WWW.RIAZISARA.IR

ریاضیات

سراسری خارج از کشور ۹۰

۱۰۱- گزینه‌ی «۲» *(ریاضی ۲- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)*

تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است.

هرگاه: $\Delta < 0 \ , \ a > 0$

پس در عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow (6^2) - 4(2m+1)(m-1) < 0 \\ a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8m^2 - 4m - 40 > 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - m - 10 > 0 \Rightarrow (m+2)(2m-5) > 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < -2 \cup m > \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > \frac{5}{2} \Rightarrow m > 2/5 \\ m > 1 \end{cases}$$

۱۰۲- گزینه‌ی «۴» *(حسابان- صفحه‌های ۷۱ و ۹۱)*

$$g^{-1} o f^{-1} = (fog)^{-1}$$

پس ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم و سپس آن را معکوس می‌کنیم. برای تشکیل تابع fog از دامنه‌ی تابع g شروع می‌کنیم.

$$x = 2 : f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow (2,2) \in fog$$
$$x = 3 : f(g(3)) = f(2) = 3 \Rightarrow (3,3) \in fog$$
$$x = 5 : f(g(s)) = f(4) = 5 \Rightarrow (5,5) \in fog$$

پس تابع fog به صورت زیر است:

$$fog = \{(2,2),(3,3),(5,5)\}$$

و در نهایت تابع $(fog)^{-1}$ را می‌یابیم:

$$(fog)^{-1} = \{(2,2),(3,3),(5,5)\}$$

۱۰۳- گزینه‌ی «۲» *(ریاضی ۲- صفحه‌های ۱۶۹ و ۱۷۰)*

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، دترمینان A برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

پس در ماتریس $A = \begin{bmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{bmatrix}$ داریم:

$$|A| = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \quad (*)$$

از آن‌جا که $\log a + \log b = \log ab , \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ داریم:

$$\xrightarrow{*} |A| = \log \frac{5}{2} \times \overbrace{\log 10}^{1} = \log 2/5 \times 1 = \log 2/5$$

۱۰۴- گزینه‌ی «۴» *(حسابان- صفحه‌های ۲ و ۵)*

خواسته‌ی مسأله مجموع جملات a_7 تا a_{18} است؛ یعنی:

$$S = a_7 + a_8 + ... + a_{18}$$

با توجه به این که $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ را داریم برای محاسبه‌ی S کافی است مجموع شش جمله‌ی اول را از مجموع ۱۸ جمله‌ی اول کم کنیم. بنابراین:

$$S = S_{18} - S_6 \Rightarrow S = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6}$$
$$= 9 - (-9) = 18$$

۱۰۵- گزینه‌ی «۱» *(حسابان- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲)*

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

بنابراین ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را می‌یابیم:

$$f(x) = \sin^{-1}(2x-1) \Rightarrow -1 \le 2x - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2$$
$$\Rightarrow 0 \le x \le 1$$

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow D_g = R$$

بنابراین:

$$D_{fog} = \left\{ x \in R \,\middle|\, \overbrace{\frac{x^2}{x^2+1} \in [0,1]}^{(*)} \right\}$$

برای این‌که رابطه‌ی (*) برقرار باشد، باید:

$$0 \le \frac{x^2}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} \ge 0 & \text{(همواره برقرار)} \\ \frac{x^2}{x^2+1} \le 1 \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{x^2+1>0} x^2 \le x^2 + 1 & \text{(همواره برقرار)} \end{cases}$$

در نتیجه تابع fog به ازای هر $x \in R$ تعریف می‌شود و $D_{fog} = R$.

یادآوری: در تابع $f(x) = \sin^{-1} u$ دامنه‌ی تابع از حل نامعادله‌ی $|u| \le 1$ به دست می‌آید.

۱۰۶- گزینه‌ی «۳» *(حسابان- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۷)*

$$f(x) = 2 - |x - 2| \quad (*)$$

برای تشکیل $f(f(x))$ به جای هر x در تابع f، $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{(*)} f(f(x)) = 2 - |2 - |x-2| - 2| = 2 - |-|x-2||$$

می‌دانیم $||u|| = |u| , |-u| = |u|$ است بنابراین:

$$\Rightarrow f(f(x)) = 2 - |x-2| \overset{(*)}{=} f(x)$$

۱۰۷- گزینه‌ی «۲» *(حسابان- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۷)*

با توجه به این‌که $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ هستند برای محاسبه‌ی مقدار k کافی است مجموع ریشه‌ها را بیابیم:

$$S' = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \frac{-k}{8}$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta)(\alpha+\beta) = \frac{-k}{8} \quad (*)$$

اما از آن‌جا که α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 1 = 0$ هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-k}{8} \Rightarrow k = 6$$

WWW.RIAZISARA.IR

۱۰۸- گزینه‌ی «۳» *(حسابان- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷ و ۱۲۴ تا ۱۲۹)*

$$f(x)=x+\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\Rightarrow f'(x)=1+\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

می‌دانیم $-1\le \cos u\le 1$، بنابراین:

$$-1\le\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\le 1\Rightarrow\frac{-\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\le\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\le 1+\frac{\pi}{4}\quad(*)$$

بنابراین با توجه به نامعادلات $(*)$ در می‌یابیم $f'>0$ و در نتیجه f اکیداً صعودی است. از طرفی در یک تابع اکیداً صعودی برای یافتن تعداد نقاط تلاقی f و f^{-1} کافی است f را با خط $y=x$ تلاقی دهیم. در نتیجه:

$$f(x)=x\Rightarrow x+\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=x\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}x=k\pi\Rightarrow x=4k$$

پس مضارب صحیح ۴ در بازه‌ی $[-1,9]$ جواب معادله‌اند که عبارت‌اند از $\{0,4,8\}$. پس تعداد نقاط مشترک f و f^{-1}، ۳ تا است.

۱۰۹- گزینه‌ی «۴» *(حسابان- صفحه‌های ۱۶۱ تا ۱۶۵)*

شرط پیوستگی تابع در $x=a$، $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

پس برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ داریم:

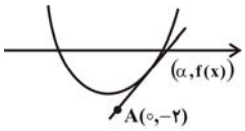
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}:\text{وجود ندارد}\\ f(0)=a\end{cases}$$

بنابراین f در $x=0$ تحت هیچ شرایطی پیوسته نخواهد بود.

۱۱۰- گزینه‌ی «۱» *(حسابان- صفحه‌ی ۱۸۱)*

نقطه‌ی تماس خط و منحنی را $x=\alpha$ در نظر می‌گیریم و معادله‌ی خط مماس بر منحنی را در این نقطه می‌نویسیم:

$$x=\alpha\Rightarrow\begin{cases}f(\alpha)=\alpha^2-1\\ f'(\alpha)=2\alpha\end{cases}$$



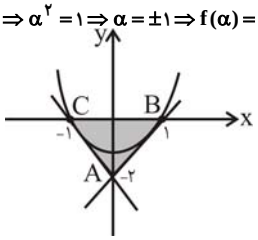
$\Rightarrow$ معادله‌ی خط مماس: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\quad(*)$

نقطه‌ی $A(0,-2)$ روی خط قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{(*)}-2-(\alpha^2-1)=2\alpha(0-\alpha)\Rightarrow-\alpha^2-1=-2\alpha^2$$

$$\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm1\Rightarrow f(\alpha)=0$$

پس شکل به صورت زیر است:

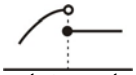


$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{2\times 2}{2}=2$$

۱۱۱- گزینه‌ی «۳» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)*

f در $x=C$ مشتق راست دارد بنابراین پیوستگی راست دارد و چون در این نقطه می‌نیمم نسبی است بنابراین منحنی تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:

مشتق راست مثبت است



مشتق راست صفر است

دقت کنید اگر مشتق راست منفی باشد نمودار در همسایگی راست نزولی خواهد بود و در این حالت نمی‌تواند می‌نیمم نسبی باشد.

۱۱۲- گزینه‌ی «۴» *(حسابان- صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۲۹)*

$$\sin 3x-\sin x+2\sin^2 x=1$$

$$\Rightarrow\sin 3x-\sin x=1-2\sin^2 x\quad(*)$$

از آن‌جا که:

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2},\ 1-2\sin^2 x=\cos 2x$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)}2\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos 2x=\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x(2\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ 2\sin x-1=0\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

حال تعداد جواب‌های معادله را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ می‌یابیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

پس تعداد جواب‌های معادله ۶ تاست.

۱۱۳- گزینه‌ی «۲» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)*

ابتدا حد دنباله را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$$

فاصله‌ی جملات دنباله از حدش کم‌تر از $\frac{1}{98}$ است، یعنی:

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{98}\Rightarrow\left|\frac{2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|<\frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|<\frac{1}{98}$$

مشخص است که $\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$، بنابراین داخل قدر مطلق منفی است و در نتیجه قدر مطلق را با علامت منفی برمی‌داریم:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{98}\Rightarrow\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{49}$$

از آن‌جا که مخرج همواره مثبت است، با طرفین و وسطین جواب نامعادله را می‌یابیم:

$$49\sqrt{n+1}-49\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Rightarrow 48\sqrt{n+1}<50\sqrt{n}$$

$$24\sqrt{n+1}<25\sqrt{n}\Rightarrow 576(n+1)<625n\Rightarrow 49n>576$$

$$\Rightarrow n>\frac{576}{49}\simeq 11/000\Rightarrow n\ge 12\quad\Rightarrow\min(n_0)=12$$

WWW.RIAZISARA.IR

۱۱۴- گزینه‌ی «۳» *(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۴۰)*

سری به سری تلسکوپی تبدیل می‌شود.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log(1-\frac{1}{k^2}) = \sum_{k=2}^{\infty} \log(\frac{k^2-1}{k^2})$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \log\frac{\frac{k-1}{k}}{\frac{k}{k+1}}$$

اما می‌دانیم $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$، بنابراین:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\log\frac{k-1}{k} - \log\frac{k}{k+1}) = \log\frac{2-1}{2} - \lim_{k\to\infty} \log\frac{k}{k+1}$$

$$= \log\frac{1}{2} - \cancel{\log 1}^{\,0} = \log\frac{1}{2}$$

۱۱۵- گزینه‌ی «۴» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۹ و ۸۴ تا ۸۷)*

برای محاسبه‌ی مجانب قائم ریشه‌ی مخرج را می‌یابیم

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

چون $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$ می‌شود بنابراین $x=-1$ مجانب قائم است.

همچنین این تابع یک مجانب مایل $y=mx+h$ دارد برای یافتن معادله‌ی آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left((x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) - \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) - 1$$

ابهام حد $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right)$ از نوع $(0\times\infty)$ است. بنابراین برای رفع ابهام عامل ∞ را به مخرج می‌بریم:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1)}{\frac{1}{x}}\right) - 1$$

با کمک گویا کردن حاصل حد را می‌یابیم:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{1}{x}(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1)}\right) - 1$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{1}{x}(1+1)}\right) - 1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{2(x+1)}\right) - 1$$

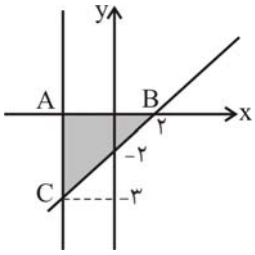
$$= -1-1 = -2 \Rightarrow h = -2$$

پس معادله‌ی خط مجانب مایل برابر است با: $y = x-2$

حال با رسم مجانب‌ها در یک دستگاه مختصات داریم:

دقت کنید که C محل تلاقی مجانب‌هاست بنابراین:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=x-2 \end{cases} \Rightarrow y_C = -3$$



$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\times(3)}{2} = 4/5$$

۱۱۶- گزینه‌ی «۴» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۵۵ و ۸۱ تا ۸۳)*

چون وقتی $x\to\infty$، عبارت داخل قدر مطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین: $|x^2-4| = x^2-4$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a=-1$$

حال حد راست عبارت را در $x=-2$ می‌یابیم.

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2} = \lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x-2||x+2|}{-(x^2+x-2)}$$

$$= \lim_{x\to(-2)}\frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to(-2)}\frac{x-2}{x-1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که: $x\to(-2)^+ \Rightarrow |\underbrace{x-2}_{\text{منفی}}| = -(x-2)$

$x\to(-2)^+ \Rightarrow |\underbrace{x+2}_{\text{مثبت}}| = x+2$

۱۱۷- گزینه‌ی «۳» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۵)*

معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه از منحنی را می‌یابیم: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x = \frac{-1}{2} \Rightarrow f(\frac{-1}{2}) = 4 \Rightarrow A(-\frac{1}{2}, 4)$

$x=1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow B(1,1)$

$\Rightarrow$ معادله‌ی خط: $y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$

$$\Rightarrow y-1 = \frac{1-4}{1-(\frac{-1}{2})}(x-1) \Rightarrow y-1 = -2(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -2x+3$$

چون این خط بر منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ مماس است پس معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر می‌دهد:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = -2x+3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = -2x+3 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \ (*)$$

چون جمع ضرایب صفر است پس یک ریشه حتماً $x=1$ است با تقسیم عبارت $2x^3-3x^2+1$ بر $x-1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-3x^2+1 & x-1 \\ \hline \vdots & 2x^2-x-1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3-3x^2+1 = (x-1)\overbrace{(2x^2-x-1)}^{(x-1)(2x+1)} = (x-1)^2(2x+1)$$

$$\xrightarrow{(*)} (x-1)^2(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \ \text{(مضاعف) ریشه‌ی مکرر} \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2} \ \text{ریشه‌ی ساده} \end{cases}$$

پس در $x=1$ خط بر منحنی مماس است.

WWW.RIAZISARA.IR

۱۱۸- گزینه‌ی «۳» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۵)*

با توجه به اطلاعات مسأله: $x'_t = ۰/۰۵, x = \frac{۱۲}{۵}$

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از مبدأ برابر است با: $d = \sqrt{x^۲ + y^۲}$

با توجه به این که $y = x^۲$ است داریم: $d = \sqrt{x^۲ + x^۴}$

حال برای محاسبه‌ی سرعت افزایش فاصله‌ی M از مبدأ از طرفین تساوی فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$d'_t = \frac{۲x + ۴x^۳}{۲\sqrt{x^۲ + x^۴}} x'_t = \frac{۲x(۱ + ۲x^۲)}{۲x\sqrt{۱ + x^۲}} \times x'_t \Rightarrow d'_t = \frac{۱ + ۲x^۲}{\sqrt{۱ + x^۲}} x'_t$$

حال با کمک اطلاعات مسأله جواب را می‌یابیم:

$$d'_t = \frac{۱ + ۲(\frac{۱۴۴}{۲۵})}{\sqrt{۱ + \frac{۱۴۴}{۲۵}}} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۳۱۳}{۱۳۰۰} \simeq ۰/۲۴$$

۱۱۹- گزینه‌ی «۱» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۴)*

از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰ \Rightarrow x^۳ - ۳x + ۲ = ۰ \ (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x = ۱$ است و با تقسیم عبارت $x^۳ - ۳x + ۲$ بر $x - ۱$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۳x + ۲ & x - ۱ \\ \vdots & x^۲ + x - ۲ = (x-۱)(x+۲) \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳ - ۳x + ۲ = (x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\xrightarrow{(*)} (x-۱)^۲(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ریشه‌ی مضاعف} \\ x = -۲ & \text{ریشه‌ی ساده} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۲ & & ۱ & \\ \hline f' & - & ۰ & + & ۰ & + \\ f & \searrow & & \nearrow & & \nearrow \end{array}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد.

دقت کنید چون $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

۱۲۰- گزینه‌ی «۱» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰)*

نقطه‌ی C (عضو دامنه‌ی تابع) بحرانی است، هرگاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱) $f'(C) = ۰$ ۲) $f'(C)$ موجود نباشد

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{۱ + x^۲}} \times x - \sqrt{۱ + x^۲}}{x^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x^۲}{\sqrt{۱ + x^۲}} - \sqrt{۱ + x^۲}}{x^۲} = \frac{\frac{x^۲ - (x^۲ + ۱)}{\sqrt{۱ + x^۲}}}{x^۲}$$

$$= \frac{-۱}{x^۲\sqrt{۱ + x^۲}} \neq ۰$$

مخرج f' در $x = ۰$ صفر می‌شود. ولی از آن‌جا که این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نیست، بنابراین نقطه‌ی بحرانی نیست و در نتیجه تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۱۲۱- گزینه‌ی «۳» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۴۷ تا ۱۴۹)*

از تابع مشتق دوم می‌گیریم:

$$f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x \Rightarrow f'(x) = ۲x + ۲\sqrt{۲}(-\sin x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ جواب‌ها عبارت‌اند از: $x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$

حال مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & ۰ & & \frac{\pi}{۴} & & \frac{۷\pi}{۴} & & ۲\pi \\ \hline f'' & \| & - & ۰ & + & ۰ & - & \| \\ & & \cap & & \cup & & \cap & \end{array}$$

بنابراین در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ جهت تقعر تابع رو به بالاست.

۱۲۲- گزینه‌ی «۲» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۶)*

با توجه به شکل وقتی $x \to +\infty$ مجانب افقی $y = ۲$ دارد، بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}) = ۲$$

با کمک هم‌ارزی رادیکالی داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(ax + \left|x + \frac{b}{۲}\right|) = ۲$$

وقتی $x \to \infty$ علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است، بنابراین:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(ax + x + \frac{b}{۲}) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left((a+۱)x + \frac{b}{۲}\right) = ۲$$

چون حاصل حد عددی حقیقی شده بنابراین باید ضریب x صفر باشد، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \\ \frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \end{cases}$$

یادآوری:

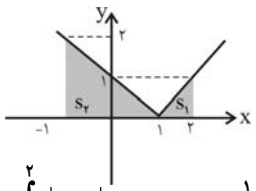
$$: \sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{۲a}\right| \ (a < ۰)$$

۱۲۳- گزینه‌ی «۲» *(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۱۹۱)*

مقدار متوسط تابع $y = |۱ - x|$ در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(c) = \frac{\int_{-۱}^{۲} |۱ - x| dx}{۲ - (-۱)} \quad (*)$$

برای محاسبه‌ی $\int_{-۱}^{۲} |۱ - x| dx$ از روش رسم کمک می‌گیریم:



$$\Rightarrow \int_{-۱}^{۲} |۱ - x| dx = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} f(c) = \frac{\frac{۵}{۲}}{۳} = \frac{۵}{۶}$$

۱۲۴- گزینه‌ی «۴» *(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۹۸ تا ۲۰۴)*

شیب خط مماس تابع f در هر نقطه از منحنی $\frac{۳}{(x-۱)^۲}$ است یعنی مشتق تابع f در هر نقطه از آن $\frac{۳}{(x-۱)^۲}$ است. پس با کمک انتگرال‌گیری و نقطه‌ی داده شده تابع f را می‌یابیم:

$$\int \frac{۳}{(x-۱)^۲} dx = ۳\int (x-۱)^{-۲} dx = ۳\frac{(x-۱)^{-۱}}{-۱} + c$$

$$= \frac{-۳}{(x-۱)} + c \Rightarrow f(x) = \frac{-۳}{(x-۱)} + c$$

نقطه‌ی (۱ و ۲) روی منحنی f قرار دارد، بنابراین در آن صدق می‌کند:

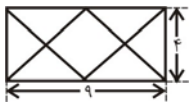
$$f(۲) = ۱ \Rightarrow \frac{-۳}{(۲-۱)} + c = ۱ \Rightarrow c = ۴ \quad \Rightarrow f(x) = \frac{-۳}{x-۱} + ۴$$

حال مجانب افقی تابع را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-۳}{x-۱} + ۴\right) = ۴ \Rightarrow y = ۴ : \text{مجانب افقی}$$

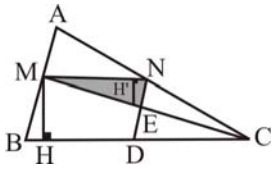
۱۲۵- گزینه‌ی «۱» *(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۲۱)*

چهارضلعی حاصل از تلاقی نیمسازهای درونی مستطیل به اضلاع a و b، مربعی است به طول ضلع: $\frac{|a-b|}{\sqrt{۲}}$



$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{۹-۴}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \Rightarrow S = \left(\frac{۵}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} = ۱۲/۵$$

۱۲۶- گزینه‌ی «۱» *(هندسه ۱- صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)*



$$(MN \parallel BC, \frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۳}) \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}, \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

$$= \frac{۲}{۲+۳} = \frac{۲}{۵}$$

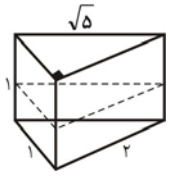
$$(MN \parallel BC, EN \parallel MB) \Rightarrow \overset{\Delta}{EMN} \sim \overset{\Delta}{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{EH'}{MH} = \frac{MN}{BC} = \frac{۲}{۵}$$

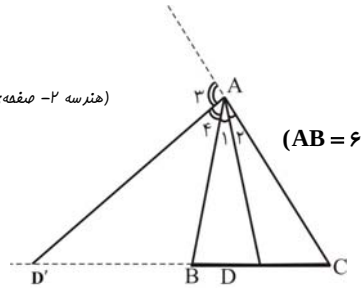
$$\frac{S_{MNE}}{S_{MNDB}} = \frac{\frac{۱}{۲}(MN \times EH')}{MN \times MH} = \frac{EH'}{۲MH} = \frac{۱}{۵} = ۲۰\%$$

۱۲۷- گزینه‌ی «۴» *(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۷)*

با توجه به این‌که $(۱)^{۲} + (۲)^{۲} = (\sqrt{۵})^{۲}$ قاعده‌ی این منشور یک مثلث قائم‌الزاویه است و ارتفاع آن یک واحد است. اگر مطابق خط‌چین این منشور را برش زده و از وجوه مستطیل‌های به اضلاع $\sqrt{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ به یکدیگر متصل کنیم مکعب مستطیلی به ابعاد $\frac{۱}{۲}$ و ۱ و ۲ حادث می‌شود که طول قطر آن برابر است با: $\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱+۴} = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$



۱۲۸- گزینه‌ی «۳» *(هندسه ۲- صفحه‌ی ۱۳)*



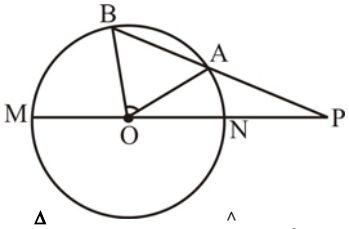
$$(AB = ۶, AC = ۸, BC = ۵)$$

$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{۵-DB} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow DB = \frac{۱۵}{۷}$$

$$\hat{A}_۳ = \hat{A}_۴ \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{D'B}{۵+D'B} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow D'B = ۱۵$$

$$DD' = D'B + BD = ۱۵ + \frac{۱۵}{۷} = \frac{۱۲۰}{۷}$$

۱۲۹- گزینه‌ی «۲» *(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۹)*



$$\overset{\Delta}{OAB} : OA = OB = R, \hat{AB} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \text{متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow AB = R$$

$$PM = ۳R \Rightarrow PN = ۳R - ۲R = R$$

$$PA \times PB = PN \times PM$$

$$PA = x \Rightarrow x(x+R) = ۳R^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲} + Rx - ۳R^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^{۲} + ۱۲R^{۲}}}{۲} \xrightarrow{\text{منفی غیر قابل قبول}}$$

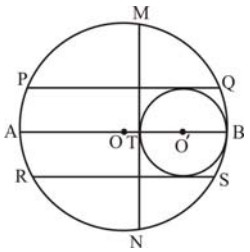
$$x = \frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}$$

۱۳۰- گزینه‌ی «۳» *(هندسه ۲- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)*

مطابق شکل مقابل وتر MN که در T بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است به طول $۴\sqrt{۶}$ است، زیرا:

$$MT \times TN = AT \times TB$$

$$\Rightarrow MT^{۲} = ۲۴ \Rightarrow MT = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow MN = ۴\sqrt{۶}$$



به همین ترتیب طول دو وتر دیگر PQ و RS نیز $۴\sqrt{۶}$ است و در کل این سه وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ بر دایره‌ی کوچک‌تر مماسند.

۱۳۱- گزینه‌ی «۱» *(هندسه ۲- صفحه‌های ۸۸ و ۸۹)*

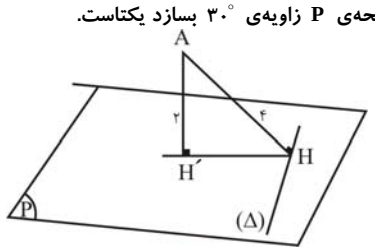
تبدیلی که طی آن x و y از درجه‌ی اول بمانند و قدر مطلق ضرایب آن‌ها برابر با یک باشد تبدیل ایزومتری هستند.

۱۳۲- گزینه‌ی «۱» *(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۵۹)*

خط Δ و صفحه‌ی P حداقل دو نقطه‌ی مشترک دارند، پس خط Δ در صفحه‌ی P واقع است. با توجه به داده‌ها در شکل زیر داریم:

$$\sin A\hat{H}H' = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A\hat{H}H' = ۳۰^\circ$$

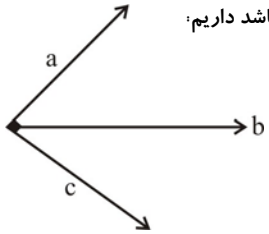
از طرفی از A یک و فقط یک خط می‌گذرد که بر خط Δ عمود باشد و آن را قطع کند. به عبارتی خط گذرنده از A که خط Δ را قطع کرده و با صفحه‌ی P زاویه‌ی ۳۰° بسازد یکتاست.



WWW.RIAZISARA.IR

۱۳۳- گزینه‌ی «۲» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۱۴ تا ۲۴)*

اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد داریم:



$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲+۱}{\sqrt{۴+۱+۴}\times\sqrt{۱+۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

بنابراین زاویه‌ی بین a و c دو برابر یعنی ۹۰° است و در نتیجه $a.c = ۰$ خواهد بود.

۱۳۴- گزینه‌ی «۳» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)*

$$\vec{V}_۱ = (۲,a,۱), \vec{V}_۲ = (b,۲,۴), \vec{V}_۳ = (۲,۱,c)$$

اولاً باید این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند (یال‌های مکعب مستطیل):

$$\begin{cases} \vec{V}_۱.\vec{V}_۲ = ۰ \\ \vec{V}_۱.\vec{V}_۳ = ۰ \\ \vec{V}_۲.\vec{V}_۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲b+۲a+۴ = ۰ \\ ۴+a+c = ۰ \\ ۲b+۲+۴c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = ۱ \\ c = -۱ \end{cases}$$

ثانیاً: حجم مکعب مستطیل (متوازی‌السطوح) قدر مطلق حاصلضرب مختلط سه بردار است.

$$= \left|\vec{V}_۱.(\vec{V}_۲\times\vec{V}_۳)\right| = \left\|\begin{matrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{matrix}\right\| = ۴۲$$

۱۳۵- گزینه‌ی «۴» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۹)*

از معادلات خط داده شده داریم $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۱}{-۲}$ که اگر ساده شود خواهیم داشت: $x+y=۰$ صفحه‌ای که از مبدأ و خط داده شده می‌گذرد.

۱۳۶- گزینه‌ی «۳» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)*

دو خط داده شده متقاطع نبوده (در گزینه‌ها صفر موجود نیست) و موازی نیز نیستند. (زیرا بردار هادی آن‌ها موازی نیست) پس متنافرند. نقطه‌ی $A(۰,۰,۰) \in l_۱$ و نقطه‌ی $B(۱,-۲,۳) \in l_۲$ هستند. کافی است اندازه‌ی تصویر قائم $\overrightarrow{AB}$ را بر حاصلضرب خارجی دو بردار هادی محاسبه کنیم تا طول عمود مشترک به دست آید.

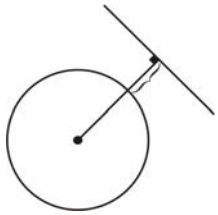
$$\vec{L}_۱\times\vec{L}_۲ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۳i-۳k$$

$$\overrightarrow{AB}.(\vec{L}_۱\times\vec{L}_۲) = -۳-۹ = -۱۲$$

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.(\vec{L}_۱\times\vec{L}_۲)\right|}{\left|\vec{L}_۱\times\vec{L}_۲\right|} = \frac{۱۲}{۳\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

۱۳۷- گزینه‌ی «۲» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۵۱ تا ۵۵)*

فاصله‌ی مرکز دایره را از خط تعیین و طول شعاع را از آن کم می‌کنیم:



$$x^۲+y^۲-۲x+۴y = ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \text{مرکز}\ (۱,-۲), R = ۳$$

$$\text{فاصله‌ی مرکز از خط} = \frac{|۳\alpha+۴\beta-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{|۳-۸-۱۵|}{۵} = ۴$$

$$\text{فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره از خط} = ۴-۳ = ۱$$

۱۳۸- گزینه‌ی «۱» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)*

$$\begin{cases} A(۲,۰), A'(۰,۰) \\ F(۱+\sqrt{۵},۰) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' \| ox \Rightarrow \text{هذلولی افق} \\ \text{مرکز}\ O'(۱,۰)\ \text{وسط}\ AA' \\ c = O'F = \sqrt{۵} \\ b = \sqrt{c^۲-a^۲} = ۲ \end{cases}$$

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} - \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۱} - \frac{(y-۰)^۲}{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۴(x^۲-۲x)$$

۱۳۹- گزینه‌ی «۳» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۹)*

$$A = \left[i^۲-j\right]_{۲\times۳} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AA^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|AA^t\right| = ۵\times۱۴-۱۶ = ۷۰-۱۶ = ۵۴$$

WWW.RIAZISARA.IR

۱۴۰- گزینه‌ی «۴» *(هندسه تحلیلی- صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۷)*

$$XA = A^t \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b+2c=0 \\ a-c=3 \\ 4b+3c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-4 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow x_{11}=a=9$$

۱۴۱- گزینه‌ی «۱» *(آمار و مدل سازی- صفحه‌های ۵۴ و ۱۱۶)*

فراوانی نسبی جدید در دسته اول $= 0/1125 \times \frac{80}{80+10} = 0/1$

۱۴۲- گزینه‌ی «۴» *(آمار و مدل سازی- صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱ و ۱۵۱ و ۱۵۲)*

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۷,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۲,۱۳,۱۶,۱۷,۱۷,۱۸,۲۰,۲۱

چارک اول برابر $\frac{10+11}{2} = 10/5$ و چارک سوم برابر $\frac{18+17}{2} = 17/5$ است. بنابراین داده‌هایی که در جعبه قرار دارند، عبارت است از:

۱۱,۱۲,۱۲,۱۳,۱۶,۱۷,۱۷

$$\bar{x} = \frac{11+12+12+13+16+17+17}{7} = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(\bar{x}-x_i)^2 = \frac{3^2+2^2+2^2+1^2+2^2+3^2+3^2}{7} = \frac{40}{7} \simeq 5/71$$

۱۴۳- گزینه‌ی «۱» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۸ تا ۱۵)*

فرض: $P(k): 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k}$

حکم: $\Rightarrow P(k+1): 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$

به طرفین فرض عبارت $\frac{1}{(k+1)^2}$ را اضافه می‌کنیم.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

پس کافی است ثابت شود که $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow k^2+2k+1 > k^2+k \Rightarrow k+1 > k$$

با توجه به این‌که نامساوی بدیهی فوق به صورت مستقیم در گزینه‌ها وجود ندارد تنها گزینه‌ی (۱) است که می‌تواند هم‌ارز با این نامساوی باشد، یعنی $k+2 > k+1$

۱۴۴- گزینه‌ی «۳» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)*

تعداد گوی‌های قرمز و سفید از ۶ کم‌تر است، پس باید کل این $3+5=8$ گوی را ابتدا کنار بگذاریم. سپس باید از بین ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد حداقل به تعداد $2(6-1)+1=11$ گوی خارج شود تا دست کم ۶ گوی هم‌رنگ شوند و بنابراین در کل حداقل $[2(6-1)+1]+3+5=19$ گوی باید خارج کنیم تا دست کم ۶ گوی خارج شده هم‌رنگ باشند.

۱۴۵- گزینه‌ی «۱» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۴۶ تا ۵۷)*

$$A \cap B' = B \cap A' \Rightarrow A-B = B-A$$

$$\Rightarrow A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = A-B$$

با توجه به این‌که $A-B$ زیرمجموعه‌ی A است، پس:

$$(A\Delta B)-A = (A-B)-A = \phi$$

۱۴۶- گزینه‌ی «۴» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)*

> نکته: اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد تعداد کل حالاتی که می‌توان A را به K_1 مجموعه‌ی n_1 عضوی و K_2 مجموعه‌ی n_2 عضوی و ... و K_r مجموعه‌ی n_r عضوی افراز کرد $(\sum_{i=1}^{r} K_i n_i = n)$ برابر است با:
>
> $$\frac{n!}{(n_1!)^{K_1}(n_2!)^{K_2}\ldots(n_r!)^{K_r}\,K_1!K_2!\ldots K_r!}$$
>
> و این برابر با تعداد رابطه‌های هم‌ارزی قابل تعریف بر A است.

تعداد افرازهای یک عضوی A $\rightarrow 4=4 \rightarrow \frac{4!}{4!}=1$

تعداد افرازهای دو عضوی A $\rightarrow 4=3+1=2+2$

$$\rightarrow \frac{4!}{3!\times 1!}+\frac{4!}{(2!)^2\times 2!} = 4+3 = 7$$

تعداد افرازهای سه عضوی A $\rightarrow 4=2+1+1 \rightarrow \frac{4!}{2!(1!)^2 2!}=6$

تعداد افرازهای چهار عضوی A $\rightarrow 4=1+1+1+1 \rightarrow \frac{4!}{(1!)^4 4!}=1$

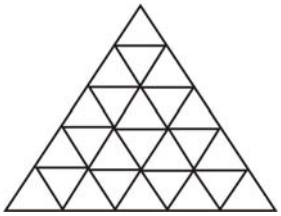
تعدا کل افرازها $=1+7+6+1=15$

WWW.RIAZISARA.IR

۱۴۷- گزینه‌ی «۱» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)*

رابطه‌ی بخش‌پذیری (که قبلاً در Z تعریف می‌شود) خاصیت تقارنی ندارد مثلاً ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است ولی ۵ بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست. پس این رابطه هم‌ارزی نیست.

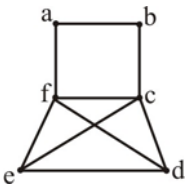
۱۴۸- گزینه‌ی «۳» *(جبر و احتمال- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۱)*



کافی است که در مثلث داده شده خطوطی مطابق شکل و به فاصله‌ی ۲ واحد از یکدیگر ترسیم کنیم که در این حالت به ۲۵ مثلث همنهشت تقسیم‌بندی می‌شود که در ناحیه‌ی سایه زده است و احتمال آن‌که نقطه در این ناحیه باشد برابر است با: $\frac{۲۱}{۲۵}=۰/۸۴$

۱۴۹- گزینه‌ی «۲» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)*

نمودار این گراف به صورت زیر است که دارای دو دور به طول ۶ است.



$a-b-c-d-e-f-a$

$a-b-c-e-d-f-a$

۱۵۰- گزینه‌ی «۲» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌ی ۳۷)*

$(۵۰ab)_۸ = b+۸a+۰+۲۵۶۰$

نزدیک‌ترین مربع عدد طبیعی فرد به حاصل عبارت فوق $۵۱^۲=۲۶۰۱$ است.

$$\Rightarrow ۸a+b+۲۵۶۰=۲۶۰۱ \Rightarrow ۸a+b=۴۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۵ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow a+b=۶$$

۱۵۱- گزینه‌ی «۴» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۷)*

$$\left.\begin{array}{l} A=۲^۳\times ۳^۴\times ۵^۳\times ۷^۲ \\ B=۲^۵\times ۳^۲\times ۵^a\times ۱۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (A,B)=۲^۳\times ۳^۲\times ۵^{Min\{a,۳\}}$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت و غیر یک (A,B) برابر ۲۳ است و پس تعداد کل مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت آن‌ها $۲۳+۱=۲۴$ تاست و بنابراین:

$$(۳+۱)(۲+۱)(Min\{a,۳\}+۱)=۲۴$$

اگر $Min\{a,۳\}=۳$ نامساوی فوق برقرار نیست پس $Min\{a,۳\}=a=۱$ و بدین ترتیب داریم:

$$B=۲^۵\times ۳^۲\times ۵\times ۱۱$$

$$[A,B]=۲^۵\times ۳^۴\times ۵^۳\times ۷^۲\times ۱۱ \quad \text{ک.م.م}$$

و تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت ک.م.م برابر است با:

$$(۵+۱)(۴+۱)(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱)=۷۲۰$$

۱۵۲- گزینه‌ی «۱» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۵)*

$$۷۲x \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲۱۶x \overset{۳۱}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(۲۱۷=۷\times ۳۱)} -x \overset{۳۱}{\equiv} ۳ \Rightarrow x \overset{۳۱}{\equiv} -۳$$

$$x=۳۱K-۳ \qquad ۹۹<۳۱K-۳\le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۲<۳۱K\le ۱۰۰۲$$

$\Rightarrow ۳<K\le ۳۲ \Rightarrow$ ۲۹ جواب صحیح برای K وجود دارد.

۱۵۳- گزینه‌ی «۳» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)*

تعداد کل رابطه‌های متقارن و پاد متقارن بر مجموعه‌ی n عضوی A برابر ۲^n است که یکی از آن‌ها تهی است پس تعداد رابطه‌های غیر تهی متقارن و پادمتقارن بر مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ برابر است با:

$$۲^۴-۱=۱۵$$

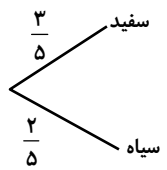
۱۵۴- گزینه‌ی «۴» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)*

$$A\subset B \Rightarrow A\cap B=A \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)$$

$$P(B\mid A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{۱-P(A)}$$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}=\frac{P(B)-P(A)}{۱-P(A)}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۵}{۸}$$

۱۵۵- گزینه‌ی «۲» *(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)*



$P(x\le ۳)=۱-P$ (هر سه آزمایش سیاه)

$$P(x\le ۳)=۱-(\frac{۲}{۵})^۳=۱-\frac{۸}{۱۲۵}=\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$

WWW.RIAZISARA.IR

فیزیک

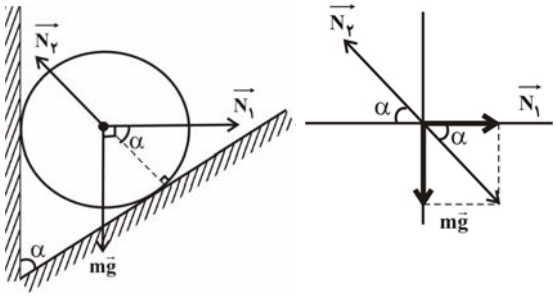
سراسری خارج از کشور ۹۰

۱۵۶- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۳۸ تا ۵۱)*

با توجه به ناچیز بودن اصطکاک به کره‌ی همگن سه نیرو وارد می‌شود و چون کره در حالت تعادل است، برایند این نیروها برابر با صفر است.

با توجه به شکل، اندازه‌ی برایند دو نیروی $\vec{N}_1$ و $m\vec{g}$ برابر با اندازه‌ی نیروی $\vec{N}_2$ و در خلاف جهت آن است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha = \frac{mg}{N_1} \Rightarrow \tan 53^\circ = \frac{80}{N_1} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{80}{N_1} \Rightarrow N_1 = 60\,N$$



با توجه به قانون سوم نیوتون، نیرویی که کره بر دیوار قائم وارد می‌کند $(\vec{N}'_1)$، هم‌اندازه‌ی نیرویی است که دیوار قائم بر کره وارد می‌کند $(\vec{N}_1)$، بنابراین:

$$\left|\vec{N}'_1\right| = \left|\vec{N}_1\right| = 60\,N$$

۱۵۷- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)*

ابتدا از بردار مکان ذره نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا بردار سرعت ذره به دست آید:

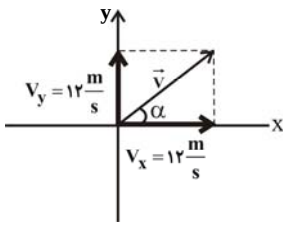
$$\vec{r} = (3t^2 - 2)\vec{i} + t^3\vec{j} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t)\vec{i} + (3t^2)\vec{j}$$

در لحظه‌ی $t = 2s$، بردار سرعت ذره برابر است با:

$$t = 2s \Rightarrow \vec{V} = 12\vec{i} + 12\vec{j}$$

بنابراین زاویه‌ای که بردار سرعت در لحظه‌ی $t = 2s$ با محور xها می‌سازد، برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{12}{12} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



۱۵۸- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)*

در لحظه‌ای که جهت حرکت گلوله عوض می‌شود، گلوله به نقطه‌ی اوج خود رسیده و بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_0}{g} \Rightarrow 2/4 = \frac{V_0}{10} \Rightarrow V_0 = 24\frac{m}{s}$$

پس از آن $3/6s$ طول می‌کشد تا گلوله از نقطه‌ی اوج به سطح زمین برسد، بنابراین سرعت گلوله در لحظه‌ی برخورد به زمین برابر است با:

$$V = -gt + V'_0 \Rightarrow V = (-10)\times(3/6) + 0 \Rightarrow V = -36\frac{m}{s}$$

چون حرکت گلوله، حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم است، بنابراین برای سرعت متوسط آن می‌توان نوشت:

$$V = \frac{V + V_0}{2} = \frac{(-36) + 24}{2} \Rightarrow \overline{V} = -6\frac{m}{s} \Rightarrow \left|\overline{V}\right| = 6\frac{m}{s}$$

۱۵۹- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۳ تا ۱۳)*

روش اول: با توجه به این که متحرک در لحظه‌ی $t = 4s$ در جهت مثبت محور xها در بیش‌ترین فاصله‌ی خود از مبدأ می‌باشد، بنابراین سرعت آن در این لحظه برابر با صفر است و می‌توان نوشت:

$$V = at + V_0 \Rightarrow 0 = a\times 4 + 3 \Rightarrow a = \frac{-3}{4}\frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادله‌ی مکان – زمان آن در لحظه‌ی t به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{4}\right)t^2 + 3t + 4$$

$$x = \frac{-3}{8}t^2 + 3t + 4$$

$$\xrightarrow{t=8s} x = \frac{-3}{8}\times 8^2 + 3\times 8 + 4 \Rightarrow x = 4\,m$$

روش دوم: همان‌طور که می‌دانیم نمودار مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت در مسیر مستقیم، به صورت یک سهمی است که نسبت به نقطه‌ی اوج (نقطه‌ای که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد) متقارن است. در این مسئله، متحرک در لحظه‌ی $t = 4s$ در جهت مثبت محور xها در بیش‌ترین فاصله‌ی خود از مبدأ قرار دارد، بنابراین در این نقطه سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت خواهد داد؛ در نتیجه متحرک در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 8s$ در یک مکان خواهد بود.

۱۶۰- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۳)*

با توجه به شکل، ارتفاع اوج هر سه گلوله یکسان است، بنابراین طبق رابطه‌ی ارتفاع اوج در حرکت پرتابی $\left(H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}\right)$ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار $(V_0 \sin\alpha)$ برای هر سه گلوله یکسان است. این مقدار سرعت گلوله‌ها در راستای قائم است، بنابراین زمان حرکت

WWW.RIAZISARA.IR

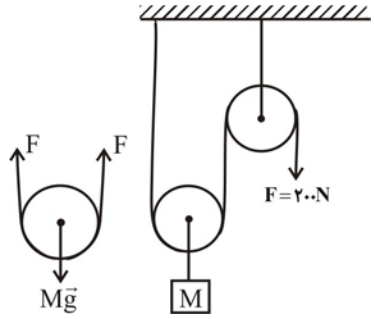
گلوله‌ها $\left(t=\frac{2(V_0 \sin\alpha)}{g}\right)$ برای هر سه گلوله یکسان است (گزینه‌ی ۱) چون از مقاومت هوا صرف نظر شده است، بنابراین اندازه‌ی سرعت گلوله‌ها در یک ارتفاع تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی اوج و بعد از آن یکسان است و در نتیجه مؤلفه‌ی قائم سرعت هر سه گلوله در لحظه‌ی برخورد به زمین نیز یکسان خواهد بود (گزینه‌ی ۳) با توجه به این که بُرد گلوله‌ی (۳) از بقیه‌ی گلوله‌ها بیش‌تر است، بنابراین مؤلفه‌ی سرعت اولیه‌ی گلوله در راستای افقی که در کل مسیر ثابت است، برای گلوله‌ی (۳) از بقیه‌ی گلوله‌ها بیش‌تر است (نادرستی گزینه‌ی ۴) و در نتیجه در نقطه‌ی اوج که سرعت گلوله‌ها برابر با مؤلفه‌ی افقی سرعت اولیه‌ی آن‌ها است، سرعت گلوله‌ی ۳ بیش‌تر است (گزینه‌ی ۲).

۱۶۱- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۳۸ تا ۵۱)*

چون از جرم نخ و قرقره‌ها صرف‌نظر شده است، قرقره‌ی ثابت فقط جهت نیروی $\vec{F}$ را تغییر می‌دهد. اگر نیروهای وارد بر قرقره‌ی متحرک را رسم کنیم، با استفاده از قانون دوم نیوتون، می‌توان نوشت:

$$\sum F = Ma \Rightarrow 2F - Mg = Ma$$

$$\Rightarrow 2F = M(a+g) \Rightarrow M = \frac{2F}{a+g} = \frac{2\times 200}{2+10} \Rightarrow M = \frac{100}{3}\,kg$$



۱۶۲- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۸)*

با استفاده از رابطه‌ی اندازه‌ی برایند دو بردار، می‌توان نوشت:

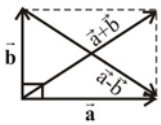
$$\vec{C} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

$$\Rightarrow 12/5^2 = 10^2 + 7/5^2 + 2\times 10\times 7/5\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین زاویه‌ی بین دو بردار، با اندازه‌های ۷/۵ و ۱۰ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است، در نتیجه، اندازه‌ی برایند و تفاضل دو بردار با هم برابر است و می‌توان نوشت:



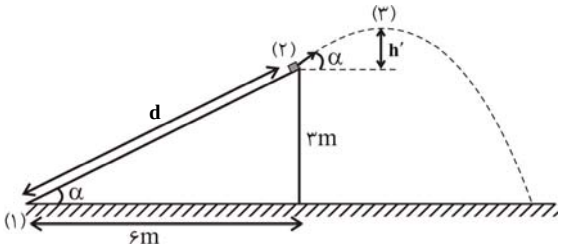
$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 12/5$ واحد

۱۶۳- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۳)*

اگر به گزینه‌ها نگاه کنیم مشاهده می‌شود که تمام اعداد آن بزرگ‌تر از ۳۰۰cm است، بنابراین با درنظر گرفتن این که مطابق شکل، بیش‌ترین ارتفاعی که جسم روی سطح شیب‌دار می‌تواند از سطح زمین داشته باشد، برابر با ۳۰۰cm است، می‌توان نتیجه گرفت پس از پرتاب جسم روی سطح شیب‌دار، جسم تا بالای آن حرکت کرده و در این نقطه سرعت آن صفر نشده و هنوز سرعت دارد، بنابراین در این نقطه جسم یک حرکت پرتابی را آغاز می‌کند.

ابتدا سرعت جسم را در انتهای سطح شیب‌دار (نقطه‌ی ۲) به دست می‌آوریم. طبق قانون پایستگی انرژی، تغییرات انرژی مکانیکی جسم برابر با کار نیروی اصطکاک است، بنابراین:

$$E_2 - E_1 = W_f$$



$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}mV_2^2 + mgh\right) - \left(\frac{1}{2}mV_1^2 + 0\right) = -\mu_k\, mg(d\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}V_2^2 + 10\times 3\right) - \frac{1}{2}\times 12^2 = -0/5\times 10\times 6 \Rightarrow V_2 = \sqrt{24}\,\frac{m}{s}$$

از نقطه‌ی (۲)، جسم یک حرکت پرتابی با سرعت اولیه‌ی V_2 و زاویه‌ی α نسبت به سطح افق را آغاز می‌کند، بنابراین ارتفاع اوج گلوله از نقطه‌ی (۲) برابر است با:

$$h' = \frac{V_{2y}^2}{2g} = \frac{(V_2\sin\alpha)^2}{2g} = \frac{24\times\frac{3^2}{6^2+3^2}}{2\times 10} = \frac{24\times\frac{1}{5}}{20} = 0/24\,m$$

$$\Rightarrow h' = 24\,cm$$

بنابراین بیشینه ارتفاع گلوله از سطح زمین برابر است با:

$$H = h + h' = 300 + 24 \Rightarrow H = 324\,cm$$

۱۶۴- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۶۴ تا ۷۳)*

نیرویی که باعث حرکت دایره‌ای یکنواخت ماهواره به دور سطح زمین می‌شود، نیروی گرانش است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{mV^2}{R_e + h} = G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2} \Rightarrow V^2 = \frac{GMe}{(R_e+h)} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$g = G\frac{Me}{R_e^2} \Rightarrow GMe = gR_e^2 \quad (2)$$

WWW.RIAZISARA.IR

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{(1),(2)} V = R_e\sqrt{\frac{g}{(R_e+h)}} = 6400\times10^3\sqrt{\frac{9/8}{(6400+800)\times10^3}}$$

$$= 6400\times10^3\times\sqrt{\frac{9/8}{7/2\times10^6}} \Rightarrow 6400\times\sqrt{\frac{49}{36}} \Rightarrow V = \left(\frac{7}{6}\times6400\right)\frac{m}{s}$$

دقت کنید سرعت ماهواره برحسب کیلومتر بر ساعت خواسته شده است، بنابراین:

$$V = \frac{7}{6}\times6400\times3/6 = 640\times42 \Rightarrow V = 26880\frac{km}{h}$$

۱۶۵- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۵)*

با استفاده از تعریف تکانه و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$K = \frac{1}{2}mV^2 \xrightarrow{P=mV} K = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow \frac{K_B}{K_A} = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^2\times\frac{m_A}{m_B}$$

$$\xrightarrow[m_B=3m_A]{P_A=P_B,\,K_A=18J} \frac{K_B}{18} = 1^2\times\frac{1}{3} \Rightarrow K_B = 6J$$

۱۶۶- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک دوم ، صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۶)*

ابتدا جرم آب ورودی را حساب می‌کنیم.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = 1000\times10^5 \Rightarrow m = 10^8\,kg$$

بنابراین افزایش دمای آب برابر است با:

$$Q = mC\Delta\theta \Rightarrow 2100\times10^9 = 10^8\times4200\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 5^\circ$$

$$\theta_2-\theta_1 = 5 \Rightarrow \theta_2 - 25 = 5 \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ C$$

۱۶۷- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک دوم ، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲ و ۱۶۴ تا ۱۶۸)*

روش اول: با استفاده از رابطه‌ی انبساط خطی، داریم:

$$\Delta L = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{0/1}{100}L_1 = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \alpha\Delta\theta = \frac{0/1}{100}\quad(1)$$

بنابراین حجم میله دراین دما برابر است با:

$$\xrightarrow{(1)} V_2 = V_1(1+3\alpha\Delta\theta) \Rightarrow V_2 = V_1\left(1+\frac{0/3}{100}\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = 1/003V_1\quad(2)$$

در نتیجه با استفاده از تعریف چگالی و در نظر گرفتن این نکته که جرم میله‌ی فلزی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{m}{1/003V_1} \Rightarrow \rho_2 = \frac{\rho_1}{1/003}$$

بنابراین درصد تغییرات چگالی میله برابر است با:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1}\times100 = \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\times100 = \frac{\frac{\rho_1}{1/003}-\rho_1}{\rho_1}\times100$$

$$= \frac{-0/3}{1/003} \simeq -(\%0/3)$$

بنابراین چگالی میله تقریباً ۰/۳ درصد کاهش می‌یابد.

روش دوم: $\Delta L = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{0/1}{100}L_1 = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \alpha\Delta\theta = \frac{0/1}{100}\quad(1)$

$$\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta\theta \xrightarrow{(1)} \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{0/3}{100}\quad(2)$$

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow[\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}]{m\ \text{ثابت است.}} d\rho = -m\frac{dV}{V^2}$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{V}=\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

با تقریب می‌توان دیفرانسیل را به دلتا (تغییرات) تبدیل کرد، بنابراین:

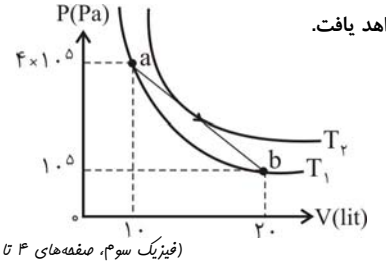
$$d \to \Delta \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} \simeq -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{درصد تغییرات}: \frac{\Delta\rho}{\rho}\times100 = -\frac{\Delta V}{V}\times100$$

$$\xrightarrow{(2)} \text{درصد تغییرات}: \frac{-0/3}{100}\times100 = -(\%0/3)$$

۱۶۸- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۹ تا ۱۷)*

با توجه به نمودار ملاحظه می‌شود که برای مقدار معینی گاز کامل $P_aV_a = P_bV_b$ است، بنابراین حالت‌های a و b روی یک نمودار هم‌دما قرار دارند. $(T_1 = T_a = T_b)$ اگر نمودار هم‌دمای دیگری را مماس بر مسیر فرایند ab رسم کنیم مشاهده می‌شود که چون نمودار هم‌دمای T_2 بالای نمودار هم‌دمای T_1 رسم شده است پس $T_2 > T_1$ است و بنابراین طی فرایند ab دمای گاز ابتدا افزایش و سپس کاهش خواهد یافت.



۱۶۹- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۴ تا ۶)*

با استفاده از معادله‌ی حالت گازهای کامل، می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{8\times10^5\times15\times10^{-3}}{8\times(273-23)} = \frac{1500}{250}$$

$$\Rightarrow n = 6\,mol$$

با توجه به این که در هر مول به تعداد عدد آووگادرو ذره وجود دارد، بنابراین تعداد مولکول‌های گاز کامل دو اتمی در ۶ مول برابر با $6\times6\times10^{23} = 3/6\times10^{24}$ مولکول است.

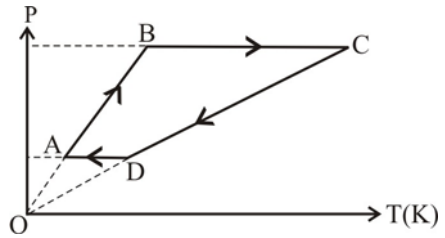
۱۷۰- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۹ تا ۱۷)*

چون در نمودار P-T، امتداد فرایندهای AB و CD که خط راست هستند، از مبدأ مختصات عبور می‌کند، طبق رابطه‌ی $P = \frac{nR}{V}T$، حجم گاز طی این دو فرایند ثابت است و بنابراین این دو فرایند هم حجم هستند و همان‌طور که می‌دانیم در فرایندهای هم‌حجم کاری بین گاز و محیط مبادله نمی‌شود، بنابراین $W_{AB} = W_{CD} = 0$ خواهد بود. (گزینه‌ی ۱). از طرفی چون در فرایندهای هم‌حجم در نمودار $P-T$، شیب نمودار با حجم گاز نسبت عکس دارد، بنابراین

WWW.RIAZISARA.IR

$V_{CD} > V_{AB}$ خواهد بود. برای گرمای مبادله شده در طی این دو فرایند هم‌حجم، می‌توان نوشت:

$$Q_V = nC_{MV}(T_2 - T_1) \Rightarrow Q_V = \frac{C_{MV}}{R} V (P_2 - P_1)$$



چون $|P_2 - P_1|$ در هر دو فرایند یکسان و $V_{CD} > V_{AB}$ است، بنابراین $|Q_{CD}| > Q_{AB}$ است. (گزینه‌ی ۳).

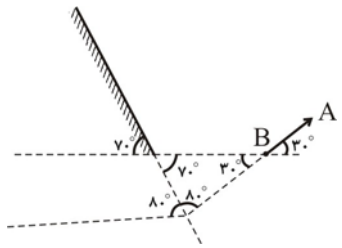
فرایندهای BC و DA هم‌فشار هستند، برای گرمای مبادله شده، طی این دو فرایند، می‌توان نوشت:

$$Q_P = nC_{MP}(T_2 - T_1) \Rightarrow Q_P = \frac{C_{MP}}{R} P (V_2 - V_1)$$

چون $|V_2 - V_1|$ در هر دو فرایند یکسان، و $P_{BC} > P_{DA}$ است، بنابراین $Q_{BC} > |Q_{DA}|$ است. (گزینه‌ی ۲).

در فرایندهای هم‌فشار، رابطه‌ی $Q = \frac{-C_{MP}}{R} W$ بین کار و گرمای مبادله شده برقرار است، بنابراین در دو فرایند هم‌فشار BC و DA با توجه به این‌که $Q_{BC} > |Q_{DA}|$ است می‌توان نتیجه گرفت: $|W_{BC}| > W_{DA}$ است (گزینه‌ی ۴)

۱۷۱- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک اول، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)*



با توجه به شکل، زاویه‌ی بین امتداد شیء و امتداد سطح آینه برابر با ۸۰° است. با توجه به برابری زاویه‌ی بین امتداد جسم با امتداد سطح آینه و زاویه‌ی بین امتداد تصویر با امتداد سطح آینه، بنابراین زاویه‌ی بین امتداد جسم وتصویرش $۲ \times ۸۰^\circ = ۱۶۰^\circ$ خواهد بود.

۱۷۲- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک اول، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۱۶)*

در آینه‌های کروی محدب (کوژ)، تصویر، مستقیم، کوچک‌تر، مجازی و در فاصله‌ی کانونی تشکیل می‌شود و هرچه جسم به آینه نزدیک‌تر باشد، تصویر مجازی آن نیز به آینه نزدیک‌تر است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{-1}{f} \Rightarrow q = \frac{pf}{p+f} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = ۶۰cm \Rightarrow q_1 = \frac{۶۰f}{۶۰+f} & (۱) \\ p_2 = ۲۰cm \Rightarrow q_2 = \frac{۲۰f}{۲۰+f} & (۲) \end{cases}$$

$$q_1 - q_2 = ۵cm \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۶۰f}{۶۰+f} - \frac{۲۰f}{۲۰+f} = ۵$$

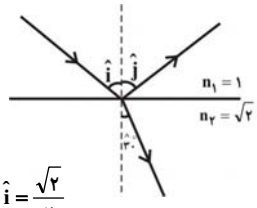
$$\Rightarrow ۷f^۲ - ۸۰f - ۱۲۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow f = \frac{۴۰ \pm ۱۰۰}{۷} \Rightarrow f = ۲۰cm \Rightarrow r = ۲f = ۲ \times ۲۰$$

$$\Rightarrow r = ۴۰cm$$

۱۷۳- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک اول، صفحه‌های ۹۳ تا ۹۶ و ۱۲۳ تا ۱۲۸)*

مطابق شکل زیر و با استفاده از رابطه‌ی شکست، می‌توان نوشت:



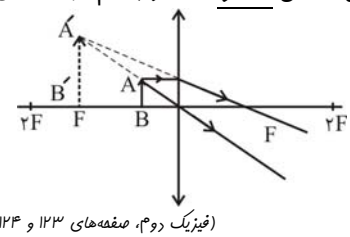
$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin \hat{i}}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} \Rightarrow \sin \hat{i} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow i = ۴۵^\circ$$

با توجه به برابری زاویه‌ی تابش و بازتاب، بنابراین $\hat{j} = \hat{i} = ۴۵^\circ$ است و در نتیجه زاویه‌ی بین پرتوی تابش و پرتوی بازتاب برابر با $\hat{i} + \hat{j} = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$ خواهد بود.

۱۷۴- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک اول، صفحه‌های ۱۴۳ تا ۱۵۶)*

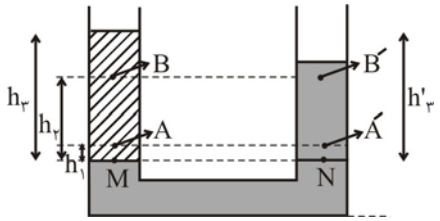
چون فاصله‌ی جسم از تصویرش با فاصله‌ی جسم از عدسی برابر است، بنابراین جسم بین تصویر و عدسی قرار دارد و در نتیجه تصویر حاصل از جسم توسط عدسی در سمت جسم تشکیل شده است و بنابراین تصویر مجازی خواهد بود. از طرفی چون $q = p + p = ۲p$ است، بنابراین بنا به رابطه‌ی بزرگ‌نمایی خطی، $m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{q}{p} = ۲$ خواهد بود و چون تصویر مجازی بزرگ‌تر از جسم است، بنابراین عدسی همگرا است و جسم در فاصله‌ی کانونی آن قرار دارد.



۱۷۵- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک دوم، صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴)*

در بین مولکول‌های هر ماده مثلاً در فاز مایع، یک نیروی ربایشی وجود دارد که نیروی چسبندگی نامیده می‌شود. این نیرو مولکول‌های ماده را متصل به یکدیگر نگاه می‌دارد. وقتی مولکول‌ها به هم بسیار نزدیک می‌شوند، یک نیروی رانشی قوی بین آن‌ها ایجاد می‌شود که از نزدیک شدن بیش‌تر آن‌ها جلوگیری می‌کند. دقت کنید این توضیحات برای فازهای دیگر ماده نیز معتبر است ولی با توجه به عوامل دیگری که وجود دارند، ماده حالت‌های مختلفی را به خود خواهد گرفت.

۱۷۶- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک دوم، صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۸)*



با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، می‌توان نوشت:

$$P_M = P_N \Rightarrow \begin{cases} P_A + \rho_1 g h_1 = P_{A'} + \rho_2 g h_1 \Rightarrow P_A - P_{A'} \\ = (\rho_2 - \rho_1) g h_1 \Rightarrow \Delta P_1 = (\rho_2 - \rho_1) g h_1 \quad (1) \\ P_B + \rho_1 g h_2 = P_{B'} + \rho_2 g h_2 \Rightarrow P_B - P_{B'} \\ = (\rho_2 - \rho_1) g h_2 \Rightarrow \Delta P_2 = (\rho_2 - \rho_1) g h_2 \quad (2) \end{cases}$$

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 g h_3 = \rho_2 g h'_3 \xrightarrow{h_3 > h'_3} \rho_1 < \rho_2$$

$$\Rightarrow \rho_2 - \rho_1 > 0 \qquad (3)$$

با توجه به این که $h_2 > h_1$ است، از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $\Delta P_2 > \Delta P_1$

۱۷۷- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک دوم، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)*

ابتدا حجم گلوله‌ی آهنی را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V_{\text{گلوله}} = \frac{m_{\text{گلوله}}}{\rho_{\text{گلوله}}} = \frac{3900 \times 10^{-3}}{7800} = 0/5 \times 10^{-3}\, m^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{گلوله}} = 0/5\, lit$$

بعد از فرو بردن گلوله‌ی آهنی به آرامی در ظرف پُر از الکل، به اندازه‌ی حجم گلوله الکل از ظرف خارج می‌شود، بنابراین:

$$V_{\text{الکل}} = V_{\text{گلوله}} = 0/5\, lit$$

جرم این مقدار الکل برابر است با:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m_{\text{الکل}} = \rho_{\text{الکل}} \times V_{\text{الکل}} = 800 \times 0/5 \Rightarrow m_{\text{الکل}} = 400\, g$$

نکته‌ی ۱: به واحدهای داده شده برای اعداد دقت کنید.

نکته‌ی ۲: لیتر واحد حجم است و معمولاً برای مایعات به کار می‌رود، ولی ما در این‌جا حجم گلوله‌ای آهنی را برای سادگی در مراحل بعدی برحسب لیتر نوشته‌ایم.

۱۷۸- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۴۲ تا ۶۰)*

ابتدا با توجه به علامت بارها جهت نیروهای وارد بر بار q_2 و سپس با استفاده از قانون کولن، بزرگی آن‌ها را حساب می‌کنیم.

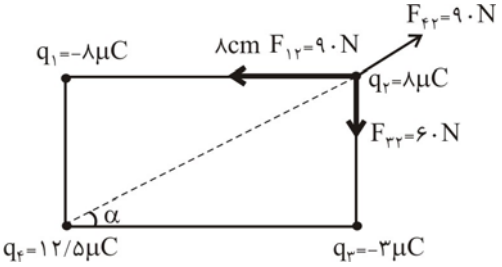
$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-6}}{(0/08)^2} \Rightarrow F_{12} = 90\, N$$

$$F_{32} = k\frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-6}}{(0/06)^2} \Rightarrow F_{32} = 60\, N$$

$$r_{42}^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow r_{42}^2 = 10^2\, (cm)^2$$

$$F_{42} = k\frac{q_4 q_1}{r_{42}^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{12/5 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-6}}{(0/1)^2}$$

$$\Rightarrow F_{42} = 90\, N$$



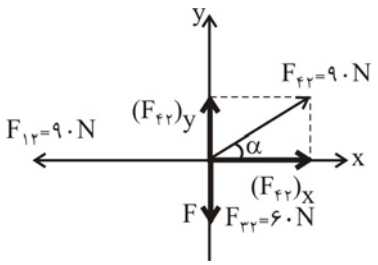
از طرفی با توجه به شکل داریم:

$$\cos\alpha = \frac{8}{10}\ ,\ \sin\alpha = \frac{6}{10}$$

با تجزیه‌ی نیروی F_{42} در دو راستای عمود بر هم x و y، داریم:

$$(F_{42})_x = F_{42}\cos\alpha = 90 \times \frac{8}{10} = 72\, N$$

$$(F_{42})y = F_{42}\sin\alpha = 90 \times \frac{6}{10} = -54\, N$$



بنابراین در دو راستای x و y داریم:

$$F_x = -F_{12} + (F_{42})_x = -90 + 72 \Rightarrow F_x = -18\, N$$

$$F_y = (F_{42})_y - F_{32} = 54 - 60 \Rightarrow F_y = 6\, N$$

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = 6\sqrt{10}$$

۱۷۹- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۳۰)*

ابتدا مقاومت معادل دو مقاومت موازی را به دست می‌آوریم:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} \Rightarrow R_T = 20\,\Omega$$

طبق صورت سؤال، توان تلف شده در خارج از مولد، ۳ برابر توان تلف شده در مولد است، یعنی:

$$\frac{R_T I^2}{r I^2} = 3 \Rightarrow r = \frac{R_T}{3} \Rightarrow r = \frac{20}{3}\,\Omega$$

WWW.RIAZISARA.IR

شدت جریان اصلی مدار برابر است با:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{۴۰}{۲۰+\frac{۲۰}{۳}}\Rightarrow I=\frac{۳}{۲}A$$

بنابراین جریان عبوری از مقاومت $R_۱=۳۰\Omega$ برابر است با:

$$I_۱=\frac{R_۲}{R_۱+R_۲}I=\frac{۶۰}{۳۰+۶۰}\times\frac{۳}{۲}\Rightarrow I_۱=۱A$$

و توان مصرفی مقامت $R_۱=۳۰\Omega$ برابر است با:

$$P_۱=R_۱I_۱^۲=۳۰\times۱^۲\Rightarrow P_۱=۳۰W$$

۱۸۰- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)*

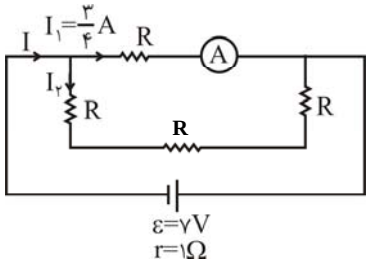
با استفاده از رابطه‌ی بین مقاومت الکتریکی یک سیم با ویژگی‌های فیزیکی آن، می‌توان نوشت:

$$R=\rho\frac{l}{A}=\rho\frac{l}{\frac{\pi D^۲}{۴}}\Rightarrow\frac{R_B}{R_A}=\frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{l_B}{l_A}\times\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^۲$$

$$\xrightarrow[l_A=\frac{۱}{۴}l_B,\ R_A=۵\Omega]{\rho_B=\rho_A,\ D_A=۲D_B}\frac{R_B}{۵}=۱\times\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}\times۲^۲\Rightarrow R_B=۸۰\Omega$$

۱۸۱- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۳۰)*

وقتی کلید $K_۱$ بسته و کلید $K_۲$ باز است، مدار به صورت زیر است در این حالت می‌توان نوشت:

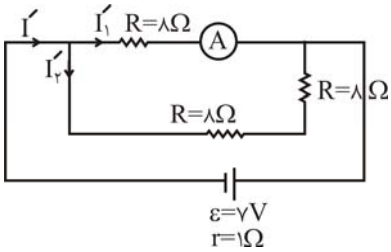


$$I_۱=\frac{۳R}{R+۳R}I\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}I\Rightarrow I=۱A$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}\Rightarrow۱=\frac{۷}{R_T+۱}\Rightarrow R_T=۶\Omega$$

$$R_T=\frac{R\times۳R}{R+۳R}\Rightarrow۶=\frac{۳}{۴}R\Rightarrow R=۸\Omega$$

وقتی هر دو کلید $k_۱$ و $k_۲$ بسته شوند، دو سر مقاومت R که بین دو شاخه واقع است، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



در این حالت می‌توان نوشت:

$$R'_T=\frac{۸\times۱۶}{۸+۱۶}\Rightarrow R'_T=\frac{۱۶}{۳}\Omega$$

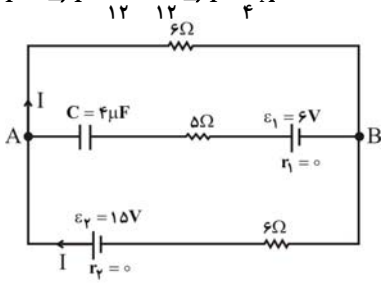
$$I'=\frac{\varepsilon}{R'_T+r}=\frac{۷}{\frac{۱۶}{۳}+۱}\Rightarrow I'=\frac{۲۱}{۱۹}A$$

$$I'_۱=\frac{۱۶}{۸+۱۶}I'=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۱}{۱۹}\Rightarrow I'_۱=\frac{۱۴}{۱۹}A$$

۱۸۲- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۳۰)*

پس از مدت زمانی، از شاخه‌ای که در آن خازن قرار گرفته است، جریان الکتریکی مستقیم عبور نمی‌کند، بنابراین جریان اصلی مدار برابر است با:

$$\varepsilon_۲-۶I-۶I=۰\Rightarrow I=\frac{\varepsilon_۲}{۱۲}=\frac{۱۵}{۱۲}\Rightarrow I=\frac{۵}{۴}A$$



اگر از نقطه‌ی A و در جهت ساعتگرد حرکت کنیم، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

$$V_A-۶I=V_B\Rightarrow V_A-V_B=۶I=۶\times\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow V_A-V_B=۷/۵V\ \ (۱)$$

از طرفی در شاخه‌ی وسطی، می‌توان نوشت:

$$V_B+\varepsilon_۱-۰+V_C=V_A\Rightarrow V_A-V_B=\varepsilon_۱+V_C$$

$$\xrightarrow{(۱)}۷/۵=۶+V_C\Rightarrow V_C=۱/۵V$$

بنابراین بار الکتریکی ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$q=CV_C=۴\times۱/۵\Rightarrow q=۶\mu C$$

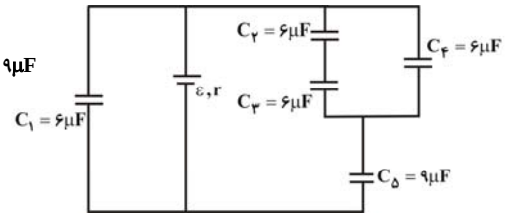
۱۸۳- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۵)*

دو سر خازن $C_۱$ به دو سر مولد متصل است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر با ε است. ($V_۱=\varepsilon$)

از طرفی داریم:

$$C_{۲,۳}=\frac{۶}{۲}=۳\mu F$$

$$C_{۲,۳,۴}=۳+۶=۹\mu F$$



چون دو سر مجموعه خازن‌های مساوی و متوالی $C_{2,3,4}$ و C_5 به دو سر مولد متصل است، پس $V_{2,3,4}=\frac{\varepsilon}{2}$ خواهد بود.

از طرفی خازن C_4 با $C_{2,3}$ موازی است، بنابراین $V_{2,3}=\frac{\varepsilon}{2}$ خواهد شد و چون خازن‌های C_2 و C_3 متوالی و مساوی هستند، بنابراین $V_2=\frac{V_{2,3}}{2}=\frac{\varepsilon}{4}$ خواهد بود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$q=CV\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=\frac{C_1}{C_2}\times\frac{V_1}{V_2}=\frac{6}{6}\times\frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{4}}\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=4$$

۱۸۴- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۶)*

چون دو قطب مماس بر صفحه‌ی کاغذ، قطب هم‌نام هستند (قطب N) بنابراین خطوط تشکیل شده از براده‌های آهن که همان خطوط مغناطیسی هستند، به همدیگر برخورد نمی‌کنند (گزینه‌های ۱ و ۴) و چون باید یکدیگر را دفع کنند، بنابراین شکل خط‌های میدان در گزینه‌ی (۴) به درستی میدان مغناطیسی ناشی از این دو آهنربا را نشان می‌دهد.

۱۸۵- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۶۲)*

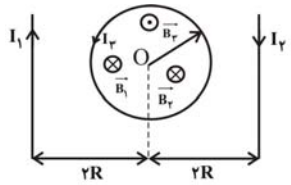
با توجه به قاعده‌ی دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان سیم‌های مستقیم در مرکز حلقه، درون سو و جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان حلقه در مرکز برون‌سو است. بنابراین باید بزرگی آن‌ها را تعیین کرد تا بتوان جهت میدان مغناطیسی برایند را در مرکز حلقه تعیین نمود.

با توجه به این که جریان سیم‌های راست و فاصله‌ی آن‌ها از مرکز حلقه یکسان است، بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان آن‌ها یکسان و برابر است با:

$$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi(2R)}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$\text{میدان درون‌سوی برایند}=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\quad\otimes\quad(1)$$

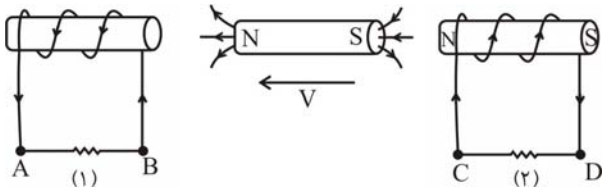
$$\text{میدان برون‌سوی برایند}=B_3=\frac{\mu_0 I}{2R}\quad\odot\quad(2)$$



چون مخرج کسر (۱) بزرگ‌تر از مخرج کسر (۲) است، پس کسر (۲) بزرگ‌تر از کسر (۱) خواهد بود و بنابراین میدان مغناطیسی برایند در مرکز حلقه برون‌سو خواهد شد.

۱۸۶- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۸۶ تا ۱۸۸)*

مطابق شکل زیر، با نزدیک شدن آهنربا به سیملوله‌ی (۱) شار درون‌سوی عبوری از آن افزایش یافته و بنابراین طبق قانون لنز، جریان القایی در جهتی در آن القا می‌شود که سمت راست سیملوله‌ی (۱) قطب N القا شود و بنابراین جهت جریان القایی در سیملوله‌ی (۱) از A به B خواهد بود.



با دور شدن آهنربا از سیملوله‌ی (۲)، شار برون‌سوی عبوری از آن کاهش یافته و بنابراین طبق قانون لنز، جریان القایی در جهتی در آن القا می‌شود که سمت چپ سیملوله‌ی (۲) قطب N القا شود و بنابراین جهت جریان القایی در سیملوله‌ی (۲) از D به C خواهد بود.

۱۸۷- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک سوم، صفحه‌های ۱۹۶ تا ۱۹۹)*

ابتدا معادله‌ی شار عبوری از سیملوله را می‌نویسیم. از روی نمودار داریم:

$$T=0/02s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/02}\Rightarrow\omega=100\pi\frac{rad}{s}$$

$$\Phi=\Phi_{max}\sin(\omega t+\pi)=\Phi_{max}\sin(100\pi t+\pi)$$

$$\Rightarrow\Phi=-0/02\sin(100\pi t)$$

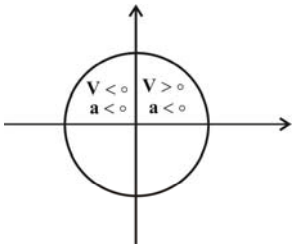
با استفاده از قانون القای فارادی، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}=-50\frac{d}{dt}(-0/02\sin(100\pi t))$$

$$\Rightarrow\varepsilon=100\pi\cos(100\pi t)$$

۱۸۸- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش، صفحه‌های ۷۸ تا ۹۱)*

روش اول: با استفاده از دایره‌ی مرجع، در لحظه‌ای که سرعت نوسانگر از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، نوسانگر از ربع اول وارد ربع دوم می‌شود و چون همواره جهت شتاب به سمت مرکز نوسان است، پس علامت شتاب نوسانگر که منفی است، منفی باقی می‌ماند.



WWW.RIAZISARA.IR

روش دوم:

شتاب برابر با تغییرات سرعت نسبت به زمان است و چون حرکت نوسانی یک حرکت در مسیر مستقیم است، بنابراین می‌توان به جای استفاده از رابطه‌ی برداری، از رابطه‌ی نرده‌ای استفاده کرد و فقط با توجه به جهت مثبت، علامت سرعت و شتاب را در نظر گرفت. بنابراین برای لحظه‌ای که علامت سرعت از مثبت به منفی تبدیل می‌شود، می‌توان نوشت:

$$a=\frac{V_2-V_1}{\Delta t}\xrightarrow[V_1>0]{V_2<0} a<0$$

۱۸۹- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک پیش۱، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)*

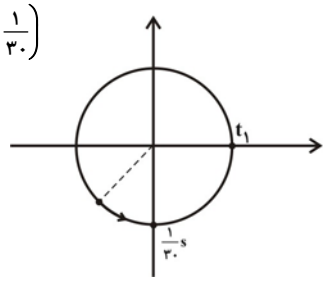
با توجه به نمودار داده شده، مشاهده می‌شود که بعد از گذشت زمان $\frac{1}{5}s$ از شروع حرکت، نوسانگر برای اولین‌بار به حالت اولیه‌ی خود (مکان و سرعت در شروع حرکت) بازگشته است، بنابراین $T=\frac{1}{5}s$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}\Rightarrow \omega=10\pi\frac{rad}{s}$$

با توجه به دایره‌ی مرجع، در لحظه‌ی $t=\frac{1}{30}s$، فاز نوسانگر برابر با $\frac{3\pi}{2}rad$ و در لحظه‌ی t_1 فاز نوسانگر برابر $2\pi rad$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta\varphi=\omega\Delta t\Rightarrow(2\pi-\frac{3\pi}{2})=10\pi\left(t_1-\frac{1}{30}\right)$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1}{12}s$$



۱۹۰- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)*

با استفاده از رابطه‌ی بین سرعت انتقال امواج عرضی با عوامل محیطی، داریم:

$$V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{\frac{m}{L}}}=\sqrt{\frac{10}{\frac{4\times10^{-3}}{1}}}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{10^4}{4}}$$

$$\Rightarrow V=50\frac{m}{s}$$

۱۹۱- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۳)*

ابتدا طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\omega=2\pi f\Rightarrow 40\pi=2\pi f\Rightarrow f=20Hz$$

$$V=\lambda f\Rightarrow\lambda=\frac{V}{f}=\frac{5}{20}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}m=25cm$$

حال فاصله‌ی دو موج از نقطه‌ی مورد نظر را بر حسب طول موج می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}d_1=12/5cm=\frac{\lambda}{2}\\ d_2=50cm=2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\delta=d_2-d_1=2\lambda-\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\delta=3\frac{\lambda}{2}$$

چون اختلاف راه دو موج تا نقطه‌ی M مضرب فردی از نصف طول موج است، بنابراین تداخل امواج در آن نقطه ویرانگر است.

۱۹۲- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۱، صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۱)*

روش اول:

معادله‌ی این موج به صورت: $U_y=A\sin(\omega t+kx+\varphi_0)$ است. برای به دست آوردن فاز اولیه‌ی نقطه‌ی $x=0$ داریم:

$$x=0,t=0\Rightarrow -4\sqrt{3}=8\sin(\varphi_0)\Rightarrow\sin\varphi_0=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi_0=\frac{5\pi}{3}rad & \text{غ.ق.ق}\\ \varphi_0=\frac{4\pi}{3}rad & \text{ق.ق}\end{cases}$$

با توجه به جهت حرکت، چون نقطه‌ی $x=0$ در حال نزدیک شدن به نقطه‌ی میانی است، پس در ربع سوم قرار دارد و $\varphi_0=\frac{4\pi}{3}rad$ قابل قبول است. از طرفی داریم:

$$\Delta\varphi=k\Delta x\Rightarrow(2\pi-\frac{4\pi}{3})=k\times2\Rightarrow k=\frac{\pi}{3}\frac{rad}{m}$$

$$\Rightarrow V=\frac{\omega}{k}\Rightarrow 12=\frac{\omega}{\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

بنابراین مکان نقطه‌ی $x=0$ بعد از گذشتن $t=\frac{1}{12}s$ برابر خواهد بود با:

$$x=0\Rightarrow y=A\sin(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow y=8\sin(4\pi t+\frac{4\pi}{3})\xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}$$

$$y=8\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})\Rightarrow y=-4\sqrt{3}cm$$

در نتیجه گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

روش دوم: چون موج با سرعت $12\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند، پس از گذشت زمان $t=\frac{1}{12}s$ به اندازه‌ی $1m$ به طرف چپ جابه‌جا می‌شود. با توجه به شکل نصف طول موج بزرگ‌تر از $2m$ است، پس $1m$ جابه‌جایی موج به سمت چپ کم‌تر از $\frac{\lambda}{4}$ خواهد بود و در گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که در آن موج کم‌تر از $\frac{\lambda}{4}$ به سمت چپ جابه‌جا شده است، گزینه‌ی (۱) است.

WWW.RIAZISARA.IR

۱۹۳- گزینه‌ی «۴» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۵۸ تا ۱۶۳)*

با توجه به رابطه‌ی تراز شدت صوت بر حسب دسی‌بل، می‌توان نوشت:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

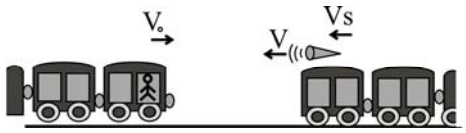
از طرفی شدت صوت در یک نقطه با مربع فاصله‌ی آن نقطه از منبع صوت نسبت عکس دارد، بنابراین:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 20\log\frac{r_1}{r_2}$$

$$\Rightarrow \beta_2 - 80 = 20\log\frac{10}{40} = 20\log 2^{-2} = -40\log 2$$

$$\xrightarrow{\log 2 = 0/3} \beta_2 - 80 = (-40)\times 0/3 \Rightarrow \beta_2 = 68\,dB$$

۱۹۴- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۶۳ تا ۱۶۸)*



با استفاده ازرابطه‌ی اثر دوپلر، داریم:

$$\frac{f_0}{\vec{V} - \vec{V}_0} = \frac{f_s}{\vec{V} - \vec{V}_s}$$

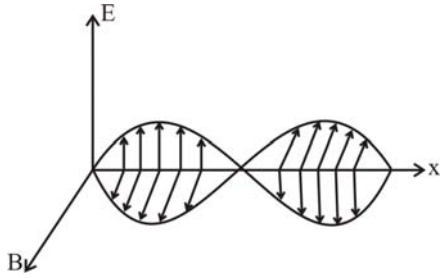
$$\Rightarrow \frac{f_0}{V + V_0} = \frac{f_s}{V - V_s} \Rightarrow \frac{f_0}{340 + 40} = \frac{500}{340 - 40}$$

$$\Rightarrow f_0 = 380 \times \frac{5}{3}\,Hz$$

$$\lambda_0 = \frac{V + V_0}{f_0} = \frac{340 + 40}{380 \times \frac{5}{3}} \Rightarrow \lambda_0 = 0/6\,m$$

۱۹۵- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)*

امواج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی نوسانی عمود بر هم تشکیل شده است که در راستای عمود بر صفحه‌ای که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در آن نوسان می‌کند، در حال حرکت است. این دو میدان نوسانی، هم‌فاز هستند یعنی هم‌زمان با هم به نقطه‌ی بیشینه و هم‌زمان با هم به نقطه‌ی کمینه می‌رسند.



۱۹۶- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۸۱ تا ۱۸۵)*

با استفاده از رابطه‌ی آزمایش یانگ داریم:

$$x_{n_1} = x_{m_2} \Rightarrow \frac{n_1\lambda_1 D}{a} = \frac{(2m_2 - 1)\lambda_2 D}{2a} \xrightarrow[m_2=4]{n_1=5}$$

$$10\lambda_1 = 7\lambda_2 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{7}{10}$$

۱۹۷- گزینه‌ی «۲» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۰۵)*

از رابطه‌ی فوتوالکتریک اینشتین در هر حالت استفاده می‌کنیم.

$$K_{max_1} = hf_1 - W_0 \Rightarrow 2 = hf_1 - W_0 \Rightarrow hf_1 = 2 + W_0 \quad (1)$$

$$K_{max_2} = hf_2 - W_0 \xrightarrow{f_2 = 2f_1} 6 = 2hf_1 - W_0$$

$$\xrightarrow{(1)} 6 = 2(2 + W_0) - W_0 \Rightarrow W_0 = 2eV$$

۱۹۸- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۲۱۴ تا ۲۲۲)*

طبق مدل اتمی بور، انرژی هر لایه برابر است با: $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$E = E_{n_2} - E_{n_1} \Rightarrow E = E_R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow 12/75 = 13/6\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{12/75}{13/6} = \frac{1275}{1360} = \frac{15\times 85}{16\times 85}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 4$$

۱۹۹- گزینه‌ی «۱» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۲۳۲ تا ۲۳۷)*

اگر در ساختار نواری جسمی، نوار بخشی پُر وجود داشته باشد، آن جسم رسانا است دقت کنید نارساناها و نیم‌رساناها در ساختار نواری خود نوار بخشی پُر ندارند.

۲۰۰- گزینه‌ی «۳» *(فیزیک پیش ۲، صفحه‌های ۲۶۲ تا ۲۶۴)*

با استفاده از مقدار ماده‌ی پرتوزای باقی‌مانده و تعداد نیمه عمرهای گذشته داریم:

$$m = \frac{m_0}{2^n} \Rightarrow 125\times 10^{-6} = \frac{2\times 10^{-3}}{2^n} \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4 = \frac{t}{28} \Rightarrow t = 112 \text{ سال}$$

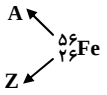
WWW.RIAZISARA.IR

شیمی

سراسری خارج از کشور ۹۰

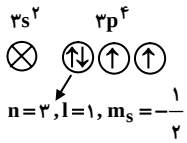
۲۰۱- گزینه‌ی «۳»

تعداد نوترون $A = Z + N \Rightarrow ۵۶ = ۲۶ + N \rightarrow N = ۳۰$



۲۰۲- گزینه‌ی «۱»

$_{۱۶}S:[Ne]۳s^۲۳p^۴$



۲۰۳- گزینه‌ی «۴»

تشریح گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی «۱»: انرژی زیرلایه‌های الکترونی در اتم همه‌ی عنصرها یکسان نیست و همانند اتم هیدروژن نیز نمی‌باشد.

گزینه‌ی «۲»: اتم روی $(_۳Zn)$، دارای ۳۰ الکترون می‌باشد که با از دست دادن ۲ الکترون ۲۸ الکترونی می‌شود.

گزینه‌ی «۳»: الکترون‌های برانگیخته‌ی اتم هیدروژن، هنگام بازگشت می‌توانند به لایه‌های مختلف بروند.

۲۰۴- گزینه‌ی «۲»

یون $X^{۳-}$، با دریافت سه الکترون به آرایش گاز نجیب رسیده است پس اتم X متعلق به گروه پنجم اصلی می‌باشد و به آرایش $۴s^۲۴p^۳$ ختم می‌شود. $_{۳۳}X: ۱s^۲/۲s^۲۲p^۶/۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}/۴s^۲۴p^۳$

اتم X آرسنیک می‌باشد که بالاترین عدد اکسایش این اتم، برابر ۵+ می‌باشد.

۲۰۵- گزینه‌ی «۳»

آنیون C، همان یون فلوئورید می‌باشد. عنصر نئون که یک گاز نجیب است بعد از اتم فلوئور قرار دارد و انرژی نخستین یونش آن نیز از فلوئور بیش‌تر است. فلوئور دارای بیش‌ترین میزان الکترونگاتیوی است.

۲۰۶- گزینه‌ی «۳»

$_{۲۰}Ca: ۱s^۲/۲s^۲۲p^۶/۳s^۲۳p^۶/۴s^۲$

آرایش الکترونی کلسیم به $۴s^۲$ ختم شده است بنابراین آرایش الکترونی عنصر اصلی هم‌دوره‌ی بعد از آن باید به $۴s^۲۴p^۱$ برسد.

$_{۳۱}X: ۱s^۲/۲s^۲۲p^۶/۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}/۴s^۲۴p^۱$

۲۰۷- گزینه‌ی «۴»

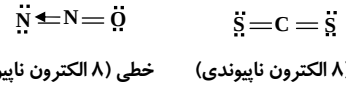
نقره کلریت: $AgClO_۲$ روی سیانید: $Zn(CN)_۲$

منیزیم دی‌کرومات: $MgCr_۲O_۷$ کلسیم فسفات: $Ca_۳(PO_۴)_۲$

۲۰۸- گزینه‌ی «۱»

تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»

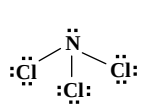


خطی (۸ الکترون ناپیوندی) خطی (۸ الکترون ناپیوندی)

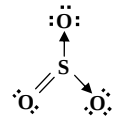
گزینه‌ی «۲»

خمیده (۱۲ الکترون ناپیوندی) خمیده (۱۱ الکترون ناپیوندی)

گزینه‌ی «۳»

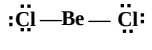


هرمی با قاعده‌ی سه‌ضلعی (۲۰ الکترون ناپیوندی)

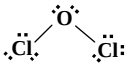


سه ضلعی مسطح (۱۶ الکترون ناپیوندی)

گزینه‌ی «۴»

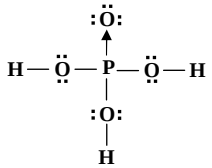


خطی (۱۲ الکترون ناپیوندی)

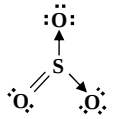


خمیده (۱۶ الکترون ناپیوندی)

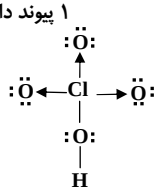
۲۰۹- گزینه‌ی «۲»



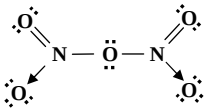
۱ پیوند داتیو



۲ پیوند داتیو



۳ پیوند داتیو

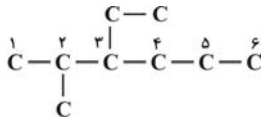


۲ پیوند داتیو

۲۱۰- گزینه‌ی «۱»

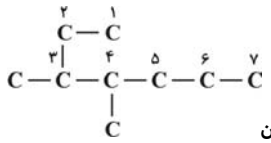
تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»



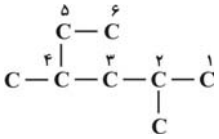
۳ –اتیل، ۲ –متیل هگزان

گزینه‌ی «۲»



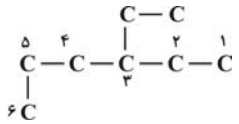
۳ و ۴ –دی متیل هپتان

گزینه‌ی «۳»



۲ و ۴ –دی متیل هگزان

گزینه‌ی «۴»



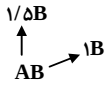
۳ –اتیل هگزان

نکته: در نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار، ۱- متیل و ۲- اتیل نداریم.

۲۱۱- گزینه‌ی «۳»

اتم‌های اکسیژن در ساختار مولکولی ترکیب داده شده، دارای ۴ قلمرو الکترونی بوده و دارای گروه‌های عاملی الکلی و اتری است.

۲۱۲- گزینه‌ی «۱»



به جای A، می‌نویسیم ۱/۵B پس جرم ترکیب می‌شود ۲/۵B

$$\frac{\text{جرم } A}{\text{جرم کل}} \times ۱۰۰ = ۶۰ \rightarrow \frac{۱/۵B}{۲/۵B} \times ۱۰۰ = \%۶۰$$

WWW.RIAZISARA.IR

۲۱۳- گزینه‌ی «۲»

$Fe(s)+S(s)\rightarrow FeS(s)$

$?molFe=\frac{۷}{۵۶}=۰/۱۲۵ \qquad ?molS=\frac{۵}{۳۲}\approx ۰/۱۵۶$

پس آهن واکنش‌دهنده‌ی محدودکننده است.

$?gFeS=۰/۱۲۵molFe\times\frac{۱molFeS}{۱molFe}\times\frac{۸۸gFeS}{۱molFeS}=۱۱g$

$?gS=۰/۱۲۵molFe\times\frac{۱molS}{۱molFe}\times\frac{۳۲gS}{۱molS}=۴$ گرم گوگرد مصرف شده

گوگرد باقی‌مانده $=۵-۴=۱$

۲۱۴- گزینه‌ی «۲»

$۲KClO_۳(s)\xrightarrow{\Delta}۲KCl(s)+۳O_۲(g)$

$dO_۲=\frac{m}{v}\rightarrow ۱/۲۵=\frac{m_{O_۲}}{۷/۶۸}\rightarrow m_{O_۲}=۹/۶g$

$۹/۶gO_۲\times\frac{۱molO_۲}{۳۲gO_۲}\times\frac{۲molKClO_۳}{۳molO_۲}\times\frac{۱۲۲/۵gKClO_۳}{۱molKClO_۳}$

$=۲۴/۵gKClO_۳$

۲۱۵- گزینه‌ی «۲»

(واکنش‌ها موازنه نشده‌اند)

گزینه‌ی «۱» $MgO(s)+HCl(aq)\rightarrow MgCl_۲(aq)+H_۲O(l)$

گزینه‌ی «۲»

$MnO_۲(s)+HCl(aq)\rightarrow MnCl_۲(aq)+H_۲O(l)+Cl_۲(g)$

گزینه‌ی «۳»: $SiCl_۴(l)+Mg(s)\rightarrow MgCl_۲(g)+Si(s)$

گزینه‌ی «۴»

$NaHCO_۳(aq)+NaOH(aq)\rightarrow Na_۲CO_۳(aq)+H_۲O(l)$

۲۱۶- گزینه‌ی «۳»

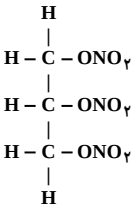
تشریح گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی «۱»: ظرفیت گرمایی اجسام، به حالت فیزیکی آن‌ها بستگی دارد.

گزینه‌ی «۲»: آب جوش درون فلاسک، نمی‌تواند نمونه‌ای از یک سامانه‌ی واقعاً منزوی باشد.

گزینه‌ی «۴»: برای اندازه‌گیری گرمای یک واکنش در حجم ثابت (کمیت ΔE) از گرماسنج بمبی استفاده می شود.

۲۱۷- گزینه‌ی «۳»



$C_۳H_۵(NO_۳)_۳$

$۴C_۳H_۵(NO_۳)_۳(l)\rightarrow ۱۲CO_۲(g)+۱۰H_۲O(g)+O_۲(g)+۶N_۲(g)+q$

۲۱۸- گزینه‌ی «۴»

$۴PH_۳(g)+۸O_۲(g)\rightarrow P_۴O_{۱۰}(s)+۶H_۲O(g)$

$\Delta H=[\text{مجموع آنتالپی استاندارد تشکیل فراورده‌ها}]-[\text{مجموع آنتالپی استاندارد تشکیل واکنش‌دهنده‌ها}]$

$\Delta H=[-۳۰۱۲+(۶\times -۲۴۲)]-[(۴\times ۹)+(۸\times ۰)]=-۴۵۰kJ$

۲۱۹- گزینه‌ی «۳»

۱) $۳Fe(s)+۳H_۲O(g)\rightarrow ۳FeO(s)+۳H_۲(g) \qquad -۳\times\Delta H^\circ=۷۲۱/۵kJ$

۲) $۳FeO(s)+\frac{۱}{۲}O_۲(g)\rightarrow Fe_۳O_۴(s) \qquad \Delta H^\circ=-۳۱۷/۵kJ$

۳) $۱H_۲O(g)\rightarrow H_۲(g)+\frac{۱}{۲}O_۲(g) \qquad -\frac{۱}{۲}\Delta H^\circ=۲۴۲$

$۳Fe(s)+۴H_۲O(g)\rightarrow Fe_۳O_۴(s)+۴H_۲(g) \qquad \Delta H_{total}=+۶۴۶kJ$

۲۲۰- گزینه‌ی «۲»

$\text{مولال}=\frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{جرم حلال به گرم}}\times ۱۰۰۰$

$CH_۳COOH=۶۰g.mol^{-۱}$

$?molCH_۳COOH=\frac{۱۲g}{۶۰g.mol^{-۱}}=۰/۲mol$

$۲=\frac{۰/۲}{x}\times ۱۰۰۰\rightarrow x=\frac{۰/۲\times ۱۰۰۰}{۲}=۱۰۰$ گرم جرم حلال

جرم حل‌شونده + جرم حلال = جرم محلول ←

جرم محلول $=۱۰۰+۱۲=۱۱۲$ گرم

۲۲۱- گزینه‌ی «۳»

$\text{درصد جرمی}=\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times ۱۰۰$

$d=\frac{m}{v}\rightarrow ۰/۸g.mL^{-۱}=\frac{x}{۲۸/۷۵mL}\rightarrow x=۲۳g$

$?gH_۲O=۱/۵mol\times\frac{۱۸g}{۱mol}=۲۷g$

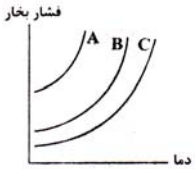
$\text{درصد جرمی}=\frac{۲۳}{۲۷+۲۳}\times ۱۰۰\Rightarrow \text{درصد جرمی}=\frac{۲۳}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۴۶$

۲۲۲- گزینه‌ی «۱»

صابون نمک سدیم، آمونیوم یا پتاسیم اسیدهای چرب دراز زنجیر است. بخش زنجیر هیدروکربنی، آب گریز است و سر ناقطبی صابون را تشکیل می‌دهد. این بخش مولکول در حلال‌های ناقطبی حل می‌شود.

۲۲۳- گزینه‌ی «۲»

مایع A در کم‌ترین دما به نسبت دو مایع دیگر دارای بیش‌ترین فشار بخار است. بنابراین مایع A، در دماهای کم‌تری نسبت به مایع‌های B و C به جوش می‌آید.



نقطه‌ی جوش: $t_C>t_B>t_A$

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی «۱»: در یک دمای معین، ترتیب فشار بخار سه مایع به صورت مقابل است: $P_A>P_B>P_C$

گزینه‌ی «۳»: صرفاً نمی‌توان با تکیه بر جرم مولکولی در مورد نقطه‌ی جوش اظهار نظر کرد. یعنی نمی‌توان گفت چون مولکول x از مولکول y سنگین‌تر است، پس حتماً نقطه‌ی جوش x از نقطه‌ی جوش y بیش‌تر است.

گزینه‌ی «۴»: مایع A به نسبت دو مایع B و C، نقطه‌ی جوش کم‌تری دارد؛ بنابراین نیروهای جاذبه‌ی بین مولکولی در مایع A در مقایسه با دو مایع دیگر کم‌تر است.

۲۲۴- گزینه‌ی «۳»

$R_۱=$ سرعت در ده دقیقه‌ی اول

$R_۲=$ سرعت در فاصله‌ی زمانی ۵۰ تا ۶۰

$\frac{R_۱}{R_۲}\frac{\frac{۰/۲۷}{۱۰}}{\frac{۰/۰۶}{۱۰}}\longrightarrow\frac{R_۱}{R_۲}=۴/۵$

(سرعت واکنش از روی فرآورده‌ی B محاسبه شده است.)

WWW.RIAZISARA.IR

۲۲۵- گزینه‌ی «۱»

$$4HCl(g)+O_2(g)\longrightarrow 2Cl_2(g)+2H_2O(g)$$

$$?molCl_2=3/6molO_2\times\frac{2molCl_2}{1molO_2}=7/2molCl_2$$

$$RCl_2=\frac{\frac{7/2}{5}}{144}=0/01mol.L^{-1}.s^{-1}$$

۲۲۶- گزینه‌ی «۲»

$$N_2(g)+2O_2(g)\rightleftharpoons 2NO_2(g)\quad K=0/1L.mol^{-1}$$

حجم ظرف یک لیتر است.

$$Q=\frac{(1)^2}{2\times(2)^2}\Rightarrow Q=\frac{1}{8}=0/125L.mol^{-1}\qquad Q>K$$

واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود تا مقدار Q و K برابر شود.

۲۲۷- گزینه‌ی «۳»

$$H_2O(g)+CO(g)\rightleftharpoons CO_2(g)+H_2(g)\quad ,K=10$$

مول اولیه	۰/۶	x	۰	۰
تغییر مول	0/6- y	x-y	y	y
مول تعادلی	۰/۳	x-۰/۳	۰/۳	۰/۳

$$K=\frac{[CO_2][H_2]}{[CO][H_2O]}\Rightarrow 10=\frac{\frac{0/3}{3}\times\frac{0/3}{3}}{\frac{0/3}{3}\times Z}\longrightarrow 10=\frac{\frac{1}{10}}{Z}$$

$$\Rightarrow Z=0/01mol.L^{-1}\times 3L=0/03mol$$

$$\Rightarrow x-0/3=0/03\Rightarrow x=0/33mol$$ اولیه

۲۲۸- گزینه‌ی «۱»

اگر مقدار ثابت یک تعادل بسیار بزرگ باشد، در صورت انجام تا مرز کامل شدن پیش می‌رود.

۲۲۹- گزینه‌ی «۱»

تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: هر چه اسید قوی‌تر باشد باز مزدوج ضعیف‌تر خواهد بود و باز مزدوج ضعیف‌تر پایدارتر خواهد بود.

قدرت اسیدی: $CH_2ClCOOH > CH_3COOH$

پس باز CH_2ClCOO^-، پایدارتر از CH_3COO^- است؛ و باز CH_3COO^- ناپایدارتر از CH_2COO^- می‌باشد.

گزینه‌ی «۲»: نقطه‌ی پایانی یک سنجش حجمی، حجمی از محلول استاندارد است که برای خنثی شدن کامل محلول مجهول مصرف می‌شود. این حجم به طور تجربی و در آزمایشگاه از روی تغییر رنگ شناساگر اندازه گرفته می‌شود. بنابراین pH نقطه‌ی پایانی وابسته به pH تغییر رنگ شناساگر می‌باشد.

گزینه‌ی «۳»: یون PO_4^{3-} (فسفات) فقط دارای نقش بازی می‌باشد.

گزینه‌ی «۴»: اگر حجم محلول یک اسید با افزودن آب خالص تا ۱۰ برابر افزایش یابد اسید رقیق‌تر شده و pH آن یک واحد زیاد می‌شود.

۲۳۰- گزینه‌ی «۴»

تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: مقدار pH پلاسمای انسان تقریباً ثابت و برابر ۷/۴ است. ۵ لیتر خون انسان حداکثر می‌تواند افزایش ۱۵۰۰mL محلول $mol.L^{-1}$ هیدروکلریک اسید را از طریق سامانه‌ی بافری خود بپذیرد.

گزینه‌ی «۲»: شناساگر فنول فتالیین و لیتموس برای تشخیص نقطه‌ی هم‌ارزی در سنجش حجمی باز قوی با اسید قوی مناسب‌تر هستند زیرا ابتدا و انتهای دامنه‌ی تغییر رنگ آن‌ها کاملاً در قسمت عمودی منحنی قرار دارد.

گزینه‌ی «۳»: $Ba(OH)_2$ و $Ca(OH)_2$ با آن که انحلال‌پذیری کمی دارند باز قوی به شمار می‌آیند، زیرا بر اثر انحلال مقدار کافی یون هیدروکسید در محلول آزاد می‌کنند.

گزینه‌ی «۴»: با افزایش طول زنجیر کربنی در کربوکسیلیک اسیدها، از انحلال‌پذیری آن‌ها در آب کاسته می‌شود؛ بنابراین خاصیت اسیدی آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲۳۱- گزینه‌ی «۴»

$$?mol\,NaOH=\frac{80}{1000}g\times\frac{1mol}{40g}=0/002mol$$

$$M=\frac{n}{V}\rightarrow M_{(OH^-)}=\frac{0/002}{0/2}=10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$pOH=-\log[OH^-]\rightarrow pOH=2$$

$$pH+pOH=14\rightarrow pH=12$$

$$[H_3O^+][OH^-]=10^{-14}\rightarrow[H^+]=10^{-12}$$

$$\rightarrow\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]}=10^{10}$$

$$NaOH(aq)+HCl(aq)\rightarrow NaCl(aq)+H_2O(l)$$

$$(MV)_{HCl}=(MV)_{NaOH}\rightarrow(0/002\times V_{HCl})=10\times0/01$$

$$V_{HCl}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{1000}}=50mL$$

۲۳۲- گزینه‌ی «۴»

تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»

$$POCl_3\rightarrow x-2-3=0\rightarrow x=+5$$

$$SO_2Cl_2\rightarrow x-4-2=0\rightarrow x=+6$$

گزینه‌ی «۲»

$$BaMnO_4\rightarrow+2+x-8=0\rightarrow x=+6$$

$$KMnO_4\rightarrow+1+x-8=0\rightarrow x=+7$$

گزینه‌ی «۳»

$$H_2PO_4^-\rightarrow+2+x-8=-1\rightarrow x=+5$$

$$ClO_4^-\rightarrow x-8=-1\rightarrow x=+7$$

گزینه‌ی «۴»

$$CrO_3\rightarrow x-6=0\rightarrow x=+6$$

$$H_2S_2O_7\rightarrow+2+2x-14=0\rightarrow x=+6$$

۲۳۳- گزینه‌ی «۲»

تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: محلول نمک‌های نقره را نمی‌توان در ظرفی از جنس فلز روی نگه‌داری کرد زیرا E° نقره بالاتر از E° روی بوده و ظرف روی در محلول نمک‌های نقره خورده می‌شود.

گزینه‌ی «۲»: اتم روی کاهنده‌تر از اتم آهن و یون $Ag^+(aq)$ اکسنده‌تر از یون $Fe^{2+}(aq)$ است.

گزینه‌ی «۳»: اختلاف E° بین روی و نقره بیش‌تر از اختلاف E° بین روی و آهن است زیرا بین این سه فلز، روی دارای بیش‌ترین میزان کاهندگی و نقره دارای کم‌ترین میزان کاهندگی است.

گزینه‌ی «۴»: در سلول الکتروشیمیایی آهن – نقره، نقره کاتد و قطب مثبت است. آهن قطب منفی و آند بوده و خورده می‌شود.

۲۳۴- گزینه‌ی «۲»

جنس کاتد و آند در سلول سختی، از گرافیت متخلخل است.

۲۳۵- گزینه‌ی «۲»

پالایش الکتروشیمیایی مس در واقع یک سلول الکترولیتی محسوب می‌شود. دیواره‌ی متخلخل که نقش آن شبیه پل نمکی است در سلول‌های گالوانی استفاده می‌شود.