برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

- دورهٔ بیست و هفتم
- شمارهٔ ۱۰۷
- بهمن ۱۳۹۶
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

- جعبهٔ ابزارهای ریاضی
- سرگرمی با حل مسائل ریاضی
- هندسهٔ تربیع و ارتباط آن با علوم گوناگون
- دو بار بشمار، دو جور بشمار
- دو اثبات دیگر برای اتحاد $\sin(\alpha+\beta)$
- مسائل برای حل

گوتفرید ویلهِلم لایبنیتس

احسان یارمحمدی

۱

۲

۳

۴

«آلبوم ریاضیات» ستونی در «مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطهٔ دورهٔ دوم» است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آشنا ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. البته در هر شماره برای آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ او می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

گوتفرید ویلهلم لایبنیتس ریاضی‌دان، فیلسوف و فیزیک‌دان برجسته و نامی آلمانی است و از او به‌عنوان یکی از باهوش‌ترین انسان‌های تاریخ بشریت یاد می‌شود. لایبنیتس به‌صورت مستقل و هم‌زمان با آیزاک نیوتن، حساب دیفرانسیل و انتگرال را بنیان نهاد و این موضوع که کدام‌یک از آن‌ها نخست حساب دیفرانسیل و انتگرال را پایه‌ریزی و ارائه کرده‌اند، باعث ایجاد کدورت و مشکلاتی بین آن دو شد. لایبنیتس همچنین به سیاست علاقه‌مند بود و در آن روزگار یکی از اثرگذارترین افراد بر سیاست اروپا بود.

۵

۱. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۹۶ در جمهوری فدرال آلمان
۲. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۸۰ در آلمان‌غربی
۳. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۰ در آلمان‌شرقی
۴. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۲۶ در جمهوری وایمار آلمان
۵. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۶۶ در آلمان‌غربی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهفتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۷
■ بهمن ۱۳۹۶
■ شمارهٔ ۵
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

حرف اول

آموزشی

ریاضیات در سینمای جهان

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

گفت‌وگو

درمانگاه ریاضی

معرفی کتاب

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پرسش‌های پیکارجو!

پاسخ‌ها

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
نشانی امور مشترکین:
تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۸۵۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

طرح سؤال برای امتحان

در ابتدای مهرماه و در همان جلسات اول با بچه‌های کلاس قرار گذاشته بودم که در هر جلسهٔ تدریس و پس از جمع‌بندی و رفع اشکال، هر کسی که داوطلب است، در ۲۰ دقیقهٔ آخر کلاس ۱ تا ۳ سؤال از همان مبحث تدریس شده طرح کند و در ورقه‌ای که اسم و فامیلش را روی آن نوشته است، به من تحویل دهد. در جلسهٔ بعدی من سه سؤال از بین آن‌ها انتخاب می‌کردم و با ذکر نام طراح روی تخته می‌نوشتم. این مجموعهٔ سؤال‌ها، سؤال‌هایی بودند که به عنوان منبع طرح سؤال در امتحانات مستمر و پایانی از آن‌ها استفاده می‌شد.

اگر در یک جلسه سؤالات طرح شده از طرف بچه‌ها مناسب یا کافی نبود، خودم سؤالات آن جلسه را طرح و روی تخته به اسم خودم ثبت می‌کردم. در واقع در کلاس درس ریاضی ما، در شروع کلاس همیشه سه سؤال از درس جلسهٔ قبل روی تخته به چشم می‌خورد که طراحان این سؤال‌ها موظف بودند، پاسخ تشریحی آن‌ها را پس از بازبینی و تصحیح با یکدیگر، در اختیار دانش‌آموزان کلاس قرار بدهند.

اگر دانش‌آموزانی بیشتر یا مساویِ پنج‌بار به عنوان طراح معرفی می‌شدند، به ازای هر پنج‌بار ۲ نمره به نمره‌های مستمر و حتی پایانی آن‌ها اضافه می‌شد. رقابت علمی بسیار خوبی در کلاس بین دانش‌آموزان به‌وجود آمده بود و هر کس سعی می‌کرد هنگام تدریس مفاهیم ریاضی، خوب توجه کند، خوب سؤال بپرسد و برای اینکه بتواند سؤال خوب طرح کند، در کلاس فعال باشد.

باید اقرار کنم انتخاب سه سؤال برتر از بین حدود ۴۰ تا ۵۰ سؤال کار بسیار دشوار و پرمسئولیتی بود که به هر صورت انجام می‌دادم. ولی ارزش داشت و نتایج آموزشی بسیار ارزشمندی در این کلاس‌ها به دست می آمد که خستگی را از تنم بیرون می‌کرد!

حمیدرضا امیری
سردبیر

اشاره

دانش‌آموز گرامی ســـلام. این‌بار در درمانگاه ریاضی می‌خواهم درد مزمنی را معرفی کنم که خیلی از دانش‌آموزان از دستش شاکی‌اند و خیلی دلشان می‌خواهد این درد درمان شود. دارم در مورد آن‌هایی صحبت می‌کنم که روش حل مســـئله را تشخیص می‌دهند، ولی در رسیدنِ به پاسخ اشتباهاتی مرتکب می‌شوند که آن‌ها را از جواب مســـئله دور می‌کند. این خطاها معمولاً از ضعف دانش‌آموزان در مطالب پایه ناشـــی می‌شـــود که ما در اینجا به آن‌ها ضعف در به‌کار بردن ابزارهای ریاضی خواهیم گفت.

افشین خاصه‌خان
دبیر ریاضی شهرستان ارومیه

شـــما اگر تعمیـــرکاری ماهر را در نظـــر بگیرید، می‌توانید دو مهارت برجسته‌اش را ببینید: مهارت اول علم و اطلاعاتی اســـت که در ارتباط با کارش دارد و با تکیه بر آن‌ها می‌تواند نقص فنی دســـتگاه را تشخیص دهد. و مهارت دوم، زبردستیِ تعمیرکار در به‌کار بردن ابزار کارش، وقتی است که می‌خواهد دستگاه را تعمیر کند. با این مثال عینی می‌خواهم بحث را شروع کنم.

کتاب‌های ریاضی تازه تألیف دورهٔ اول دبیرســـتان برای دانش‌آموز در حکم جعبهٔ ابزارهای ریاضی اســـت و دانش‌آموز هر قدر ابزار این جعبه‌ها را بهتر و دقیق‌تر بشناسد و کاربرد آن‌ها را بهتر بلد باشد، راحت‌تر می‌تواند از آن‌هـــا در حل مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم اســـتفاده کنـــد. (البته ما فرض کردیم که دانش‌آموز ما مطالب کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم دبیرســـتان را بلد است.) طبق روال خودمان مستند بحث می‌کنیم. از کتاب ریاضی ۲ پایهٔ یازدهم، فصل اول، درس معادلات رادیکالی مثالی می‌زنیم:

فرض کنید دانش‌آموزی مطابق شکل ۱ قصد دارد تمرین ۱ قســـمت چ صفحهٔ ۲۳ را با دستورالعملی که در صفحهٔ ۲۲ آمده (شکل ۲)، حل کند. این دانش‌آموز ابتدا جمله‌ها را با تغییر علامتشـــان جابه‌جا می‌کند تا یک عبارت رادیکالی در یک طرف تساوی نگه دارد:

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}+1$$

(استفاده از جعبهٔ ابزار ریاضی هفتم) (شکل ۳).

✦ **اشتباه احتمالی:** تغییر ندادن علامت در جابه‌جایی عبارت‌ها!

حالا می‌خواهد طرفین تساوی را به توان دو برساند:

$$x+1=2x-5+2\sqrt{2x-5}+1$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی نهم) (شکل ۴).

تمرین

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$ ب) $\frac{10}{r}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3r}-5$

پ) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$ ت) $\sqrt{t+4}=3$

ث) $k=\sqrt{6k-8}$ ج) $x+\sqrt{x}=6$

ج) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$ ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

شکل ۱

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تســاوی قرار گیرد. سپس با به توان رســاندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

شکل ۲

۳. توضیح دهید که در هر مرحله چگونه از دو نتیجهٔ بالا استفاده شده است تا معادله حل شود.

$$2x-1=7$$

$$\xrightarrow{+1}\quad 2x-1+1=7+1\rightarrow 2x=8$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{2}\times 2x=8\times\frac{1}{2}\rightarrow x=4$$

شکل ۳

اتحاد مربع دوجمله‌ای:

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

شکل ۴

فعالیت

۱. به دو طرف تساوی عددی زیر عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا باز هم تساوی برقرار است؟

$4=4 \xrightarrow{+3} 4+3\overset{?}{=}4+3$ $\quad 4=4 \xrightarrow{-7}$ $\quad 4=4 \xrightarrow{+1/5}$ $\quad 4=4 \xrightarrow{-\frac{2}{3}}$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲. دو طرف تســاوی زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید. آیا باز هم تساوی برقرار است؟

$8=8 \xrightarrow{\times 3} 3\times 8=3\times 8$ $\quad 8=8 \xrightarrow{\times(-2)}$ $\quad 8=8 \xrightarrow{\times 1/5}$ $\quad 8=8 \xrightarrow{-\frac{2}{3}}$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

شکل ۵

✦ **اشــتباه احتمالی:** معمــولاً دانش‌آمــوزان مربع دوجمله‌ای را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$!!(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$$

در این قســمت دانش‌آموز قصد دارد با جابه‌جایی عبارت‌ها و حذف ضرایب مســاوی از طرفین تســاوی، معادله را ساده‌تر کند و دوباره در یک طرف تساوی یک عبارت رادیکالی نگه دارد:

$$5-x=2\sqrt{2x-5}$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی هفتم) (شکل ۵).

✦ **اشتباه احتمالی:** تغییر ندادن علامت در جابه‌جایی عبارت‌ها! حالا وقت آن است که دوباره طرفین را به توان دو برساند:

$$25-10x+x^2=4(2x-5)$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی نهم) (شکل ۴).

✦ **اشتباه احتمالی:** محاسبهٔ اتحاد مربع دو جمله‌ای که در بالا اشاره شد و به توان نرساندن ضریب ۲ در سمت راست تساوی! حال نوبت مرتب کردن معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آمده است:

$$x^2-18x+45=0$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی هفتم) (شکل ۳).

✦ **اشتباه احتمالی:** تغییر ندادن علامت در جابه‌جایی عبارت‌هــا! در نهایت دانش‌آمــوز می‌خواهد معادلهٔ درجهٔ دوم را حل کند؛ البته به روشــی که تشخیص می‌دهد آسان‌تر است (مثلاً تجزیه):

$$x^2-18x+45=(x-15)(x-3)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}x-15=0\rightarrow x=15\\ x-3=0\rightarrow x=3\end{cases}$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی دهم) (شکل ۶).

✦ **اشتباه احتمالی:** تجزیه با ضرایب نادرست! یا اشتباه محاسباتی در حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش کلی! آخرین مرحله، امتحان کردن جواب‌های به دســت آمده است:

$$\sqrt{3}+1=\sqrt{2(3)-5}+1 \quad ✓$$

$$\sqrt{15}+1\neq\sqrt{2(15)-5}+1 \quad \times$$

(استفاده از جعبه ابزار ریاضی هفتم) (شکل ۷).

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۲x-۳=۰$ را که دُرسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

۱. با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x-۱)(x-...)=۰$$

ویژگی حاصل‌ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=۰$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

می‌دانیم که تجزیهٔ یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل‌ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱) فاکتورگیری:

$ax^۲+bx=x(ax+b)$

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$x^۲-a^۲=(x-a)(x+a)$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$x^۲+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

شکل ۶

فعالیت

مقدار عددی عبارت جبری زیر را به ازای $x=۲$ و $y=۳$ پیدا کنید.

$۳(۲x-۳y)-۵(x-۲y)$

$۳(۲×۲-۳×۳)-۵(۲-۲×۳)=$

اکنون ابتدا عبارت جبری را ساده کنید؛ سپس مقدار آن را به ازای عددهای داده شده، پیدا کنید.

$۳(۲x-۳y)-۵(x-۲y)=$

از مقایسهٔ جواب‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

شکل ۷

✦ **اشتباه احتمالی:** خطا در محاسبات چهارعمل اصلی!

می‌بینیم که در حل یک تمرین معمولی از کتاب ریاضی ۲ پایهٔ یازدهم، شش‌بار از ابزارهای ریاضی استفاده شد. همین مثال، نشان می‌دهد که مهارت در به‌کارگیری ابزارهای ریاضی چقدر مهم است.

واضح است که هرقدر دانش‌آموز مهارتش را در انتخاب و به‌کار بردن ابزارهای این جعبه‌ها افزایش دهد، از یک طرف ضریب خطایش پایین می‌آید، و از طرف دیگر، سرعت حلش بالاتر می‌رود و دیگر لازم نیست برای افزایش سرعت حل مسئله به سراغ نکته‌ها برود. بنابراین گاهی مراجعه به جعبهٔ ابزارهای ریاضی (کتاب‌های ریاضی متوسطهٔ دورهٔ اول) و کار پرتکرار با این ابزار می‌تواند درد مزمن مشترکی را که بین بسیاری از دانش‌آموزان شایع شده است (حل مسئله با خطای بیشتر و سرعت کمتر)، تا حدودی درمان کند؛ به شرط آنکه این کتاب‌ها از طرف دانش‌آموزان متوسطهٔ دورهٔ دوم جدی گرفته شود.

منابع

کتاب‌های ریاضی پایه‌های هفتم، نهم، دهم و یازدهم.

سرگرمی با حل مسائل ریاضی

محمد طبیعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

اشاره

این مقاله در حقیقت بیان خاطره‌ای است از یک ریاضی‌دان هندی به نام *امبیکشوار شارما*[1]. وی دانش‌آموختهٔ ریاضی در «دانشگاه لکهنو»[2] در کشور هند است و دکترای خود را در همان دانشگاه گرفته است. او همچنین مدتی در دانشگاه آلبرتا[3] استاد بوده است. لازم به ذکر است که شارما در این مقاله گریزی به خاطرات خود از استادی به نام *لئوموزر*[4] می‌زند که ارتباطی با مقاله نداشته است و به‌نظر می‌رسد جنبهٔ تبلیغی دارد. لذا از ترجمهٔ این قسمت از مقاله خودداری شده است.

همچنین او در مسئلهٔ سوم مطرح شده در این مقاله به بررسی گاه‌شمار میلادی (گاه‌شمار گریگوری) می‌پردازد که ابتدا قصد داشتم آن را با تقویم هجری شمسی عوض کنم. اما باید توجه داشت که بررسی سال‌های کبیسه در تقویم جلالی بسیار پیچیده است و با تحقیقی که این‌جانب انجام دادم، متوجه شدم که ابداً این موضوع صحت ندارد که هر چهار سال یک‌سال کبیسه است (سال ۱۳۷۰ یک سال کبیسه بود!) و تحلیل گاه‌شمار هجری شمسی عملاً خود به مقاله‌ای جداگانه و مفصل نیاز دارد. لذا در مسئلهٔ سوم عیناً آنچه که مؤلف نوشته، ترجمه شده است.

بعضی وقت‌ها مسائل ریاضی در جایی که حتی به فکرتان هم خطور نمی‌کند، به شما داده می‌شود. به عنوان دانش‌آموز ریاضی فرصت مناسبی است که با این مسائل روبه‌رو شوید و سعی کنید آن‌ها را بفهمید و در صورت امکان حل کنید. این اتفاق چندین سال پیش وقتی که با قطار از لکهنو[5] به الله‌آباد[6] می‌رفتم، برای من هم رخ داد.

آن‌زمان در دانشگاه لکهنو کار می‌کردم و قصد داشتم برای شرکت در جلسه‌ای که در کتابخانه دانشگاه الله‌آباد برگزار می‌شد، به مدت یک‌روز به آنجا بروم و بعدازظهر روز بعد به لکهنو برگردم. در آن دوره استطاعت خرید بلیت درجهٔ یک یا درجهٔ دو قطار را نداشتم، به‌همین دلیل مجبور شدم بلیت درجه سه بگیرم.

خود را نیم ساعت زودتر به ایستگاه رساندم، تا هم بتوانم تخت بالا را بگیرم و هم در یک جای آرام و بی‌سروصدا بنشینم. بالاخره جایی مناسب برای نشستن پیدا کردم، اما مردی که داشت در راهرو قطار قدم می‌زد و نگاهش را به داخل کوپه دوخته بود، قبل از من تخت بالا را اشغال کرده بود. در نتیجه من مجبور شدم تخت پایین را انتخاب کنم. کمی بعد او به داخل کوپه آمد و سر صحبت را با من باز کرد.

فهمیدم او تاجر است و برای انجام کار تجاری به الله‌آباد می‌رود. همچنین صاحب فروشگاه بزرگی در «امین‌آباد»[7] است. من هم به او گفتم که ریاضی تدریس می‌کنم و الان هم برای سخنرانی به دانشگاه الله‌آباد می‌روم.

او از شنیدن اینکه من ریاضی تدریس می‌کنم، بسیار خوش‌حال شد و از من خواست دو مسئلهٔ ریاضی را که پسرش به او داده بود، برایش حل کنم. از او خواستم مسئله‌ها را به من بگوید تا در این سفر روی آن‌ها فکر کنم و آن‌ها را حل کنم. به این ترتیب او شروع به گفتن آن مسئله‌ها کرد:

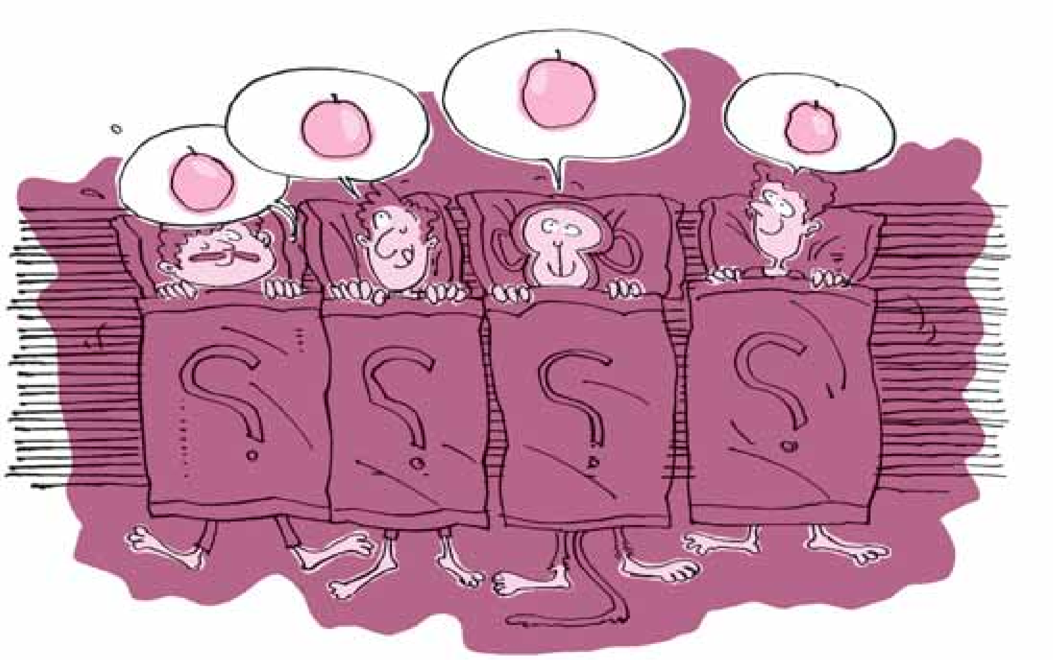
✦ **مسئلهٔ اول.** مردی به شدت به خدمتکاری قابل اعتماد و پرکار نیاز داشت تا هم از گاوهایش مراقبت کند و هم تمام کارهای خانه را انجام دهد.

چرا که همسرش مریض بود و توانایی انجام این کار را نداشــت. او حتی قصد داشت غذا، جای خواب و روزی یک دلار، به صورت ماهانه (یعنی در پایان ماه ۳۱ دلار) به او بدهد، البته به شــرطی که خدمتکار تمام کارهایش را انجام دهد. آن مرد مشــکلش را با یکی از دوســتان نزدیکش در میان گذاشت و او هم قول داد تا بگردد و فرد مناسبی را بیابد.

چند روز بعد دوســتش که طلاسازی حرفه‌ای بــود، مردی جوان و قوی را که مایل بود تمام کارها را به ازای حقوق پیشــنهاد شــده انجام دهد، به او معرفی کرد. البته آن مرد جوان یک شــرط داشت که می‌خواست تا کارفرما آن را قبول کند. آن شرط از این قرار بود: چنانچه این خدمتکار تصمیم بگیرد کارش را در روزی مشــخص رها کنــد، او می‌باید حقوقــش را تــا آن روز کامل بدهــد و در غیر این صورت جریمهٔ سنگینی خواهد پرداخت.

از آنجا که آن مرد نیاز شدیدی به یک خدمتکار داشت، بدون فکر زیادی موافقت کرد. خدمتکار نشان داد که عالی اســت و تمام کارها را بدون هیچ کم و کاستی انجام داد؛ اما کارفرما حسابی نگران قول و قرار خود با آن خدمتکار بود. او بار دیگر مشکلش را به دوستش ـ همان طلاساز ـ گفت و از او خواست تا کمکش کند و ۳۱ دلار به او قرض بدهد. طلاساز به جای ۳۱ دلار، پنج انگشــتر طلا به او داد و از او خواست تا آن‌ها را در انگشتانش قرار دهد. تاجر از من خواست تا قیمت هر یک از انگشترها را تعیین کنــم، به گونه‌ای که آن مرد بتواند، در هر روزی از ماه آینده که خدمتکار تصمیم گرفت کارش را رها کند، حقوقش را به او بدهد.

من بــار دیگر مســئله را با او مــرور کردم تا مقداری زمان برای فکر کردن بگیرم. در این حین مسافران در حال جابه‌جایی در راهرو بودند و کوپهٔ ما کاملاً پر شــده بود. خوش‌بختانه بعد از گذشت چنــد دقیقه جواب را پیدا کردم و قیمت هر یک از انگشترها را به او گفتم. او هم بسیار خوش‌حال شد و بی‌درنگ سؤال دوم خود را پرسید:



✦ **مسئلهٔ دوم:** سه مرد به همراه یک میمون تعدادی انبه خریدند و تصمیم گرفتند که آن‌ها را صبح روز بعد بخورند. شب یکی از مردان بیدار شد و دید چنانچه یک انبه به میمون بدهد، می‌تواند باقی انبه‌ها را به سه قسمت مساوی تقسیم کند. بنابراین او سهم خود را خورد و یک انبه هم به میمون داد.

کمی بعد نفر دوم از خواب برخاست و متوجه شد که اگر یک انبه به میمون بدهد، می‌تواند باقی انبه‌ها را به سه قسمت مساوی تقسیم کند. بنابراین او یک انبه به میمون داد و سهم خود را خورد و سپس به خواب رفت.

در نهایت سومین مرد بیدار شد و یک انبه به میمون داد و سهم خود را خورد و سپس خوابید. صبح روز بعد هنگامی که آن‌ها بیدار شدند، همهٔ آن‌ها متوجه شدند که چنانچه یک انبه را به میمون بدهند می‌توانند باقی انبه‌ها را به‌طور مساوی بین خودشان تقسیم کنند. کمترین تعداد انبه‌هایی را که این مردان خریده‌اند، تعیین کنید.

در این زمان قطار شروع به حرکت کرد و آن تاجر از من خواست به تخت بالا بروم تا او تخت پایین را با دو نفر دیگر تقسیم کند. درست زمانی که به ایستگاه بعدی رسیدیم، من توانستم این مسئله را هم حل کنم و به دوستم گفتم که کمترین تعداد انبه‌ها ۷۹ عدد است. با اینکه ما نه کاغذ داشتیم و نه خودکار، اما توانستم پاسخ را برای او شرح دهم و او هم تأیید کرد.

صبح روز بعد، زمانی که قطار در نزدیکی الله‌آباد بود، دوستم مرا از خواب بیدار کرد و از من خواست مسئلهٔ دیگری را هم برایش حل کنم. مسئلهٔ آخر از این قرار بود:

✦ **مسئلهٔ سوم:** اگر من بتوانم از روی تاریخ تولد یک نفر، روز تولد او را (اینکه چندشنبه به دنیا آمده) تشخیص دهم، آن‌گاه در هر مهمانی یا جلسه‌ای می‌توانم سر صحبت را باز کنم و به قول معروف خودی نشان بدهم.

به این نوع از مسائل، «مسائل تقویمی»[8] می‌گویند. باید متذکر شویم، تقویمی که ما در اینجا استفاده می‌کنیم، «تقویم گریگوری» است که در زمان **پاپ پارل گریگوری** در سال ۱۵۸۲ پذیرفته شد. در این تقویم هر سال شامل ۳۶۵ روز است و سال‌هایی که بر ۴ بخش‌پذیرند، کبیسه هستند. با این استثنا که از میان سال‌هایی که بر ۱۰۰ بخش‌پذیرند، تنها آن‌هایی که بر ۴۰۰ بخش‌پذیرند، کبیسه به‌شمار می‌آیند. در نتیجه ۱۷۰۰، ۱۸۰۰ و ۱۹۰۰ سال‌های کبیسه نیستند، اما سال ۲۰۰۰ سال کبیسه است. از آنجا که هفته ۷ روز دارد، لذا در مسائل تقویم ما باید عددهای متفاوتی را به پیمانهٔ ۷ در نظر بگیریم. به‌همین دلیل روزهای هفته را به‌صورت زیر با عددهای ۰ تا ۶ (باقی‌ماندهٔ ناشی از تقسیم بر عدد ۷) تناظر می‌دهیم.

یکشنبه	۰	پنجشنبه	۴
دوشنبه	۱	جمعه	۵
سه‌شنبه	۲	شنبه	۶
چهارشنبه	۳		

همچنین ماه‌ها را به عددهای زیر تناظر می‌دهیم.

مارس	۱	سپتامبر	۷
آوریل	۲	اکتبر	۸
مه	۳	نوامبر	۹
ژوئن	۴	دسامبر	۱۰
ژوئیه	۵	ژانویه	۱۱
اوت	۶	فوریه	۱۲

علت این ترتیب عددگذاری آن است که در هر سال کبیسه، به ماه فوریه یک روز افزوده می‌شود. بنابراین راحت‌تر است که سال را با مارس شروع و به فوریه ختم کنیم. بنابراین ۲۸ فوریه ۱۹۹۹ به عنوان آخرین روز سال ۱۹۹۹ در نظر گرفته می‌شود. اگر کسی روز r ام از ماه m ام سال $N=100C+D\ (0\le D\le 99)$ به دنیا آمده باشد، آن‌گاه، ما می‌توانیم d را که بیانگر روز تولد است، از رابطهٔ زیر به دست آوریم:

$$d=r+\left[\frac{13m-1}{5}\right]-2C+D+\left[\frac{C}{4}\right]+\left[\frac{D}{4}\right] \quad (\text{پیمانهٔ } 7)$$

که [X] بیانگر جزء صحیح عدد X است.

برای مثال، می‌خواهیم روز متناظر با تاریخ ۱۳ ژوئیهٔ سال ۱۹۳۸ را پیدا کنیم. در اینجا r=۱۳ و m=۵ و C=۱۹ و D=۳۸ بنابراین:

$$d=13+\left[\frac{13\times5-1}{5}\right]-2\times19+38+\left[\frac{19}{4}\right]+\left[\frac{38}{4}\right] \quad (\text{پیمانهٔ } 7)$$

$$=13+\left[\frac{64}{5}\right]-38+38+\left[\frac{19}{4}\right]+\left[\frac{38}{4}\right] \quad (\text{پیمانهٔ } 7)$$

از آنجا که: ۶+۷=۱۳، پس می‌توان گفت:

$13\equiv 6\ (\text{پیمانهٔ } 7)$ و

$\left[\frac{64}{5}\right]=12=7+5\equiv 5\ (\text{پیمانهٔ } 7)$ و $\left[\frac{19}{4}\right]=4$ و

$\left[\frac{38}{4}\right]=9\equiv 2\ (\text{پیمانهٔ } 7)$.

بنابراین داریم: $d=6+5+4+2=17\equiv 3\ (\text{پیمانهٔ } 7)$

در نتیجه تاریخ ۱۳ ژوئیهٔ سال ۱۹۳۸ مصادف با روز چهارشنبه است.

توجه: برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر دربارهٔ این نویسنده می‌توانید به نشانی اینترنتی زیر مراجعه کنید:
http://www.math.ualberta.ca/People/Facutypages/Sharma.A.htm

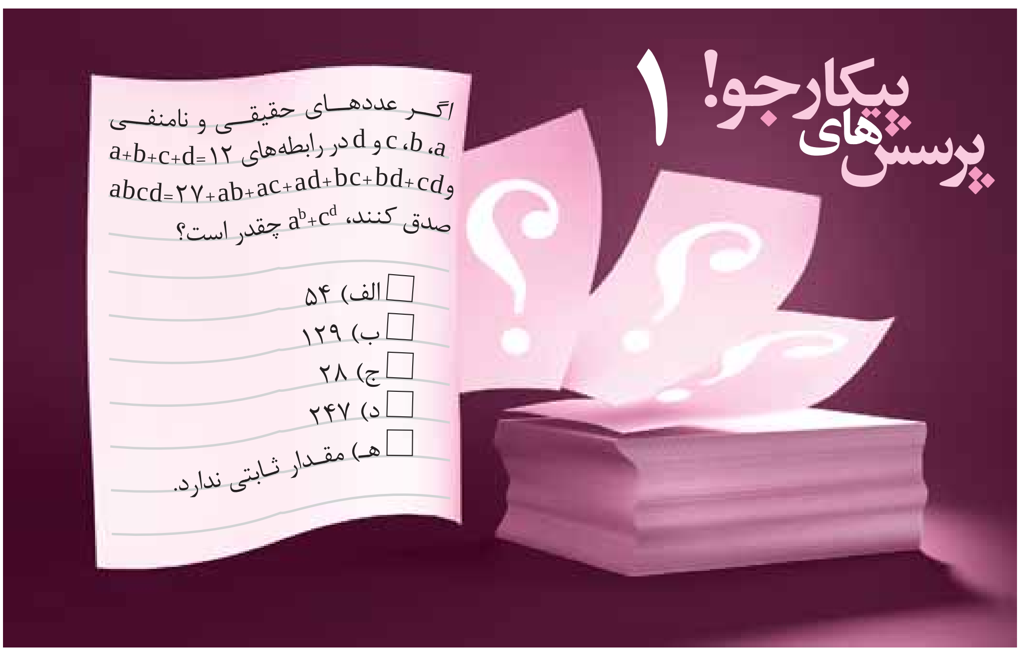
توضیحاتی دربارهٔ حل مسائل اول و دوم

۱. قیمت انگشترها باید ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶ دلار بوده باشد. دربارهٔ علت این انتخاب فکر کنید. این عددها توان‌های حسابی عدد ۲ هستند. با توجه به مبناهای عددی بگویید چرا هر عدد طبیعی $n\le 31$ را می‌توان به صورت مجموعی از این عددها نوشت؟

۲. تعداد انبه‌های باقی مانده در صبح روز بعد، $3m+1$ بوده است (چرا؟) پس تعداد انبه‌ها وقتی نفر سوم از خواب بیدار شده، $3m+1$ بوده، به طوری که: $2n=3m+1$. برای نفر دوم وقتی از خواب بیدار شد، تعداد انبه‌ها $3t+1$ بوده، به طوری که: $2t=3n+1$. برای نفر اول هم تعداد انبه‌ها $3S+1$ بوده به طوری که: $2S=3t+1$. از این معادله‌ها نتیجه بگیرید: $S=\frac{27m+19}{8}$ و از آنجا با توجه به حل معادلهٔ سیالهٔ دو مجهولی خطی نتیجه بگیرید: $m=8k-1$ و در نتیجه: $S=27k-1$. لذا مینی‌مم S، ۲۶ و مینی‌مم تعداد انبه‌ها ۷۹تاست.

پی‌نوشت‌ها

1. Ambikeshwar Sharma (1920-2003)
2. Lucknow University
3. Alberta
4. Leo Moser
۵. شهر لکهنو پایتخت ایالت اوتار پرادش در هند است.
۶. الله‌آباد شهری در ایالت اوتار پرادش واقع در شمال هند است.
۷. امین‌آباد بازار بزرگی واقع در مرکز شهر لکهنو است.
8. Calender Problem



بحثی درباب عـددهـای اول

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

اشاره

در این مقاله می‌خواهیم دربارهٔ دسته‌ای از عددهای طبیعی به‌نام عددهای اول که شاید از بحث‌برانگیزترین و به نوعی جالب‌ترین عددهای طبیعی هستند، مطالبی را بیان کنیـــم. عددهایی که مطالعه روی آن‌هـــا جذابیت خاصی برای ریاضی‌دانان دارد و همواره علاقــــه و کنجکاوی آنان را طی قرن‌ها برانگیخته‌اند. از جمله ریاضی‌دانان برجســـته‌ای که در این عرصه تلاش کرده‌اند، در عصر قدیم می‌توان به *فیثاغورس* (۵۰۰-۵۶۹ ق.م.)، *اقلیدس* (حدود ۳۵۰ ق.م.) و *اراتســـتن* (۱۹۶-۲۷۶ ق.م.)، و در عصر جدید به *مارین مرســـن* (۱۶۴۸-۱۵۸۸)، *پیردُفرما* (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، *کریســـتیان گلدباخ* (۱۷۶۴-۱۶۹۰)، *لئونهارت اویلر* (۱۷۸۳-۱۷۰۷) و *پیتر گوســـتاو دیریکله* (۱۸۵۹-۱۸۰۵)، اشاره کرد. با وجود همهٔ این تلاش‌ها، مسیر شناخت عددهای اول ناهموار و سنگلاخ است و چند قضیه که به چگونگی توزیع آن‌ها در میان عددهای طبیعی مربوط می‌شـــوند، و نیز حکم‌های اثبات نشده‌ای که تحت عنوان حدس‌ها یا انگاره‌ها مطرح می‌شـــوند و تاکنون رد نیز نشده‌اند، قابل توجه‌ترند. در این مقاله، از میان این قضایا و حدس‌ها موارد زیر را بررسی خواهیم کرد:

۱. قضیهٔ بنیادی حساب
۲. قضیهٔ نامتناهی بودن عددهای اول
۳. قضیهٔ عددهای اول
۴. حدس اقلیدس درخصوص عددهای اول دوقلو
۵. حدس گلدباخ

۱. قضیهٔ بنیادی حساب

می‌دانیم هر عـــدد صحیح $a>1$ بر ±1 و $\pm a$ بخش‌پذیـــر اســـت و اگـــر این‌ها تنها مقســـوم‌علیه‌های a باشـــند، a عددی اول نامیده می‌شود. به بیان دیگر، عددهای اول عددهای صحیح بزرگ‌تر از یک هستند که به غیر از ۱ و خودشان مقسوم‌علیه دیگری ندارنـــد. عدد صحیح بزرگ‌تـــر از ۱ که اول نباشـــد، «مرکب» نامیده می‌شود. در میان ده عدد صحیح نخســـتین تنها ۲، ۳، ۵ و ۷ عددهای اول‌اند و بقیه یعنی ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰ مرکب هســـتند. توجه کنید که ۲ تنها عدد اول زوج است و عدد صحیح ۱ طبق تعریف نه اول است و نه مرکب.

حـــال که بـــا تعریـــف عددهـــای اول آشـــنا شـــدید، به حدود ۲۳۰۰ سال پیش برمی‌گردیم. قضیهٔ چهاردهـــم از مقالهٔ نهم کتاب «اصول اقلیدس»، حاوی حکمی است که بعدها به قضیهٔ بنیادی حساب معروف شد و حاکی است: هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک، به طریقی که اساساً یکتاست، به حاصل‌ضرب عددهای اول تجزیه می‌شود. طبق این قضیه، هر عدد صحیـــح بزرگ‌تر از ۱ به یک و تنها یک روش به‌صـــورت حاصل‌ضرب عددهای اول نوشـــته می‌شود. منظور از «اساساً یکتا» این اســـت که ترتیب نوشـــته شدن عامل‌ها اهمیتی ندارد. برای مثال، $5\times3\times2$ و $3\times5\times2$ تجزیه‌هـــای متمایزی از عدد ۳۰ محســـوب نمی‌شوند. به تجزیه‌های زیر توجه کنید:

$8=2\times2\times2$

$15=3\times5$

$18=2\times3\times3$

$36=2\times2\times3\times3$

همان‌گونه کـــه در برخـــی تجزیه‌های بالا مشـــاهده می‌شود، ممکن است بعضی از عددهای اول موجود در تجزیهٔ یک عدد صحیح تکراری باشند؛ مثلاً $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$. در این‌گونه موارد با گروه‌بندی عددهای اول یکســـان، به‌جای هر گروه یک عامل (توانی از عدد اول تکرار شـــده) قـــرار می‌دهیم. در این صورت تجزیـــهٔ ۳۶۰ به‌صورت $2^3\times3^2\times5$ درمی‌آید.

بنا به قضیهٔ بنیادی حساب، عددهای اول نقش اجزای ســـازنده‌ای را بازی می‌کنند که با ضرب کـــردن آن‌ها می‌توان تمام عددهای صحیـــح را ســـاخت. به‌دلیـــل همین نقش بنیادین و اساســـی، قضیهٔ بنیادی به این نام اطلاق شده است.[۱]

۲. تعداد عددهای اول نامتناهی است

برای این حکم اثبات‌های متعددی ارائه شده اســـت. اثبات اقلیدس ساده و مبتنی بر اســـتفاده از برهان خلف اســـت که در کتاب درسی «ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی» آمده اســـت. اثباتی که **اویلر** برای نامتناهی بودن عددهای اول نوشته، مبتنی بر ریاضیات عالی است و برای دانشجویان سال دوم رشتهٔ

ریاضی قابل فهم اســت. اما یک اثبات جالب و ســاده از این قضیه را می‌تــوان در کتاب «نظریهٔ اعداد»، تألیف **مریم میرزاخانی** پیدا کرد. ضمن دعــوت از خوانندگان به مطالعهٔ این کتاب، برهان مربوطه را که در قالب یک مسئله مطرح شده است، در اینجا می‌آوریم:

مسئله: فرض کنید n عددی طبیعی باشد و: n>۲. ثابت کنید دســت‌کم یک عدد اول مانند P وجود دارد که: n<P<n!.

پیــش از پرداختــن بــه حل مســئله یــادآوری می‌کنیم کــه: n!=۱×۲×۳×...n و منظــور از a|b کــه خوانــده می‌شــود: a، b را عاد می‌کند، یا a، b را می‌شمارد، این است که a مقسوم‌علیه b یا به عبارت دیگر، b مضرب a است.

حل مسئله: چــون: n>۲ ، پــس: n!>۲! و n!>۲. در نتیجه: n!-۱>۱. بنا به قضیهٔ بنیادی حساب، n!-۱ دست‌کم یک مقسوم‌علیه اول مانند P دارد. یعنی حداقل یک عدد اول مانند P وجود دارد که مقسوم‌علیه n!-۱ است. لذا: P≤n!-۱ و در نتیجه: P<n!.

حال فرض کنیم: P≤n (فرض خلف). در نتیجه P در حاصل‌ضرب n!=۱×۲×۳×...n حضور دارد و مقســـوم‌علیه n! است؛ یعنی: P|n!. چون P مقسوم‌علیه n!-۱ است، پس: P|n!-۱. از P|n! و P|n!-۱ نتیجه می‌شــود: P|۱ (از a|b و a|c می‌تــوان a|b-c را نتیجه گرفــت) کــه تناقض اســت، چــون تنها مقســوم‌علیه‌های یک، ±۱ هســتند و توجه داریم که P اول است. بنابراین: P>n.

پس ثابت شــد که برای هر عدد صحیح n>۲، دســت‌کم یک عدد اول P وجود دارد که: n<P<n!. نتیجهٔ این مسئله آن است که اگر n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از دو باشــد، عددی اول وجود دارد که از n بزرگ‌تر است. یعنی تعداد عددهای اول نامتناهی است.

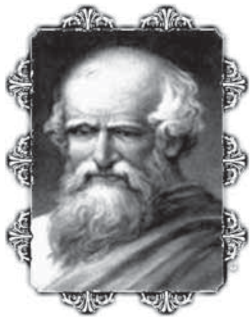
۳. حدس اقلیدس

اگر عددهــای فرد P و P+۲ هر دو اول باشــند، آن‌ها را زوج عددهــای اول دوقلو می‌نامند؛ مانند ۳ و ۵، ۵ و ۷، ۱۱ و ۱۳، ۱۷ و ۱۹، و... اقلیدس حدس زده بود که تعداد زوج عددهــای اول دوقلو نامتناهی اســت؛ حدســی که تاکنون رد نشــده، ولی اثباتی نیز برای آن پیدا نشــده است. حتماً توجه دارید که حتی اگر فهرســت بلند بالایی از این جفت‌ها پیدا کنیم، فقط نشــان داده‌ایم که زوج عددهای اول دوقلو، تعدادشان زیاد است. ولی برای اثبات حدس و تبدیل آن به یک قضیه، باید ثابت کنیم که این فهرست تــا بی‌نهایت ادامــه دارد. در حال حاضر با اســتفاده از رایانه تعــداد ۱۵۲/۸۹۲ جفت عــدد اول دوقلو کوچک‌تر از ۳۰/۰۰۰/۰۰۰ پیدا شده است. صدهزارمین جفت عددهای اول دوقلــو عبارت‌انــد از: ۱۸۴۰۹۱۹۹ و ۱۸۴۰۹۲۰۱.

۴. قضیهٔ عددهای اول

در ۱۰ عــدد طبیعی نخســتین، چهار عدد اول وجــود دارد. در ۱۰۰ عدد طبیعی نخســتین ۲۵ عدد اول وجود دارد و تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰ برابر ۱۶۸ عدد اســت. حکم ثابت شده‌ای درخصوص عددهــای اول وجــود دارد که بــه «قضیهٔ عددهای اول» موســوم اســت. این قضیه تعــداد عددهای اول کوچک‌تر یا مســاوی یک عدد مفروض را به‌طور تقریبی مشخص می‌کند. با فرض اینکه تعداد عددهای اولی را که از عدد صحیح مفروض N کوچک‌تر یا مساوی هستند، با π(N) نشان داده باشیم، قضیه را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

فیثاغورس



اقلیدس

مارین مرسن

پیردُفرما

کریستیان گلدباخ

پیتر گوستاو دیریکله

قضیهٔ عددهای اول: برای هر عدد صحیح N، π(N) به‌طور تقریبی با $\frac{N}{LnN}$ برابر است کــه LnN همان Log_e^N و e عــدد «نپری» است.

توضیح: بــه ازای عدد صحیــح مفروض N، Ln از جدول لگاریتم‌ها یا ماشین‌حساب قابل دستیابی است.

ایــن قضیه توســط دو ریاضــی‌دان به نام‌های **هادامارد** و **دی‌لاوالی پوســین** در اواخر قرن نوزدهم به‌طور مستقل اثبات شد کــه هر دو اثبات مبتنی بــر ریاضیات عالی هستند.

بررسی قضیه: برابر بودن $\pi(N)$ با $\frac{N}{LnN}$ به‌طور تقریبی، این معنا را می‌رساند که هر قدر عدد N بزرگ‌تر باشد، دقت این تقریب بالاتر خواهد بود. به‌عبارت دیگر، با بزرگ و بزرگ‌تر شدن N، خطای مقدار به‌دست آمده از فرمول $\frac{N}{LnN}$ با مقدار واقعی $\pi(N)$، کمتر و کمتر خواهد شد. به زبان حدی، اگر خطای مربوطه را با E نشان دهیم، $N\to\infty$ و $E\to ۰$ را در پی خواهد داشت. اجازه دهید درخصوص محاسبات این مسئله مثالی عددی بزنیم. سپس یک تمرین برای شما و بعد به ازای مقادیر صعودی N جدولی را ترتیب داده‌ایم تا سیر نزولی E را مشاهده کنید.

فرض کنیم N=۱۰۰. به سادگی می‌توانید دریابید که تا عدد ۱۰۰، ۲۵ عدد اول داریم.

پس: $\pi(۱۰۰)=۲۵$. حال با قرار دادن N=۱۰۰ در فرمول $\frac{N}{LnN}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰۰}{LnN}=\frac{۱۰۰}{۴/۶۰۵۲}=۲۱/۷۱۲$$

میزان خطا را از رابطهٔ $E=\pi(N)-\frac{N}{LnN}$ محاسبه می‌کنیم:

$$E=\pi(۱۰۰)-\frac{۱۰۰}{Ln۱۰۰}=۲۵-۲۱/۷۱۲=۳/۲۸۸$$

برای محاسبهٔ درصد خطا توجه می‌کنیم که اگر E میزان خطا برای $\pi(N)$ باشد، درصد خطا از تناسب $\frac{E}{\pi(N)}=\frac{?}{۱۰۰}$ محاسبه می‌شود و داریم:

$$\text{درصد خطا}=\frac{\pi(N)-\frac{N}{LnN}}{\pi(N)}\times ۱۰۰$$

برای N=۱۰۰، درصد خطا برابر است با:

$$\frac{۳/۲۸۸}{۲۵}\times ۱۰۰$$ یا به‌طور تقریبی ۱۳/۱۵٪

تمرین: برای N=۲۰۰، $\pi(N)$، $\frac{N}{LnN}$ و E را محاسبه کنید.

و حالا به جدول مقابل دقت کنید.

N	$\pi(N)$	$\frac{N}{LnN}$	E	درصد خطا
۱۰	۴	۴/۳	-۰/۳	۷/۵
$۱۰^{۲}$	۲۵	۲۱/۷	۳/۳	۱۳/۲
$۱۰^{۳}$	۱۶۸	۱۴۵	۲۳	۱۳/۶
$۱۰^{۴}$	۱۲۲۹	۱۰۸۶	۱۴۳	۱۱/۶
$۱۰^{۵}$	۹۵۹۲	۸۶۸۶	۹۰۶	۹/۴
$۱۰^{۶}$	۷۸۴۹۸	۷۲۳۸۲	۶۱۱۶	۷/۸
$۱۰^{۷}$	۶۶۴۵۷۹	۶۲۰۴۲۱	۴۴۱۵۸	۶/۶
$۱۰^{۸}$	۵۷۶۱۴۵۵	۵۴۲۸۶۸۱	۳۳۲۷۷۴	۵/۸
$۱۰^{۹}$	۵۰۸۴۷۵۳۴	۴۸۲۵۴۹۴۲	۲۵۹۲۵۹۲	۵/۱
$۱۰^{۱۰}$	۴۵۵۰۵۲۵۱۱	۴۳۴۲۹۴۴۸۲	۲۰۷۵۸۰۲۹	۴/۶
$۱۰^{۱۱}$	۴۱۱۸۰۵۴۸۱۳	۳۹۴۸۱۳۱۶۵۴	۱۶۹۹۲۳۱۵۹	۴/۱
$۱۰^{۱۲}$	۳۷۶۰۷۹۱۲۰۱۸	۳۶۱۹۱۲۰۶۸۲۵	۱۴۱۶۷۰۵۱۹۳	۳/۷
$۱۰^{۱۳}$	۳۴۶۰۶۵۵۳۶۸۳۹	۳۳۴۰۷۲۶۷۸۳۸۷	۱۱۹۹۲۸۵۸۴۵۲	۳/۴

۵. حدس گلدباخ

کریستیان گلدباخ در سال ۱۷۴۲ در نامه‌ای به **لئونهارد اویلر** این حدس را مطرح کرد که هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت. صورت نسبتاً کلی‌تر حدس این است که هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۴ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول فرد نوشت. به‌سادگی می‌توان صحت حدس فوق را در مورد چند عدد زوج نخست تحقیق کرد.

۴=۲+۲

۶=۳+۳

۸=۳+۵

۱۰=۳+۷

۱۲=۵+۷

۱۴=۷+۷=۳+۱۱

۱۶=۵+۱۱=۳+۱۳

۱۸=۵+۱۳=۷+۱۱

۲۰=۳+۱۷=۷+۱۳

شما هم فهرست بالا را تا هرجا که حوصله‌تان اجازه می‌دهد، ادامه دهید.

مطمئن باشید تا عدد $۱۰^{۸}$، درستی حدس با محاسبات مستقیم به تأیید رسیده است و مشکلی پیش نخواهد آمد! گرچه این مشاهدات گمان درستی حدس گلدباخ را تقویت می‌کنند، اما با اثبات ریاضی آن فاصلهٔ زیادی دارد و همهٔ تلاش‌ها برای اثبات آن با شکست کامل مواجه شده است.

پی‌نوشت‌ها

۱. صورت قضیهٔ بنیادی حساب در متن اصلی از زبان اقلیدس بدین صورت است: «اگر عددی کوچک‌ترین عددی باشد که چند عدد اول آن را می‌شمارند، هیچ عدد اول دیگری جز همان‌ها آن را نمی‌شمارد.»

منابع

۱. امیری، حمیدرضا (۱۳۸۶). **ورودی به نظریهٔ اعداد**. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ ششم.

۲. بورل، امیل (۱۳۸۱). **عددهای اول**. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر. تهران. چاپ سوم.

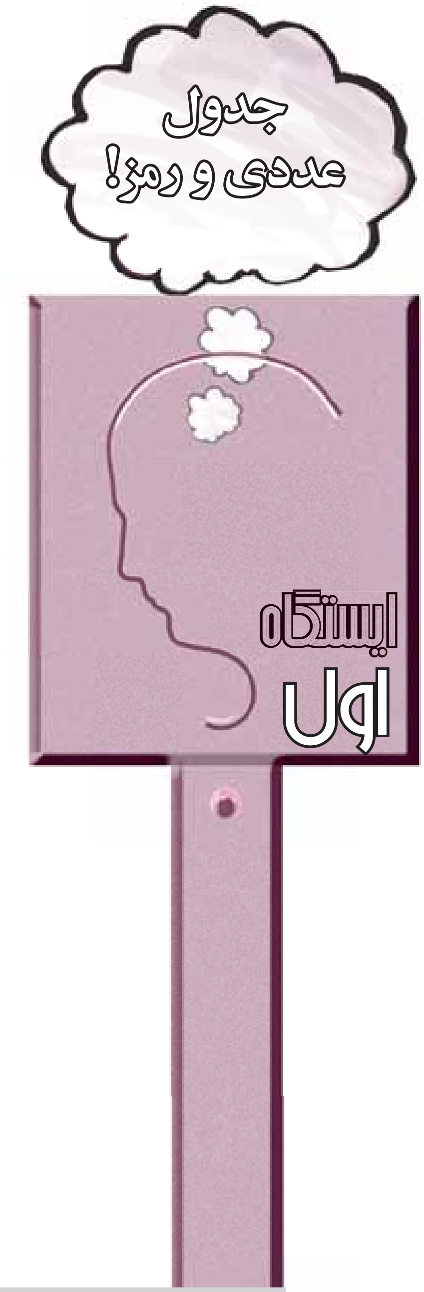
۳. برتن، دیویدام (۱۳۸۹). **نظریهٔ مقدماتی اعداد**. ترجمهٔ محمدصادق منتخب. انتشارات دانشگاه تهران. چاپ دوم.

۴. سیمونز، جرج ف (۱۳۷۵). **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها**. ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر بابایی و دکتر ابوالقاسم میامئی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ ششم.

۵. میرزاخانی، مریم و بهشتی زواره، رویا (۱۳۸۴). **نظریهٔ اعداد**. انتشارت مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی. تهران. چاپ چهاردهم.

6. QUAS. Anthony. Prime Time News. Pi in the Sky. Issu 17, 2013.

هوشنگ شرقی



جدول زیر شامل هشت عدد شش‌رقمی و دو عدد پنج‌رقمی است که شرح ۹تا از این عددها را داده‌ایم. توجه کنید که در شرح افقی، عددها از چپ به راست و در شرح عمودی عددها از بالا به پایین نوشته می‌شوند. پس از آنکه مطابق شرح داده شده، جدول را پر کردید، رمز جدول که همان عدد ستون سوم عمودی است به دست می‌آید که آن هم یک عدد شش‌رقمی است. پس از یافتن این عدد، شرحی مناسب که شامل یک جمله (یعنی یک توصیف ساده) باشد بر آن بنویسید و برای ما بفرستید. از میان پاسخ‌های صحیح رسیده به قید قرعه به یکی از آن‌ها جایزه‌ای نفیس تعلق می‌گیرد!

افقی:

۱. عددی شش‌رقمی به فرم $\overline{abcabc}$ که مضرب ۵ و ۶۷ است.

۲. عدد طبیعی به فرم n^{n+1}

۳. اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه، معادل ۴۵۶۲π رادیان

۴. اندازهٔ حجم مکعب مستطیلی که قاعدهٔ آن مربع شکل، مساحت کل آن ۶۸۵۵۴ واحد سطح و ارتفاع آن ۳۸ واحد طول است.

۵. مجذور یک عدد طبیعی سه‌رقمی مضرب ۹، که رقم‌های آن از سمت چپ به ترتیب نزولی سه عدد متوالی است.

۶. توان پنجم یک عدد طبیعی مضرب ۲ و ۵.

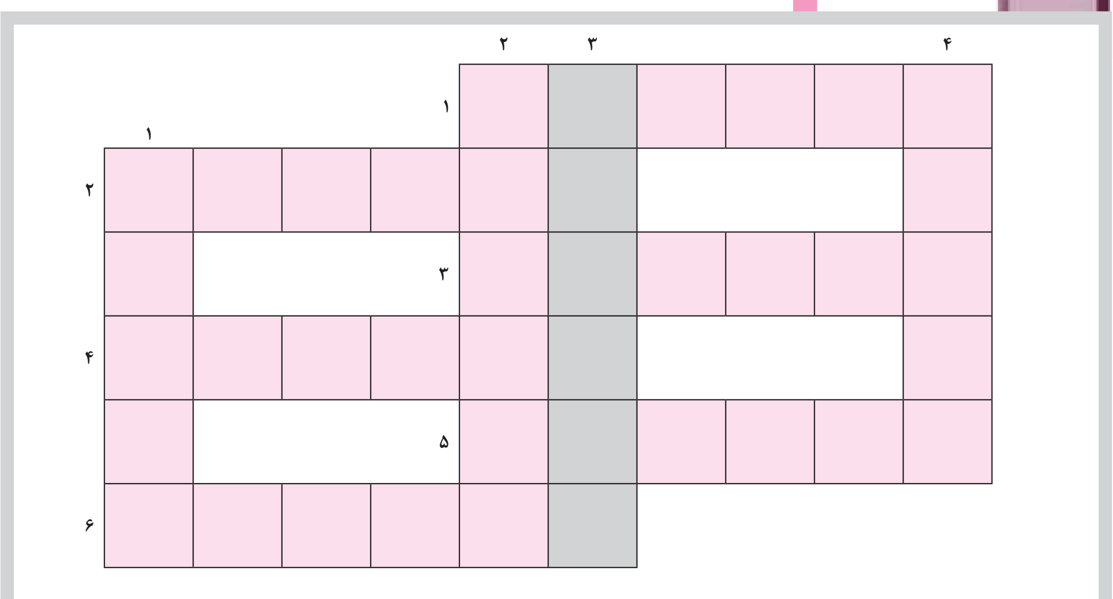
عمودی:

۱. مساحت مربعی که محیط آن ۶۰۴ سانتی‌متر مربع است.

۲. مجموع مربع‌های عددهای طبیعی ۱ تا ۱۰۰

۳. ؟

۴. نخستین عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵۰/۰۰۰ که می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب سه عدد اول متمایز نوشت.



ریاضی‌دان، اخترشناس، و هندسه‌دان بزرگ دورهٔ اسلامی

احسان یارمحمدی

- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی
- **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی
- **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی
- **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری
- **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت
- **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان

■ تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

اشاره

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، ریاضی‌دان و اخترشناس شهیر ایران‌زمین، به عقیدهٔ تعداد زیادی از کارشناسان تاریخ دانش، بزرگ‌ترین هندسه‌دان دورهٔ اسلامی است. شهرت او در هندسه تا آنجاست که یان پیتر _هوخندایک_[1] ریاضیدان، تاریخ‌نگار علم و استاد تمام رشتهٔ تاریخ ریاضیات _«دانشگاه اُترخت»_[2] هلند، کتابی را با عنوان _«رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی»_ تصنیف کرده است.[3]

در این مقاله با معرفی مستند _«ابوسعید سجزی»_ از مجموعهٔ مستند _«سرزمین ستاره‌ها»_ قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «ریاضیدانان ایرانی، از خوارزمی تا ابن‌سینا»، به قلم زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی (۱۳۸۰ ــ ۱۲۹۰) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۵۰ در «انتشارات مدرسهٔ عالی دختران ایران» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس به ارائهٔ مطالبی از مستند ابوسعید سجزی خواهیم پرداخت.

ابوسعید احمدبن محمدبن‌عبدالجلیل سجزی از مردم سیستان و از مشاهیر ریاضی‌دانان و معاریف منجمان قرن چهارم هجری و معاصر با **ابوریحان بیرونی** و **عضدالدوله دیلمی** بود و بسیاری از تألیفات خود را به نام عضدالدوله نوشته است. ظاهراً سجزی بیشتر اوقات عمر خود را در شیراز به سر برده است. در هر صورت بدون تردید در سال‌های ۹۶۹/۳۵۸ تا ۹۷۱/۳۶۱ در شیراز می‌زیسته و می‌دانیم که تا سال ۹۹۹/۳۸۹ زنده بوده است. تاریخ تقریبی دورهٔ زندگی وی را **سوتر** در حدود سال‌های ۹۵۱/۳۴۰ تا ۱۰۲۴/۴۱۵ دانسته است.

از آثار ریاضی سجزی پیداست که وی مخصوصاً در هندسه بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی دربارهٔ «تقاطع قطوع مخروطی» کرده است. سوتر نوشته است که وی یکی از مبرزترین هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی است. تا زمان سجزی ریاضیدانان «مسئله تثلیث زاویه» را با روش «هندسهٔ متحرک» به وجهی تقریبی حل می‌کردند. سجزی به جای این روش، مسئلهٔ مذکور را به‌وسیلهٔ تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرد و آن را روش «هندسهٔ ثابت» نامید. این روش کاملاً هندسی است. از سجزی چنان‌که خواهیم دید، در حدود ۳۸ کتاب و رساله می‌شناسیم که در حدود ۲۰ کتاب و رساله از آن‌ها مربوط به مطالب و مسائل ریاضی و بقیه دربارهٔ احکام نجوم است. بیرونی در آثار خود بارها از سجزی نام برده و راه‌حل‌هایی از مسائل متفاوت هندسی از وی نقل کرده است.

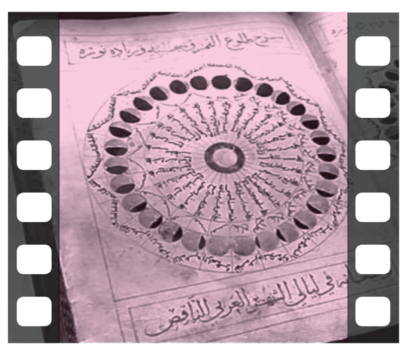
بین ریاضی‌دانان و منجمان دورهٔ اسلامی نخستین کسی که عملاً عقیده به حرکت وضعی کرهٔ زمین را به کار بست، ابوسعید سجزی بود. وی «اُسطْرلاب زورقی» را به فرض آنکه کرهٔ زمین متحرک و کرهٔ سماوی (= فلک)، به استثنای سیارات هفت‌گانه، ثابت باشد، اختراع کرد. ابوریحان بیرونی در کتاب «**استیعاب الوجوه الممکنه فی‌صنعه الاسطرلاب**» نوشته است:

«از ابوسعید سجزی اُسطُرلابی از نوع واحد و بسیط دیدم که از شمالی و جنوبی مرکب نبود و آن را اُسطُرلاب زورقی می‌نامید و او را به جهت اختراع آن اُسطُرلاب تحسین بسیار کردم. چه اختراع آن متکی بر اصلی است قائم به ذات خود و مبنی بر عقیدهٔ مردمی است که زمین را متحرک دانسته و حرکت یومی را به زمین نسبت می‌دهند و نه به کرهٔ سماوی و بدون شک این شبهه‌ای است که تحلیلش دشوار و رفع و ابطالش مشکل است. مهندسان و علمای هیئت که اعتماد و استناد ایشان بر خطوط مساحیه است، در نقص آن شبهه چیزی (گفتنی)ندارند. زیرا چه حرکت یومی را از زمین بدانند و چه آن را به کرهٔ سماوی نسبت دهند، در هر دو حالت به صناعت آنان زیانی نمی‌رسد و اگر نقص این اعتقاد و تحلیل این شبهه امکان‌پذیر باشد، موکول به رأی فلاسفهٔ طبیعی‌دان است.»

عقیدهٔ سجزی به حرکت وضعی کرهٔ زمین در نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری عملاً بیان شد، ولی چه در زمان وی و چه قرن‌ها بعد از وی مورد قبول عموم واقع نشد. **ابوعلی حسن‌بن‌علی مراکشی** که از علمای قرن هفتم هجری بود، در کتاب **جامع المبانی و الغایات فی‌علم المیقات** دربارهٔ اُسطُرلاب زورقی نوشته است: «ابوریحان بیرونی گفته است که مخترع این اُسطُرلاب ابوسعید سجزی بوده و آن اُسطُرلاب مبنی بر این فرض است که کرهٔ زمین متحرک و کرهٔ سماوی، به استثنای سیارات هفت‌گانه، ثابت است. بیرونی گفته است که این شبهه‌ای است که حل آن دشوار است و از او عجیب است که چگونه چیزی را دشوار دانسته که فساد آن بی‌اندازه آشکار است و این امری است که **ابوعلی‌بن‌سینا** بطلان آن را در کتاب **شفا** و **رازی** بطلان آن را در کتاب **ملخص** و بسیاری از کتاب‌های دیگرش بیان کرده است.»

مجموعهٔ خطی نفیسی از کتاب‌ها و رسالات ریاضی به دست‌خط سجزی در کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۴۵۷ موجود است که دارای ۲۲۰ برگ و مشتمل بر ۴۹ رساله و کتاب ریاضی از ریاضی‌دانان متفاوت است که تقریباً همهٔ آن را سجزی خود بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ ه.ق. در شیراز استنساخ کرده است. رساله‌های دهم، بیست‌و هفتم، بیست‌وهشتم، سی‌ویکم و چهل و ششم این مجموعه از تألیفات خود سجزی است. اهمیت این مجموعه خطی ریاضی در این است که همهٔ رسالات آن به دست یک ریاضی‌دان زبردست نوشته شده‌اند و بنابراین اشتباهاتی که معمولاً در کتاب‌های ریاضی خطی به‌علت بی‌اطلاعی نسخه‌نویسان دیده می‌شود، در آن روی نداده است.

سوتر از این مطلب نتیجه گرفته که چون سجزی لابد این رسالات را در سنین جوانی که مشغول تحصیل بوده برای خود نوشته‌است، پس می‌توان سال تولد او را در حدود سال ۳۴۰، یعنی موقعی که سجزی در حدود ۱۸ تا ۲۰ سال داشته دانست. اما سوتر توجه نکرده است که بین این رسالات، پنج رسالهٔ ریاضی از تألیفات خود سجزی هست که با در نظر گرفتن موضوعات آن‌ها نمی‌توان آن‌ها را از جوانی ۱۸ یا ۲۰ ساله توقع داشت. مثلاً یکی از این رسالات خواص سهمی‌وار و هذلولی‌وار دوار است. پس در سال ۳۵۸ سجزی دست کم پنج رسالهٔ ریاضی تألیف کرده بود و می‌توان فرض کرد که در آن زمان لااقل ۳۰ سال داشته است. بر این اساس می‌توان سال تولد سجزی را در حدود ۳۳۰/۹۴۱ دانست.



اگر کسی توانایی ذاتی داشته باشد و در مطالعه و تمرین بکوشد، در زمرهٔ دانشمندان طراز اول درآید. اگر توانایی شخص کامل نباشد، اما بکوشد و مطالعه کند به مقام برجسته‌ای دست می‌یابد. اما اگر کسی دارای این قدرت باشد، ولی اصول را یاد نگیرد هرگز از توانایی خود بهره نخواهد گرفت.

سجزی

رسالة فی تسهیل استخراج الاشکال الهندسه

گالیله در سال ۱۰۱۲ شمسی در دادگاه تفتیش عقاید گفت: در هفتادمین سال زندگی در مقابل شما به زانو درآمدم و در حالی‌که کتاب مقدس را پیش چشم دارم و با دست‌های خود لمس می‌کنم، توبه می‌کنم و ادعای واهی حرکت زمین را انکار می‌کنم و آن را منفور و مطرود می‌نمایم. گالیله زمانی توبه کرد که حدود ۷۳۰ سال قبل از آن ابوسعید سجزی معتقد به چرخش زمین به دور خود بود. در قرن دهم میلادی، بیرونی اصل حرکت گردش دورانی زمین را با تأیید و تصویب یک اُسترلاب نوع جدید که به وسیلهٔ ابوسعید سجزی ساخته شده بود، مطرح کرد. این اُسترلاب بر اصل حرکت زمین و ثبات آسمان و هرچه در آن است، به استثنای هفت آسمان استوار بود. بیرونی می‌گفت که این اُسترلاب موافق و منطبق با این تصور است که حرکت روزانه که از گردش ظاهری عالم پدید می‌آید، ناشی از گردش دورانی زمین در فضا در فاصلهٔ یک روز و یک شب است.

اُسترلاب یکی از نخستین و مهم‌ترین ابزارهای نجومی است که هزاران سال پیش برای اندازه‌گیری زاویه‌ها، اندازه‌های نجومی و تجزیه و تحلیل داده‌های نجومی مورد استفاده قرار می‌گرفت. این وسیله از دو صفحهٔ گرد و پهن درست شده است، یکی از آن‌ها نقشهٔ ستارگان است که جایگاه درخشان‌ترین ستارگان و مسیر خورشید و سیاره‌ها را نشان می‌دهد. اُسترلاب یک ابزار چندمنظوره بود که پیشینیان به‌عنوان یک رایانهٔ آنالوگ از آن بهرهٔ فراوان گرفته‌اند.

حرکت وضعی زمین نام چرخشی است که سیارهٔ زمین به دور خود انجام می‌دهد. چرخش زمین به سمت شرق است. اگر از سمت ستارهٔ قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دور خود دوران می‌کند. زمین در جمع نه سیاره‌ای که به گرد خورشید می‌گردند، از سیارات کوچک به‌شمار می‌رود. از حیث قطر و جرم، پنجمین سیاره و از لحاظ فاصله از خورشید سیارهٔ سوم است. تا آنجا که مشاهده شده، زمین تنها جایی است که در آن حیات وجود دارد. ولی به هیچ‌وجه پایگاه خوبی برای رصدهای نجومی نیست. اشکال اصلی ساکن نبودن آن است و همهٔ رصدها را باید به خاطر این حرکت تصحیح کرد.

امروزه «نظریهٔ کوپرنیکی» خورشید مرکزی نظریه‌ای پذیرفته شده و رایج است و اعتقاد به حرکت وضعی زمین به عقیده‌ای رایج و جاافتاده در میان عموم تبدیل شده است. در آن زمان نظریهٔ **بطلمیوس**، زمین مرکزی، نظریهٔ رایج پذیرفته شده و غیرقابل خدشه تلقی می‌شد و طبیعی است که نظر سجزی بسیار غیرمعقول جلوه‌گر شود. چنان‌که از سوی متعصبان عقیده‌ای فاسد و قاتل و از سوی منصفان شبهه خوانده شد. البته سجزی با قوت این اندیشه را عرضه کرد و بدان جنبهٔ کاربردی بخشید. اطلاعات مربوط به اُسترلاب ابوسعید در دو رسالهٔ بیرونی، موسوم به «مطالعهٔ متفاوت اُسترلاب‌ها» موجود است. دست‌نوشتهٔ اول در «موزهٔ بیریتیش» لندن و نسخهٔ خطی دوم آن در کتابخانهٔ ملی پاریس است.

ابوسعید سجزی برای اثبات نظریهٔ انقلابی خود دستگاهی به نام اُسترلاب زورقی ساخت و بسیاری از مسائل حرکت وضعی زمین را که برای دانشمندان آن زمان مجهول بود، با آن دستگاه توضیح داد. ابوریحان بیرونی می‌گوید او را برای اختراع آن اُسترلاب تحسین کرده‌اند. چه اختراع آن متکی بر اصل ایست قائم بر نظریات خود و مبنی بر عقیدهٔ مردمی است که زمین را متحرک دانسته و حرکت یومی را به زمین نسبت می‌دهند و نه به کرهٔ سماوی. با توجه به توضیحات بیرونی از این اُسترلاب و نوع حرکت آن، بی‌شک منظور از حرکت زمین و سکون کرهٔ سماوی حرکت وضعی زمین است و برخلاف تصور برخی این جمله‌ها بیانگر نظریهٔ خورشید مرکزی و حرکت انتقالی زمین نیست و همچنین سند

محکمی وجود ندارد تا نشان دهد، خود سجزی بر این باور بوده است یا خیر. فقط با توجه به سخنان بیرونی می‌توان پنداشت که سجزی در نامه‌نگاری‌های خود با بیرونی چنین نظریه‌ای را مطرح کرده است. بیرونی از رساله‌های سجزی در هندسه و ساخت اُستُرلاب بهره برد و از وی به‌عنوان مهندس یاد کرده است. سجزی محیط کرهٔ زمین را محاسبه کرد؛ به‌طوری که تفاوت آن با محاسبات کنونی فقط چند متر اختلاف دارد.

سجزی به دلیل تبحر فوق‌العاده‌اش در هندسه زبانزد بسیاری از دانشمندان و محققان امروزی بوده است. از جمله **پاسکال کُروز**[4]، عضو مرکز تحقیقات علمی فرانسه، وی را از بزرگ‌ترین نمایندگان دوره‌ای از تاریخ علم هندسه، یعنی قرن‌های سوم و چهارم هجری شمسی خوانده است. **هانری سوتر**[5] تاریخ‌نگار و پژوهشگر تاریخ ریاضی نیز وی را از برجسته‌ترین هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی می‌داند. یک هوخندا، محقق هلندی، وی را از پرکارترین هندسه‌دانان این دوره می‌داند. اما رسالهٔ سجزی اولین نمونه از متون در دورهٔ اسلامی است. امروزه اغلب ریاضی‌دانان صرفاً در شاخه‌ای خاص از ریاضی تبحر پیدا می‌کنند و اطلاعات آن‌ها در دیگر شاخه‌های ریاضی از حد فراگیرندهٔ معمولی ریاضی فراتر نمی‌رود. البته تعداد بسیار اندکی از ریاضی‌دانان نیز هستند که به مسائل فلسفی ریاضی توجه می‌کنند. مثلاً سؤال از وجود واقعی یا ذهنی ذات ریاضی نظیر عددها، و سؤال از معنای بی‌نهایت در حساب دیفرانسیل و انتگرال از این دسته‌اند. در دورهٔ اسلامی با دسته‌های مختلفی از فلاسفه و ریاضی‌دانان مواجه هستیم. تعداد انگشت‌شماری از آنان به مسائل فلسفهٔ روش‌شناسی ریاضی توجه داشته‌اند که ابوسعید سجزی از آن دسته است.

رشدی راشد در این زمینه اظهار می‌دارد: «سجزی یکی از ریاضی‌دانان مشهور پایان قرن دهم میلادی است. او که تنها به واسطهٔ مقامات و مراتب ریاضی خویش در نزد مورخان شناخته شده است با این حال به مسائل فلسفی تجربهٔ خاص وی یعنی ریاضیات که در او برانگیخته می‌شد؛ بی‌تفاوت نبود.» پاسکال کُروز نظر مشابهی را ابراز می‌دارد: «سجزی یکی از ریاضی‌دانانی است که در مورد حرفهٔ تخصصی خویش، یعنی ریاضیات، به تعمق و تفکر پرداخته و توانسته است، متن‌های معتبری در فلسفهٔ ریاضیات به رشتهٔ تحریر درآورد.» رشدی راشد رسالهٔ دیگری از سجزی را بررسی و نکته‌سنجی‌های فلسفی او را استخراج کرده است. در این رساله همان‌طور که از عنوان آن نیز برمی‌آید، سجزی به‌طور خاص به مفهوم فلسفی بی‌نهایت می‌پردازد. رشدی راشد این رساله را به همراه تشریح و تعلیق آن و نیز مقالهٔ «دربارهٔ اندیشهٔ فلسفی سجزی در ریاضیات» را برای اولین بار به چاپ رسانده است. از این رساله یک نسخهٔ خطی در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است.

سجزی در فاصلهٔ سال‌های ۲۷۰ تا ۲۹۱ قمری به شیراز رفت و تحت توجه عضدالدوله دیلمی قرار گرفت. او تا سال ۳۷۲ شمسی نیز در شیراز می‌زیست و به نگارش کتاب و رساله مشغول بود. اکثر محققان تاریخ ریاضیات حوزهٔ اسلامی بر این عقیده‌اند که نسخهٔ کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۴۴۱ همان نسخهٔ دست‌نویس سجزی است که مشتمل بر ۲۲۰ برگ و حاوی ۴۹ رساله و کتاب از ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی است. ابوریحان بیرونی در یکی از کتاب‌های خود اسامی ماه‌های تقویم سجستانی را که شیخ سجزی به وی گفته بود ذکر می‌کند. ابوسعید سجزی، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس بزرگ ایرانی، در سال ۳۷۲ شمسی در شیراز دیده از جهان فروبست و در همان شهر به خاک سپرده شد.

در پایان از اشاره به مطالب بیشتری که در مستند «سرزمین ستاره‌ها: ابوسعید سجزی» گنجانده شده است، خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران‌زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Jan Pieter Hogendijk
2. Utrecht University

علاقه‌مندان برای دریافت اطلاعات بیشتر در مورد دانشگاه اُترِخت می‌توانند به تارنمای www.un.nl مراجعه کنند.

۳. کتاب «رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» توسط **محمد باقری** به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن توسط انتشارات فاطمی در سال ۱۳۷۵ در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است.

4. Pascal Crozet
5. Henry Suter

تدوین و تنظیم: **محمدرضا امیری**

گفت‌وگوی مجله ریاضی رشد برهان با

صابر دین‌پژوه

رتبهٔ ۱ کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی کشور (۱۳۹۶)

به خودتان نگویید ای کاش!

اشاره

صابر دین‌پژوه در خانواده‌ای فرهنگی در شهر تبریز متولد شده و تحصیلات دوره دوم متوسطهٔ خود را در دبیرستان دولتی شهید آیت‌الله مدنی آن شهر به پایان رسانده است. او که به سخت‌کوشی و تلاش مستمر شهرت دارد و در عین حال صاحب اخلاق نیکو و تواضع و فروتنی است، در کنکور سراسری امسال (۱۳۹۶) موفق به کسب رتبهٔ نخست گروه ریاضی کشور گردید. تابستان امسال فرصتی دست داد تا با او به گفت‌وگو بنشینیم و از دلایل موفقیتش به‌خصوص در دروس ریاضی بپرسیم.

چکیدهٔ این گفت‌وگو را در ادامه می‌خوانید.

■ **بین درس‌های اختصاصی کدام درس را بیشتر از همه زدید و چند درصد؟**

● ریاضی را از همه بیشتر زدم؛ ۹۸/۲ درصد.

■ **یعنی فقط یک تست را نزدید. بعد از ریاضی کدام درس؟**

● بعدش شیمی؛ ۹۲ درصد.

■ **کدام درس را ۱۰۰ زدید، توی اختصاصی‌ها ۱۰۰ داشتید؟**

● کلاً ۱۰۰ نداشتم.

■ **ریاضیات چه جایگاهی برای شما داشت؟**

● من کلاً ریاضی را خیلی دوست داشتم؛ یعنی از همان پنجم ابتدایی.

■ **اتفاقاً یکی از سؤالات من هم همین بود. آیا پس از دوران ابتدایی به ریاضی علاقه‌مند شدید؟ دلیل خاصی داشت؟**

● ما معلم ریاضیِ خیلی خوبی داشتیم. از همان موقع به بچه‌ها می‌گفتم من می‌خواهم هندسه‌دان بشوم!

■ **آن معلم چه کار خاصی انجام داد که شما این‌قدر علاقه‌مند شدید؟ یادتان هست؟**

● بله یادم هست سؤالاتی را در کلاس مطرح می‌کرد که جایزه هم داشت. مثلاً از مسابقه‌های ریاضیِ آمریکا یا کشورهای دیگر سؤالات چالشی انتخاب می‌کرد.

■ **فکر می‌کنی چه عواملی به ترتیب در موفقیت شما نقش داشته‌اند؟**

● خب اولاً خودم خیلی تلاش کردم، بعد هم خانواده‌ام خیلی کمک کردند. اگر از عامل سومی هم بخواهم بگویم، دبیرهای مدرسه‌ام هستند.

■ **شغل پدرتان چیست؟**

● استاد دانشگاه هستند در رشتهٔ کشاورزی هیدرولیک. مادرم هم دبیر زیست‌شناسی هستند.

■ **از دبیر ریاضی مدرسه خاطره‌ای داری؟ یا از دبیرهای ریاضیِ دبیرستان کسی تأثیر خاصی روی شما گذاشته است؟**

● بله، معلمی داشتیم به نام آقای **علیپور**. در خاطرم هست در آن دوران ما برای حل هر مسئله یک فرمول می‌خواستیم، اما ایشان به ما یاد می‌دادند که سؤالات را باید بفهمید و بعد خودتان روشی برای حلش ابداع کنید، فکر کنم این خیلی به ما کمک کرد.

■ **در درس‌های سالِ چهارم کدام درس شما را از همه بیشتر اذیت کرد؟**

● شیمی خیلی اذیت کرد!

■ **در درس‌های ریاضی چطور؟**

● در درس‌های ریاضی اصلاً اذیت نشدم. خیلی هم ریاضی را دوست داشتم.

■ **بین ریاضیات گسسته، حساب دیفرانسیل و هندسه تحلیلی، کدام را بهتر می‌فهمیدی؟**

● فکر کنم ریاضیات گسسته را از همه بهتر می‌فهمیدم.

■ **شما سال آخر کلاس کنکور هم داشتید؛ داخل مدرسه یا بیرون؟**

● توی مدرسه که نه، ولی بیرون فقط برای درس عربی.

■ **برای مطالعهٔ ریاضی روش خاصی داشتید؟ یعنی تمام ریاضی را یک‌جور مطالعه می‌کردید؟**

● من دیفرانسیل و حسابان را از سال سوم شروع کردم و تا آخر تابستان سال سوم هر دو را تمام

کردم که بعداً فهمیدم این روش خوب نیست. یعنی آن‌قدر جلـو افتاده بودم که ایـن اواخر اصلاً کتاب پیدا نمی‌کردم که ســؤالاتش را حــل کنم. و درس دیفرانسیل کم‌کم، تحلیل می‌رفت.

■ **اما منظــور مــن از روش این بود کــه بعضی از دانش‌آمــوزان، ریاضی را مثل تاریــخ و جغرافیا می‌خوانند! ولی بیشــتر کســانی که دیدم موفق بوده‌اند، ریاضی را می‌نوشــتند؛ یعنی مسئله حل می‌کردند. شما بیشتر اهل نوشتن بودید یا خواندن؟**

● نه، قبلاً گفتم آقای علیپــور هم که معلم ریاضی ما بود، به ما یاد می‌داد که مسئله را درک کنیم.

■ **یعنی شما بیشتر می‌نوشتید و چرک‌نویس داشتید، درست است؟**

● بله، حتی من یک عکس هم دارم از چرک‌نویس‌هایم که آن را داخل نایلونی می‌ریختم تا از بقیهٔ آشغال‌ها جدا باشــد. مخصوصاً بعد از عید سؤالات نشان‌داری را کــه برای خودم علامت زده بودم، حل می‌کردم تا ببینم ایده‌های جدیدی که به آن‌ها دست پیدا کرده بودم، در ذهنم مانده‌اند یا نه.

■ **یعنی اهل مرورِ زیاد بودی؟**

● بله، خیلی.

■ **از دوران متوسطهٔ اول یا دبستان و حتی متوسطهٔ دوم، اهل حل کردن مسائل چالشی، معما و سرگرمی بودی؟**

● بله، خیلی. آن موقع بیشتر بودم. یادم هست، معلمی داشتیم به نام آقای **موسی‌پور** که خیلی معلم خوبی بود و سؤالات فوق‌العاده‌ای طرح می‌کرد. مثل مسئلهٔ عرقچین که یادم هســت، قسمتی از کره رو می‌برید که ما حجمش را با اصل «کاوالیری» محاســبه کرده بودیم. تقریباً من یک هفته روی آن کار کردم.

■ **معدل امتحان نهایی سال سومت چند شد؟**

● ۱۹/۹۶، درس ادبیات را ۱۹/۵ شدم.

■ **من تقریباً همهٔ ســؤالاتم را پرسیدم، جز یکی دو ســؤال دیگر. آیا برای بچه‌ها توصیه‌ای داری؟ این مصاحبه را بچه‌های متوسطهٔ دوم می‌خوانند؛ یعنی دهم و یازدهم. دوازدهم که فعلاً نداریم. توصیه‌ای داری برای آنکه در درس ریاضی موفق بشوند؟**

● توصیه‌ام این است که سؤالات متفاوت و زیادی حل کنند. من در سال چهارم سؤالات زیادی دیدم و حل کردم. یعنی با ایده‌های سؤال‌ها آشنا بودم. سرجلسهٔ

به بچه‌ها می‌گفتم من می‌خواهم هندسه‌دان بشوم!

کنکور هم تقریباً با همهٔ ســؤال‌ها آشنا بودم و برایم تکراری بودند.

■ **یعنی می‌گویی در حل سؤالات به کارشان تنوع بدهند؟**

● بله و توصیه می‌کنــم همهٔ مثال‌ها، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را کامل حل کنند.

■ **اگر دانش‌آموزان بنای کارشان را کتاب درسی قرار دهند، در موفقیتشان تأثیری دارد؟**

● بالاخره مفاهیم را اول باید یاد گرفت و بعد سراغ حل سؤال رفت. حالا از روی کتاب درسی بهتر هم هست و کتاب درسی بهترین منبع است.

■ **توصیهٔ دیگری نداری؟**

● توصیهٔ دیگر می‌تواند این باشــد که وقتی از جلســهٔ کنکور به خانه می‌آیند، به خودشان نگویند ای کاش فلان کار را هم کرده بودم. یعنی تمام تلاششان را در جلسه بکنند.

■ **و آخرین سؤال اینکه در چه رشته‌ای می‌خواهی به تحصیل ادامه بدهی؟**

● مهندسی رایانه (نرم‌افزار)

■ **خب ان‌شاءالله تو را همیشه در رأس و قله ببینیم و هر روز هم در دانشگاه پیشرفت کنی. ممنونم از اینکه وقت گذاشتی.**

● خواهش می‌کنم. ممنون از شما.

هوشنگ شرقی

تردستی با منطق!

اگر به منطق ریاضی احاطه و تسلط داشته باشید، تردستی‌های زیبایی را می‌توانید به کمک آن انجام دهید. یک نمونهٔ زیبا را در این‌جا برایتان داریم. در جمع، رو به اعضا می‌گویید: «یک جمله می‌گویم. اگر درست بود یک عدد از آن شکلات‌ها (یا هر چیز موجود) به من بدهید و اگر نادرست بود، ندهید!»

تشخیص درستی یا نادرستی جمله با کســی است که شرط را می‌پذیرد. بدیهی است شرط خیلی سختی نیست و هر کس با خودش می‌گوید: اینکه دردسری ندارد، اگر حرفش درست بود، خرجش یک شکلات است و اگر هم نبود، هیچ!

حال وقتی یک نفر شــرطتان را پذیرفت، به او بگویید: «تو نه به من شکلات می‌دهی و نه به همه بســتی می‌دهی!» حال اوست که باید بگوید این جمله درست است یا غلط. اگر بگوید این جمله درست است، معنی‌اش این است که او نه باید به شما شکلات بدهد و نه به همه بستنی. اما شرط این بود که اگر جمله درست بود، باید به شما شکلات بدهد، و این با درستی جملهٔ فوق جور درنمی‌آید (اگر درست باشد، باید به شما شکلات بدهد!) پس نمی‌تواند بگوید این جمله درســت است و باید بگوید غلط است. اما غلط بودن این جمله به این معنی است که این‌طور نیست که «او نه به شما شکلات بدهد و نه به همه بستنی» یا اینکه «او به شما شکلات یا به همه بستنی می‌دهد».

ولی او حق ندارد به شــما شکلات بدهد (زیرا جمله‌تان غلط است)، پس مجبور است به همه بستنی بدهد! (و به جای بستنی هم می‌توانید هر چیز دیگر را جایگزین کنید!)

بازی و ریاضی: جدول‌ها را پر کنیم!

برای این قســـمت می‌خواهیم شما را به یک چالش ریاضی براساس بحث تئوری اعداد دعوت کنیم. در جدول‌های عددی، حاصل‌ضرب عددهای هر سطر (ردیف) و هر ستون زیر یا کنار آن نوشـــته می‌شود شما باید عددهای مناسب را برای برقراری شرایط در خانه‌های جدول قرار دهید. ابتدا با جدول‌های ۲×۲ شـــروع می‌کنیم که معمولاً بسیار آسان هستند (یک نمونه برای آشنایی حل شده است):

۵	۶	۳۰
۳	۸	۲۴
۱۵	۴۸	

		۶
		۴۹
۱۴	۲۱	

		۲۷
		۳۲
۳۶	۲۴	

		۴۲
		۷۲
۵۴	۵۶	

		۱۲
		۳۰
۱۸	۲۰	

		۵۶
		۹
۷	۷۲	

		۹
		۳۵
۲۱	۱۵	

		۲۴
		۳۶
۱۶	۵۴	

برای دستورزی بد نبود! همین‌طور است؟ اما حالا می‌خواهیم با جدول‌های ۳×۳ که به مراتب دشـــوارترند، دست و پنجه نرم کنیم! در جدول‌های ۲×۲ پاسخ‌ها یکتا هستند، ولی در جدول‌های ۳×۳ این‌طور نیست. مثلاً فرض کنید می‌خواهید جدول روبه‌رو را حل کنیم: ◀◀◀

			۶
			۱۴۰
			۱۰
۵	۲۸	۶۰	

از کجا شروع کنیم؟ اگر با عددهای کوچک‌تر شروع کنیم، زودتر به نتیجه می‌رسیم. واضح است که ۵ را که یک عدد اول است، فقط به یک صورت می‌توانیم به حاصل‌ضرب سه عدد تبدیل کنیم: ۵×۱×۱. اما این سه عدد را در کدام خانه‌ها بگذاریم؟

عـــددی کـــه در خانهٔ (۱ و ۱)، یعنی خانهٔ ســـطر اول و ســـتون اول قـــرار می‌گیرد، باید هم عامـــل ۵ و هم عامل ۶ باشـــد. پس فقط می‌تواند عدد ۱ باشـــد. ۶ را هم ممکن اســـت به‌صورت ۳×۲×۱ نوشـــت که با توجه به عدد ۲۸، عدد ۲ باید در خانه‌ای باشـــد که ۲۸ زیر آن اســـت. همچنین، از آنجا که ۷ عامل ۲۸ اســـت، ولی عامل ۱۰ نیســـت، پـــس ۷ هم بایـــد در خانهٔ مرکزی باشـــد و از آنجا یک ســـطر و یک ســـتون به‌صورت مقابل کامل می‌شـــود: ◀◀◀

۱	۲	۳	۶
	۷		۱۴۰
	۲		۱۰
۵	۲۸	۶۰	

اگر همین روند را ادامه دهید، دو جواب به‌صورت روبه‌رو خواهید داشت:

۱	۲	۳	۶
۵	۷	۴	۱۴۰
۱	۲	۵	۱۰
		۶۰	

۱	۲	۳	۶
۱	۷	۲۰	۱۴۰
۵	۲	۱	۱۰
		۶۰	

حالا تلاش کنید برای جدول‌های زیر حداقل یک جواب پیدا کنید:

			۱۲
			۸
			۸
۱۲	۸	۸	

			۶۰
			۴۰
			۴
۲۴	۴۰	۱۰	

			۶
			۲۰
			۲
۱۶	۱۵	۱	

حمیدرضا امیری

توابع

فـــرض کنید ما هر عضو مجموعهٔ A را به یک عضو منحصربه‌فرد مجموعهٔ B نســـبت بدهیم. در این صورت گردایهٔ شـــامل چنین نســـبت‌هایی را یک تابع از A به B می‌نامیم. مجموعهٔ A را **«دامنهٔ تابع»** و مجموعهٔ B را **«هم‌دامنه»** می‌نامیم.

توابع را معمولاً توسط نمادهایی نمایش می‌دهند. برای مثال، فرض کنیم f نمایش یک تابع از A به B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $f:A\to B$ که خوانده می‌شود: «f تابعی است از A به B»، یا «f، A را به B می‌برد (یا می‌نگارد)».

اگر $a\in A$، در این صورت $f(a)$ (می‌خوانیم: اِفِ a) به این معنی اســـت که یک عضو منحصربه‌فرد از B توسط f به a نسبت داده می‌شود و آن را تصویر a تحت (تأثیر) f، یا مقدار f در a می‌نامیم. مجموعهٔ شامل همهٔ تصویرها (مقادیر) را «بُرد» یا «تصویر تابع f» می‌نامیم. تصویر تابع $f:A\to B$ را با $Ran(f)$، $Im(f)$ یا $f(A)$ نشان می‌دهند.

خیلی وقت‌ها می‌توان یک تابع را به‌وسیلهٔ یک فرمول ریاضی بیان کرد.

برای مثال، تابعی را در نظر بگیرید که هر عدد حقیقی را به مربعش می‌برد (نســـبت می‌دهد). ما ممکن اســـت این تابع را با نوشتن $f(x)=x^2$ یا $x\to x^2$ یا $y=x^2$ توصیف کنیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

تابع	1. Function
فرض کردن	2. Suppose
گردایه	3. Collection
دامنه	4. Domain
هم‌دامنه	5. Codomain
نگاشت	6. Mapp
بُرد	7. Range
تصویر	8. Image
توصیف کردن	9. Describe
مثال	10. Example

FUNCTIONS

Suppose that to each element of a set A we assign a unique element of a set B; the collection of such assignments is called a *function* from A into B. The set A is called the domain of the function, and the set B is called the codomain.

Funcaions are ordinarily denoted by symbols. For example, let f denote a funcaion from A into B. Then we write

$$f: A \rightarrow B$$

which is read: "f is a funcion from A into B", or "f takes (or; maps) A into B". If $a \in A$, then $f(a)$ (read: "f of a") denotes the unique element of B which f assigns to a; it is called the *image* of a unber f, or the *value* of f at a. The set of all image values is called the range of f. This image of $f: A \rightarrow B$ is denoted by $Ran(f)$, $Im(f)$ of $f(A)$.

Frequently, a function can be expressed by means of a mathematical formula. For example, consider the function which sends each real number into its square. We may describe this function by writing

$$f(x)=x^2 \text{ or } x \rightarrow x^2 \text{ or } y=x^2$$

ترجمه برای دانش‌آموزان

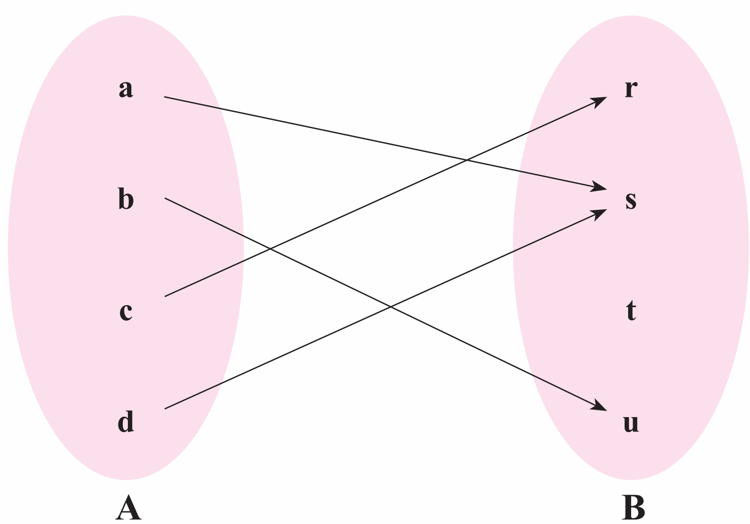
EXAMPLE 3.1

(a) Consider for funcation $f(x)=x^3$, i.e., f assigns to each real number its cube, Then the image of 2 is 8, and so we may write $f(2)=8$.

(b) Let f assign to each country in the world its captial city. Here the domain of f is the set of countries in the world; the codomain is the list of cities of the world. The image of France is Paris; or, in other words, f(France)=Paris.

(c) Figure 3-1. defines *a* function f from $A=\{a,b,c,d\}$ into $B=\{r,s,t,u\}$ in the obvious way. Here

$$f(a)=s,\ f(b)=u,\ f(c)=r,\ f(d)=s$$



دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

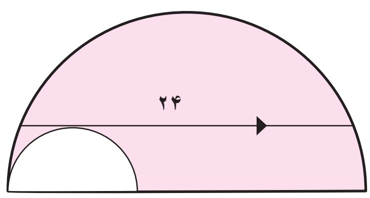
اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

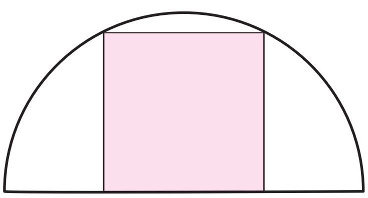
بخش اول:
مسئله‌ها

۳۳۱. در شکل ۱ دو نیم‌دایره رسم شده‌اند و وتری به طول ۲۴ بر نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. اگر این وتر موازی قطر افقی نیم‌دایره‌ها باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی چقدر است؟

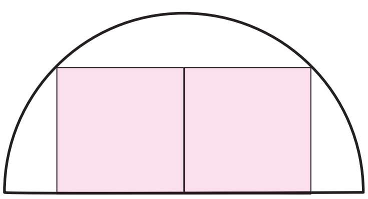


شکل ۱.

۳۳۲. در شکل‌های ۲ و ۳ دو نیم‌دایره یکسان رسم شده‌اند. یک مربع به مساحت S_1 در نیم‌دایرهٔ اول و دو مربع به مساحت S_2 (هر کدام) مطابق شکل در نیم‌دایرهٔ دوم محاط شده‌اند. نسبت S_1 به S_2 را به‌دست آورید.



شکل ۲.



شکل ۳.

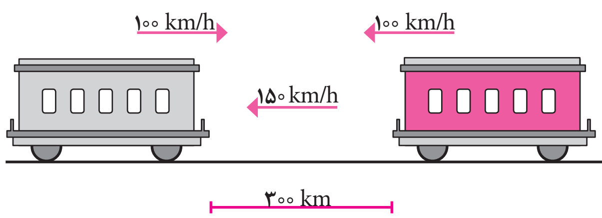
۳۳۳. همـهٔ زوج عددهــای حقیقـی (a,b) را بیابید، به‌طوری‌که: $b=\frac{a}{b}$ و $a+b=a$.

۳۳۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی فرد غیر از یک می‌تواند طول یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع طبیعی باشد.

۳۳۵. اگر مجموع ســه عدد دو رقمی $\overline{aa}$، $\overline{bb}$ و $\overline{cc}$، عدد سه رقمی $\overline{abc}$ باشـد، رقم c را پیدا کنید. a، b و c سه رقم متمایز هستند.

۳۳۶. اگـر همهٔ عددهـای طبیعی از ۱ تـا ۱۰۰۰ را پشت‌ســر هم در یک ردیف بنویســیم، کدام رقم کمتر ظاهر می‌شود؟

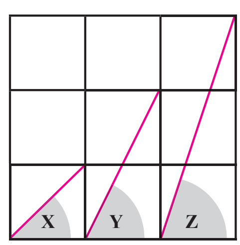
۳۳۷. مطابق شــکل ۴، دو قطار با سرعت $۱۰۰\frac{km}{h}$ به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. دقیقاً زمانی که فاصلهٔ آن‌ها ۳۰۰ کیلومتر است، یک حشره از جلوی یکی از آن‌ها به سمت دیگری پرواز می‌کند و وقتی به دومی رسید، باز می‌گردد. سرعت حشره $۱۵۰\frac{km}{h}$ است. حشره با رسیدن به هر قطار جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به سمت قطار دیگر حرکـت می‌کند. وقتی دو قطار به هم می‌رســند حشره چه مسافتی را طی کرده است؟



شکل ۴.

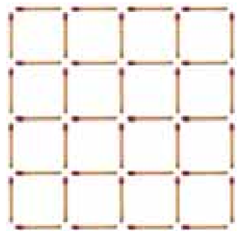
۳۳۸. یک پیتزای دایره‌ای شکل را با ۴ برش به حداکثر چند قسمت می‌توان تقسیم کرد؟

۳۳۹. مجموع ســه زاویه‌ای را که در شکل ۵ می‌بینید، به‌دست آورید.



شکل ۵.

۳۴۰. در شــکل ۶، چهل چوب کبریت در یک شــبکه چیده شده‌اند. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم تا هیچ مربعی در شکل باقی نماند؟



شکل ۶.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۳۰۱. فرض کنیــد S مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح است که می‌توان به‌صورت مجموع مربع دو عدد صحیح نوشت. ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب بسته است. یعنی اگر: $x,y\in S$، آن‌گاه: $xy\in S$.

با توجه به این اتحاد حکم نتیجه می‌شود:

$$(x^۲+y^۲)(a^۲+b^۲)=(xa+yb)^۲+(xb-ya)^۲$$

۳۰۲. برای هر عدد طبیعی n، بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که حاصل $!(۲^n)$ را عاد کند.

بزرگ‌تریــن توان عــدد اول p در تجزیهٔ !n برابر است با:

$$N=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^۲}\right]+\left[\frac{n}{p^۳}\right]+\dots$$

اثبــات این فرمــول با شــمارش مضارب p، مضارب $p^۲$ و... به راحتی امکان‌پذیر است. در اینجا توان ۲ در $!(۲^n)$ برابر خواهد شد با:

$$N=\left[\frac{۲^n}{۲}\right]+\left[\frac{۲^n}{۴}\right]+\dots=۲^{n-۱}+۲^{n-۲}+\dots+۲+۱=۲^n-۱$$

۳۰۳. از راننده پرسیدم: نتیجهٔ بازی والیبال چی شد؟ گفت: دو سِت را ایران برده و دو سِت را لهستان. سِــت پنجم هم تا اینجا ۵-۵ هستند.

الف) برای چهار سِت اول چند حالت متفاوت وجود دارد؟

ب) برای امتیازهای سِت پنجم چند حالت متفاوت وجود دارد؟

الف) انتـــخاب ۲ سِـــت از ۴ سِـــت یعنی $\binom{۴}{۲}=۶$.

ب) ده امتیاز توسط ۲ تیم گرفته شده که ۵ امتیاز از آن توســـط ایران گرفته شده است. پس تعداد حالت‌های متفاوت برای سِـــت پنجم برابر است با: $\binom{۱۰}{۵}$.

۳۰۴. چند تابـــع از $\{۱,۲,...,۱۰\}$ بـــه $\{۱,۲,...,۱۰\}$ می‌توان تعریف کرد، به‌طوری که برای هر x، $f(x)-x$ مضرب ۵ باشد؟

برای هـــر $۱\leq x\leq ۵$، $f(x)$ می‌تواند x یا $x+۵$ باشد. برای هر $۶\leq x\leq ۱۰$، $f(x)$ می‌تواند x یا $x-۵$ باشـــد. در نتیجه برای f، $N=۲^{۱۰}$ انتخاب وجود دارد.

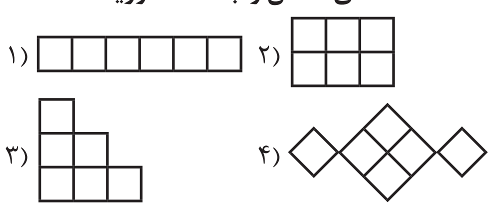
۳۰۵. میانگین ده عدد طبیعی برابر اســـت با ۱۰. ثابت کنید اگر k عددی طبیعی کوچک‌تر از ۱۱ باشد، حداقل k عدد با میانگین حداقل ۱۰ در میان این اعداد وجود دارد.

برای $k=۱۰$ حکم بدیهی اســـت. فرض کنید: $۱\leq k\leq ۹$. ده دســـتهٔ kتایی بـــه این صورت در نظر بگیرید: عددها را روی یک دایره مرتب کنید و هربار k عدد متوالی را جمع کنید. ثابت می‌شود یکی از این ده دسته دارای میانگینی حداقل برابر ۱۰ است. مجموع این ده دسته برابر است با: $۱۰۰k$. چون هر عدد عضو k دســـته است، بنابراین مجموع حداقل یکی از دســـته‌ها برابر حداقل $۱۰k$ خواهد بود. در نتیجه میانگین این دسته حداقل ۱۰ خواهد بود.

۳۰۶. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی برابر است با: ۱۲۳۰. کمترین مقدار مجموع آن‌ها چقدر اســـت؟

با تجزیهٔ ۱۲۳۰ به عامل‌های اول مشـــخص می‌شـــود که ۴۱ یکی از عامل‌های اول آن است. در نتیجه یکی از آن ســـه عدد مضرب ۴۱ است. کمترین مجموع ســـه عدد زمانی اســـت که سه عدد برابر ۴۱، ۶ و ۵ باشـــند. یعنی مجموع برابر ۵۲ باشـــد. اگر عدد مضـــرب ۴۱، عامل دیگری داشته باشـــد، حداقل برابر ۲×۴۱ خواهد بود که به مجموعی بزرگ‌تر از ۸۲ می‌رسیم. پس یکی از عددها ۴۱ است. حاصل‌ضرب دو عدد دیگر برابر ۳۰ اســـت. پس یکی از آن دو مضرب ۵ اســـت. اگر این عدد عامل دیگری به جز ۵ داشته باشد، مجموع ســـه عدد بیش از ۵۲ خواهد شـــد. پس عدد دوم ۵ و عدد سوم ۶ است.

۳۰۷. می‌خواهیـــم اعداد ۱ تـــا ۶ را در خانه‌های جدول‌هـــای زیر بنویســـیم. به‌طوری که مجموع هر دو خانهٔ مجاور (دو خانه با ضلع مشـــترک) فرد باشد. برای هر شکل تعداد حالت‌های ممکن را به‌دست آورید.



با توجه به شـــرایط خواسته شده، ابتدا باید خانه‌های شـــامل اعداد زوج و خانه‌های شـــامل اعداد فرد را مشخص کنیم. در شکل اول ۲ حالت برای خانه‌های زوج و فرد وجود دارد:

ف	ز	ف	ز	ف	ز

ز	ف	ز	ف	ز	ف

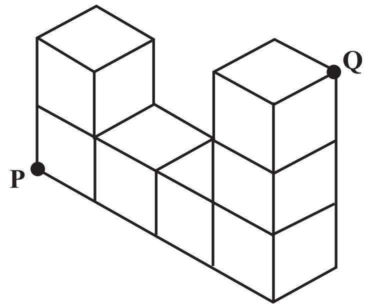
در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برای این شکل برابر است با: $۲×۳!^{۲}=۷۲$.

با همین روش برای شکل دوم (مستطیل ۳×۲) نیز ۷۲ حالت وجود دارد. برای شکل سوم تعداد حالت‌ها صفر است. (چرا؟) برای شکل چهارم تنها مربع ۲×۲ مهم است. برای خانه‌های زوج و فرد آن ۲ حالت و برای دو خانهٔ باقیمانده هم ۲ حالت وجود دارد. در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $N=۲×۲×۳!^{۲}=۱۴۴$

۳۰۸. اگر $\overline{abcd}$ یک عدد چهاررقمی باشد، جمع لایه‌ای آن برابر $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d$ تعریف می‌شود. اگر جمع لایه‌ای یک عدد چهاررقمی برابر ۲۰۱۴ باشد، آن‌گاه مجموع رقم‌های آن چقدر است؟

داریم: $۲۰۱۴=۱۰۰۰a+۲۰۰b+۳۰c+۴d$.
اگر: $a=۲$، آن‌گاه: $b=c=۰$ و در نتیجه برای d جوابی نداریم. پس: $a=۱$. برای b تنها دو مقدار ۴ و ۵ ممکن است. اگر: $b=۵$، آن‌گاه: $c=۰$ و d جواب ندارد. پس: $b=۴$. در نتیجه: $۳۰c+۴d=۲۱۴$ و یا: $۱۵c+۲d=۱۰۷$. با بررسی ارقام به پاسخ $d=۱$ و $c=۷$ می‌رسیم. در نتیجه: $a+b+c+d=۱۳$.

۳۰۹. در شکل زیر طول پاره‌خط PQ چقدر است؟



طول بزرگ‌ترین قطر در مکعبی با ابعاد a، b و c برابر است با: $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$. در نتیجه می‌توان PQ را قطر مکعبی با ابعاد ۱، ۴ و ۳ در نظر گرفت. در نتیجه: $PQ=\sqrt{۲۶}$.

۳۱۰. مجموع سه عدد سه رقمی $\overline{aaa}$، $\overline{bbb}$ و $\overline{ccc}$ برابر عدد چهار رقمی $\overline{cbba}$ شده است. ارقام a، b و c را مشخص کنید.

با توجه به مجموع ارقام یکان داریم: $b+c=۱۰$. همچنین ارقام دهگان نتیجه می‌دهند: $a+b+c+۱=b+۱۰$. در نتیجه: $a+c=۹$. حال اگر صدگان‌ها را در نظر بگیریم، داریم: $۱+a+b+c=b+۱۰c$. در نتیجه: $c=۱$. که نتیجه می‌دهد: $a=۸$ و $b=۹$.

عباس قلعه‌پور اقدم، دبیر ریاضی ارومیه

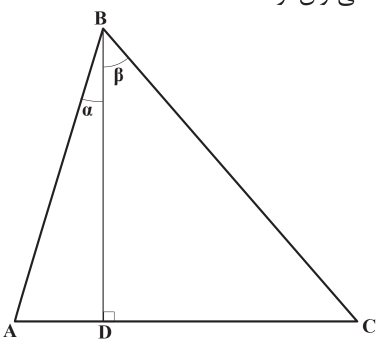
دو اثبات دیگر برای اتحاد $\sin(\alpha+\beta)$

اشاره

در شماره ۱۰۲ «مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۲» (اردیبهشت ۹۶)، مقاله‌ای با عنوان «یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$» داشتیم که در آن نویسنده، آقای *امین کشاورز از شیراز*، با فرض حاده بودن α و β، اثباتی جالب و ساده براساس تشابه مثلث‌ها و با تکیه بر *«قضیهٔ سینوس‌ها»*[1] و قضیهٔ تصویر برای اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ ارائه کرده بودند که مراجعهٔ علاقه‌مندان به آن و مطالعهٔ این مقاله خالی از لطف نیست. در این مقاله نیز (در تکمیل) به چند مورد دیگر از چنین اثبات‌هایی می‌پردازیم. لیکن باید توجه داشت که با این روش‌ها اثبات کلی قضایای مجموع (قضایای مربوط به نمایش جبری توابع مثلثاتی مجموع) یا تفاضل (دو کمان برحسب توابع مثلثاتی هر یک از کمان‌ها) انجام نمی‌گیرد، زیرا این قضایا برای هر مقدار دلخواه α و β صحیح هستند، نه برای مقادیر خاصی که در چنین استدلال‌های هندسی در نظر گرفته می‌شوند. در واقع این استدلال‌های هندسی را باید به‌عنوان تعبیرهای قضایای مجموع برای شرایط خاص تلقی کرد که حاصل آن مرور دانسته‌های هندسی و برخی روابط و قضیه‌های مثلثاتی است.

اثبات ۱

α و β را زاویه‌های دلخواه حاده فرض می‌کنیم. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که در آن اندازهٔ زاویهٔ B برابر $\alpha+\beta$ باشد، به نحوی که BD (ارتفاع وارد بر ضلع AC) با اضلاع AB و BC به‌ترتیب زاویه‌های α و β را بسازد. طول BD را h و طول اضلاع مثلث را به‌صورت AB=c، AC=b و BC=a در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۱ می‌توان نوشت:



شکل ۱.

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}a.c.\sin(\alpha+\beta) \quad (1)$$

می‌دانیم که مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

از طرف دیگر داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} + S_{\overset{\Delta}{BDC}} \quad (2)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{1}{2}AD.h \quad \text{و} \quad S_{\overset{\Delta}{BDC}} = \frac{1}{2}CD.h$$

و نیز از تعریف سینوس و کسینوس برابری‌های زیر به وضوح برقرارند:

$$h = a.\cos\beta = c.\cos\alpha \quad \text{و} \quad CD = a.\sin\beta \quad \text{و}$$
$$AD = c.\sin\alpha$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{1}{2}a.c.\sin\alpha.\cos\beta \quad (3)$$

$$S_{\overset{\Delta}{BDC}} = \frac{1}{2}a.c.\cos\alpha.\sin\beta \quad (4)$$

از برابری‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم:

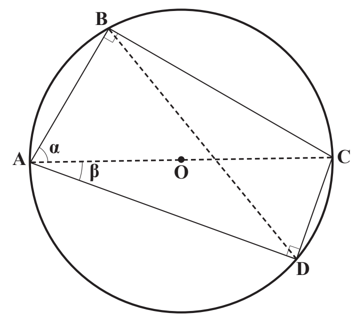
$$\frac{1}{2}a.c.\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}a.c.(\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta)$$

از تقسیم طرفین بر $\frac{1}{2}ac$، نتیجه حاصل می‌شود.

اثبات ۲

حاصل اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ را می‌توان از «قضیهٔ **بطلمیوس**» هم به‌دست آورد. به موجب این قضیه در هر چهارضلعی محاطی حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع روبه‌رو. حال به منظور استفاده از قضیهٔ بطلمیوس، α و β را زاویه‌های حاده فرض می‌کنیم و چهارضلعی ABCD را طوری در دایره محاط می‌کنیم که قطر AC از چهارضلعی بر قطری از دایرهٔ محیطی منطبق باشد (شکل ۲). اگر شعاع دایرهٔ محیطی را R فرض کنیم، خواهیم داشت: AC=۲R.
حال طبق قضیهٔ بطلمیوس داریم:

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD \quad (۱)$$



شکل ۲.

مثلث‌های ABC و ACD قائم‌الزاویه‌اند (چرا؟) و داریم:

$$AB = ۲R.\cos\alpha \quad و \quad CD = ۲R.\sin\beta$$

$$AD = ۲R.\cos\beta \quad و \quad BC = ۲R.\sin\alpha$$

همچنین با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت:

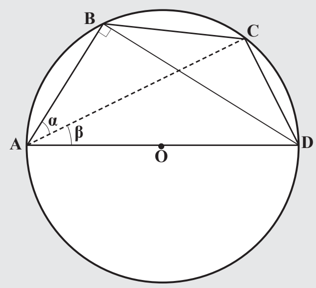
$$BD = ۲R.\sin(\alpha+\beta)$$

با قرار دادن پنج برابری اخیر در رابطهٔ (۱) و ساده کردن طرفین به $۲R^۲$ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

تمرین:

با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس و با روش مشابه آنچه که در مورد $\sin(\alpha+\beta)$ انجام شد، می‌توان $\sin(\alpha-\beta)$ را هم تعبیر کرد. انجام آن را با توجه به شکل ۳ به‌عنوان تمرین برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.



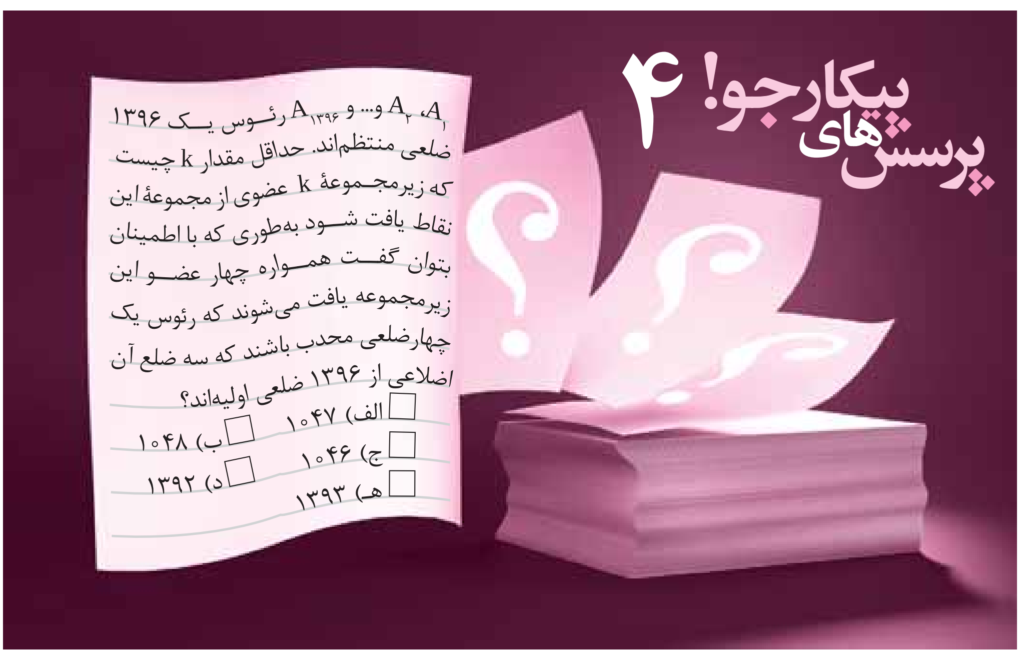
شکل ۳.

پی‌نوشت

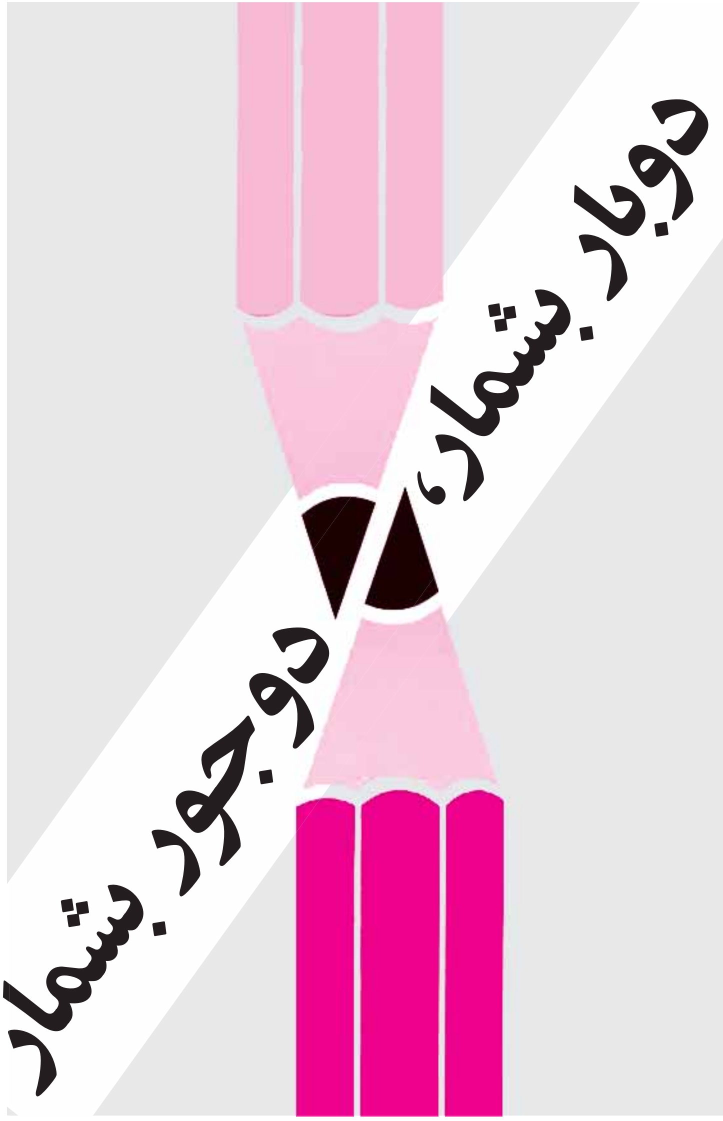
۱. قضیهٔ سینوس‌ها: در هر مثلث غیرمشخص، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابل آن برابر است با قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث.

منابع

۱. قراگوزلو، جلیل‌ا... (۱۳۷۴). **مثلثات پایه**. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.
۲. کشاورز، امین (۱۳۹۶). «یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$». مجلهٔ برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۱۰۲. دورهٔ ۲۶.
۳. نووسلو، سرگی ایوسیفویچ (۱۳۶۵) **مثلثات مستقیم‌الخط و کروی**. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر. تهران. چاپ دوم.



دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



فرض کنید یک مسئلهٔ شمارشی را حل کرده‌اید و به عدد N رسیده‌اید. اما مطمئن نیستید و می‌خواهید پاسخ خود را به طریقی ارزیابی کنید. چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟ یک راه برای اطمینان از درستی پاسخ این است که مراحل حل را مجدداً بررسی کنید تا مطمئن شوید که در هیچ مرحله‌ای اشتباه نداشته‌اید. راه دیگر آن است که سعی کنید، مسئله را از روش دیگری حل کنید. اگر از روش دیگری دوباره به عدد N برسید، اطمینان پیدا می‌کنید که پاسخ درست است. مسئلهٔ زیر را از دو روش حل کنید.

مسئله۱: به چند طریق می‌توان از میان ۱۰ ورزشکار، یک تیم ۵ نفره انتخاب کرد، به‌طوری که یکی از اعضای تیم به عنوان کاپیتان انتخاب شود؟ قبل از خواندن راه‌حل‌ها، سعی کنید از دو روش مسئله را حل کنید.

راه‌حل اول: ابتدا اعضای تیم را انتخاب می‌کنیم (به $\binom{10}{5}$ طریق) و سپس یکی از اعضای تیم را به عنوان کاپیتان انتخاب می‌کنیم (به ۵ طریق). در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $N_1=5\binom{10}{5}$.

راه‌حل دوم: ابتدا کاپیتان تیم را انتخاب می‌کنیم (به ۱۰ طریق) و سپس بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب می‌کنیم (به $\binom{9}{4}$ طریق). در نتیجه پاسخ مسئله برابر $N_2=10\binom{9}{4}$ خواهد بود.

با محاسبهٔ مقادیر N_1 و N_2 خواهید دید که: $N_1=N_2=1260$ و نشان از درستی هر دو راه‌حل دارد.

مسئلهٔ بعد را با الهام گرفتن از دو راه‌حل مسئلهٔ ۱ حل کنید.

مسئله۲: برای هر دو عدد طبیعی n و k، با فرض $1\le k\le n$، اتحاد ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

آیا می‌توان با طرح یک مسئلهٔ شمارشی و شمارش از دو طریق به اتحاد فوق رسید؟ قطعاً پاسختان مثبت است و توانسته‌اید مسئله‌ای شمارشی طرح کنید که پاسخ آن دو طرف اتحاد فوق باشد. روش فوق در اثبات اتحادهای ترکیبیاتی را «روش شمارش مضاعف» یا «دوگونه شمردن» می‌نامیم. سعی کنید مسئلهٔ ۳ را با همین روش حل کنید.

مسئله۳: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}=n.2^{n-1}$$

اثبات: باید مسئله‌ای شمارشی طرح کنیم که پاسخ آن برابر با دو طرف تساوی باشد. با توجه به جملات سمت چپ تساوی، انتخاب تیم و کاپیتان می‌تواند گزینهٔ مناسبی باشد: می‌خواهیم از میان n دانش‌آموز، یک تیم (حداقل ۱ نفره) با یک سرگروه (عضوی از تیم) انتخاب کنیم. به دو طریق می‌توان این شمارش را انجام داد. ابتدا تیم و سپس سرگروه تیم را انتخاب می‌کنیم. اگر تیم k نفره باشد ($1\le k\le n$)، $\binom{n}{k}$ انتخاب برای تیم و k انتخاب برای سرگروه وجود دارد. پس برای انتخاب تیم و سرگروه در مجموع $N_1=1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}$ انتخاب

وجود دارد.

روش دوم آن است که ابتدا سرگروه و سپس بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب کنیم. برای انتخاب سرگروه n انتخاب و برای انتخاب دیگر اعضای تیم $۲^{n-۱}$ انتخاب وجود دارد.

(تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n-۱ عضوی)

در نتیجه در این روش شمردن به پاسخ $N_۲ = n\times ۲^{n-۱}$ می‌رسیم. چون یک مسئله را از دو روش حل کرده‌ایم، پاسخ‌های نهایی باید برابر باشند. در نتیجه: $N_۱=N_۲$ و حکم ثابت می‌شود.

دقت کنید که برای اثبات این اتحاد و اتحادهایی شبیه به آن راه‌حل‌های دیگری نیز وجود دارد که یافتن آن‌ها خالی از لطف نیست. به‌طور خاص برای این اتحاد حداقل چهار راه‌حل دیگر وجود دارد. سعی کنید مسائل زیر را با روش شمارش مضاعف حل کنید. راهنمایی این مسئله‌ها در پایان مقاله آمده است.

مسئله۴: (اتحاد پاسکال) برای هر دو عدد طبیعی n و k که $k\le n$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-۱}{k}+\binom{n-۱}{k-۱}$$

مسئله۵: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$۱+۲+...+n=\binom{n+۱}{۲}$$

مسئله۶: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$۱+۲^۱+۲^۲+...+۲^{n-۱}=۲^n+۱$$

مسئله۷: (اتحاد واندرموند) برای هر سه عدد طبیعی n، m و k با فرض $k\le m$ و $k\le n$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{k}\binom{m}{۰}+\binom{n}{k-۱}\binom{m}{۱}+...+\binom{n}{۰}\binom{m}{k}=\binom{n+m}{k}$$

گاهی در حل مسئله‌های شمارشی استفاده از روش شمارش مضاعف می‌تواند گره مسئله را باز کند و با تغییر روش شمردن به پاسخ مسئله برسیم. مسئلهٔ بعد نمونه‌ای از این‌گونه مسئله‌هاست.

مسئله۸: در یک مهمانی ۱۰ نفر حضور دارند و هر نفر دقیقاً با ۴ نفر آشناست. برای دو شخص x و y، شخص z را میانجی می‌نامیم هرگاه z با هر دو آشنا باشد (x و y می‌توانند آشنا یا ناآشنا باشند). برای هر دو نفر از این افراد تعداد میانجی‌ها را یادداشت کرده‌ایم. مجموع کل این عددها را به‌دست آورید (تعداد این عددها برابر است با $\binom{۱۰}{۲}$ یعنی ۴۵ عدد).

راه‌حل: در صورت مسئله برای هر دو نفر تعداد میانجی‌ها محاسبه و سپس مجموع این عددها خواسته شده است. مشکل اینجاست که هر نفر با ۴ نفر آشناست، اما ما نمی‌دانیم هر دو نفر چند آشنای مشترک ممکن است داشته باشند. تعداد آشنایان مشترک بین دو نفر می‌تواند عددی از صفر تا ۴ باشد. اما بیایید نحوهٔ شمارش را تغییر دهیم. به جای آنکه برای هر دو نفر تعداد میانجی‌ها را بشماریم، ببینیم هر نفر میانجی چند زوج خواهد بود. مجموع خواسته شده با مجموع عددهایی که برای این ۱۰ نفر به‌دست می‌آید برابر خواهد بود.

هر نفر با ۴ مهمان دیگر آشناست. در نتیجه برای $\binom{۴}{۲}$ زوج می‌تواند میانجی باشد. پس هر نفر می‌تواند دقیقاً برای ۶ زوج میانجی باشد. بنابراین مجموع تعداد «زوج ـ میانجی»ها برابر است با: $S=۱۰\times ۶$. یعنی: $S=۶۰$.

در حل مسئلهٔ فوق، در واقع مجموع تعداد میانجی‌ها برای هر زوج با مجموع تعداد زوج‌هایی که هر شخص می‌توانست میانجی آن‌ها باشد، یکسان است.

برای آشنایی بیشتر شما مسئلهٔ دیگری مطرح می‌کنیم.

مسئله۹: در یک بیمارستان ۹ پرستار مشغول به‌کار هستند (بخش اورژانس). هر شب سه پرستار کشیک هستند و برنامهٔ آن‌ها ۱۲ روزه است. برنامه‌ریزی تیم‌های کشیک به گونه‌ای است که هر دو پرستار با هم در تعداد یکسانی از شب‌ها کشیک هستند. اولاً مشخص کنید هر دو پرستار دقیقاً در چند شب با هم عضو تیم کشیک هستند؟ سپس تعیین کنید: هر پرستار چند شب عضو تیم کشیک خواهد بود؟

راه‌حل: فرض کنید هر دو پرستار در m شب با هم کشیک بوده‌اند. آن‌گاه تعداد زوج پرستارهای کشیک در کل ۱۲ شب برابر است با: $N_۱=۱۲\binom{۳}{۲}=۳۶$. اما می‌توانیم این تعداد را به گونه‌ای دیگر بشماریم. هر دو نفر دقیقاً m بار با هم کشیک بوده‌اند. در نتیجه تعداد کل زوج پرستارهای کشیک (در یک شب) برابر است با: $N_۲=\binom{۹}{۲}m$. در نتیجه $۳۶=N_۱=N_۲=\binom{۹}{۲}m$ که نتیجه می‌دهد: m=۱. یعنی هر دو پرستار دقیقاً در یک شب با هم کشیک بوده‌اند. برای حل قسمت دوم کافی است به این نکته توجه کنیم که هر پرستار با هشت پرستار دیگر و در هر نوبت با ۲ پرستار تیم کشیک را تشکیل می‌دهند. پس هر پرستار $\frac{۸}{۲}=۴$ شب پرستار کشیک بوده است.

سعی کنید مسئلهٔ بعد را همانند مسئله‌های ۸ و ۹ خودتان حل کنید.

مسئلهٔ۱۰: در یک دوره از مسابقات ورزشی، ۱۰ ورزشکار از کشور A و ۶ ورزشکار از کشور B حضور دارند. می‌دانیم که در هر مسابقه یک تیم دونفره از A با یک تیم دونفره از B مسابقه می‌دهند. اگر هر دو نفر از A در قالب یک تیم دقیقاً در ۶ مسابقه شرکت کرده باشند، تعداد کل مسابقات را به‌دست آورید. اگر بدانیم هر تیم از B، در تعداد یکسانی از مسابقات مانند m مسابقه شرکت داشته است، مقدار m را به‌دست آورید. با این مفروضات، هر ورزشکار از A و هر ورزشکار از B در چند مسابقه شرکت کرده است؟

ممکن است به کمک شمارش مضاعف به جای یک تساوی، به یک نامساوی برسید. در واقع در روش اول شمارش، تعداد اعضای یک مجموعه را دقیق و در روش دوم شمارش، تعداد اعضای همان مجموعه را نادقیق و با به‌کار بردن حداکثر یا حداقل ممکن شمرده‌اید. این دو روش شمارش به نامساوی‌هایی منجر خواهند شد که شاید نتیجهٔ دلخواه شما در یک مسئله باشند. در ادامه دو نمونه از این مسئله‌ها را ذکر می‌کنیم.

مسئلهٔ۱۱: n زیرمجموعه از مجموعهٔ ۱۲ عضوی A انتخاب کرده‌ایم به‌طوری که هر عضو A دقیقاً در ۳ زیرمجموعه عضو است و هر دو زیرمجموعه حداکثر یک عضو مشترک دارند. حداقل n را بیابید.

راه‌حل: تعداد زوج زیرمجموعه‌های متقاطع (با اشتراک ناتهی) را می‌شماریم. هر عضو A در ۳ زیرمجموعه آمده است. پس تعداد زوج زیرمجموعه‌های متقاطع در کل برابر است با: $N_{۱}=۱۲\binom{۳}{۲}=۳۶$. از طرف دیگر، هر دو زیرمجموعه یا اشتراکی برابر تهی دارند یا در یک عضو مشترک هستند. پس: $\binom{n}{۲}\geq ۳۶$ که نتیجه می‌دهد: $n\geq ۹$.

مسئله‌های ۱۱ و ۹ شباهت‌هایی با هم دارند. آیا می‌توانید ارتباط آن‌ها را پیدا کنید؟

مسئلهٔ۱۲: فرض کنید یک چندوجهی محدب، v رأس، e یال و f وجه داشته باشد. ثابت کنید: $۳v\leq ۲e$ و $۳f\leq ۲e$.

اثبات: از هر رأس چند یال می‌گذرد؟ می‌دانیم در یک چندوجهی محدب از هر رأس، حداقل ۳ یال می‌گذرد (۲ یال امکان ندارد!) اگر تعداد یال‌های مجاور هر رأس را بشماریم و عددهای حاصل را جمع کنیم، حاصل عددی بزرگ‌تر یا مساوی ۳v خواهد بود. اما از طرف دیگر، هر یال در این شمارش دقیقاً ۲بار شمرده می‌شود. در نتیجه: $۳v\leq ۲e$.

اثبات نامساوی دوم نیز به طریق مشابه انجام می‌شود، با توجه به این نکته که هر وجه حداقل ۳ یال دارد.

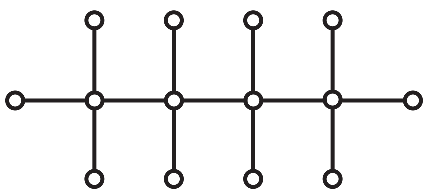
در این مقاله سعی کردیم کاربردهای متفاوت روش شمارش مضاعف را در اثبات اتحادها و حل مسئله‌های شمارشی بیان کنیم. در پایان چهار مسئله به‌عنوان تمرین آورده‌ایم و خواننده را به لذت کشف راه‌حل آن‌ها دعوت می‌کنیم.

مسئلهٔ۱۳: مجموع اعضای هر زیرمجموعهٔ A از $X=\{۱,۲,...,n\}$ را با S(A) نمایش می‌دهیم. برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A، S(A) را محاسبه می‌کنیم و سپس تمام اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم. ثابت کنید حاصل برابر است با: $S=n(n+۱).۲^{n-۲}$.

مسئلهٔ۱۴: هر دانش‌آموز از مدرسهٔ A دقیقاً با ۴ دانش‌آموز از مدرسهٔ B آشناست و هر دانش‌آموز از B نیز با ۴ دانش‌آموز از A آشناست. ثابت کنید تعداد دانش‌آموزان دو مدرسه برابر است.

مسئلهٔ۱۵: ده خط مترو برای شهری طراحی شده است به‌طوری که هر دو خط دقیقاً در یک ایستگاه متقاطع باشند. اگر در هر ایستگاه مترو، حداکثر ۳ خط مترو بتوانند تقاطع داشته باشند، حداقل چند ایستگاه مترو در این شهر لازم است؟

مسئلهٔ۱۶: در گراف زیر چند زوج رأس با فاصلهٔ ۳ وجود دارد؟



راهنمایی‌ها

- **مسئلهٔ ۴.** از بین n فوتبالیست می‌خواهید یک تیم k نفره انتخاب کنید. فوتبالیست A خیلی تکنیکی است، اما بداخلاق است. اگر شما بخواهید تیم را انتخاب کنید. A را انتخاب می‌کنید یا نه؟ این فوتبالیست کمک می‌کند تا اتحاد پاسکال را اثبات کنید.
- **مسئلهٔ ۵.** در یک جمع n+۱ نفره هر دو نفر با هم یک‌بار دست داده‌اند. چندبار عمل دست دادن اتفاق افتاده است؟ دوجور بشمارید.
- **مسئلهٔ ۶.** از مجموعهٔ $X=\{۱,۲,...,n\}$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی انتخاب کنید، به‌طوری که بزرگ‌ترین عضو آن k باشد. k را از ۱ تا n تغییر دهید و... .
- **مسئلهٔ ۷.** از میان اعضای یک تیم n نفره و یک تیم m نفره می‌خواهید تیمی k نفره انتخاب کنید. دوجور بشمارید.

چند روایت دربارهٔ چرتکه، قدیمی‌ترین ابزار محاسبه!

● **چرتکه در روم قدیم:** احتمالاً با چرتکه، این ابزار محاسبهٔ قدیمی، آشنایی دارید و اگر هم نمونه‌هایی از آن را ندیده باشید، تصویر آن را دیده‌اید! در سال‌های نه‌چندان دور در حجره‌های بازارهای کشورمان بسیاری از کسبه و تجار یکی از آن‌ها را روی میز کارشان داشتند. اما قدمت این وسیلهٔ جالب محاسباتی به قرن‌ها پیش و به روم باستان برمی‌گردد.

چرتکهٔ رومی شامل یک صفحه یا ورقهٔ فلزی با تعدادی شیارهای موازی برای شمارش خطوط بود. شمارنده‌ها، سنگ‌ریزه‌های کوچکی بودند که در شیارها جابه‌جا می‌شدند. کلمهٔ لاتین معادل سنگ‌ریزه «Calculus» است که واژه‌های «Calculate» به معنی «محاسبه» و «Calculator» به معنای محاسبه‌گر (و ماشین‌حساب) از آن گرفته شده است. نمادهای جمع (+) و تفریق (−) هم از نحوهٔ جابه‌جایی سنگریزه‌ها روی آن چرتکه‌ها گرفته شده‌اند.

● **چرتکه در اروپای غربی:** ریاضی‌دان نامی فرانسه، **ژان ویکتور پونسله** (۱۸۶۷–۱۷۸۸)، با درجهٔ ستوانی، **ناپلئون بناپارت** را در تهاجم سرنوشت‌ساز سال ۱۸۱۲ به روسیه همراهی می‌کرد. در پی شکست و عقب‌نشینی ناپلئون، پونسله اسیر و به شهر «ساراتوف» برده شد. او دو سال را در میان مردمان عادی در کنار رود «ولگا» زندگی کرد. در آن مدت پونسله از مشاهدهٔ نبوغ و توانایی روس‌ها در استفاده از چرتکه بسیار متعجب شده بود. به‌همین علت، وقتی پس از آزادی به فرانسه بازگشت، استفاده از این وسیله را به‌عنوان ابزاری آموزشی به همهٔ مدرسه‌های شهر «متز» در فرانسه توصیه کرد. کاربرد چرتکه به تدریج در همهٔ فرانسه رایج شد و از آنجا به کشورهای دیگر اروپای غربی راه یافت.

طی دو قرن گذشته، این وسیله به‌دلیل کارکردهای مناسب آموزشی خود در این کشورها (با وجود ماشین‌حساب‌های الکترونیکی مدرن) به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است.

● **چرتکه در ژاپن، حکایت دست‌ها:** وقتی در سال ۱۹۴۵ سربازان ارتش آمریکا ژاپنی‌ها را مغلوب کردند و وارد آن کشور شدند، مشاهده کردند که بازرگانان ژاپنی و دانش‌آموزان مدرسه‌ها محاسبه‌های عددی‌شان را با چرتکهٔ ژاپنی یا «سوروبان»[۱] انجام می‌دهند. آنان با توجه به اینکه حدس می‌زدند این یک وسیلهٔ ابتدایی است، ژاپنی‌ها را به‌خاطر استفاده از آن مورد تمسخر قرار می‌دادند. سربازان که احساس می‌کردند باید روش‌های مدرن خودشان را به آنان نشان دهند، یک مسابقهٔ سرعت محاسبه در توکیو برگزار کردند که حدود ۳۰۰۰ تماشاگر داشت. اما نتیجه آنان را شگفت‌زده کرد!

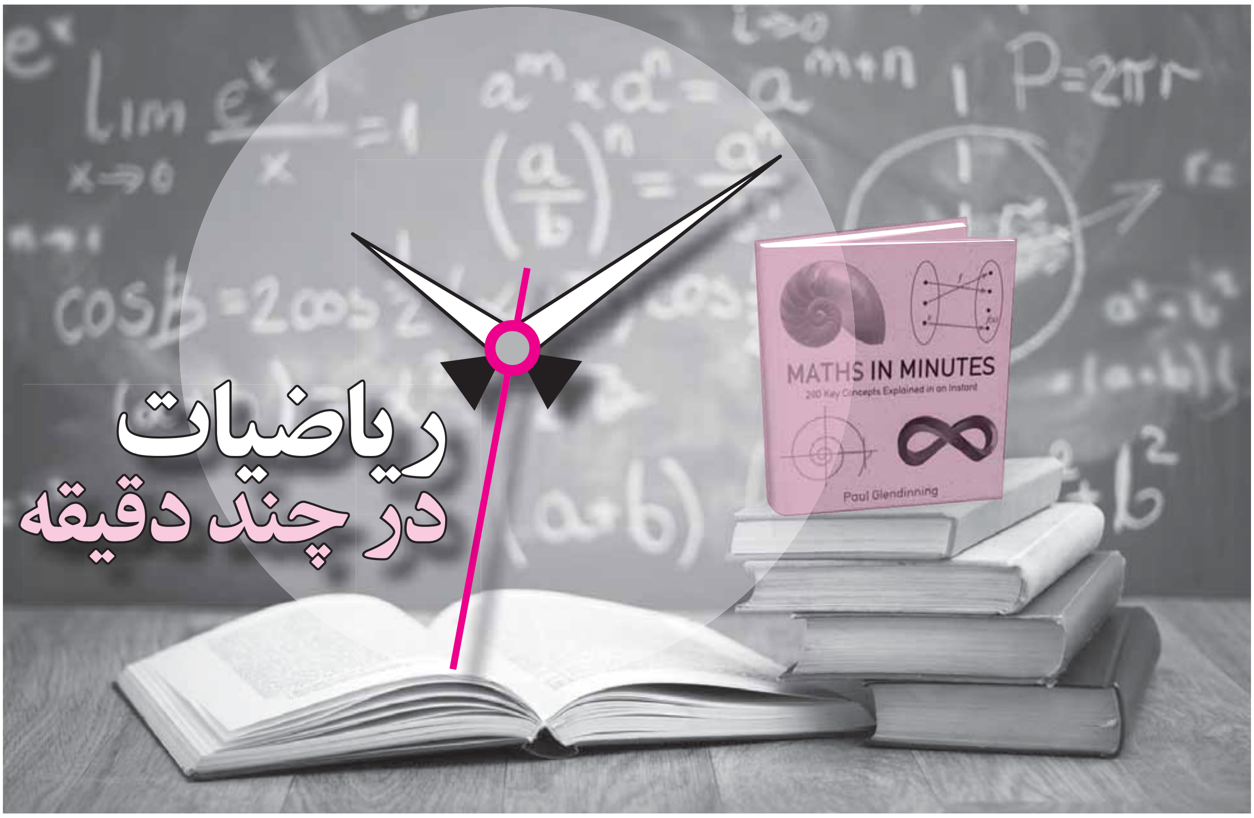
کیوشی ماتسوزاکی، جوان ۲۲ سالهٔ ژاپنی که کارمند وزارت ارتباطات بود، با یک سرباز ۲۲ سالهٔ آمریکایی که کارمند امور مالی و نام او **توماس یان وود** بود، رقابت کرد. ماتسوزاکی تجربهٔ هفت سال کار با چرتکه و یان وود تجربهٔ چهار سال کار با مدرن‌ترین ماشین‌حساب‌های رومیزی الکترونیکی را داشت. ماتسوزاکی از یک چرتکهٔ ابتدایی سوروبان استفاده کرد که ارزش آن در دوران جنگ ۲۵ سنت بود! ولی یان وود یک ماشین‌حساب الکترونیکی به ارزش ۷۰۰ دلار در اختیار داشت. ماتسوزاکی دست‌هایش را چنان چیره‌دستانه روی وسیله‌اش حرکت می‌داد که بلافاصله از طرف آمریکایی‌ها لقب «هندز» (دست‌ها!) را گرفت.

در دور مقدماتی مسابقه (عملیات جمع)، هندز در هر شش مرحله برنده شد! و یکی از اعمال را یک دقیقه زودتر از یان وود انجام داد! او همچنین در عملیات تفریق هم برنده شد. یان وود در عملیات ضرب پیروز شد، ولی عملیات تقسیم را هم هندز برد! و در مرحلهٔ نهایی که شامل هر چهار عمل اصلی بود، باز او برنده شد!

*پی‌نوشت

۱. sorbon: چرتکهٔ ژاپنی‌ها که از قرن چهاردهم به بعد متداول بوده و امروزه هم از آن استفاده‌های آموزشی می‌شود.

پال گلِندینینگ

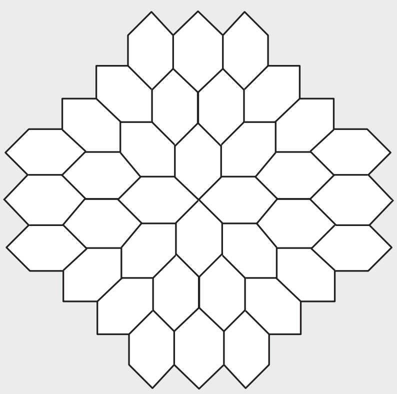


ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

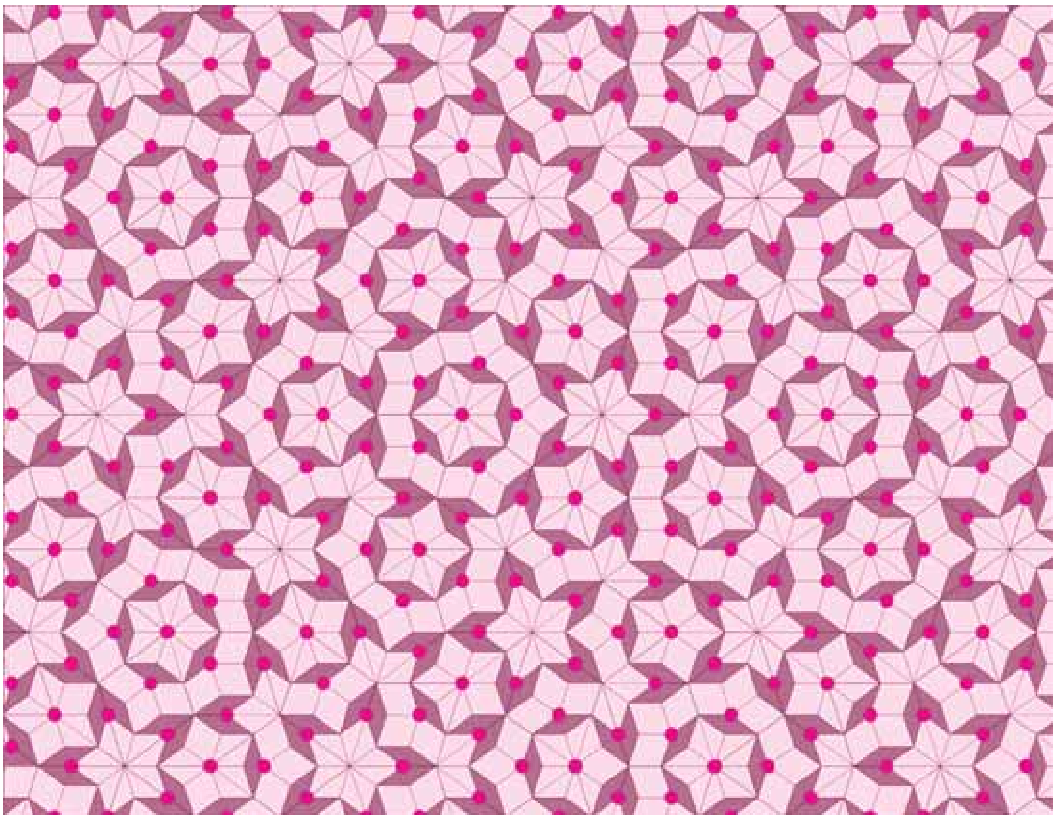
موزائیک‌بندی

می‌گوییم با شکل‌های دوبُعدی ناحیه‌ای را موزائیک‌بندی یا «موزائیک‌کاری» (tessallation) کرده‌ایم، اگر این شکل‌ها بتوانند همراه با هم، بدون وجود فاصله‌ای بین آن‌ها یا روی هم قرار گرفتن آن‌ها، برای پوشاندن آن ناحیه به‌کار روند. از میان چندضلعی‌های منتظم، تنها یک چهارضلعی (مربع) و یک شش‌ضلعی (شش‌ضلعی منتظم)می‌توانند کل صفحه‌ای را موزائیک‌بندی کنند.

اما موزائیک‌بندی‌های پیچیده‌تر را می‌توان با استفاده از ترکیب شکل‌ها ساخت. ساده‌ترین آن‌ها، معروف به «کاشی‌کاری متناوب» (periodic tilings)، دارای تقارن انتقالی‌اند که به این معناست که الگو را می‌توان در جهت مفروضی طوری تغییر مکان داد که دقیقاً روی خودش قرار گیرد.



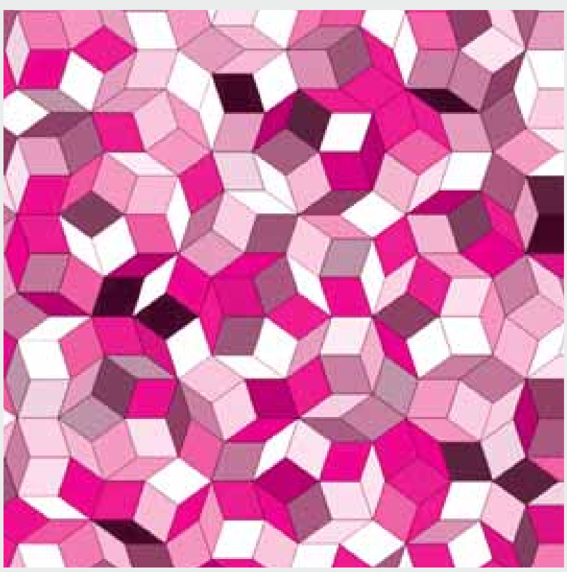
از میان چندوجهی‌های منتظم تنها مکعب است که می‌تواند فضای سه‌بُعدی را موزائیک‌بندی کند. اما با استفاده از چندوجهی‌های پیچیده‌تر، امکان دارد که تعداد بسیاری موزائیک‌بندی به‌دست آوریم که به کندوی عسل موسوم‌اند. این‌ها در شیمیِ کریستال‌ها که در آن‌ها رئوس چندوجهی‌ها موقعیت‌های اتم‌ها را در کریستال مشخص می‌کنند، دارای اهمیت‌اند، تحلیل کندوی عسل ۲۳۰ موزائیک‌بندی مستقل را آشکار می‌کند که حوزهٔ ساختارهای ممکن کریستال را محدود می‌کنند.



کاشی‌کاری پِن‌رُز

«کاشی‌کاری پِن‌رُز» (Penrose tiling) ردهٔ خاصی از کاشی‌کاری است که از دو شکل اساسی متفاوت استفاده می‌کنند. این کاشی‌کاری‌های غیرمتناوب که در نیمهٔ دههٔ ۱۹۷۰ توسط **راجز پِن‌رُز** (Roger Penrose)، نظریه‌پرداز فیزیک، کشف شدند، در الگویی متناوب تکرار نمی‌شوند.

جالب است که ثابت شده، این اشیای مجرد کاربردی طبیعی دارند. در اوایل دههٔ ۱۹۸۰، دانشمندان مواد ساختارهای غیرمتناوبی موسوم به «شبه‌کریستال‌ها» (quasicrystals) با توصیف ریاضی مشابه کشف کردند. این اشیا می‌توانند به‌عنوان پوشش‌های سخت برای مواد دیگر به کار روند و اصطکاک بسیار پایینی دارند.

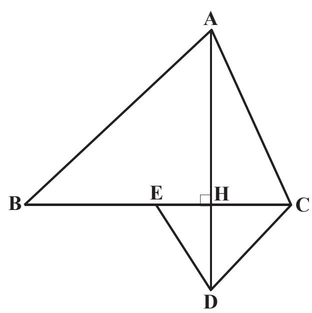


ساده‌ترین کاشی‌کاری‌ها با استفاده از یک لوزی «چاق» و یک لوزی «لاغر»، چنانچه در شکل مقابل نشان داده شده است، ساخته می‌شود. لوزی شکلی است با چهار ضلع برابر که در آن هر جفت ضلع مقابل موازی‌اند. اما هنوز مشخص نیست که آیا امکانِ یافتن شکلی منفرد که بتواند با ویژگی‌های یکسان کنار هم قرار داده شود، هست یا نه.

هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

هندسهٔ ۱ (پایهٔ دهم)

۱. در شکل ۱ داریم: $DE\parallel AC$، $CD\parallel AB$، $AD\perp BC$ و E وسط BC است.
الف) AH چند برابر DH است؟
ب) مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث DEC است؟



شکل ۱.

۲. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث.

۳. ثابت کنید هرگاه در یک چهارضلعی، هر دو رأس مقابل، از قطر بین این دو رأس (قطری که این دو رأس بر آن واقع نیستند) به یک فاصله باشند، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

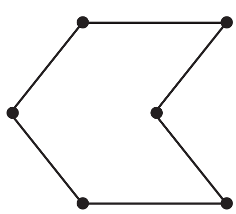
۴. ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم می‌پیوندد، موازی قاعده‌ها و طول آن میانگین طول‌های آن‌هاست.

هندسهٔ ۲ (پایهٔ یازدهم)

۱. تبدیل یافتهٔ مستطیل ABCD را با تبدیل تجانس به مرکز O (نقطهٔ تلاقی اقطار مستطیل) و با ضریب $k=۲$ و بار دیگر با تجانس به همان مرکز و ضریب $k=-۲$ رسم کنید. آیا می‌توان گفت نتیجهٔ این دو تبدیل یکسان است؟

۲. نقطهٔ B، مجانس نقطه A با ضریب $k>۰$ و مرکز O است و نقطهٔ C انتقال یافتهٔ B در راستای بردار معین $\vec{u}$ است. اگر B' انتقال یافتهٔ A تحت بردار $\vec{u}$ و C' مجانس B' با ضریب k و مرکز O باشد، ثابت کنید C' مجانس C با ضریب k و مرکز B است.

۳. شکل ۲ به کمک شش عدد چوب کبریت یکسان و دوبه‌دو موازی روی صفحهٔ کاغذی ساخته شده بود. **علی** توانست فقط با جابه‌جا کردن دوتا از چوب‌کبریت‌ها آن را به شکل بستهٔ دیگری تبدیل کند که مساحت آن ۵۰ درصد بیشتر از این شکل شد. چوب‌کبریت‌های این شکل با یگدیگر چه زاویه‌هایی ساخته‌اند؟



شکل ۲.

آمار و احتمال

۱. در یک جعبه ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب پیشامدهای مشاهدهٔ مهرهٔ آبی در انتخاب اول و دوم باشند، آیا A و B مستقل‌اند؟

۲. در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد مشاهدهٔ عددهای ۱، ۲ یا ۵ در پرتاب دوم، B پیشامد مشاهدهٔ ۴، ۵ یا ۶ در پرتاب دوم و C پیشامد مشاهدهٔ مجموع ۹ در این دو پرتاب باشند، مستقل بودن سه پیشامد A، B و C را بررسی کنید.

۳. **محسن** و **مجید** دو دوست قدیمی هستند. اگر A پیشامد حضور محسن در مراسم تدفین مجید و B پیشامد حضور مجید در مراسم تدفین محسن باشد، آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟

۴. برای دو پیشامد مستقل A و B داریم: $P(A)=\frac{3}{8}$ و $P(B)=\frac{8}{9}$. حاصل P(B-A) را به‌دست آورید.

۵. در یک فروشگاه بزرگ مشخص شده است که از هر ۱۲ نفر که وارد فروشگاه می‌شوند، ۳ نفر از آن‌ها خرید می‌کنند. اگر در یک زمان معین، ۵ نفر داخل فروشگاه باشند، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر پنج نفر خرید کنند.

ب) فقط یک نفر خرید کند.

ج) یک یا دو نفر خرید کند.

۶. ۴۰ درصد دانشجویان یک دانشگاه ساکن همان شهر هستند. اگر ۲ نفر از دانشجویان این دانشگاه را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر دو نفر ساکن این شهر باشند، چقدر است؟

ریاضی۲ (پایهٔ یازدهم تجربی)

۱. سه تابع با ضابطه‌های $f(x)=(0/2)^x$، $g(x)=(\frac{2}{5})^x$ و $h(x)=4^x$ مفروض‌اند. نقاط زیر روی نمودار کدام‌یک از آن‌ها قرار دارند؟

الف) $(-2,6/25)$

ب) $(-1,5)$

پ) $(-2,0/0625)$

ت) $(-1,2/5)$

ث) $(3,64)$

ج) $(2,0/04)$

۲. معادلهٔ نمایی زیر را حل کنید.

$$3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=13x(2^x)$$

۳. فرض کنید: log۲=a و log۳=b. حاصل $\log^{36}_{\sqrt{10}}$ را برحسب a و b بنویسید.

۴. معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log x+\log(x-1)=\log 6$

ب) $(\log x)^2-11\log x+10=0$

ریاضی۱ (پایهٔ دهم رشته‌های ریاضی و تجربی)

۱. به ازای کدام مقدار m رابطهٔ زیر یک تابع است؟

$$f=\{(3,2),(2,1),(3,m^2-2),(m,4)\}$$

۲. اگر برد تابع خطی $f(x)=5-2x$، بازهٔ [-۲,۱] باشد، دامنهٔ این تابع را به‌دست آورید.

۳. اگر $f(x)=\frac{ax+9}{x+a}$ یک تابع ثابت باشد، مقادیر ممکن برای a را تعیین کنید.

۴. برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ را به‌دست آورید.

حسابان ۱ (پایهٔ یازدهم ریاضی)

۱. طول سه ضلع یک مثلث ۱، log۲ و logn است. چند عدد طبیعی به جای n می‌تواند قرار گیرد؟

۲. می‌دانیم: $\log 2=0/301$ و $\log 3=0/477$. در این صورت کدام‌یک از دو عدد 5^{200} و 3^{273} بزرگ‌ترند؟

۳. یک تابع $f:R^+\to R^+$ معرفی کنید که برای هر دو عدد a و b از دامنهٔ آن داشته باشیم:

$$f(ab)=af(b)+bf(a)$$

❊**راهنمایی:** فرض کنید f(x)=xg(x).

۴. جمعیت ماهی‌های خاویار در یک منطقهٔ دریای خزر از رابطهٔ $f(t)=20000\times(2/7)^{0/14t}$ تعیین می‌شود (t برحسب سال). سالانه چند درصد به جمعیت آن افزوده می‌شود؟

❊**راهنمایی:** $\text{افزایش سالانه به درصد}=\frac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}\times 100$

۵. معادلهٔ $2^x+3\log x-2=0$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

هندسهٔ تربیع
و ارتباط آن با علوم گوناگون

مریم شاه‌محمدی
دبیر منطقه یک
آموزش‌وپرورش
شهر تهران

اشاره

مسئلهٔ تربیع یکی از مســائل جالب، قدیمی و مطرح در هندسه، نجوم، عرفان و فقه اسلامی بوده است. شــکل مربع را همه از طریق علم هندسه به‌صورت یک چهارضلعی که چهار گوشهٔ آن عمودبرهم هستند، درک کرده‌اند. ولی در درک شــهودی از مربع، احساساتی مانند تعادل، تقارن، فردیت، قدرت، سنگینی، امنیت و... مطرح شده اســت. از طرف دیگر، با توجه به اینکه چهارگوش (مربع واحد) به‌عنوان یک شکل هندسی، در محاســبهٔ مساحت به‌طور خاص مطرح است، در مقالهٔ حاضر ســعی شده است با تبیین مسئلهٔ تربیع در هندسه و چگونگی تربیعِ برخی از شکل‌ها، ارتباط بین مساحت شکل‌های هندسی و مربع مطرح شود. همچنین با اشارهٔ اجمالی به موضوع تربیع در نجوم و فقه، نمونه‌هایی از کاربرد آن در ادبیات، معماری و عرفان اسلامی مورد بررسی قرار گیرد.

کعبه در تربیع همچون تخت نرد مهره‌باز — کعبتین جان‌ها و نرّاد انسی و جان آمده

خاقانی

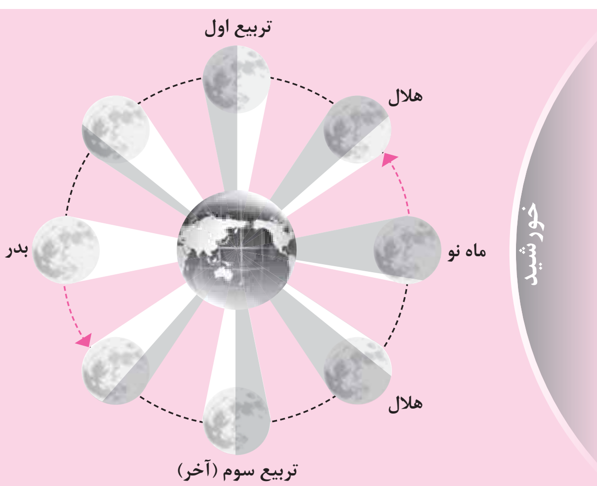
کلیدواژه‌ها: **تربیع، هندسه، نجوم، عرفان، معماری**

مقدمه

«تربیع» در لغت به معنای چهارسوی کردن و چیزی را چهارسو ساختن اســت (لغت‌نامهٔ دهخدا). در علم نجوم، به روشن بودن یک چهارم ماه در شــب‌های هفتم و بیســتم و یکم هر ماه قمری اطلاق شده اســت (فرهنگ معین). تربیع در هندسه و در مورد شکل‌های هندسی به معنای ترسیم مربعی است که مساحتش با مساحت شکل مفروض برابر باشد.

اگرچه تربیع واژهٔ مشــترکی در هندســه و نجوم است، اما بیانِ تعاریف آن در هر یک، تمایز این ارتباط را آشکار خواهد ساخت. تربیع در هندسه به معنای مطلق چهارگوش (مربع و مستطیل) است و در اصطلاح نجوم عبارت اســت از قرار گرفتن ماه در وضعی که نیمی از آن روشن دیده می‌شود و حالت نیمه روشنی میان دو برج یا دو سیاره اســت. به نوشتهٔ ابوریحان بیرونی در کتاب «التفهیم»، اگر فاصلهٔ ماه از خورشید، به اندازهٔ ســه برج (۹۰ درجه) باشد، آن را «تربیع اول» می‌نامند که تقریباً در شب هفتم ماه قمری رخ می‌دهد. اگر این فاصله به اندازهٔ نه برج (۲۷۰ درجه) باشــد، آن را «تربیع دوم» می‌نامند که زمان آن تقریباً شب بیست‌ویکم ماه قمری است (شکل ۱).

دانشــمندان علم نجوم قدیم و به دنبال آن شاعران کهن، حالت تربیعِ ســیاره‌ها را به حالت نیمه دشمنی تعبیر کرده‌اند و در منابع و متون قدیمی دورهٔ اســلامی شواهد بسیاری مبنی بر وجود اعتقاد به نحــس بودن تربیعِ نجومی وجود دارد. هر چند حرکات و صور فلکی

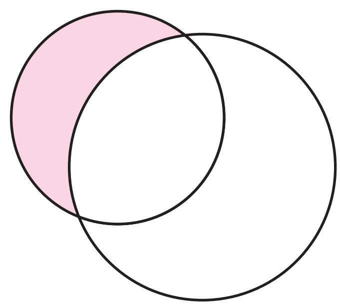


شکل ۱. نمایش تربیع در نجوم

و اجرام آسمانی بر زندگی بشر تأثیرات فراوانی دارند، با این حال وقتی به آموزه‌های اسلامی توجه می‌شود، نتیجه می‌گیریم که نباید به این امور بیش از حد مجاز اعتنا کرد و کل برنامه‌های زندگی خود را براساس آن‌ها تنظیم کرد. البته این مطلب را هم نباید نادیده گرفت که به اعتراف خود منجمان، این‌گونه برداشت‌های غیرمادی و حکم‌های غیبی از حالت‌های نجوم و ستارگان، دقیق و قطعی نیست و فقط تصورات ذهنی و احتمالی است.

پیشینه‌ای بر تربیع شکل‌های هندسی

در نظر یونانیان، مسئلهٔ تربیع یک شکل به این معنا بود که بتوانند با خط‌کش، تراز چوبی و پرگار، مربعی به مساحتی برابر شکل موردنظر ترسیم کنند. اگر چنین کاری برای یک شکل خاص میسر بود، اصطلاحاً آن را «تربیع‌پذیر» می‌گفتند. آن‌ها از این راه توانسته بودند به چگونگی محاسبهٔ مساحت هر شکل پهلودار پی ببرند. زمانی که مسئلهٔ محاسبهٔ مساحت دایره پیش آمد، دریافتند که تربیع دایره، مسئله‌ای حل‌نشدنی به نظر می‌رسد. **بقراط خیوسی**، ریاضی‌دان یونانی، نخستین کسی بود که راه‌حلی برای تربیع هلال[۱] (اینکه چگونه می‌توان مربعی رسم کرد که مساحت آن با مساحت هلال مفروض برابر باشد) پیدا کرد (شکل ۲).



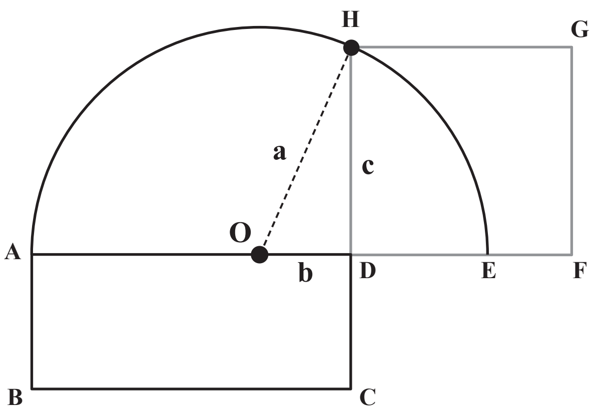
شکل ۲. نمایش هلال

تربیع هلال را می‌توان یکی از نخستین اثبات‌های هندسی تاریخ ریاضیات محسوب کرد. از دانشمندان دورهٔ اسلامی، تنها **ابن‌هیثم** رسالهٔ مستقلی دربارهٔ تربیع دایره با نام «فی تربیع‌الدایره» تألیف و در آن (ص ۸۵) از «رسالهٔ مساحة الدایره» **ارشمیدس** یاد کرده است. بعضی از دانشمندان دورهٔ اسلامی، از جمله ابوریحان بیرونی و **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** نیز در بررسی این موضوع، به تعیین نسبت دایره به قطر آن پرداختند. تکلیف مسئلهٔ تربیع دایره را سرانجام **فردیناند فون لیندمان**[۲]، ریاضی‌دان آلمانی، روشن کرد. اثبات لیندمان بسیار پیچیده است. ولی بعدها، **ایوان نیون**[۳]، ریاضی‌دان انگلیسی، اثبات‌های ساده‌تری یافت که برای هر دانشجوی ریاضی درک‌شدنی است.

تربیع چندضلعی و هلال

مسئلهٔ ۱: تربیع مستطیل: چگونه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش مربعی ساخت که مساحتش با مساحتِ مستطیل مفروض برابر باشد؟

مستطیل دلخواه ABCD را در نظر بگیرید. AD را امتداد می‌دهیم و به کمک پرگار به مرکز D و شعاع CD کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ E مشخص شود. وسط AE را O می‌نامیم. اگر به مرکز O و شعاع AO=EO نیم‌دایره‌ای رسم کنیم، امتداد CD را در H قطع می‌کند. بدین ترتیب مربعی که به ضلع DH ایجاد می‌شود، مربع موردنظر است (شکل ۳)



شکل ۳. نمایش تربیع مستطیل

برهان: طول‌های OH، OD و DH را به‌ترتیب a، b و c در نظر بگیرید، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad (۱)$$

$$\overline{AD} = a + b \quad (۲)$$

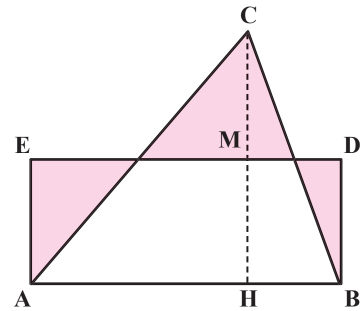
$$\overline{CD} = \overline{DE} = a - b \quad (۳)$$

$$S_{ABCD} = \overline{AD} \times \overline{CD} = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = c^2 = S_{DFGH} \quad (۴)$$

مسئلهٔ ۲: تربیع مثلث: چگونه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش مربعی ساخت که مساحتش با مساحتِ مثلث مفروض برابر باشد؟

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و ارتفاع CH را رسم کنید. وسط CH را M بنامید و مستطیل ABDE را به گونه‌ای رسم کنید (شکل ۴) که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\overline{DB} = \overline{EA} = \overline{MH} \quad (۵)$$

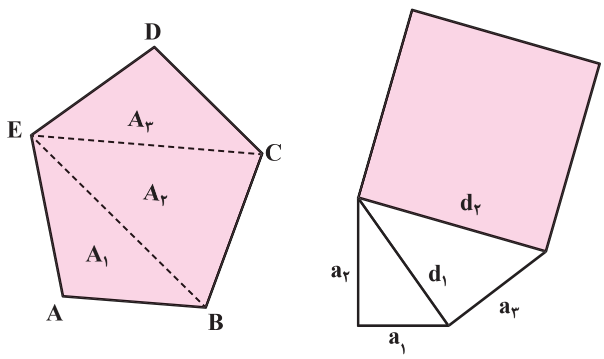


شکل ۴. نمایش تربیع مثلث

با توجه به قضیهٔ تالس و هم‌نهشتی مثلث‌های کوچکِ ایجاد شده، می‌توان نشان داد که این مستطیل مساحتی برابر مثلث مفروض دارد و به راحتی نظیر مسئلهٔ ۱ تربیع‌پذیر خواهد شد.

مسئلهٔ ۳: تربیع چندضلعی: چگونه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش یک چندضلعی دلخواه را تربیع کرد؟

برهان: هر چندضلعی را می‌توان با رسم قطرهایش به تعدادی مثلث تقسیم کرد (شکل ۵) و طبق مسئلهٔ ۲، این مثلث‌ها تربیع‌پذیر هستند.



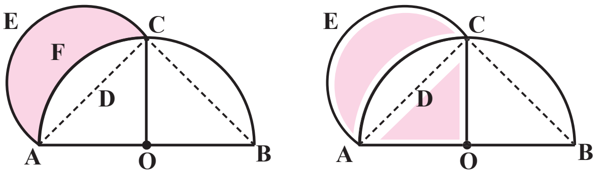
شکل ۵. نمایش تربیع چندضلعی

بدین‌ترتیب مربع‌هایی با اضلاع a_1، a_2 و a_3 که مساحتشان به ترتیب برابر A_1، A_2 و A_3، باشد، قابل ساختن است. یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a_1 و a_2 و وتر d_1 تشکیل می‌دهیم. همچنین یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع d_1 و a_3 و وتر d_2 تشکیل می‌دهیم. مربعی که به ضلع d_2 رسم می‌شود، جواب مسئله است.

$$d_2^2 = d_1^2 + a_3^2 = (a_1^2 + a_2^2) + a_3^2 = A_1 + A_2 + A_3 \quad (۶)$$

مسئلهٔ ۴: تربیع هلال: چگونه می‌توان مربعی رسم کرد که مساحتش با مساحت هلال مفروض برابر باشد؟

قضیهٔ بقراط: در نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB، با فرض عمود بودن OC بر AB، هلال AECF که از تقاطع نیم‌دایرهٔ مفروض با نیم‌دایره‌ای به قطر AC حاصل می‌شود، تربیع‌پذیر است (شکل ۶).



شکل ۶. نمایش قضیهٔ تربیع هلال

برهان: از نقطهٔ C به نقاط A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث AOC و BOC هم‌نهشت هستند و داریم:

$$\overline{AC} = \overline{BC} \quad (۷)$$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACB داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2 \quad (۸)$$

$$\overset{(7),(8)}{\Rightarrow} \frac{S_{\overset{\frown}{AEC}}}{S_{\overset{\frown}{ACB}}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{2} \quad (۹)$$

از طرف دیگر:

$$S_{\overset{\frown}{AFCO}} = \frac{1}{2} S_{ACB} \quad (۱۰)$$

$$\overset{(9),(10)}{\Rightarrow} S_{\overset{\frown}{AEC}} = S_{\overset{\frown}{AFCO}} \rightarrow S_{\overset{\frown}{AEC}} - S_{\overset{\frown}{AFCD}} = S_{\overset{\frown}{AFCO}} - S_{\overset{\frown}{AFCD}} \quad (۱۱)$$

$$S_{\overset{\frown}{AECF}} = S_{\Delta ACO} \quad (۱۲)$$

با تربیع مثلث ACO به روش مسئلهٔ ۲، اثبات پایان می‌یابد.

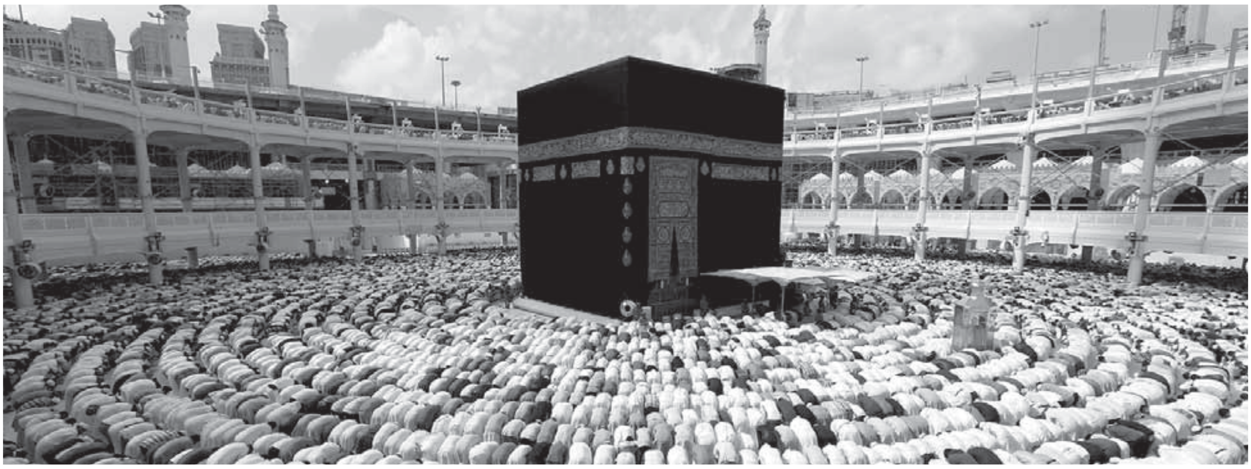
نمونه‌هایی از تربیع در عرفان اسلامی و هندسه معماری

۱. زبانِ رمزی هندسه، به ماهیت و ذات پدیده‌ها اشاره دارد

در کتاب‌های عرفان اسلامی، تربیعِ دایره و تبدیل دایره به مربع و به مانند آن، شبیه‌سازی فضای کروی طواف دور کعبه، یکی از رمزهای خانهٔ خدا تلقی شـده است. در سنت اسـلامی، مکعب با رازِ کعبه در ارتباط است. شـکل مربع و مکعب در معماری ایران، فقط یک شکل چهارگوش نیسـت، بلکه رمزِ کمال و بازتاب معبدِ چهارگوش بهشتی اسـت که کعبه تصویرِ زمینی آن اسـت. مکعب، بدون در نظر گرفتن جهت‌های شـش‌گانه‌اش، متوجه مرکز است و به وحدت و یکپارچگی پنهان در شکلِ خویش و به عبارت دیگر، به وحدت عالم مادی اشاره دارد.

شـکل مکعب و به دنبال آن مربع، از نظـر تمام ادیان و مکاتب معتقد به ماوراءالطبیعه، رمزِ ماده و جسـم تلقی می‌شـود و به عالم محسوس و دنیا تعبیر می‌گردد [اردلان، ۱۳۸۰: ۲۷].

در معماری سنتی، در بیشـتر موارد، برای تبدیل دایره به مربع، از شکل مثلث استفاده شده است. مربع، منسجم‌ترین صورت خلقت، معرف زمین و نمایندهٔ کمیت است. و دایره، معرف آسمان، نمایندهٔ کیفیت. و این دو شکل، از طریق مثلث که شامل هر دو جنبه است، ترکیب می‌شوند.



شکل ۷. فضاسازی کعبه و رمز کیهانی تربیع دایره

۲. فضاسازی کعبه، رمز کیهانی تربیع دایره

فضاسازی کعبه براساس دو ساختار هندسی مربع یا مکعب (خود کعبه) و دایره (محوطه‌ای که طواف را به صورت دایره میسر می‌سازد) صورت گرفته است. انتخاب دو شکل دایره و مربع توسط خداوند برای فضاســازی کعبه، قطعاً رازها و بنیان‌هایی را در خود به امانت دارد و معماران اهل ذکر همواره در پی کشــف نسبت این شکل‌ها (مربع و دایره) و بازگشــایی رموز زیباشناســانهٔ آن‌ها و کاربرد این معانی در طرح‌ها و پلان‌های خود بوده‌اند. کاربرد طرح‌های هندسی و الگوهای ریاضی در هنر اسلامی بیانگر همین حقایق است.

هندسه و ریاضیات، نمایندهٔ جهان عقلی و نمونهٔ اعلایی است که خداوند، جهان جســمانی‌ای را که ما در آن زندگی می‌کنیم، از روی آن‌ها آفریده اســت. کعبه (خانهٔ خدا) رمــزِ نقطه‌ای واحد و در مرکز زمین اســت و فضا را قطبی می‌ســازد. مربع صورت ظاهر و تجسم یافتهٔ کعبه اســت و بر چهار رکن ســبحان‌الله، والحمدالله، و لااله الا الله و الله‌اکبر استوار است. «تربیع دایره» که برای مدت‌های طولانی ذهن بشــر را معطوف خود ساخته و از آن به «ماندالا»[۴] نیز یاد شده، «مجموعه‌ای از راز معرفت اســت» که در طــول تاریخ، در اعتقادات تمدن‌های دینی، همواره معادل‌های خود را یافته است.

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که مطرح شــد، مربع از لحاظ دیداری، شــکلی است متعادل، محکم و ایســتا و نموداری از استواری، سکون و منطق و در عرفان، معرف زمین اســت. هندسهٔ تربیع و متمایل کردن شکل‌های هندســی به ســمت مربع، نه‌تنها در قرون کهن و برای ریاضی‌دانان یونانــی دارای اهمیت خاصی بوده، بلکه در معماری اســلامی نیز از اهمیت بسزایی برخوردار است و در فرهنگ ایرانی جایگاه مخصوص و ویژه‌ای دارد.

چهار ضلع مساوی مربع می‌تواند نماد چهار عنصر باد، آب، خاک و آتش یا در چهار جهت اصلی شــمال، جنوب، شرق و غرب یا چهار فصل یا چهار مرحلهٔ زندگی از کودکی تا جوانی و میان‌سالی و پیری و یا چهار طبع سردی، گرمی، خشکی و رطوبت باشد. **افلاطون** مربع را بــه معنای مطلق زیبا می‌داند. و **نظامی گنجوی** شــاعر بلندمرتبه ایرانی در انکار عقاید برخی منجمان که معتقد به نحسی تربیع بودند و ستایش حالت‌های تربیع نجومی می‌گوید:

چو سیــارهٔ مــشتری ســربلند — نظرهای او یک‌به‌یک سودمند
به تربیع و تثلیث گوهرفشان — مــربــع‌نــشین و مــثلث‌نــشان

پی‌نوشت‌ها

۱. شکل حاصل از تقاطع دو دایره را که بین دو کمان مقعر از آن دو دایره محسوب است، «هلال» می‌نامند.
2. Ferdinand von Lindemann
3. Ivan Niven
۴. در زبان سانســکریت به معنای دایره است و در شکل‌های گل، دایره، صلیب و یا چرخ با گرایش به ساختار چهار بخشی دیده می‌شود.

منابع

1. Corso, Alberto. Hippocrates Quadrature of The Lune, MA 330-History of Mathematics.
2. Dantzig, T. (1955). The Bequest of the Greeks, George Allen & Unwin Ltd., London.
3. Dedron, P and Itard, J. (1973). Mathematics and Mathematicians, Vol. 2, translated from French, by J.V. Field, The Open University Press, England.
4. Dunham, W. (1990). Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics.
5. Gow, J. (1968). A Short History of Greek Mathematics. Chelsea Publishing Company
6. Heath, T. (1956). The Thirteen Books of Euclid's Elements. Vol 1. Dover
7. Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. Dover Publications reprint.
8. Kustner, W.G.H. and M.H.H. (1975). The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics, Van Nostrand Rusinhold Company.
9. Otero, D. (2008). "The Quadrature of the Circle and Hippocrates' Lunes."
10. Sarva Jagannadha Reddy, R.D. (2014). Pi of the Circle at www.rsjreddy. webnode. com

۱۱. اردلان، نادر و بختیار (۱۳۸۰). «حسن وحدت». سازمان زیباشناسی شهر تهران.
۱۲. گنون، رنه (۱۳۸۴). «سیطرهٔ کمیت و علائم آخرالزمان». ترجمهٔ علی‌محمد کاردان. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ سوم.
۱۳. تقی‌زاده. (۱۳۸۳)، «کعبه تجلی و تفسیر زیبایی هستی»، نشریه هنرهای زیبا. شمارهٔ ۱۷.

هندسهٔ ۱

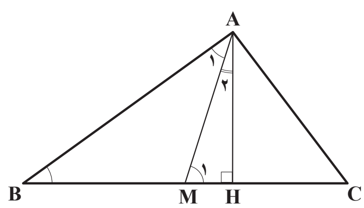
۱. به کمک قضیهٔ خطوط موازی و مورب درمی‌یابیم که: $D\hat{E}C = A\hat{C}B$ و $D\hat{C}E = A\hat{B}C$. در نتیجـه مثلث‌های ABC و DEC متشـابه‌اند و نسبت تشـابه آن‌ها برابر اسـت با: $\frac{CE}{BC}=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه: $\frac{AH}{DH}=۲$ و $\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}}=۴$.

۲. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین:

$$AM = MB = MC = \frac{BC}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱,\ \hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} = ۲\hat{A}_۱ = ۲\hat{B}$$

$$\hat{A}_۲ = ۹۰ - \hat{M}_۱ = ۹۰ - ۲\hat{B} = \hat{B} + \hat{C} - ۲\hat{B} = \hat{C} - \hat{B}$$



شکل ۳.

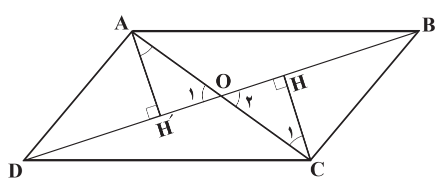
و در حالتی که $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، به طریق مشابه داریم: $\hat{A}_۲ = \hat{B} - \hat{C}$

و بنابراین: $\hat{A}_۲ = |\hat{B} - \hat{C}|$.

۳. مطابق فرض در شکل ۴ داریم: CH=AH´، $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$

بنابراین: $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ (چرا؟)

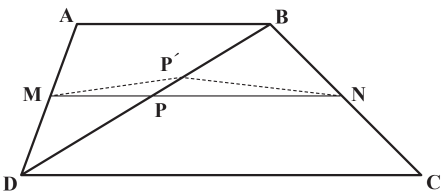
پس: (زض‌ز) $\Delta AOH' \cong \Delta COH$ و در نتیجه: AO=OC.



شکل ۴.

به طریق مشـابه، با توجه به اینکـه دو رأس B و D نیز از قطر AC بـه یک فاصله‌اند، می‌توان ثابت کـرد: BO=OD و در نتیجه قطرهای چهارضلعـی یکدیگر را نصف می‌کنند و طبق قضیه‌های گفته شـده، ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۴. مطابـق شـکل ۵، ABCD ذوزنقه و M و N وسـط‌های AD و BC هستند. قطر BD را رسم می‌کنیم. با برهان خلف نشان می‌دهیم P (نقطهٔ برخورد MN و BD) وسـط BD اسـت. اگر چنین نباشد، وسط BD را P´ می‌نامیـم و M و N را به P´ وصل می‌کنیم. در مثلث‌های DAB و BDC داریم:



شکل ۵.

$$\frac{DM}{MA} = \frac{DP'}{P'B} = ۱ \Rightarrow MP' \parallel AB,\ \frac{DP'}{P'B} = \frac{NC}{NB} = ۱ \Rightarrow P'N \parallel CD$$

و چـون: AB||CD، پس P´N و P´M هر دو موازی قاعده‌های AB و CD و در نتیجه در یک راستا هستند. لذا P´ بر P منطبق است و داریم: MN||AB||CD و نیز داریم:

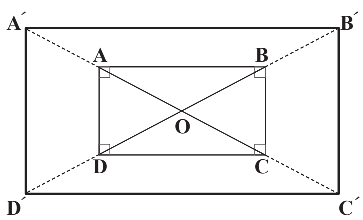
$$\left.\begin{array}{l} \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MP = \frac{۱}{۲}AB \\ \frac{PN}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow PN = \frac{۱}{۲}CD \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow MP + PN = MN = \frac{۱}{۲}(AB + CD)$$

هندسهٔ ۲

۱. در تبدیل T (تجانس به مرکز O و k=۲) تبدیل‌یافتهٔ A، A´ و تبدیل‌یافتهٔ B، B´ و... است:

$$T(A) = A', T(B) = B', T(C) = C', T(D) = D'$$



شکل ۶.

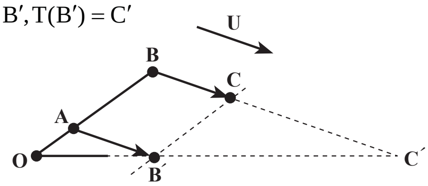
اما اگر T´ تجانس به مرکز O و k=-۲ باشد، داریم:

$$T'(B) = D',\ T'(A) = C', T'(C) = A', T'(D) = B'$$

با این دو تبدیل مجموعه نقاط مستطیل ABCD به مجموعه نقاط مسـتطیل A´B´C´D´ تبدیل می‌شود، اما تبدیل‌یافته‌های نقاط با هم متفاوت‌اند.

۲. اگـر T، تجانس به مرکز O و ضریب k و ´T انتقال با بردار $\vec{u}$ باشـد، داریم:

$$T(A)=B,\ T'(B)=C$$
$$T'(A)=B',\ T(B')=C'$$



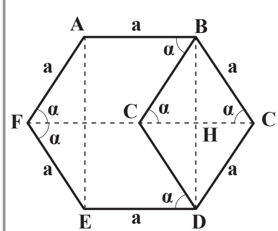
شکل ۷.

حال مطابـق تعریف تبدیل‌های فـوق داریم: $AB'=BC=|\vec{u}|$ و $\frac{OB}{OA}=\frac{OC'}{OB'}=k$.

بنابرایـن طبق عکس قضیهٔ تالس داریـم: $AB'\|BC'$ و $\frac{BC'}{AB'}=k$

همچنین: $\vec{u}\,\|\,BC\,\|\,AB'$. لذا B، C و ´C روی یک خط راسـت‌اند و داریـم: $BC'=k.AB'$. در نتیجه ´C مجانس C به مرکز B و ضریب k است.

۳. اگر بازتاب‌های BC و CD را نسبت به BD رسـم کنیم، شـش‌ضلعی بسـتهٔ ABCDEF به شـش‌ضلعی ABC´DEF تبدیـل می‌شـود که محیـط آن با محیط شـش‌ضلعی ABCDEF برابر و مسـاحت آن ۵۰ درصد بیشتر است.

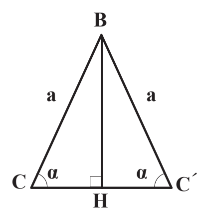


شکل ۸.

$$S_{BC'DC}=\frac{1}{2}S_{ABCDEF}\Rightarrow S_{BCC'}=\frac{1}{2}S_{ABCF}$$

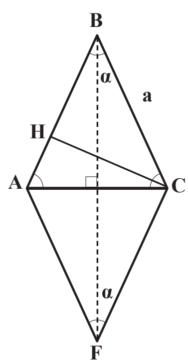
$$\sin\alpha=\frac{BH}{a}\Rightarrow BH=a.\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{C'H}{a}\Rightarrow C'H=a\cos\alpha$$



شکل ۹.

$$S_{BCC'}=\frac{1}{2}BH.CC'=\frac{1}{2}(a\sin\alpha)(2a\cos\alpha)$$
$$=a^2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$S_{ABCF}=2S_{ABC}=2\times\frac{1}{2}CH.AB=CH.AB$$
$$=(a\sin\alpha).(a)=a^2\sin\alpha$$



شکل ۱۰.

$$\Rightarrow a^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

بنابراین چوب‌کبریت‌ها با هم زاویه‌های 60° و 120° می‌سازند.

آمار و احتمال

۱. در این مسئله داریم: $P(A)=\frac{5}{8}$. اگر C پیشامد مشاهدهٔ مهرهٔ قرمز در انتخاب اول باشد، داریم:

$$P(B)=P(C)P(B|C)+P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{8}$$

همچنین داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

پس:

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$. بنابراین A و B مستقل نیستند.

۲. در ایـن مسـئله داریـم: $P(A)=P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ و همچنیـن: $P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. از سوی دیگر داریم:

$$P(B\cap C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\ \text{و}\ P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}$$
$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\ \text{و}\ P(A\cap C)=\frac{1}{36}$$

پس:

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$. بنابراین سه پیشامد A، B و C مستقل نیستند.

۳. پیشامدهای A و B ناسازگارند و احتمال هیچ‌یک صفر نیست، بنابراین نمی‌توانند مستقل از یکدیگر باشند و وابسته‌اند.

۴. اگر A و B مستقل باشند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{8}\times\frac{8}{9}=\frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

۵. احتمال خرید کردن از این فروشـگاه $P=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ است. بنابراین با توجه به مستقل بودن خرید مشتری‌ها از فروشگاه داریم:

الف) $\frac{1}{4}\times\ldots\times\frac{1}{4}=(\frac{1}{4})^5$

ب) $\binom{5}{1}(\frac{1}{4})^1\times(\frac{3}{4})^4$

ج) $\binom{5}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^4+\binom{5}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^3$

۶. انتخـاب دانشـجویان از یک جامعـهٔ پرجمعیت اسـت و می‌توانیم آن‌ها را مسـتقل بگیریم. پس احتمال خواسـته شده عبارت است از: $0/4\times0/4=0/16$.

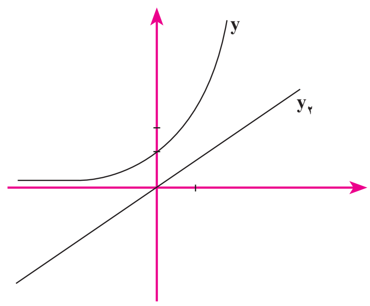
توابع نمایی و لگاریتمی

۱. نقاط ب و ج روی نمودار تابع f، نقاط ت و الف روی نمودار تابع g و نقاط پ و ث روی نمودار h قرار دارند.

۲. ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$۳^x(۱+۳+۹)=۱۳x(۲^x)\Rightarrow ۳^x=x(۲^x)$$
$$\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x=x$$

این معادله به این معنی است که نمودار توابع با ضابطه‌های $(\frac{۳}{۲})^x$ و x را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و محل تلاقی این دو نمودار را مشخص کنیم. بنابراین فرض کنیم: $y_۲=x$ و $y_۱=(\frac{۳}{۲})^x$.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند، بنابراین معادلهٔ بالا جواب ندارد.

۳. همواره داریم: (a و b و c اعداد حقیقی مثبت و c≠۱) $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۱۰}}^{۳۶}=\frac{\log ۳۶}{\log\sqrt{۱۰}}=\frac{\log ۳^۲\times ۲^۲}{\log(۱۰)^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۲\log ۳+۲\log ۲}{\frac{۱}{۲}\underbrace{\log ۱۰}_{۱}}$$
$$=\frac{۲b+۲a}{\frac{۱}{۲}}=۴(a+b)$$

۴. الف)

$$\log[x(x-۱)]=\log ۶\Rightarrow x(x-۱)=۶$$
$$\Rightarrow x^۲-x-۶=۰\Rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰$$
$$\Rightarrow x=۳ \text{ قابل قبول } ,\ x=-۲ \text{ غیرقابل قبول}$$

ب) ابتدا logx را برابر t فرض می‌کنیم و معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$t^۲-۱۱t+۱۰=۰\Rightarrow (t-۱)(t-۱۰)=۰\Rightarrow t=۱ \text{ یا } ۱۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\log x=۱\\ x=۱۰ \text{ قابل قبول}\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\log x=۱۰\\ x=۱۰^{۱۰} \text{ قابل قبول}\end{cases}$$

تابع (ریاضی دهم ـ رشته‌های ریاضی و تجربی)

۱.
$$(۳,۲)=(۳,m^۲-۲)\Rightarrow m^۲-۲=۲\Rightarrow m^۲=۴$$
$$\Rightarrow m=\pm۲$$

اگر m=۲، داریم: $f=\{(۳,۲),(۲,۱),(۳,۲),(۲,۴)\}$

که تابع نیست. ولی اگر m=-۲، داریم:

$$f=\{(۳,۲),(۲,۱),(۳,۲),(-۲,۴)\}$$

و این یک تابع است.

۲.
$$۲)-۲\le f(x)\le ۱\Rightarrow -۲\le ۵-۲x\le ۱$$
$$\Rightarrow -۲-۵\le -۲x\le ۱-۵\Rightarrow -۷\le -۲x\le -۶$$
$$\Rightarrow \frac{۷}{۲}\ge x\ge \frac{۶}{۲}\Rightarrow D_f=\left[۳,\frac{۷}{۲}\right]$$

۳. تابع ثابت دارای ضابطه‌ای به صورت f(x)=k است. با مقایسهٔ این تابع و تابع داده شده داریم:

$$\frac{ax+۹}{x+a}=k\Rightarrow kx+ak=ax+۹$$
$$\Rightarrow \begin{cases}k=a\\ ak=۹\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm۳\end{cases}$$

۴. بـرای تعیین برد این تابع می‌توانیم آن را رسـم کنیم و با توجه به نمودار آن، برد را تعیین کنیم.

$y=x^۲+۱$

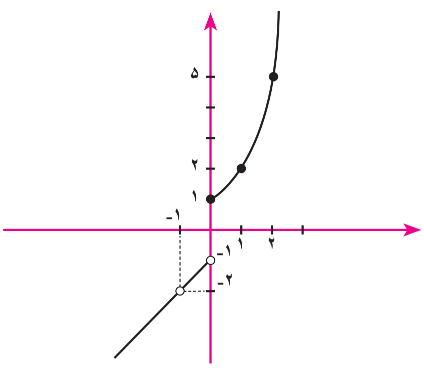
x	۰	۱	۲
y	۱	۲	۵

$y=x-۱$

x	۰	-۱
y	-۱	-۲

اکنون با توجه به نمودار زیر، برد این تابع عبارت است از:

$$(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)=R-[-۱,۱)$$



حسابان ۱

۱. اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، با استفاده از نامساوی مثلثی (قضیهٔ وجود یک مثلث) داریم:

$$|b-c|<a<b+c$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اخیر می‌توان نوشت:

$$|۱-\log ۲|<\log n<۱+\log ۲ \quad (*)$$

از طرف دیگر داریم:

$$۱-\log ۲=\log ۱۰-\log ۲=\log \frac{۱۰}{۲}=\log ۵$$

و به طریق مشـــابه: $۱+\log ۲=\log ۲۰$. با قـــرار دادن در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$\log ۵<\log n<\log ۲۰$$
$$n=۶,۷,۸,...,۱۹$$

بنابراین ۱۴ عدد طبیعی برای n وجود دارد.

۲.
$$\log ۵^{۲۰۰}=۲۰۰\log ۵=۲۰۰(۱-\log ۲)=۲۰۰(۰/۶۹۹)$$
$$=۱۳۹/۸$$
$$\log ۳^{۲۷۳}=۲۷۳\log ۳=۲۷۳(۰/۴۷۷)=۱۳۰/۲$$

با مقایســـهٔ دو مقدار اخیر می‌توان نتیجـــه گرفت $۳^{۲۷۳}$ کوچک‌تر از $۵^{۲۰۰}$ است.

۳. با فرض $f(x)=xg(x)$ داریم:

$$f(ab)=af(b)+bf(a)$$
$$abg(ab)=abg(b)+abg(a)$$
$$g(ab)=g(b)+g(a)$$

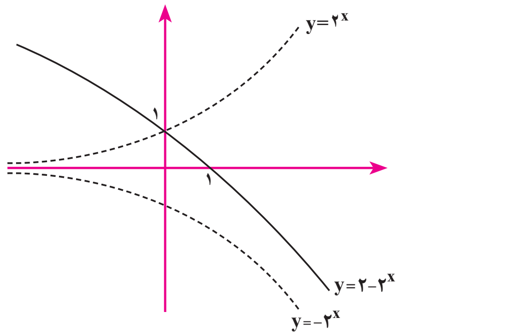
با شـــناخت خـــواص توابـــع لگاریتمی می‌تـــوان در نظـــر گرفت: $g(x)=\log_m^x$ و در نتیجه $f(x)=x\log_m^x$.

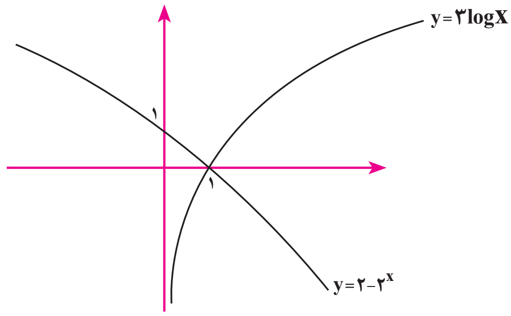
۴.
$$\text{افزایش سالانه به درصد}=\frac{f(t+۱)-f(t)}{f(t)}\times ۱۰۰$$
$$=(\frac{۲۰۰۰۰(۲/۷)^{۰/۱۴(t+۱)}}{۲۰۰۰۰(۲/۷)^{۰/۱۴t}}-۱)۱۰۰$$
$$=((۲/۷)^{۰/۱۴}-۱)\times ۱۰۰\simeq ۱۵\%$$

توجه: با استفاده از ماشین‌حساب داریم: $(۲/۷)^{۰/۱۴}\simeq ۱/۱۴۹$

۵. روش هندسی:

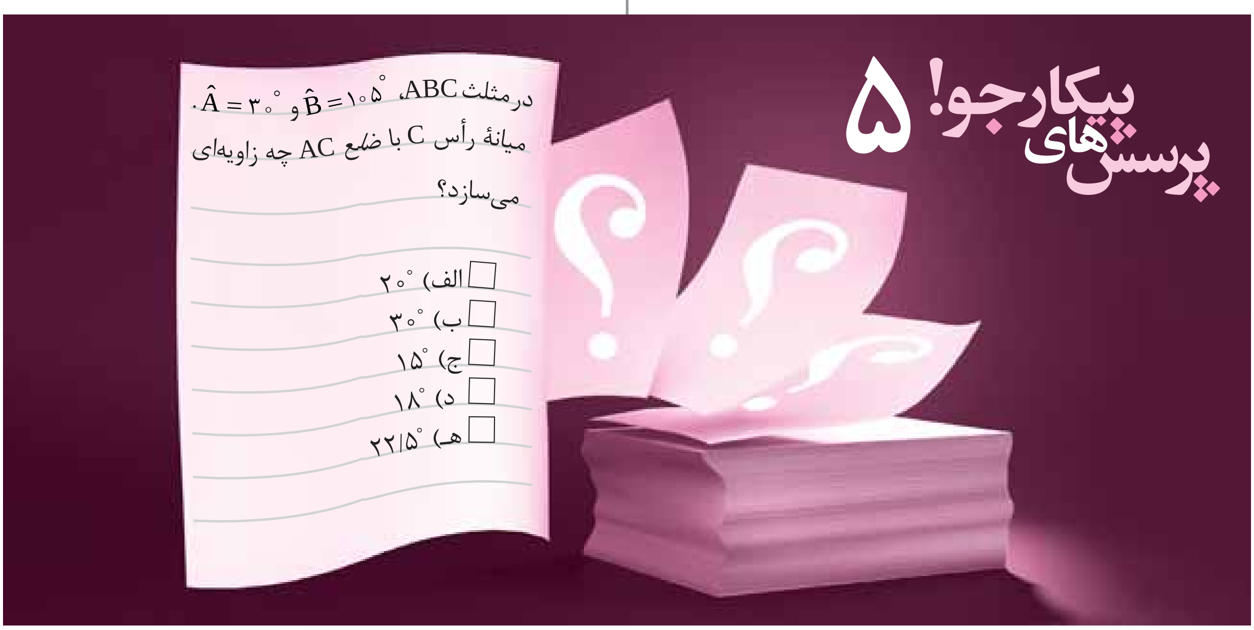
فرض کنیم: $f(x)=۲-۲^x$ و $g(x)=۳\log x$. نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم. مراحل رسم نمودارها را در شکل‌های زیر می‌بینید.





همان‌طور که از تقاطع دو نمودار مشـــخص است، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ یک جواب دارد که آن هم $x=۱$ است.

روش جبری: $x=۱$ در معادله صدق می‌کنـــد اما از آنجا که در تابع $y=۲^x+۳\log x$ با افزایش مقدار x مقدار y نیز افزایش می‌یابد بنابراین به ازای $x>۱$ مقدار y بزرگ‌تر از ۲ می‌شود و معادله فقط جواب $x=۱$ را دارد.



پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱

با فرض abcd=S داریم: $S-۲۷=ab+ac+ad+bc+bd+cd$
و به کمک نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی برای شش متغیر ab، ac، ad، bc، bd و cd نتیجه می‌شود:

$$x_۱+x_۲+...+x_n \ge n\sqrt[n]{x_۱x_۲...x_n}$$
$$\Rightarrow ab+ac+ad+bc+bd+cd \ge ۶\sqrt[۶]{a^۳b^۳c^۳d^۳}$$
$$\Rightarrow S-۲۷\ge ۶\sqrt{S} \Rightarrow (S-۲۷)^۲ \ge ۳۶S$$
$$\Rightarrow S^۲-۹۰S+۷۲۹\ge ۰ \Rightarrow (S-۸۱)(S-۹)\ge ۰$$
$$\Rightarrow S\ge ۸۱ \quad \text{یا} \quad S\le ۹ \quad (۱)$$

همچنین، با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی برای a، b، c و d نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{a+b+c+d}_{۱۲} \ge ۴\sqrt[۴]{\underbrace{abcd}_{S}} \Rightarrow \sqrt[۴]{S}\le ۳ \Rightarrow S\le ۸۱(۲)$$

از (۱) و (۲) داریم: S=۸۱. یعنی:

$$a+b+c+d=۴\sqrt[۴]{abcd}$$

اما می‌دانیم تساوی در نابرابری واسطه‌ها وقتی رخ می‌دهد که همهٔ متغیرها با هم برابر باشند؛ یعنی: a=b=c=d و در نتیجه: a=b=c=d=۳. از آنجا: $a^b+c^d=۳^۳+۳^۳=۵۴$ (گزینهٔ الف).

۲

اگر m مرکب باشد، m=ab، به‌طوری که: a,b∈N و a,b≤m-۲ (زیرا به ازای هیچ مقدار m، m-۱ عامل m نیست. چرا؟) حال اگر a و b دو عدد طبیعی متمایز باشند، آن‌گاه هر دوی آن‌ها عامل (m-۲)! هستند (چرا؟) و در نتیجه: m|(m-۲)!.
پس تنها حالتی که ممکن است m عامل (m-۲)! نباشد، آن است که a و b متمایز نباشند و m=a که a عددی اول باشد. اما در این صورت اگر m>۲a باشد، آن‌گاه بین عددهای طبیعی ۱،۲،...،m-۲ لااقل دوبار عامل a ظاهر می‌شود و در نتیجه: m|(m-۲)! پس باید m≤۲a و یا $a^۲\le ۲a$ باشد و در نتیجه: ۲≤a≤۰. تنها مقدار a، a=۲ و به ازای آن m=۴ است که برای آن داریم: $m\nmid(m-۲)!$ $(۴\nmid ۲)$. یعنی فقط یک مقدار وجود دارد (گزینهٔ ب).

۳

چهارضلعی AMNC محاطی است (چرا؟) پس طبق قضیهٔ بطلمیوس در این چندضلعی داریم:

$$AN.MC=AM.CN+AC.MN$$

اما روشن است که: $BN=CN=\frac{BC}{۲}$، $AN=\frac{BC}{۲}$، $AC=\frac{BC}{۲}$ و MC=MB (چرا؟)

با جای‌گذاری در رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\frac{BC}{۲}\times MC=AM\times\frac{BC}{۲}+\frac{BC}{۲}\times MN$$
$$MC=AM+MN\Rightarrow MB=AM+MN$$

و $MB-AM=MN$ (گزینهٔ ب)

۴

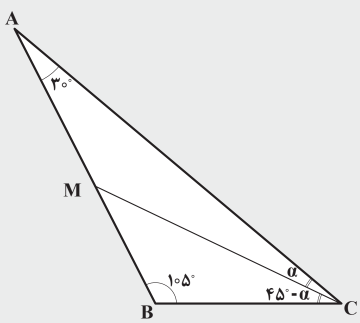
مجموعهٔ رئوس زیر را در نظر بگیرید:

$$S=\{A_۱,A_۲,A_۳,A_۵,A_۶,A_۷,...,A_{۱۳۹۳},A_{۱۳۹۴},A_{۱۳۹۵}\}$$

(S شامل همهٔ رئوس، منهای رئوس $A_{۴i}$، ۱≤i≤۳۴۹ است.)
به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعهٔ S فاقد ویژگی‌های فوق است. یعنی با هیچ ۴ رأس آن نمی‌توان چهارضلعی محدبی ساخت که سه ضلع آن از اضلاع ۱۳۹۶ضلعی باشد. اما با اضافه کردن فقط یک رأس $A_{۴i}$ می‌توان این ویژگی را به S داد. پس S باید لااقل ۱+۳۴۹-۱۳۹۶ (یا ۱۰۴۸) عضو داشته باشد (گزینهٔ ب).

۵

مطابق شکل و به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های ACM و BCM داریم:



$$\begin{cases}\frac{AM}{\sin\alpha}=\frac{CM}{\sin ۳۰}\\ \frac{BM}{\sin(۴۵-\alpha)}=\frac{CM}{\sin ۱۰۵}\Rightarrow\\ BM=AM\end{cases}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin۳۰}=\frac{\sin(۴۵-\alpha)}{\sin۱۰۵}\overset{\sin۱۰۵=\cos۱۵}{\Rightarrow}\frac{۱}{۲}\sin(۴۵-\alpha)$$
$$=\sin\alpha\cos۱۵\Rightarrow\sin(۴۵-\alpha)=۲\sin\alpha\cos۱۵$$
$$=\sin(\alpha+۱۵)+\sin(\alpha-۱۵)$$
$$\alpha=\beta+۱۵\Rightarrow\sin(۳۰-\beta)=\sin(۳۰+\beta)$$
$$\Rightarrow ۳۰-\beta=۳۰+\beta\Rightarrow\beta=۰,\alpha=۱۵$$

(گزینهٔ ج)

هوشنگ شرقی

خوراک مغز برای مصرف یک سال

● **نویسنده:** گئورگ گراتزر ● **مترجم:** محسن نقشینه ارجمند
● **ناشر:** نشر علوم ریاضی ره‌آورد، وابسته به انتشارات فاطمی ● **چاپ اول:** ۱۳۹۳

ایـــن کتاب همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، مجموعه‌ای از معماهای ذهنی، منطقی و گاه محاســـباتی برای یک سال است. در واقع، مجموعه معماهای آن در ۵۲ قسمت برای ۵۲ هفتهٔ یک سال گردآوری شده‌اند و برای هر هفته حداکثر تا سه معما طراحی شده است. دربارهٔ تأثیر معماها در پـــرورش ذهن و نقش آن‌ها در همگانی کـــردن دانش (و به‌خصوص ریاضی و منطق) بســـیار گفته و نوشته‌اند، و در اینجا به بخشی از مقدمهٔ مترجم (که خود استاد بازنشستهٔ ریاضیات دانشگاهی است) در این زمینه اشاره می‌کنیم: «متأسفانه اکثر افراد استفادهٔ کمی از مغز خود می‌کنند و از آن بدتر، زمان بسیار ناچیزی را ممکن است به مغز خود بیندیشند. من به همه، به‌ویژه جوانان و نوجوانان، پیشنهاد می‌کنم به پرورش مغز خود بیشتر فکر کنند... هر چند پرداختن به یک مسئلهٔ عمیق ریاضی می‌تواند موجب رشـــد فکری بیشتر می‌شود تا پرداختن به یک معما، ولی معماها در مقایسه با مسئله‌های ریاضی، خوراک‌های سبک‌تری هستند و مردم کمتر از مزمزه کردنشان واهمه دارند.»

در ادامه برای آشنایی بیشتر با این کتاب به معماهای هفتهٔ سی‌وپنجم آن نگاهی می‌اندازیم:

ده تکه کاغذ کوچک

عددهای ۱ تا ۱۰ را روی ده قطعه کاغذ می‌نویســـیم و آن‌ها را در یک کلاه قرار می‌دهیم.

مجید، فرزاد، مصطفی، علی و **ایرج** هر یک دو تکه کاغذ از کلاه بیرون می‌آورند. مجموع دو عدد هر کدام عبارت اســـت از: ۱۷ (ایرج)، ۱۶ (علی)، ۱۱ (مجید)، ۴ (فرزاد) و ۷ (مصطفی). چه کسی کدام قطعه کاغذ را بیرون کشیده است؟

گردش رخ

مهرهٔ رخ در گوشهٔ پایین ـ چپ قرار دارد. آیا می‌توان آن را به گوشهٔ بالا ـ راست طوری منتقل کرد که از همهٔ خانه‌ها دقیقاً یک‌بار عبور کند؟

زوج‌های متأهل

ســـه مرد به نام‌های **کمال**، **یاشار** و **سپنتا** با همسرانشان **نازنین**، **نیوشـــا** و **مهناز** به یک حراجی رفتند. پس از خرید، هر یک از آن‌ها متوجه شدند که میانگین قیمت (به تومان) کل اقلامی که خریده برابر با تعداد اقلامی اســـت که خریده. کمال ۲۳ قلم بیشتر از نیوشا خریده اســـت. میانگین قیمت اقلام یاشار ۱۱ تومان بیشتر از میانگین قیمت اقلام نازنین بوده اســـت. هر مردی ۶۳ تومان بیشتر از همسرش خرج کرده است. نام همسر کمال چیست؟

پس از پایان صورت معماها، ابتدا راهنمایی آن‌ها در یک بخش و سپس راه‌حل کامل آن‌ها در بخش بعدی آمده است. مطالعهٔ این کتاب و چالش بـــا معماهای زیبای آن را به همهٔ دوســـتان دانش‌آموز توصیه می‌کنیم.

پاسخ های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول

۲	۳	۶
۷	۷	۴۹
۱۴	۲۱	

۳	۴	۱۲
۶	۵	۳۰
۱۸	۳۰	

۶	۷	۴۲
۹	۸	۷۲
۵۴	۵۶	

۹	۳	۲۷
۴	۸	۳۲
۳۶	۲۴	

۴	۶	۲۴
۴	۹	۳۶
۱۶	۵۴	

۳	۳	۹
۷	۵	۳۵
۲۱	۱۵	

۷	۸	۵۶
۱	۹	۹
۷	۷۲	

۳	۴	۱	۱۲
۲	۲	۲	۸
۲	۱	۴	۸
۱۲	۸	۸	

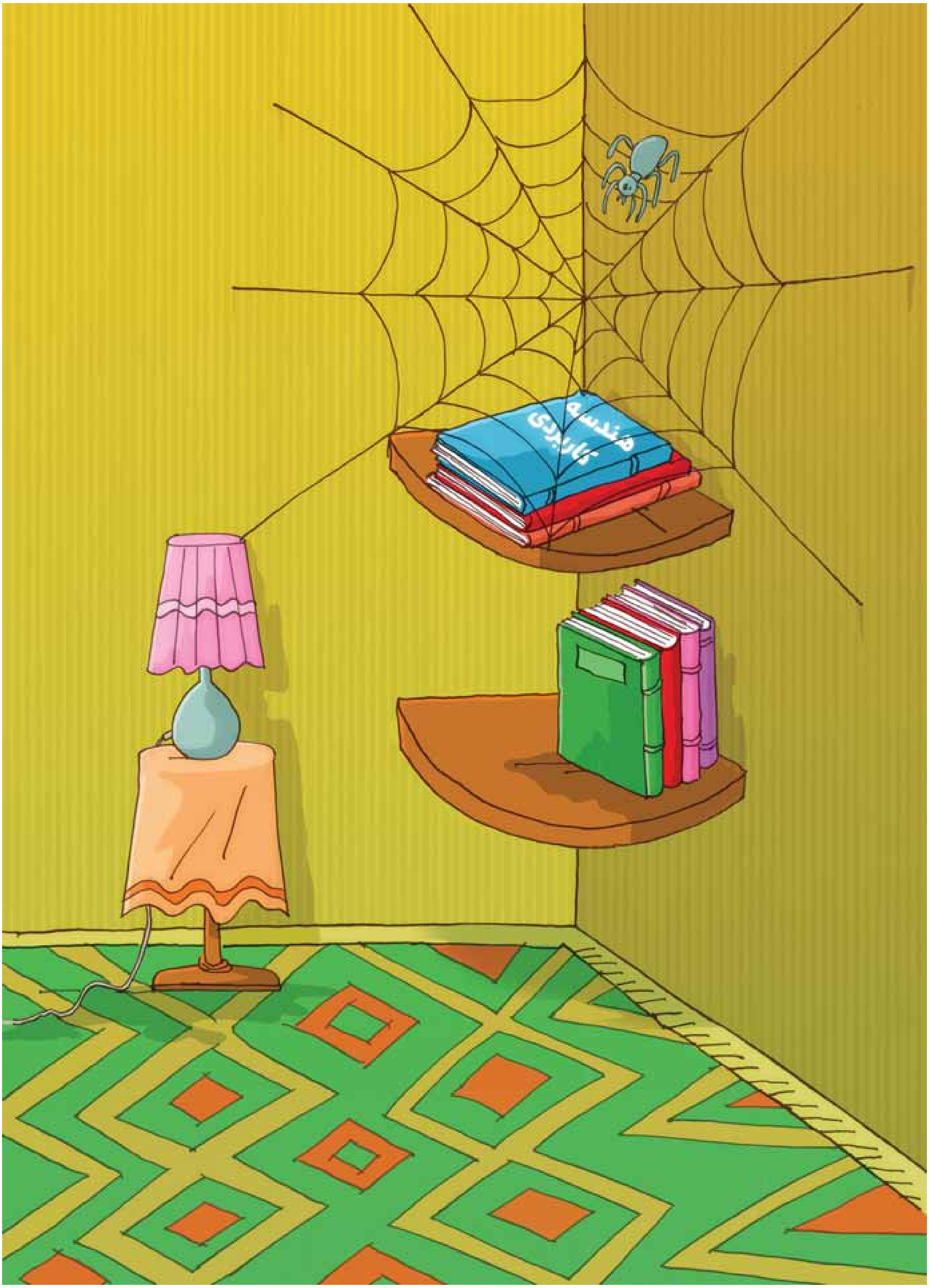
۶	۵	۲	۶۰
۲	۴	۵	۴۰
۲	۲	۱	۴
۲۴	۴۰	۱۰	

۲	۳	۱	۶
۴	۵	۱	۲۰
۲	۱	۱	۲
۱۶	۱۵	۱	

پاسخ جدول ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی شمارهٔ ۳

رمز جدول: حکیم عمر خیام، دانشمند، ریاضی‌دان و شاعر بنام ایرانی، متولد سال ۱۰۴۰ میلادی و متوفی به سال ۱۱۲۳ میلادی است. یکی از مهم‌ترین کارهای او حل معادله درجهٔ سوم است. دربارهٔ زندگی و کارهای او در منابع متعدد، از جمله در شماره‌های پیشین مجلهٔ برهان مطالبی آمده است.

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۵	۲	۱
۲	۶	۰	۱	۶
۳	۲	۲	۴	۵
۴	۳	۷	۰	۰



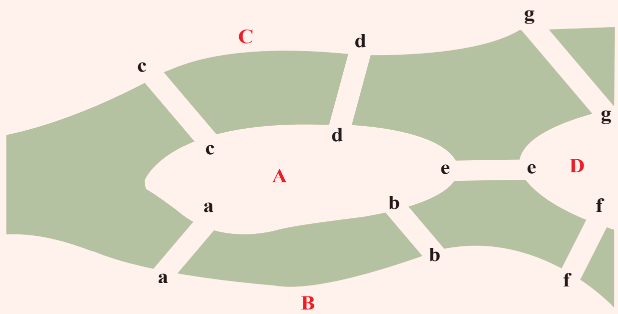
طرح: خدیجه اقوامی مقدم، دبیر ریاضی، بندر انزلی تصویرگر: میثم موسوی

ریاضیات دلپذیر

گراف و کاربردهای آن

اغلب ریاضی‌دانان تولد نظریهٔ گراف‌ها را هم‌زمان با طرح و حل مسئلهٔ «پل‌های هفت‌گانهٔ کونگسبرگ» می‌دانند.

در اوایل قرن هجدهم، ساکنان شهر کونگسبرگ در «پروس شرقی» (در حال حاضر در کالینینگراد روسیه) در روزهای یکشنبه روی پل‌هایی که بر رودخانهٔ «پرگل» زده شده بودند (رود از میان شهر عبور می‌کرد)، پیاده‌روی می‌کردند. این هفت پل به‌صورت زیر شهر را به چند بخش تقسیم می‌کردند:



مسئله‌ای که توجه شهروندان را جلب کرده بود، این بود که آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه و فقط یک‌بار عبور از هر پل، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟

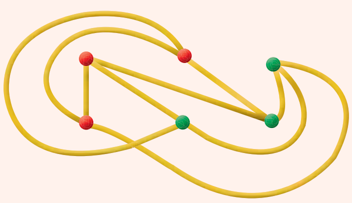
لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، این مسئله را به‌صورت زیر حل کرد:

یعنی با اختصاص دادن چهار نقطه (به جای مناطق متفاوت شهر) و هفت یال (به جای پل‌ها)، شکلی را برای نمایش وضع پیش آمده طراحی کرد که بعدها نام «گراف» بر آن نهادند. آن‌گاه با استدلال ثابت کرد که حرکت به طریق فوق امکان‌پذیر نیست. بیشتر مورخان تاریخ ریاضی، شروع بحث گراف‌ها را از این مسئله می‌دانند.

اما ۱۰۰ سال قبل از اویلر و مسئلهٔ پل‌ها، شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی (۱۰۰۰-۹۲۵ خورشیدی)، مسئلهٔ معروفی را به این صورت طرح کرد:

«سه خانه و سه چاه آب بیرون از آن‌ها مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد، به‌طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟»

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به بحث گراف‌ها دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را با نقاطی مشخص کنیم، شش نقطه داریم که به دو زیرمجموعهٔ مجزای سه عضوی افراز می‌شوند و باید نقاط مجموعهٔ اول را به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم با یال‌هایی وصل کنیم، به‌طوری که هیچ دو یالی یکدیگر را قطع نکنند. می‌توان نشان داد که این کار شدنی نیست و لااقل دو یال یکدیگر را قطع می‌کنند:



امروزه تئوری گراف‌ها که به مرور زمان پیشرفت بسیاری کرده، کاربردهای بسیاری در علوم دیگر و به‌خصوص علوم رایانه پیدا کرده است که بدون آن پیشرفت و توسعه در این زمینه امکان‌پذیر نبود.