

ریاضیات

سراسری خارج از کشور - ریاضی ۸۸

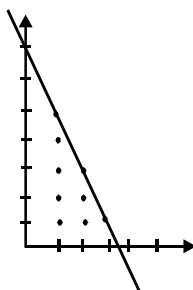
۱۰۱- گزینهی «۲»

$$f(x) < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \xrightarrow{x^2 + 4 > 0} 3x^2 - 2x < 2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-4) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow (a, b) = (-2, 4) \Rightarrow \max(b-a) = 6$$

۱۰۲- گزینهی «۴»

$$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1, 2, 3, 4, 5 \\ x=2 \Rightarrow y=1, 2, 3 \\ x=3 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow 9 \text{ زوج مرتب} \Rightarrow 9 \text{ نقطه}$$



همچنین با کمک نمودار می‌توان مسئله را حل نمود:

۱۰۳- گزینهی «۱»

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log |x| = \log 3$$

$$\Rightarrow \log(|x|(2x-1)) = \log 3 \Rightarrow |x|(2x-1) = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{3}{2} & \text{ق.ق} \end{cases} \\ x < 0 \Rightarrow -2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log \frac{x}{2} = \log \frac{\frac{3}{2}}{2} = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = \log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

۱۰۴- گزینهی «۳»

$$q = n+1 \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \Rightarrow q = \sqrt[16]{\frac{16\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[16]{8\sqrt{2}} = \sqrt[16]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[16]{2^{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \sqrt[4]{2} \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{2(1-(\sqrt[4]{2})^{n+1})}{1-\sqrt[4]{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = 30(1+\sqrt{2})$$

۱۰۵- گزینهی «۴»

$$\begin{cases} y = mx : \text{خط گذرنده از مبدأ} \\ y = (x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی ریشه مضاعف}} x^2 + 5x + 4 = mx$$

می دهد.

$$\Rightarrow x^2 + (\Delta - m)x + 4 = 0 (*) \Rightarrow (\Delta - m)^2 - 4(4) = 0 \Rightarrow (\Delta - m)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta - m = 4 \\ \Delta - m = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ m = 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{اول مماس}]{\text{در ناحیهی}} x = 2 \Rightarrow m = 9$$

۱۰۶- گزینهی «۲»

نمودار f را با خط $y = x$ تلاقی می دهیم، داریم:

$$x^3 - 3x = x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \xrightarrow{x \geq 1} x = 2$$

۱۰۷- گزینهی «۳»

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow 1 + \tan \alpha = \Delta - \Delta \tan \alpha$$

$$6 \tan \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3} (*)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{2(\frac{2}{3})}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2.4$$

۱۰۸- گزینهی «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \cos x + 1}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + (1 - \cos x)}{-x(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \frac{x^2}{2}}{-x(\frac{x^2}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 + \frac{x}{2})}{-x(\frac{x^2}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{x}{2}}{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

تذکر: وقتی $x \rightarrow 0^-$ حد ابهام $\infty - \infty$ دارد ولی وقتی $x \rightarrow 0^+$ حد ابهام ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right) = -\infty - \infty = -\infty$$

تذکر: وقتی $x \rightarrow 0^-$ بعد از مخرج مشترک گیری جهت رفع ابهام می توان از هوییتال استفاده کرد.

۱۰۹-گزینهی «۳»

$$f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - 1 + 2}{1 + \sin^2 x} = -1 + \frac{2}{1 + \sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \times (1)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = \frac{-8}{9} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} - 2\left(\frac{-8}{9}\right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{9} = 2$$

۱۱۰-گزینهی «۱»

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad (1) f$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} x \leq -1$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها تابع در بازه‌ی $(-\infty, -1)$ صعودی و مقعر آن رو به پایین است.

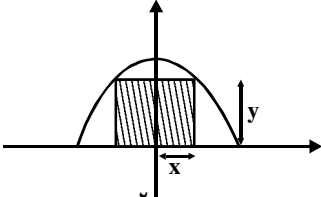
۱۱۱-گزینهی «۱»

$$\cos \lambda x \cos 2x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{2} [\cos \lambda x + \cos 2x] = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos \lambda x + \cos 2x = 2 \cos^2 x \Rightarrow \cos \lambda x + \cos 2x = 1 + \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos \lambda x = 1 \Rightarrow \lambda x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

۱۱۲-گزینهی «۴»



$$S = x \cdot y \xrightarrow{y = \sqrt{4-x^2}} S = x(\sqrt{4-x^2})$$

$$\Rightarrow S = x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow S'_x = \sqrt{4-x^2} + x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{x=2} S_{\max} = 2 \times 2 \times \sqrt{4-4} = 0$$

۱۱۳-گزینهی «۳»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$\left| \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} - 2 \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{2^n - 1 - 6 - 2^n}{3 + 2^{n-1}} \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{-7}{3 + 2^{n-1}} \right| < \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{3 + 2^{n-1}} < \frac{1}{4} \Rightarrow 3 + 2^{n-1} > 28 \Rightarrow 2^{n-1} > 25 \Rightarrow n-1 \geq 4 \Rightarrow n \geq 5$$

۱۱۴-گزینه‌ی «۴»

$$a_n = \frac{\overbrace{1-2+3-4+\dots+2n-1-2n}^{-1}}{2n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n}{2n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+n} = \frac{-1}{3} \neq 0$$

بنابراین سری داده شده، شرط لازم هم‌گرایی را ندارد پس واگرا است.

۱۱۵-گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \frac{-\pi}{-1} = \pi = a$$

۱۱۶-گزینه‌ی «۴»

$$\underbrace{(a+2)x^2 - 7x + 4 - a}_{f(x)} = 0$$

$$f(1) = a + 2 - 7 + 4 - a = -1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a معادله بین -1 و 1 ریشه دارد. $\Rightarrow f(1)f(-1) < 0$

$$f(-1) = a + 2 + 7 + 4 - a = 13$$

۱۱۷-گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = -(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = -(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$$

$$x^3 \geq x^3 - x^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{x^3 - x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \geq 0 \Rightarrow -(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) \leq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر صفر است.

۱۱۸-گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = 2 \Rightarrow y = 2: \text{مجانِب افقی}$$

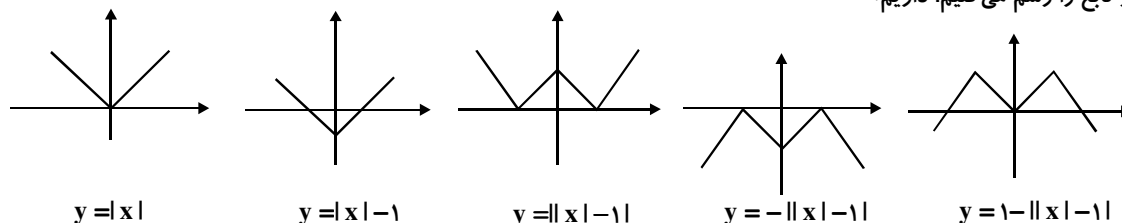
$$\frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x = 2$$

با توجه به این که $x = 1$ مجانب قائم تابع است بنابراین فاصله‌ی مورد نظر برابر یک است.

۱۱۹-گزینهی «۳»

$$f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. داریم:



بنابراین تابع در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

تذکر: با توجه به نمودار $1 - |x|$ نیز می‌توان پاسخ مسئله را داد. چرا؟

۱۲۰-گزینهی «۴»

$$f(x) = x|x^2 - 3| = \begin{cases} x^3 - 3x, & x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x, & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{غ.ق.ق. } x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{ق.ق. } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

هم‌چنین نقاط $x = \pm\sqrt{3}$ نقاط مشتق‌ناپذیری تابع هستند. بنابراین با توجه به چهار نقطه‌ی به‌دست آمده و با توجه به این که در این

نقاط مشتق تغییر علامت می‌دهد بنابراین تابع چهار نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد. آیا راه حل دیگری برای این تست وجود دارد؟

۱۲۱-گزینهی «۱»

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{16}}$$

$$f(3.1) - f(3) = f'(3) \times \Delta x = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{16}{25} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{125} = 0.016$$

۱۲۲-گزینهی «۲»

$$\Delta x = \frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{3} = \frac{\frac{6\pi}{12}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

بازه‌ها به صورت زیر هستند و با توجه به این که $C_i = \frac{1}{\gamma}(x_i + x_{i-1})$ داریم:

$$\underbrace{\left[\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}\right]}_{C_1 = \frac{\pi}{6}}, \underbrace{\left[\frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]}_{C_2 = \frac{\pi}{3}}, \underbrace{\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]}_{C_3 = \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریمان} = \Delta x (f(C_1) + f(C_2) + f(C_3)) = \frac{\pi}{6} \left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{\pi}{6} (2) = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۳- گزینهی «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (\sin 4x + \sin 2x) dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(-\frac{1}{4}(-1) - 0 \right) - \left(-\frac{1}{4}(1) - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

۱۲۴- گزینهی «۳»

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{1 + x^2} dx = \int \frac{x(x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} dx = \int \left(x + \frac{2}{1 + x^2} \right) dx$$

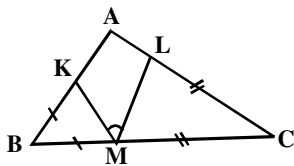
$$= \int x dx + \int \frac{2}{1 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \operatorname{Arctan} x + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \operatorname{Arctan} x + C \Rightarrow F(0) = 0 + 0 + C = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \operatorname{Arctan} x \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} + 2 \operatorname{Arctan} 1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\pi + 1)$$

۱۲۵- گزینهی «۱»



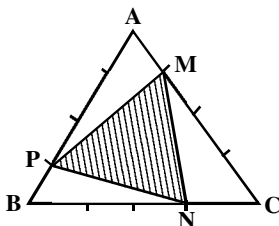
نکته: چنانچه در مثلث ABC، دو مثلث BMK و CML متساوی الساقین باشند،
آن گاه داریم:

$$\hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{A} = 106^\circ \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

با توجه به نکتهی بالا داریم:

۱۲۶- گزینهی «۳»



مطابق شکل، اگر طول ضلع AC را برابر fa در نظر بگیریم، داریم:

$$S_{MNC} = \frac{1}{2} CM \cdot CN \cdot \sin \hat{C} = \frac{1}{2} (fa)(a) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{fa^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (fa)^2 = fa^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{MNC} + S_{AMP} + S_{PBN}) = fa^2 \sqrt{3} - 3 \left(\frac{fa^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{fa^2 \sqrt{3}}{4}$$

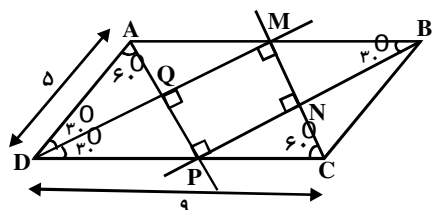
$$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{fa^2 \sqrt{3}}{4}}{fa^2 \sqrt{3}} = \frac{1}{16}$$

۱۲۷- گزینهی «۴»



$$\text{مساحت کل} = ۸ \times ۱۰ + \frac{1}{2} (2\pi \times ۴) \times ۱۰ + 2 \left(\frac{1}{2} \pi \times ۴^2 \right) = ۸۰ + ۴۰\pi + ۱۶\pi = ۵۶\pi + ۸۰$$

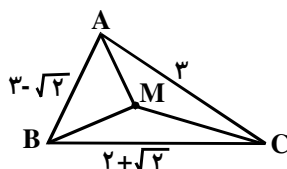
۱۲۸- گزینه ی «۲»



$$\begin{cases} MD = CD \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ DQ = AD \cdot \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow MQ = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} AP = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{2} \\ AQ = AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow PQ = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = MQ \cdot PQ = 4\sqrt{3}$$

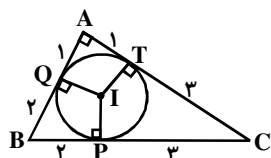


۱۲۹- گزینه ی «۳»

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < \underbrace{MA + MB + MC}_X < AB + AC + BC \Rightarrow 4 < X < 8$$

در بین گزینه ها تنها $4\sqrt{2} \approx 5.6$ در فاصله ی مورد نظر قرار دارد.

۱۳۰- گزینه ی «۳»



همان طور که می دانیم، نقطه ی تلاقی نیم سازه های داخلی مثلث، مرکز دایره ی محاطی است که مطابق شکل در نقاط P، T و Q بر اضلاع مثلث مماس می باشد.

داریم:

$$AQ = AT = 1 \Rightarrow \text{شعاع دایره ی محاطی} : r = 1$$

$$BQ = BP = 2, CT = CP = 3$$

مطابق شکل، رأس C بیشترین فاصله را از I دارد. داریم:

$$CI = \sqrt{CP^2 + r^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

۱۳۱- گزینه ی «۲»

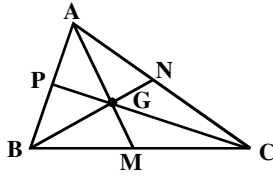
$$T(x, y) = (2 \times 2 - x, 2a - y) = (4 - x, 2a - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = 4 - x \\ Y = 2a - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - X \\ y = 2a - Y \end{cases} \xrightarrow{x - 2y = 4} (4 - X) - 2(2a - Y) = 4$$

$$\Rightarrow X - 2Y + 4a = 0$$

طبق فرض باید $fa = 6$ باشد، یعنی $a = \frac{3}{2}$.

۱۳۲- گزینهی «۴»



صفحاتی از سه رأس مثلث به یک فاصله‌اند که یا با صفحه‌ی ΔABC موازی باشند و یا از دو نقطه از مجموعه‌ی نقاط M و N و P بگذرد. با توجه به این که طبق فرض، خط Δ صفحه‌ی مثلث را در G (مرکز ثقل) قطع می‌کند، هیچ صفحه‌ی شامل Δ وجود ندارد که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد.

۱۳۳- گزینهی «۱»

با فرض $a = (1, -3, 2)$ و $b = (1, 2, 0)$ داریم:

$$\begin{aligned} a'' &= \frac{2a \cdot b}{|b|^2} a - a = \frac{2(1, -3, 2) \cdot (1, 2, 0)}{(1^2 + 2^2 + 0^2)} b - a \\ &\Rightarrow a'' = \frac{-5}{5} b - a = -b - a = -(1, 2, 0) - (1, -3, 2) \\ &= (-3, -1, -2) \end{aligned}$$

۱۳۴- گزینهی «۳»

دو خط D و D' موازی‌اند و بردارهای هادی آنها $u = (1, -1, 1)$ است. نقاط $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ به ترتیب روی خطوط D و D' قرار

دارند. فاصله‌ی خطوط D و D' برابر است با:

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times u|}{|u|} = \frac{|(1, -1, 4) \times (1, -1, 1)|}{|(1, -1, 1)|} = \frac{|(3, 3, 0)|}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

۱۳۵- گزینهی «۴»

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow C(0, 0, -2)$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(-4, 2, 0) \times (-4, 0, -2)| = \frac{1}{2} |(-4, -8, 8)| \\ &\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 64} = 6 \end{aligned}$$

۱۳۶- گزینهی «۱»

$$3x^2 - 6x + 4y + 11 = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2 - 3 + 4y + 11 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{-4}{3}(y+2)$$

سهمی قائم و رو به پایین باز می‌شود. $S = (1, -2)$ رأس آن و $a = \frac{-1}{3}$ پارامتر سهمی است. معادله‌ی خط هادی آن به صورت

$$y = \beta - a = \frac{-5}{3} \text{ است.}$$

۱۳۷- گزینه‌ی «۲»

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

ماتریس $A - A^T$ پادمتقارن است، پس داریم:

۱۳۸- گزینه‌ی «۱»

با توجه به فرض داریم:

$$2A_{23} = 3 \Rightarrow 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow ab + 3b - ab = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow 3b = \frac{-3}{2} \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

۱۳۹- گزینه‌ی «۴»

$$\text{ماتریس‌های } M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ به ترتیب وارون ماتریس‌های } \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ هستند، رابطه‌ی ماتریسی}$$

مورد نظر را از چپ در M و از راست در N ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\underbrace{M \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_I \underbrace{A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}_I N = M \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ -49 & -30 \end{bmatrix}$$

۱۴۰- گزینه‌ی «۲»

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

چون $|A| = 0$ پس دستگاه یا بی‌شمار جواب دارد یا فاقد جواب است.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{اول و سوم}]{\text{جمع معادله‌ی}} \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 4x - 2y + 4z = 6 \\ 3x - 4y + 5z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌شود از مجموع معادلات اول و سوم، معادله‌ی دوم به‌دست آمد، پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد. با توجه به

گزینه‌ها، فصل مشترک دوجه‌دوی این سه صفحه بر هم منطبق‌اند.

۱۴۱- گزینه‌ی «۳»

$$\sum x_i = 48 \xrightarrow{n=8} \bar{x} = \frac{48}{8} = 6$$

$$CV = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\bar{x}}{2} = 3$$

$$\text{داریم: } \delta^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \Rightarrow 9 = \overline{x^2} - 36 \Rightarrow \overline{x^2} = 45$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = n \cdot \overline{x^2} = 8 \times 45 = 360$$

۱۴۲-گزینه ی «۲»

$$F_i = 55\%, F_{i+1} = 67\% \text{ در صد فراوانی نسبی داده‌های مورد نظر } f = F_{i+1} - F_i = 12\%$$

$$\frac{12}{100} \times 75 = 9$$

پس تعداد داده‌های موردنظر برابر است با:

۱۴۳-گزینه ی «۴»

تمام اعداد طبیعی به جزء اعدادی که به صورت توانی از ۲ هستند را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت. در بین

گزینه‌ها تنها $2^6 = 64$ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۱۴۴-گزینه ی «۴»

در تقسیم ۵۰ عدد طبیعی متمایز و دلخواه بر عدد ۱۶، حداقل $4 = 1 + \left[\frac{50-1}{16} \right]$ عدد وجود دارد که هم باقیمانده باشند.

۱۴۵-گزینه ی «۳»

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

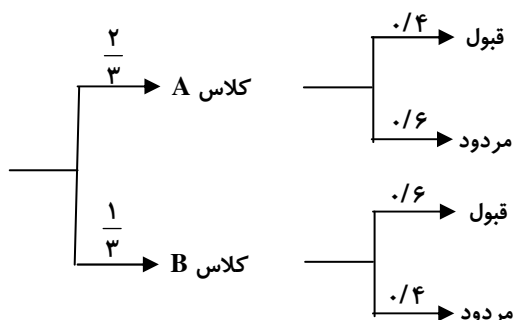
$$\Rightarrow A_3 \cap A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

مجموعه‌ی موردنظر ۵ عضوی بوده و $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد.

۱۴۶-گزینه ی «۱»

$$((B-A)' \cap A')' = (B-A) \cup A = A \cup B$$

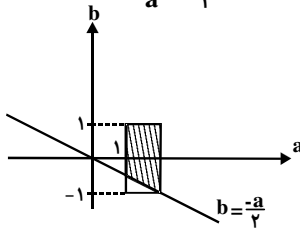
۱۴۷-گزینه ی «۲»

جهت مشاهده و دانلود پاسخ تشریحی سؤال‌ها به سایت www.riazisara.ir مراجعه فرمایید.

$$P(A | \text{قبول}) = \frac{\frac{2}{3} \times 0.4}{\frac{2}{3} \times 0.4 + \frac{1}{3} \times 0.6} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{8}{15} + \frac{6}{15}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

۱۴۸- گزینه ی «۴»

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} < \frac{1}{2} \xrightarrow{a \in [1, 2]} -b < \frac{a}{2} \Rightarrow b > \frac{-a}{2}$$



$$P(A) = \frac{\text{هاشورخورده}}{\text{مستطیل}} = \frac{S}{S} = \frac{\frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) \times 1}{2 \times 1} = \frac{5}{8}$$

۱۴۹- گزینه ی «۲»

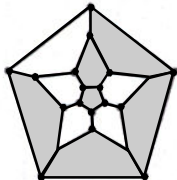
از آنجا که درایه های قطری ماتریس A^2 درجات رئوس گراف است، داریم:

چون سه رأس فرد است، گرافی تشکیل نمی شود. $72 = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$:

$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow 2q = \sum \deg V_i \Rightarrow q = 6$$

اندازه ی درخت مرتبه ی ۵ برابر $q' = 4$ است، پس با حذف ۲ یال از گراف G یک درخت حاصل می شود.

۱۵۰- گزینه ی «۳»



گراف روبه رو که گرافی ۳ منتظم از مرتبه ی ۲۰ است همیلتونی بوده پس دوری

به طول مرتبه ی گراف یعنی ۲۰ دارد. محیط ناحیه ی هاشورخورده یک دور به

طول ۲۰ را نشان می دهد.

۱۵۱- گزینه ی «۲»

طبق فرض عدد $\overline{a7 \cdot b}$ مضرب اعداد ۴ و ۱۱ بوده ولی مضرب ۵ نیست.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب ۴ باشد} \Rightarrow b = 0, 4, 8 \\ \text{مضرب ۵ نباشد} \Rightarrow b \neq 0, 5 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 4, 8$$

$$\text{مضرب ۱۱ باشد} \Rightarrow b - 0 + 7 - a = 11k \Rightarrow b - a = 11k - 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غ.ق.} \\ a = 11 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

$$b = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a + b = 12$$

۱۵۲- گزینه ی «۱»

$$(12n + 7, 5n - 2) = d$$

$$\begin{cases} d \mid 12n + 7 \xrightarrow{\times 5} d \mid 60n + 35 \\ d \mid 5n - 2 \xrightarrow{\times 12} d \mid 60n - 24 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 59 \xrightarrow{d \neq 1: \text{طبق فرض}} d = 59$$

۱۵۳-گزینه ی «۴»

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq B \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هر یک دایره‌های ماتریس B می‌توانند با یکی از دو عدد صفر و یک پر شود، پس طبق اصل ضرب $2^5 = 32$ ماتریس مانند B وجود

دارد.

۱۵۴-گزینه ی «۲»

نظر: $A = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 6\}\}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

۱۵۵-گزینه ی «۱»

$$\text{توجه: } \frac{1}{i^2 + i} = \frac{(i+1) - i}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$\sum_{k=1}^6 P(X=k) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + a + a = 1$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{1}{5}) + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

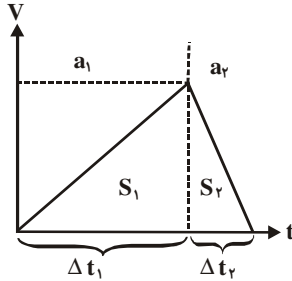
$$= (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + a = (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{10} = \frac{2}{15} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{4+3}{30} = \frac{7}{30}$$

فیزیک

سراسری خارج از کشور - ریاضی ۸۸

۱۵۶- گزینه ی «۲»



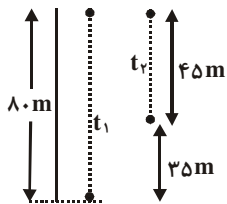
در شکل مقابل نمودار $V - t$ برای حرکت این اتومبیل رسم شده است. می دانیم جابه جایی جسم در نمودار V بر حسب t برابر سطح محصور در زیر نمودار است، بنابراین داریم:

$$\Delta x_1 = 4\Delta x_2 \Rightarrow S_1 = 4S_2 \Rightarrow \frac{1}{2}V\Delta t_1 = 4 \times \frac{1}{2} \times V \times \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_1 = 4\Delta t_2$$

حال با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{V - 0}{\Delta t_1} \\ a_2 = \frac{0 - V}{\Delta t_2} \end{cases} \xrightarrow{\Delta t_1 = 4\Delta t_2} a_2 = -4a_1$$

۱۵۷- گزینه ی «۱»



مطابق شکل مقابل، در مدت زمانی که گلوله ی اول ۸.۰m سقوط کرده است، گلوله ی دوم ۴.۵m سقوط کرده است و حداکثر فاصله ی دو گلوله ی در این لحظه برابر ۳.۵m شده است. اگر جهت مثبت را رو به پایین اختیار کنیم، می توان نوشت:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + y_0 \xrightarrow{V_0=0} \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} 4.5 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = 3s \\ 8.0 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = 4s \end{cases}$$

بنابراین اختلاف زمانی رها کردن دو گلوله برابر $\Delta t = t_1 - t_2 = 1s$ بوده است.

۱۵۸- گزینه ی «۴»

با توجه به بردار مکان $x = 1 \cdot t^2 - 4t$ و $y = \frac{1}{3}t^3 + t^2$ است، بنابراین برای به دست آوردن مؤلفه های افقی بردار سرعت می توان

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = 2t - 4 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = t^2 + 2t \end{cases} \quad \text{نوشت:}$$

چون مؤلفه ی افقی بردار سرعت صفر شده است، می توان نوشت:

$$V_x = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}s$$

و در لحظه ی $t = \frac{1}{2}s$ ، برای به دست آوردن مؤلفه ی قائم بردار شتاب می توان نوشت:

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = 2t + 2 \xrightarrow{t = \frac{1}{2}s} a_y = \frac{2}{2} + 2 = \frac{12}{5} \frac{m}{s^2}$$

۱۵۹-گزینه‌ی «۲»

با توجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2gh \Rightarrow V^2 - 3.0^2 = 2 \times 1.0 \times 4.5 \Rightarrow V = 3.0 \sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۱۶۰-گزینه‌ی «۴»

چون سرعت ذره ثابت است، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است و داریم:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_\gamma = 0 \Rightarrow (\gamma \hat{i} - 6 \hat{j}) + \vec{F}_\gamma = 0 \Rightarrow \vec{F}_\gamma = -\gamma \hat{i} + 6 \hat{j}$$

۱۶۱-گزینه‌ی «۲»

نیروی کشش نخ بی‌جرم در همه جای آن یکسان است، بنابراین نیروی کشش نخ در همه‌ی جای آن یکسان است، بنابراین نیروی کشش نخ در همه جای آن برابر نیروی وزن و وزنه و برابر 10.0 N است.

۱۶۲-گزینه‌ی «۳»

\vec{F}_3 باید قرینه‌ی بردار برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 باشد، بنابراین با توجه به روش جمع برداری تجزیه داریم:

$$F_x = F_1 \cos 37^\circ + F_2 \cos 53^\circ \Rightarrow F_x = 2.0 \times 0.8 + 2.0 \times 0.6 = 2.8 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_3 = -2.8 \hat{i} + 4 \hat{j}$$

$$F_y = F_1 \cos 53^\circ - F_2 \cos 37^\circ \Rightarrow F_y = 2.0 \times 0.6 - 2.0 \times 0.8 = -0.4 \text{ N}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{2.8^2 + 4^2} \Rightarrow |\vec{F}_3| = 4\sqrt{1.96 + 1} \Rightarrow |\vec{F}_3| = 4\sqrt{2.96} = 2.0\sqrt{2} \text{ N}$$

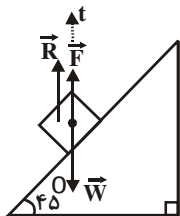
۱۶۳-گزینه‌ی «۱»

چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، برآیند نیروهای وارد بر آن در هر راستایی برابر صفر است.

بنابراین اگر شرط تعادل را در راستای t بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow \vec{R} + \vec{F} = \vec{W} \xrightarrow[\text{یک خط است.}]{\text{چون رابطه روی}} \vec{R} = \vec{W} - \vec{F}$$

۱۶۴-گزینه‌ی «۳»



در راستای قائم، لازم است نیروی کشش نخ، نیروی وزن جسم M را خنثی کند و بنابراین داریم:

روی سطح افقی، نیروی کشش نخ، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای جسم m را تأمین می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$T = mw^2 r$$

$$Mg = mw^2 r \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{w^2 r}{g}$$

و در نهایت باید داشته باشیم:

۱۶۵-گزینه‌ی «۳»

بنا بر قانون پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی هر دو جسم در لحظه‌ی برخورد به زمین برابر انرژی پتانسیل اولیه‌ی آن‌ها است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{u_B}{u_A} = \frac{2m \times g \times 2.0}{m \times g \times 1.0} = 4$$

۱۶۶- گزینهی «۱»

چون تبادل حرارتی با محیط اطراف ناچیز است، داریم:

$$\sum Q = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 C(\theta_e - 10) + m_2 C(\theta_e - 50) = 0 \xrightarrow{\theta_e = 30^\circ} m_1 = m_2$$

۱۶۷- گزینهی «۳»

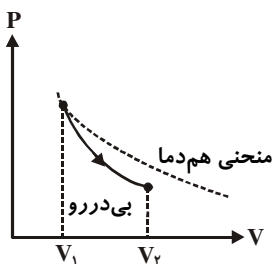
برای برابر بودن طول دو میله در هر دمای دلخواه لازم است، افزایش طول دو میله با هم برابر باشد و بنابراین داریم:

$$\Delta L_{1,2} = \Delta L_3 \Rightarrow L_1 \alpha_1 \Delta \theta + L_2 \alpha_2 \Delta \theta = L_3 \alpha_3 \Delta \theta \Rightarrow \alpha_3 = \frac{L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2}{L_3}$$

۱۶۸- گزینهی «۱»

در انبساط بی درروی گاز کامل، چون گاز نمی‌تواند از محیط گرما دریافت کند، افت فشارش از فرایند هم‌دمای مشابه بیش‌تر است و در نتیجه دما و انرژی درونی گاز در انبساط بی‌دررو کاهش می‌یابند.

۱۶۹- گزینهی «۳»



با توجه به نمودار P-T، فرایند Ca یک فرایند هم‌فشار است و بنابر تعریف فشار داریم:

$$W_{Ca} = -P \Delta V \xrightarrow{PV=nRT} W_{Ca} = -nR \Delta T \Rightarrow W_{Ca} = nR(T_c - T_a)$$

$$\Rightarrow W_{Ca} = 1 \times 8.314 \times (600 - 300) = 2494.2 \text{ J}$$

۱۷۰- گزینهی «۳»

ابتدا دمای چشمه‌ی گرما را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{اکنون با توجه به ثابت ماندن دمای چشمه‌ی گرم و کاهش } 10 \text{ درصدی بازده به علت افزایش دمای چشمه‌ی سرد ماشین کارنو داریم:}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} \Rightarrow 0.5 = 1 - \frac{300}{T_H} \Rightarrow T_H = 600 \text{ K}$$

اکنون با توجه به ثابت ماندن دمای چشمه‌ی گرم و کاهش ۱۰ درصدی بازده به علت افزایش دمای چشمه‌ی سرد ماشین کارنو داریم:

$$\eta' = 1 - \frac{T'_C}{T_H} \Rightarrow 0.4 = 1 - \frac{T'_C}{600} \Rightarrow T'_C = 360 \text{ K}$$

$$\Delta T_C = T'_C - T_C = 360 - 600 = -240 \text{ K}$$

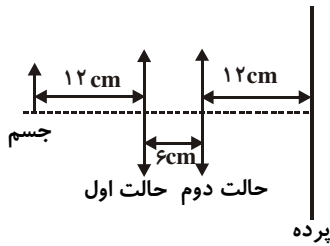
۱۷۱- گزینهی «۴»

منظور از تصویر وارونه آن است که تصویر حقیقی است و بنابراین محدوده‌ی مورد نظر نباید در فاصله‌ی کانونی آینه باشد. از طرف دیگر هر چه به طرف مرکز آینه پیش رویم، فاصله‌ی جسم و تصویر حقیقی کاهش می‌یابد، بنابراین جسم باید به مرکز نزدیک شود و محدوده‌ی مورد نظر شامل فاصله‌ی کانونی نباشد که تنها در گزینه‌ی «۴» این چنین است.

۱۷۲- گزینهی «۱»

می‌دانیم اگر پرتوی نوری تحت زاویه‌ی تابش θ به دو آینه‌ی تخت که با هم زاویه‌ی θ می‌سازند، بتابد، منطبق بر خودش بازتاب می‌یابد. بنابراین در این سؤال باید $\alpha = \beta$ باشد تا پرتوی نوری روی خودش بازتاب شود.

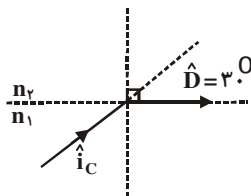
۱۷۳-گزینه ی «۲»



می دانیم در حالتی که فاصله ی جسم از پرده یعنی Δ بزرگ تر از ۴ برابر فاصله ی کانونی عدسی باشد، در دو وضعیت متقارن که در شکل مقابل هم رسم شده است، تصویر واضحی بر روی پرده تشکیل می شود. مطابق شکل مقابل، برای حالت اول $P = 12 \text{ cm}$ و $q = 18 \text{ cm}$ است و بنابر رابطه ی عدسی های نازک و با توجه به حقیقی بودن تصویر می توان نوشت:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 7.2 \text{ cm}$$

۱۷۴-گزینه ی «۴»



مطابق شکل مقابل، پرتوی نوری تحت زاویه ی تابش \hat{i}_c از محیط شفاف n_1 به محیط شفاف n_2 تابیده است و با زاویه ی شکست 90° مماس بر فصل مشترک دو محیط خارج شده است. با توجه به تعریف زاویه ی انحراف داریم:

$$\hat{D} = \hat{r} - \hat{i} \Rightarrow 30^\circ = 90^\circ - \hat{i}_c \Rightarrow \hat{i}_c = 60^\circ$$

اکنون با توجه به قانون های شکست نور و رابطه ی $n = \frac{c}{v}$ داریم:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

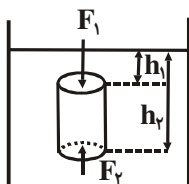
۱۷۵-گزینه ی «۱»

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA \Rightarrow F = \rho g h A \xrightarrow{A = nR^2} F = 1360 \cdot 10 \cdot 0.1 \cdot \pi \cdot (0.1)^2 \Rightarrow F = 4 \text{ N}$$

۱۷۶-گزینه ی «۲»

می دانیم بر هر سطح در داخل مایع نیرو به صورت عمودی اثر می کند، بنابراین بنابر رابطه ی

$$P = \frac{F}{A} \text{ خواهیم داشت:}$$



$$F_1 = P_1 A, F_2 = P_2 A$$

$$\Rightarrow \Delta F = F_2 - F_1 = (P_2 - P_1) A = \rho g (h_2 - h_1) A = 1000 \cdot 10 \cdot 0.4 \cdot 20 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \Delta F = 8 \text{ N}$$

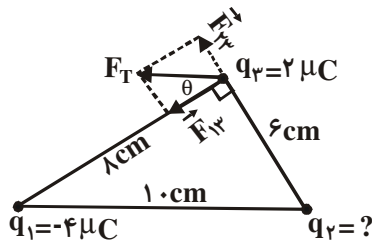
۱۷۷-گزینه ی «۳»

با استفاده از رابطه ی چگالی می توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_2 - V_1 = m \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \Rightarrow -\Delta = m \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{0.9} \right) \Rightarrow m = 45 \text{ g}$$

۱۷۸-گزینه ی «۴»

ابتدا با استفاده از قانون کولن اندازه ی $\vec{F}_{۱۳}$ را به دست می آوریم:



$$|\vec{F}_{۱۳}| = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 2 \times 10^{-12}}{8^2 \times 10^{-4}} = \frac{90}{8} \text{ N}$$

اکنون می دانیم $\cos \theta = \frac{8}{10}$ است و بنابراین برای محاسبه ی $|\vec{F}_T|$ داریم:

$$|\vec{F}_T| \cos \theta = |\vec{F}_{۱۳}| \Rightarrow |\vec{F}_T| \times \frac{8}{10} = \frac{90}{8} \Rightarrow |\vec{F}_T| = \frac{900}{64} \text{ N}$$

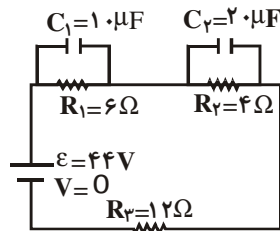
و اندازه ی $|\vec{F}_{۲۳}|$ برابر است با:

$$|\vec{F}_T| \sin \theta = |\vec{F}_{۲۳}| \Rightarrow \frac{900}{64} \times \frac{6}{10} = |\vec{F}_{۲۳}| \Rightarrow |\vec{F}_{۲۳}| = \frac{135}{16} \text{ N}$$

در نهایت با استفاده از قانون کولن می توان نوشت:

$$|\vec{F}_{۲۳}| = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times q_2 \times 10^{-12}}{36 \times 10^{-4}} \Rightarrow q_2 = \frac{27}{16} \mu\text{C}$$

۱۷۹-گزینه ی «۴»



پس از پر شدن خازن ها، از آن ها جریان مستقیم عبور نمی کند و برای محاسبه ی جریان در

مدار تک حلقه ی باقی مانده داریم:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow R_T = 6 + 4 + 12 = 22 \Omega$$

$$I = \frac{\epsilon}{R_T + r} \Rightarrow I = \frac{44}{22 + 0} = 2 \text{ A}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های R_1 و R_2 بنابر قانون اهم به ترتیب برابر 12 V و 8 V است. چون خازن C_1 با مقاومت

R_1 به صورت موازی وصل شده است، اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر 12 V و به همین ترتیب اختلاف پتانسیل دو سر خازن C_2 هم

برابر 8 V است و داریم:

$$u = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 12^2 = 72 \mu\text{J}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 = 64 \mu\text{J}$$

$$u_T = u_1 + u_2 \Rightarrow u_T = 72 + 64 = 136 \mu\text{J} = 1/36 \times 10^{-3} \text{ J}$$

۱۸۰-گزینه ی «۲»

$$u = P t = 0.1 \times 5 = 0.5 \text{ kWh}$$

$$\text{مقدار مصرف برق در یک خانه در یک ماه} = 0.5 \times 30 = 15 \text{ kWh}$$

$$15 \times 2 \times 10^6 = 3 \times 10^7 \text{ kWh}$$

$$\text{سه میلیارد ریال} = 3 \times 10^9 = 3 \times 10^7 \times 100 = \text{بهای برق مصرفی اضافی در کل تهران و در مدت یک ماه}$$

۱۸۱- گزینهی «۱»

$$I_A = \frac{\varepsilon}{3 + \infty} = \frac{\varepsilon}{3}$$

وقتی کلید به A وصل شود، تنها مقاومت ۳ اهمی در مدار قرار دارد و داریم:

وقتی کلید به B وصل شود، دو مقاومت ۳ و ۴ اهمی در مدار قرار دارند که البته چون دو سر مقاومت ۴ اهمی با یک سیم بدون مقاومت

$$I_B = \frac{\varepsilon}{3 + \infty} = \frac{\varepsilon}{3}$$

به هم وصل اتصال کوتاه شده و مقاومت معادل در این حالت برابر 3Ω است و داریم:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{\varepsilon}{3}}{\frac{\varepsilon}{3}} = 1$$

بنابراین می توان نوشت:

۱۸۲- گزینهی «۱»

مقاومت ها به صورت مقابل بسته شده اند تا مقاومت معادلشان برابر 4Ω گردد.

(دانش آموزان توجه کنند که راه خاصی برای تشخیص نحوه ی اتصال مقاومت ها وجود

ندارد، و در حقیقت مسأله به نوعی ابتکاری است.)

حال چون مقاومت معادل شاخه ی پایین هم برابر 8Ω است، $I_3 = I_4 = 5A$ است وبرای محاسبه ی جریان های I_3 و I_4 داریم:

$$\begin{cases} I_3 + I_4 = 5A \\ \frac{I_3}{I_4} = \frac{5}{20} \end{cases} \Rightarrow I_3 = 1A, I_4 = 4A$$

۱۸۳- گزینهی «۲»

اگر ظرفیت خازن ها برابر C باشد، در حالتی که خازن ها را سری به هم بسته ایم، ظرفیت معادل برابر $\frac{C}{4}$ و در حالت موازی $4C$ است.حال با استفاده از رابطه ی $u = \frac{1}{2} CV^2$ می توان نوشت:

$$\frac{u_{\text{موازی}}}{u_{\text{سری}}} = \frac{4C}{\frac{C}{4}} \times \left(\frac{V}{V}\right)^2 \Rightarrow \frac{u_{\text{موازی}}}{u_{\text{سری}}} = 16$$

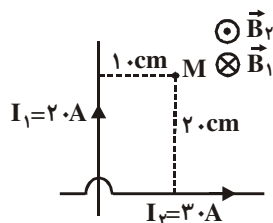
۱۸۴- گزینهی «۲»

می دانیم در خارج از آهن ربا، جهت خط های میدان مغناطیسی از قطب N به S است، بنابراین A قطب N و B قطب S می باشد. هم چنین

عقربه ی مغناطیسی در هر نقطه مماس بر خط های میدان و طوری قرار می گیرد که قطب N عقربه در جهت خط های میدان باشد و عقربه ی

(۱) این گونه است.

۱۸۵- گزینهی «۲»



با استفاده از قاعده ی دست راست مشخص است که میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان

 I_1 در نقطه ی M درون سو و میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان I_2 در این نقطه

برون سو است، اکنون با استفاده از رابطه ی میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم بلند و راست داریم:

$$B_1 = 2 \times 10^{-7} \times \frac{20}{0.1} = 4 \times 10^{-5} T \quad B_2 = 2 \times 10^{-7} \times \frac{30}{0.2} = 3 \times 10^{-5} T$$

چون جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم ها در محل نقطه ی M مخالف هم است، برای محاسبه ی

 B_T داریم:

$$B_T = B_1 - B_2 = 10^{-5} T$$

۱۸۶-گزینهی «۱»

با توجه به نمودار مشخص است که $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{30} s$ است و برای محاسبه‌ی ω داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{30}} = 30 \cdot \frac{\text{rad}}{s}$$

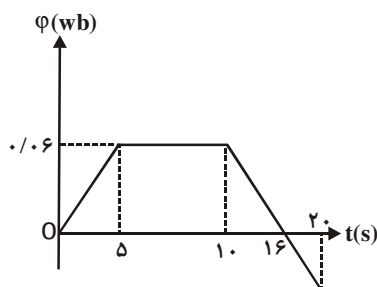
با توجه به نمودار $V_m = 20 V$ است و داریم:

$$I_m = \frac{V_m}{R} = \frac{20}{5} = 4 A$$

همچنین با توجه به نمودار فاز اولیه صفر و معادله‌ی جریان گذرا از مقاومت به صورت $I = I_m \sin(\omega t)$ است و داریم:

$$I = 4 \sin(30 \cdot t)$$

۱۸۷-گزینهی «۴»



با توجه به قانون القای الکترومغناطیسی فارادی یعنی $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt}$ ، بزرگی نیروی محرکه‌ی القایی متناسب با منفی آهنگ تغییر شار مغناطیسی است. در بازه‌ی زمانی ۱۰s تا ۲۰s شیب نمودار منفی و ثابت است، بنابراین نیروی محرکه‌ی القا شده ثابت و مثبت است و داریم:

$$10 < t < 20 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{0 - (0.06)}{10} = -0.006 \frac{\text{Wb}}{s} \Rightarrow \mathcal{E} = -1 \times -0.006 = 0.006 V \Rightarrow \mathcal{E} = 6 \text{ mV}$$

۱۸۸-گزینهی «۲»

در حالت کلی معادله‌ی دیفرانسیل یک حرکت هماهنگ ساده به صورت $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ است و با مقایسه‌ی این رابطه با متن سؤال

درمی‌یابیم $\omega = n \frac{\text{rad}}{s}$ است و با توجه به رابطه‌ی $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ خواهیم داشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \pi = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{\pi^2 = g} L = 1 \text{ m}$$

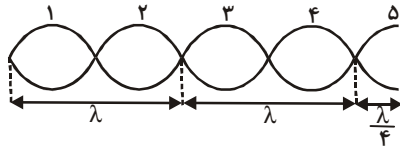
۱۸۹-گزینهی «۱»

در حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در دو انتهای مسیر تغییر جهت حرکت می‌دهد و در این نقطه‌ها سرعت نوسانگر برابر صفر و بعد، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر بیشینه می‌باشد.

۱۹۰-گزینهی «۳»

با توجه به رابطه $K = \frac{\omega}{V}$ ، نسبت بسامد زاویه‌ای به سرعت انتشار موج برابر K یا عدد موج است. عدد موج اختلاف فاز دو نقطه از

محیط انتشار موج است که ۱ متر با هم فاصله دارند و واحدش $(\frac{\text{rad}}{\text{m}})$ می‌باشد.



۱۹۱- گزینه‌ی «۲»

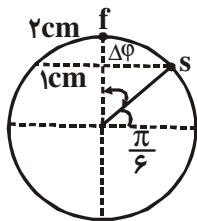
در انتهای آزاد شکم و در انتهای ثابت گره تشکیل می‌شود و وضعیت نوسانی طناب به شکل مقابل می‌باشد. با استفاده از این شکل می‌توان نوشت:

$$L = \lambda + \lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{4} \Rightarrow \frac{\lambda}{L} = \frac{4}{9}$$

۱۹۲- گزینه‌ی «۱»

با توجه به نقش موج داده شده، $\frac{\lambda}{4} = 20 \text{ cm}$ است و بنابراین $\lambda = 80 \text{ cm}$ است و بنابر رابطه $\lambda = \frac{V}{f}$ می‌توان نوشت:

$$f = \frac{V}{\lambda} = \frac{10}{.08} = 125 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 250\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



بنابراین ذره‌ی A پس از گذشت $\frac{1}{150} \text{ s}$ به اندازه‌ی $\Delta\phi = \omega t = 250\pi \times \frac{1}{150} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$ تغییر فاز

می‌دهد و مطابق دایره‌ی مرجع رسم شده از نقطه‌ی S به f می‌رسد. حال برای محاسبه‌ی جابه‌جایی در ذره‌ی A در این بازه‌ی زمانی خواهیم داشت:

$$\Delta x = x_f - x_s = 2 - 1 = 1 \text{ cm}$$

۱۹۳- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم بین دو تشدید متوالی پیستون باید به اندازه‌ی $\frac{\lambda}{2}$ جابه‌جا شود. بنابراین برای محاسبه‌ی جابه‌جایی پیستون داریم:

$$\lambda = \frac{V}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{360}{300} = 1.2 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$$

چون حرکت پیستون یک‌نواخت است، می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = V \times t \Rightarrow 60 \text{ cm} = 20 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \times t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

۱۹۴- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم اگر ماشینی با سرعت V' به سمت صخره‌ای حرکت کند، سرنشین ماشین بسامد پژواک صوتی که از صخره باز می‌تابد را بنابر

رابطه‌ی دوپلر با بسامد $f_0 = (\frac{V + V'}{V - V'})f_s$ احساس می‌کند که در این رابطه V سرعت انتشار صوت در محیط است. بنابراین در مورد

این سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{9}{8} = \frac{V + V'}{V - V'} \Rightarrow \frac{9}{8} = \frac{340 + V'}{340 - V'} \Rightarrow V' = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در مورد این سؤال می‌توان نوشت:

۱۹۵- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم فیلم عکاسی حاوی ترکیبات جیوه‌دار است که به علت دریافت انرژی موج الکترومغناطیسی تغییر شیمیایی می‌دهد و سبب آشکارسازی موج الکترومغناطیسی می‌شود. چون انرژی فوتون‌های موج‌های رادیویی طول موج بلند و انرژی کمی دارند، نمی‌توانند موجب ایجاد واکنش شیمیایی در فیلم عکاسی شوند و در حقیقت برای آشکارسازی موج‌های رادیویی به جای فیلم عکاسی از تلویزیون، رادیو و ... استفاده می‌شود.

۱۹۶- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم در آزمایش ینگ فاصله‌ی نوار تاریک m ام از نوار روشن مرکزی از رابطه‌ی $x_m = (2m-1)W$ به دست می‌آید که در این رابطه W پهنای هر نوار تداخلی تاریک یا روشن است. بنابراین داریم:

$$m = 5 \Rightarrow x_5 = (2 \times 5 - 1)W \Rightarrow \frac{x_5}{W} = 9$$

۱۹۷- گزینه‌ی «۴»

چون فلز گداخته موج الکترومغناطیس را گسیل می‌کند و نه جذب، طیف نشری است. همچنین می‌دانیم طیفی که از جامدها و مایع‌ها گسیل می‌شود، طیفی پیوسته است، یعنی بین طول موج‌های مختلف فاصله‌ای وجود ندارد.

۱۹۸- گزینه‌ی «۲»

بنابر رابطه‌ی فوتوالکتریک اینشتین و با توجه به این که $W_0 = 4 \text{ eV}$, $V_0 = 8 \text{ V}$ است، خواهیم داشت:

$$W_0 = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{4} \Rightarrow \lambda_0 = 3 \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \lambda_0 = 300 \text{ nm}$$

$$\text{eV}_0 = hf - W_0 \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} 1 \times 8 = 4 \times 10^{-15} \times \frac{3 \times 10^8}{\lambda} - 4 \Rightarrow \lambda = 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 100 \text{ nm}$$

۱۹۹- گزینه‌ی «۳»

اگر به نیم‌رسانای ذاتی ناخالصی ۵ ظرفیتی مانند آرسینک اضافه می‌کنیم، نیم‌رسانای نوع n به دست می‌آید. افزودن مقدار کمی ناخالصی سبب افزایش چشم‌گیری در تعداد حاملان بار شده و از این راه رسانندگی نیم‌رسانا را به شدت افزایش می‌دهد.

۲۰۰- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های سازنده‌ی آن کوچک‌تر است یعنی $ZM_p + NM_n > M_x$ است و این اختلاف جرم

بنابر رابطه‌ی معروف اینشتین به انرژی تبدیل شده و سبب استحکام و پایداری هسته می‌شود که به آن انرژی بستگی هسته می‌گویند. هر

چه این اختلاف جرم بیش‌تر باشد، انرژی بستگی هسته بزرگ‌تر بوده و هسته پایدارتر است.

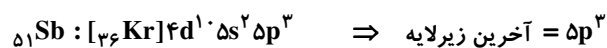
شیمی

سراسری خارج کشور ریاضی ۸۸

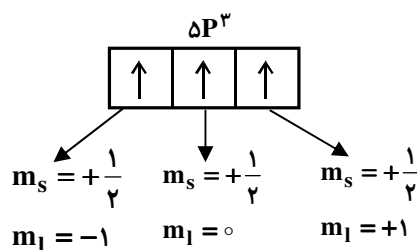
۲۰۱- گزینه ی «۴»

نخستین بار رادرفورد وجود هسته را در اتم کشف کرد و روشن ساخت که تابش های حاصل از مواد پرتوزا، از سه نوع پرتو متفاوت تشکیل شده است.

۲۰۲- گزینه ی «۴»

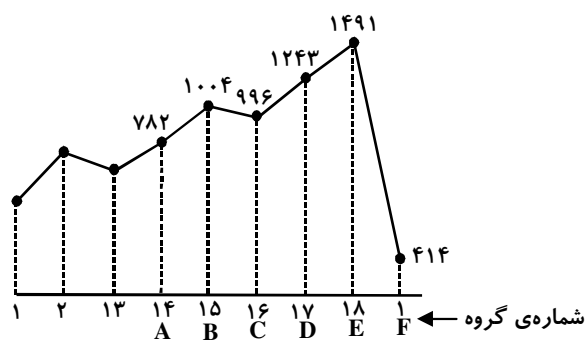


$$5p^3 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ l = 1 \\ m_s = +\frac{1}{2} \\ m_l = -1, 0, +1 \end{cases}$$



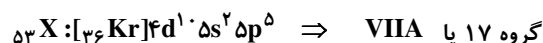
۲۰۳- گزینه ی «۲»

F عنصری از گروه ۱ یا IA است.



۲۰۴- گزینه ی «۳»

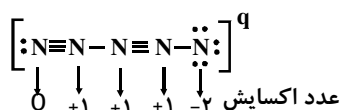
یون X^- دارای ۵۴ الکترون است. پس اتم X، ۵۳ الکترون دارد.



عنصر X دارای عدد اتمی ۵۳ و متعلق به گروه VIIA (خانواده ی هالوژن ها) است. ترکیب عنصر X با کلسیم، دارای فرمول CaX_2 است. زیرا ظرفیت کلسیم برابر ۲ و ظرفیت هر یک از هالوژن ها در برابر فلزها برابر ۱ است.

۲۰۵- گزینه ی «۴»

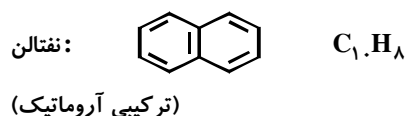
بار هر ترکیب چند اتمی برابر با مجموع عددهای اکسایش همه ی اتم های تشکیل دهنده ی آن است. پس q برابر مجموع عددهای اکسایش ۵ اتم نیتروژن تشکیل دهنده ی ترکیب است.



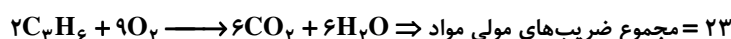
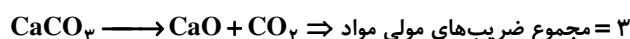
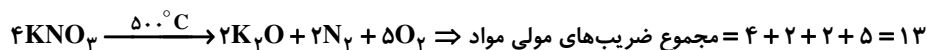
$$\Rightarrow q = 0 + 1 + 1 + 1 + (-2) = +1$$

نادرستی گزینه های ۱ و ۲ و ۳ آشکار است. پس راهی جز انتخاب گزینه ۴ نیست!

۲۰۶- گزینه ی «۱»



۲۰۷- گزینه ی «۴»



۲۰۸- گزینه ی «۱»



۳ جفت الکترون پیوندی ۴ جفت الکترون پیوندی
۶ جفت الکترون ناپیوندی ۸ جفت الکترون ناپیوندی

۲۰۹- گزینه ی «۱»

اختلاف الکترونگاتیوی کلر با کلسیم، برابر ۲ واحد است یعنی بیش تر از ۱/۷. پس پیوند Cl با Ca یونی است.
اختلاف الکترونگاتیوی کلر با فسفر، برابر ۰/۹ است، یعنی کم تر از ۱/۷ و بیش تر از ۰/۵ واحد. پس پیوند Cl و P کووالانسی است.
نکته ی آموزشی:
به طور کلی، اگر اختلاف الکترونگاتیوی دو عنصر، ۰/۵ یا کم تر از آن باشد، پیوند میان اتم آن دو عنصر، کووالانسی ناقطبی است و اگر اختلاف الکترونگاتیوی دو عنصر، بین ۰/۵ تا ۱/۷ باشد، پیوند میان اتم آن دو عنصر، کووالانسی قطبی است و در صورتی که اختلاف الکترونگاتیوی اتم دو عنصر، ۰/۷ یا بیش تر از آن باشد، پیوند میان اتم آن ها، یونی خواهد بود.

۲۱۰- گزینه ی «۳»

اتانول و دی متیل اتر، هر دو دارای فرمول مولکولی C_2H_6O می باشد، اما فرمول ساختاری آن ها، متفاوت است. پس ایزومر ساختاری یک دیگرند.

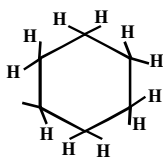


نکته ی آموزشی:

خانواده های آلی که فرمول مولکولی عمومی یکسانی دارند، در صورتی که تعداد کربن یکسانی داشته باشند، ایزومر ساختاری یک دیگر خواهند بود. (البته با فرض برابری تعداد گروه عاملی آن ها). پس الکل ها با اترها، آلدهیدها با کتون ها، کربوکسیلیک اسیدها با استرها و آلکن ها با سیکلو آلکان ها، در صورت برابری تعداد کربن آن ها، ایزومر ساختاری یک دیگرند.

۲۱۱- گزینه ی «۲»

سیکلو هگزان (C_6H_{12})

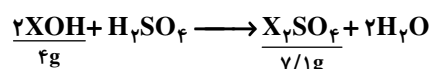


نکته ی آموزشی:

- فرمول مولکولی سیکلو آلکان ها همانند آلکن ها به صورت C_nH_{2n} می باشد.
- سیکلو آلکان به هیدروکربن حلقوی سیر شده گفته می شود که در ساختار مولکول آن ها، همه ی پیوندهای کربن-کربن از نوع یگانه ($C-C$) می باشند.

۲۱۲- گزینه ی «۱»

اگر نماد این عنصر را با X و جرم مولی آن را با M نشان دهیم، با توجه به ظرفیت آن که برابر ۱ می باشد، می توان نوشت:

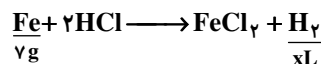


$$\frac{XOH \text{ تعداد مول}}{XOH \text{ ضریب استوکیومتری}} = \frac{X_2SO_4 \text{ تعداد مول}}{X_2SO_4 \text{ ضریب استوکیومتری}} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{M+17}{1} \Rightarrow M=23$$

نکته ی آموزشی:

- در مورد کلیه ی مواد موجود در معادله ی موازنه شده ی یک واکنش، نسبت تعداد مول به ضریب استوکیومتری آن ها با یک دیگر برابر است.
- جرم هر ماده (بر حسب گرم) تقسیم بر جرم مولی آن، تعداد مول آن ماده را مشخص می کند.

۲۱۳- گزینه ی «۳»



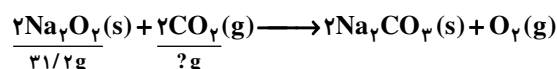
$$\rho = 0.8 g.L^{-1}$$

$$\frac{Fe \text{ تعداد مول}}{1} = \frac{H_2 \text{ تعداد مول}}{1} \Rightarrow \frac{7 \times 0.8}{56} = \frac{x \times 0.8}{1} \Rightarrow x = 2/5 L \quad H_2(g)$$

۲۱۴- گزینه ی «۱»

$$\text{درصد جرمی} \begin{cases} 40/5 & Cl \\ 36/6 & O \\ 22/9 & Ca \end{cases} \Rightarrow \frac{Cl \text{ تعداد مول}}{O \text{ تعداد مول}} = \frac{40/5}{36/6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{آنیون: } ClO_2^-$$

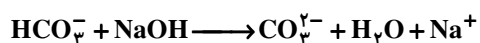
۲۱۵- گزینه ی «۳»



اگر حجم هوا را x لیتر بگیریم:

$$\frac{Na_2O_7 \text{ تعداد مول}}{2} = \frac{CO_2 \text{ تعداد مول}}{2} \Rightarrow \frac{31/2}{78} = \frac{x \times \frac{0.88}{1}}{44} \Rightarrow x = 20.0 L$$

۲۱۶- گزینه‌ی «۱»



$$\Rightarrow \frac{1 \text{ HCO}_3^-}{(1.6 \times 10^{-3} / 122) \text{ mg}} \quad \frac{1 \text{ NaOH}}{x \text{ L}} \quad \frac{1}{.025 \text{ mol.L}^{-1}}$$

$$\frac{\text{HCO}_3^- \text{ تعداد مول}}{1} = \frac{\text{NaOH تعداد مول}}{1} \Rightarrow \frac{1.6 \times 10^{-3} / 122 \times 10^{-3}}{61} = \frac{x \times .025}{1} \Rightarrow x = 8 \text{ L}$$

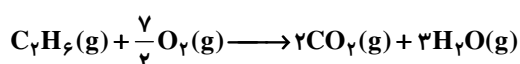
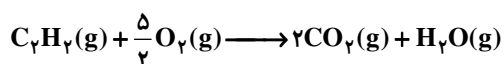
۲۱۷- گزینه‌ی «۱»

وجود پیستون متحرک به معنی ثابت بودن فشار سامانه است. پس گرمای مبادله‌شده، ΔH را نشان می‌دهد.

$$\Delta H = -215 \text{ kJ}, \quad W = -41/8 \text{ kJ}$$

$$\Delta E = \Delta H + W \Rightarrow \Delta E = (-215) + (-41/8) = -256/8 \text{ kJ}$$

۲۱۸- گزینه‌ی «۳»



تعداد مول گاز حاصل از سوختن هر مول اتین، کم‌تر از تعداد مول گاز حاصل از سوختن هر مول اتان است. بنابراین دمای شعله‌ی سوختن اتین، بالاتر است.

۲۱۹- گزینه‌ی «۲»



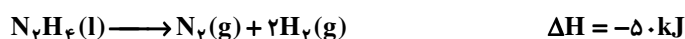
از معادله‌ی «II» با عکس کردن آن، می‌توان نتیجه گرفت:



با جمع کردن معادله‌های «I» و «III» نتیجه می‌شود:



با عکس کردن معادله‌ی حاصل، نتیجه می‌شود:



$$1 \text{ mol N}_2\text{H}_4 = 32 \text{ g} \Rightarrow -50 \text{ kJ} \times \frac{6/4}{32} = -10 \text{ kJ} \quad \text{گرمای آزاد شده}$$

۲۲۰- گزینه‌ی «۴»

BaSO_4 نامحلول است نه کم‌محلول!

۲۲۱- گزینه ی «۳»

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow 40 \times 2/5 = x \times 0/2 \Rightarrow x = 50 \text{ mL}$$



اگر جرم NaOH مورد نیاز را x گرم بگیریم:

$$\frac{\text{تعداد مول HCl}}{\text{ضریب HCl}} = \frac{\text{تعداد مول NaOH}}{\text{ضریب NaOH}} \Rightarrow \frac{40 \times 10^{-3} \times 2/5}{1} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 4 \text{ g}$$

۲۲۲- گزینه ی «۳»

اگر a درصد جرمی محلول و ρ محلول با واحد گرم بر میلی لیتر باشد:

$$C = 10 \times a \times \rho = \text{غلظت معمولی}$$

$$\Rightarrow C = 10 \times 40 \times 1/25 = 50 \text{ g.L}^{-1}$$

$$M = \frac{C}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow M = \frac{50 \text{ g.L}^{-1}}{98 \text{ g.mol}^{-1}} = 5/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

نکته ی آموزشی:

اگر ρ چگالی محلول با واحد گرم بر میلی لیتر باشد، می توان نتیجه گرفت که ۱۰۰۰ρ نمایان گر جرم یک لیتر از محلول است. اگر در صد جرمی ماده ی حل شده در محلول، برابر a باشد، پس %a جرم محلول را ماده ی حل شونده تشکیل می دهد. بنابراین:

$$C = 10 \times \rho \times \%a = 10 \times a \times \rho$$

۲۲۳- گزینه ی «۴»

صابون } نمک سدیم اسیدهای چرب است.
زنجیر هیدروکربنی آن، ناقطبی و آب گریز است.
در حلال های قطبی حل می شود.

۲۲۴- گزینه ی «۱»

در مدت ۱۰ ثانیه، مقدار ۵/۰۴ گرم HNO₃ مصرف شده است. پس:

$$\overline{R}_{\text{HNO}_3} = \frac{5/04 \text{ mol}}{60 \text{ min}} = 0/48 \text{ mol.min}^{-1}$$

$$\overline{R}_{\text{Cu(NO}_3)_2} = \frac{3}{8} \overline{R}_{\text{HNO}_3} = \frac{3}{8} \times 0/48 = 0/18 \text{ mol.min}^{-1}$$

۲۲۵- گزینه ی «۲»

اگر انرژی فعال سازی رفت و برگشت را به ترتیب، با E_a و E'_a و تغییر آنتالپی واکنش های رفت و برگشت را به ترتیب، با ΔH و ΔH' نشان دهیم:

$$\begin{cases} E_a = 100 \text{ kJ} \\ \Delta H = -392 \text{ kJ} \end{cases} \Rightarrow \Delta H = E_a - E'_a \Rightarrow -392 = 100 - E'_a \Rightarrow E'_a = 492 \text{ kJ}$$

با توجه به این که E_a < E'_a است، پس سرعت واکنش رفت، بیش تر از سرعت واکنش برگشت است. واکنش در جهت رفت گرماده و در جهت برگشت، گرماگیر است. ΔH واکنش رفت، -۳۹۲kJ است. پس ΔH واکنش برگشت، +۳۹۲kJ است.

۲۲۶- گزینه ی «۴»

$$K = \frac{[\text{O}_2] \cdot [\text{SO}_2]^2}{[\text{SO}_3]^2} = \frac{0/25 \times (0/06)^2}{(0/05)^2} = 0/36$$

۲۲۷- گزینه ی «۳»

با فرض این که در آغاز واکنش، فقط واکنش دهنده ها در ظرف واکنش حضور داشته اند، تعداد مول H_2 سه برابر تعداد مول CO می باشد. پس:

$$\text{تعداد مول } H_2 = 3 \times 0.1 = 0.3 \text{ mol}$$

اگر حجم ظرف واکنش را V لیتر در نظر بگیریم:

$$K = \frac{[CO].[H_2]^3}{[CH_4].[H_2O]} = 10 \Rightarrow \frac{(\frac{0.1}{V})(\frac{0.3}{V})^3}{(\frac{0.3}{V})(\frac{0.1}{V})} = 10 \Rightarrow V = 3 \text{ L}$$

۲۲۸- گزینه ی «۲»



سامانه ی تعادلی شامل ۳ فاز متمایز از هم بوده و بنابراین، شامل یک تعادل ناهمگن است. انتقال مخلوط تعادلی به ظرف سربسته ی بزرگ تر، موجب جابه جایی تعادل در جهت افزایش تعداد مول گاز یعنی در جهت رفت می شود.

۲۲۹- گزینه ی «۳»

{ اسید قوی
باز ضعیف } \Rightarrow نمک اسیدی $\Rightarrow pH < 7$ ، (تورنسل به رنگ قرمز)

۲۳۰- گزینه ی «۴»

$$CH_3COOH \begin{cases} M = 0.05 \text{ mol.L}^{-1} \\ \alpha = 0.02 \end{cases} \Rightarrow pH = -\log(\alpha.M) = -\log(0.02 \times 0.05) = 3$$

$$HCl \begin{cases} M = 0.04 \text{ mol.L}^{-1} \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow pH = -\log(\alpha.M) = -\log(1 \times 0.04) = \log \frac{1}{4} = 1 - 2 \log 2 = 1 - 2(0.3) = 0.4$$

$$\Rightarrow \frac{pH(CH_3COOH)}{pH(HCl)} = \frac{3}{0.4} = 7.5$$

۲۳۱- گزینه ی «۳»

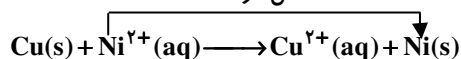
اسید لوری - برونستد : دهنده ی پروتون

باز لوری - برونستد : گیرنده ی پروتون

۲۳۲- گزینه ی «۲»

گلیسرین + صابون \longrightarrow سدیم هیدروکسید + تری گلیسرید

کاهش در کاتد



اکسایش در آند

$$E^\circ_{\text{واکنش}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -0.25 - (-0.34) = -0.59$$

منفی بودن E° واکنش نشان گر انجام پذیر نبودن خودبه خودی واکنش است، یعنی $Cu(s)$ نمی تواند $Ni^{2+}(aq)$ را در محلول به صورت $Ni(s)$ آزاد کند.

۲۳۳- گزینه ی «۱»

از دو الکتروود فلزی تشکیل دهنده ی یک سلول گالوانی، الکترودی که E° کوچک تر دارد، اکسید می شود و کاهنده است و آند را تشکیل می دهد.

۲۳۵- گزینه ی «۱»

در آب کاری قاشق مسی با فلز M :

- قاشق مسی نقش کاتد و تیغه ی فلز M نقش آند را دارد.
- در کاتد، کاتیون فلز M کاهش یافته و در آند، فلز M اکسید می شود.
- محلول الکترولیت، محلول نمکی از فلز M است.