H}$ ، نیروهای جاذبه با نیروهای دافعه ی میان دو اتم، در توازن می باشند.

۲۱۰- گزینهی «۳» مقایسه ی انرژی پیوندهای یگانه، دو گانه و سه گانه ی کربن- کربن:



۲۱۱- گزینهی «۳»

۲۱۲- گزینهی «۳»





$$\frac{x \text{ ml} \cdot 10^{-3} \text{ L} \times 0.8 \text{ mol/L}}{2} = \frac{0.8 \times 100}{1} \Rightarrow x = 100 \text{ میلی لیتر}$$

۲۱۴-گزینهی «۴»

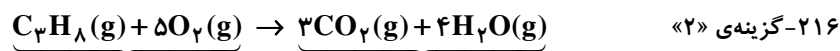
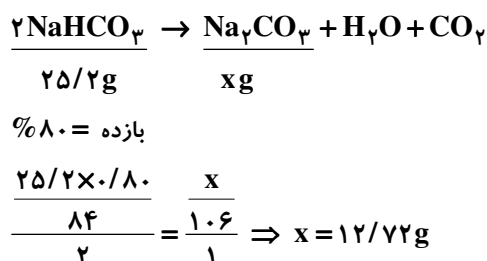
$$2\text{NaN}_3 \rightarrow 2\text{Na} + 3\text{N}_2$$

x g ۸۴ L

$$\rho = 0.92 \text{ g/L}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{84 \times 0.92}{3} \Rightarrow x = 119.6 \text{ g}$$

۲۱۵-گزینهی «۱»



گاز ۶ mol گاز ۷ mol

گاز $\Rightarrow \Delta H < 0$ سوختن و $\Rightarrow \Delta V > 0 \Rightarrow w < 0$ افزایش تعداد مول گاز

$\Rightarrow \Delta E = \Delta H + w \Rightarrow \Delta E < 0$

منفی منفی

۲۱۷-گزینهی «۱» اتان < اتین: آنتالپی سوختن

اتان > اتین: دمای شعله‌ی سوختن

۲۱۸-گزینهی «۲» $\Delta H_{A-B} = 1/25 \Delta H_{B-B} = 1/25 \times 240 = 30.0 \text{ kJ}$

$$\Delta H_{A-A} = 1/1 \Delta H_{B-B} = 1/1 \times 240 = 244 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = [2(30.0)] - [244 + 240] = +96 \text{ kJ} \text{ (گرماگیر)}$$

۲۱۹-گزینهی «۲»

$$\Delta H = [2(-393/5) + 3(\Delta H_f \text{ H}_2\text{O}(\text{g}))] - [-277/5] = -1367/2 \Rightarrow \Delta H_f \text{ H}_2\text{O}(\text{g}) = -285/9 \text{ kJ}$$

۲۲۰-گزینهی «۲» تولوئن، دقیقاً به خاطر ناقطبی بودن، در آب حل نمی‌شود.

۲۲۱-گزینهی «۳» اگر مقدار اندکی از بلور یک نمک را به محلول فرا سیر شده‌ی آن وارد کنیم، مقداری از نمک حل شده همراه بلور وارد شده، ته‌نشین خواهد شد، به طوری که محلول حاصل، محلول سیرشده‌ی آن نمک بشود.

$$C = \frac{8 \times 10^{-3} \text{ g}}{10 \times 10^{-3} \text{ L}} = 0.8 \text{ g.L}^{-1}$$

۲۲۲-گزینه ی «۲»

$$M = \frac{C}{\text{جرم مولی}} = \frac{0.8 \text{ g.L}^{-1}}{4 \text{ g.mol}^{-1}} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1} = [\text{OH}^{-}]$$

$$\text{pOH} = -\log 0.2 = \log \frac{10}{2} = 2 - \log 2 = 2 - 0.3 = 1.7$$

$$\text{pH} = 14 - 1.7 = 12.3$$

۲۲۳-گزینه ی «۴» مایونز نوعی امولسیون (کلوئید مایع در مایع) است.

آب نمک، محلول است و شربت ضد اسید معده، سوسپانسیون می باشد.

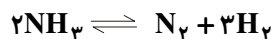
$$\Delta H = 72 \text{ kJ}, E_a = 78 \text{ kJ} \quad \text{۲۲۴-گزینه ی «۳»}$$

$$\Delta H = E_a - E'_a \Rightarrow 72 = 78 - E'_a \Rightarrow E'_a = 6 \text{ kJ} \Rightarrow \frac{\Delta H}{E'_a} = \frac{72}{6} = 12$$

۲۲۵-گزینه ی «۲» با افزایش غلظت واکنش دهنده ها، احتمال برخورد بین مولکول های واکنش دهنده افزایش یافته و سرعت پیشرفت واکنش، بیش تر می شود.

۲۲۶-گزینه ی «۱» جذب مواد در سطح جذب کننده های جامد، می تواند از نوع فیزیکی یا شیمیایی باشد.

۲۲۷-گزینه ی «۱»



تعداد مول در تعادل $\left[? \right] \leftarrow 0.2 \quad 0.15$

$$0.6 \text{ mol} = 3 \times 0.2 = \text{تعداد مول } \text{N}_2 \text{ در تعادل} = 3 \times \text{تعداد مول } \text{H}_2 \text{ در تعادل}$$

$$\Rightarrow [\text{NH}_3] = \frac{0.15 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.15 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{N}_2] = \frac{0.2}{1} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{H}_2] = \frac{0.6}{1} = 0.6 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow K = \frac{[\text{N}_2] \cdot [\text{H}_2]^3}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{0.2 \times (0.6)^3}{(0.15)^2} = 1/92 \times 10^{-2}$$

۲۲۸-گزینه ی «۴» مقدار اولیه ی هر یک از دو واکنش دهنده، یک مول است و تا لحظه ی برقراری تعادل، ۰/۹۸ مول از هر یک از آن ها باقی مانده است. $0.2 \text{ mol} = 1 - 0.98$ مصرف هر یک از دو واکنش دهنده

$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{0.2}{1} \times 100\% = 2\%$$

تذکر: در کتاب درسی «درصد پیشرفت واکنش» تعریف نشده است.

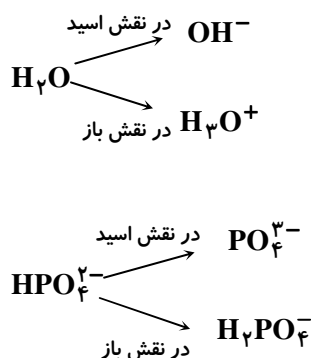
با توجه به نادرستی گزینه های ۱ و ۲ و ۳، گزینه ی ۴ باید درست باشد و شرط درستی گزینه ی ۴ این است که درصد

پیشرفت واکنش با درصد مصرف هر یک از واکنش دهنده ها معنی یکسانی داشته باشد.

۲۲۹-گزینه ی «۲» کاتالیزگر نه بر مقدار ثابت تعادل تأثیر دارد و نه بر پایداری فراورده ها.

۲۳۰-گزینه ی «۴» هرچه K_a (ثابت یونش) اسید بزرگ تر و در نتیجه، pK_a اسید کوچک تر باشد، قدرت اسیدی آن، بیش تر است.

۲۳۱-گزینه ی «۳» HPO_4^{2-} و H_2O ، هر دو، هم می توانند نقش اسید را داشته باشند و هم، امکان ایفای نقش باز را دارند.



۲۳۲-گزینه ی «۳» در سنجش حجمی اسید قوی با باز قوی، نقطه هم ارزی به $pH = 7$ مربوط است.

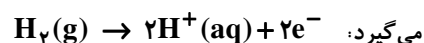
تعداد مول $NaOH =$ تعداد مول HCl : در نقطه ی هم ارزی

$$\Rightarrow 25 \times 0.2 = x \times 0.25 \Rightarrow x = 20 \text{ ml (حجم محلول سود)}$$

۲۳۳-گزینه ی «۱» عدد اکسایش اتم اکسیژن در واکنش (II)، یک درجه تغییر کرده و در دو واکنش دیگر، دو درجه تغییر کرده است.

در ضمن، در واکنش (II)، کاهش و اکسایش، هر دو به عنصر اکسیژن مربوط می شود.

۲۳۴-گزینه ی «۴» در سلول گالوانی «مس-هیدروژن»، الکترود پلاتینی مربوط به SHE نقش آند را دارد و نیم واکنش زیر در سطح آن، صورت



۲۳۵-گزینه ی «۱» حفاظت کاتدی آهن با استفاده از فلزی که اکسید شونده تر از آهن بوده و $E_{M^{2+}/M}^\circ$ آن کم تر از $E_{Fe^{2+}/Fe}^\circ$ باشد. در

این صورت، آن فلز با اکسید شدن خود از اکسایش و خوردگی آهن جلوگیری می کند.