برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد
۱۱۳

دورهٔ بیست و هشتم
شمارهٔ ۳
بهار ۱۳۹۸
۸۰ صفحه
۲۰۰۰۰ ریال

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

✦ کاربرد هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری ✦ روشی متفاوت برای حل برخی معادلات مثلثاتی
✦ بررسی آماری شاخص جرم تودهٔ بدنی ✦ ماتریس‌ها ✦ رمز گنج برهان

حاتم نیریزی

جعفر زیدی
کارشناسی ارشد
تاریخ علم و دبیر ریاضی
دبیرستان ماندگار البرز

ابوالعباس فضل‌بن حاتم نیریزی، از منجمان و ریاضی‌دانان نیمهٔ دوم قرن سوم و اوایل قرن چهارم هجری قمری است.

نیریزی در دورهٔ خلافت **المعتضد**، خلیفهٔ عباسی می‌زیست و برخی از تألیفات خود را به نام این خلیفه یا وزرای وی نوشته است.

از تاریخ تولد او اطلاع دقیقی در دست نیست و به نظر می‌رسد متولد نیریز فارس است. تاریخ وفات او را برخی از محققان ۳۱۰ هجری قمری اعلام کرده‌اند.

ابوالقاسم قربانی، تاریخ‌نگار ریاضیات، در کتاب «ریاضی‌دانان اسلامی» به اینکه افرادی مانند **ابن ندیم**، **ابوریحان بیرونی**، **حکیم عمر خیام**، **خواجه نصیر طوسی**، **کمال‌الدین فارسی**، **نظامی عروضی**، و **جرج سارتن** از نوشته‌های نیریزی بهره جسته‌اند و از او یاد کرده‌اند، اشاره کرده است.

برخی از آثار نیریزی:

- **شرح کتاب اصول اقلیدس:** این شرح بر ترجمهٔ اصول اقلیدس که توسط **حجاج‌بن یوسف‌بن مطر** انجام شده، صورت گرفته است.
- **رسالهٔ فی بیان المصادرة المشهورة الاقلیدس:** نسخهٔ خطی آن در کتابخانهٔ دانشگاه تهران موجود است. **هاینریش سوتر**، تاریخ‌نگار ریاضیات، گفته است که امکان دارد این رساله قسمتی از کتاب شرح نیریزی بر اصول اقلیدس باشد.
- **تفسیر کتاب المجسطی بطلمیوس:** این تفسیر در زمان خود بسیار مورد استفاده بوده است، تا جایی که نیریزی «شارح مجسطی» نامیده می‌شد. متأسفانه با همهٔ گزارش‌هایی که از این تفسیر آمده است، نسخه‌ای از آن در اختیار نیست.
- **زیج‌های کبیر و صغیر:** گرچه اثری از این دو زیج نمانده است، لیکن اشخاصی چون **ابن ندیم**، **قفطی**، **نالینو**، **کندی**، **ابن یونس** و **ابوریحان بیرونی** از آن یاد کرده‌اند. نام «زیج» واژه‌ای کلی برای جدول‌های نجومی است.
- **کتابی در شرح اسطرلاب کروی:** این کتاب به طرزی استادانه در چهار فصل نوشته شده است.
- **کتاب فی معرفه آلات یعرف بها ابعاد الاشیاء فی الهواء و التی علی بسیط الارض و اغوار الاودیه و الابارو عروض الانهار:** این کتاب را نیریزی برای **قاسم‌بن عبیدالله‌بن موسی**، وزیر المعتضد، نوشته است و نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ «ایاصوفیا» در کشور ترکیه موجود است. همچنین شخصیت‌هایی مانند ابن‌ندیم، قفطی، و ابوریحان بیرونی از این کتاب نام برده‌اند.
- **رساله فی احداث الجو:** این رساله را نیریزی برای خلیفه المعتضد نوشته است و یک نسخه از آن در کتابخانهٔ ایا صوفیا در شهر استانبول کشور ترکیه موجود است. فیلم این رساله در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران وجود دارد. ابن ندیم هم در کتاب «الفهرست» از این کتاب نام برده است.
- **مقاله فی حوادث القرانات:** نسخهٔ خطی این رساله در کتابخانهٔ دانشگاه تهران موجود است.
- **فصل فی تخطیط الساعات الزمانیه فی کل قبه او فی قبه تستعمل لها:** گزارشی از این رساله در منابع نیامده است، ولی نسخهٔ خطی عربی آن در کتابخانهٔ بانکیپور هند موجود است.
- **رساله فی سمت القبله:** نام این رساله را ابن ندیم گزارش کرده و نسخهٔ خطی آن در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود است. **کارل شوی**، پژوهشگر آلمانی تاریخ ریاضیات، آن را ترجمه و شرح کرده است.
- **تفسیر کتاب الاربعه بطلمیوس:** افرادی چون ابن ندیم و قفطی از این کتاب گزارش کرده‌اند، ولی ظاهراً اثری از این تفسیر نیست.
- **شرح کتاب ظاهرات الفلک:** این کتاب از **اقلیدس** است که نیریزی بر آن شرحی نوشته است و خواجه نصیر طوسی در تحریر کتاب «ظاهرات الفلک اقلیدس» در مقدمه از شرح نیریزی گزارش کرده است.

رشد برهان ریاضی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وهشتم
- شمارهٔ پی‌در‌پی ۱۱۳
- بهار ۱۳۹۸
- شمارهٔ ۳
- ۸۰ صفحه
- ۲۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱(داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ _ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۵۷۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

ارزشیابی در خدمت آموزش

سلام بچه‌ها و خدا قوت. می‌خواهم دربارهٔ ارزشیابی نکاتی را با شما در میان بگذارم. منظورم از ارزشیابی همان امتحان یا آزمون است.

به نظر شما کدام جمله صحیح است؟ جملهٔ «آموزش در خدمت ارزشیابی است»، یا جملهٔ «ارزشیابی در خدمت آموزش است»؟ به عبارت ساده‌تر، آیا ما آموزش می‌دهیم تا در نهایت یک امتحان از شما بگیریم، یا امتحان گرفتنِ ما به آموزش کمک می‌کند؟

اگر معتقد باشیم که آموزش در خدمت ارزشیابی است، درواقع ارزشیابی آخر کار است. کار آموزش با ارزشیابی به پایان رسیده است و دبیر محترم شما با برگزاری یک امتحان پی می‌برد که شما چه اندازه مفاهیم درسی را یاد گرفته و چقدر از مفاهیم را یاد نگرفته‌اید. نمره‌ای هم در کارنامهٔ شما نوشته می‌شود که ظاهراً نشان می‌دهد، شما در آن درس چقدر موفق بوده‌اید، مفاهیم چه اندازه به شما منتقل شده‌اند و شما چقدر آن‌ها را فرا گرفته‌اید.

حال اگر از دریچه‌ای دیگر به موضوع بسیار مهم ارزشیابی نگاه کنیم و ارزشیابی را صرفاً برای سنجش داشته‌ها و محکی برای اندازه‌گیری مطالب فرا گرفته از طرف شما فرض نکنیم، کاربردهای بسیار مفیدتری می‌توان برای ارزشیابی یافت.

وقتی من به‌عنوان معلم از دانش‌آموزان خودم امتحان می‌گیرم و شما به‌عنوان دانش‌آموزانی که ساعت‌های زیادی در کلاس درس معلم شرکت کرده‌اید، در جلسه آزمون یا امتحان شرکت می‌کنید، به شرط اینکه امتحان از استانداردها و ویژگی‌های لازم برخوردار باشد، می‌توانیم به نتایج زیر دست پیدا کنیم:

۱. مطالب مهم و اساسی که در کلاس درس روی آن‌ها تأکید داشتم، مرور می‌شود.

۲. متوجه می‌شوم چه تعدادی از دانش‌آموزانم چه بخش‌هایی از

درس را خوب متوجه نشده‌اند و آموزش در این بخش‌ها کامل صورت نگرفته است.

۳. متوجه می‌شوید که در چه بخش‌هایی ضعف دارید و این ضعف به خاطر کم‌کاری خودتان بوده است یا هنگام آموزش، مفاهیم به خوبی به شما منتقل نشده‌اند.

۴. متوجه می‌شوم در چه بخش‌هایی و روی آموزش چه مفاهیمی دانش‌آموزان کلاسم، فعال‌تر شرکت کرده‌اند.

۵. متوجه می‌شوید در ساختن چه مفاهیمی با کلاس و معلم خود همراه بوده و تا چه اندازه در فعالیت‌ها تعامل داشته‌اید.

۶. متوجه می‌شوم چه مسائل و تمرین‌هایی را کمتر مورد توجه قرار داده‌ام.

۷. متوجه می‌شوید که حل تمرین‌ها و درواقع تثبیت مفاهیم چقدر به شما در یادگیری و توان پاسخ‌گویی به سؤالات امتحانی کمک کرده است.

۸. با طرح انواع سؤال‌ها (تشریحی، جای خالی، درست و نادرست، بازپاسخ و ...) و قرار دادن دانش‌آموزان در موقعیت‌های یادگیری، چقدر در یادگیری حین امتحان (یادگیری در جلسهٔ امتحان) موفق بوده‌ام؟

همهٔ موارد فوق نشانگر این مطلب‌اند که ارزشیابی و امتحان همواره باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی نه پایان راه است و نه صرفاً وسیله‌ای برای جدا کردن و تمایز بین دانش‌آموز تنبل، متوسط و خوب. اگر شما از این زاویه به ارزشیابی و امتحان نگاه کنید، با خیال راحت‌تر در جلسهٔ امتحان حاضر می‌شوید و هر امتحان برای شما فایده‌های بسیاری را در برخواهد داشت.

خودتان را برای امتحانات پایان سال تحصیلی آماده کنید. یعنی در کلاس‌های درس تمرکز داشته باشید، فعالانه در آموزش مفاهیم شرکت کنید، تمام «کار در کلاس‌ها» را با هم‌کلاسی‌های خود کار کنید و پاسخ دهید، مثال‌های حل شده را خودتان حل کنید و آن‌ها را بنویسید، تمرین‌های کتاب درسی را به‌طور کامل حل کنید، و پاسخ‌های خود را با دبیر خودتان بررسی و تحلیل کنید.

موفق و پیروز باشید

سردبیر

غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ فاجعه

گفت انوری کز اثر بادهای سخت[1]

آفتابی در یکی ذره نهان
ناگهان آن ذره بگشاید دهان
ذره ذره گردد افلاک و زمین
پیش آن خورشید چون جَست از کمین
(مثنوی معنوی/ دفتر ششم/ ۱-۴۵۸۰)

داستان پیشگویی انوری را در مورد توفان مهیبی که روز معینی در شهر ایجاد می‌شود، همه شنیده‌ایم. مردم شهر که به انوری و پیشگویی‌هایش اعتقاد داشتند، آن روز در شهر نماندند و به صحرا رفتند. از اتفاق در آن روز حتی بادی ملایم نیز نوزید و طبق روایت‌ها همین واقعه باعث شد که انوری فرار را بر قرار ترجیح دهد و به شهر دیگری کوچ کند. باز این را هم می‌دانیم که پیشگویی‌هایی از این دست، با توجه به نجوم یا تنجیم، یعنی صرفاً تأثیر ستاره‌ها، در زندگی بشری مطرح می‌شده است.

اما «*نظریه فاجعه*»[2] چیست و دربارهٔ چه چیزی صحبت می‌کند.

می‌دانیم که بیشتر ریاضیات کاربردی پیوسته است. یعنی تغییر کوچکی در علت‌ها باعث تغییر کوچکی در معلول‌ها می‌شود، و به همین علت است که حسابان این همه اهمیت دارد.

اما چنین نیست که این ماجرا همواره اتفاق بیفتد، چرا که گاهی تغییر اندک به تغییر بسیار می‌انجامد. این وضعیت به فاجعه موسوم است. برای مثال، یک پُل وزن وسایل نقلیه‌ای را که از آن می‌گذرند، نگه می‌دارد. انحنای پل با وزن مورد بحث تغییر می‌کند، اما در مرحلهٔ معینی، وزن مزبور بسیار زیاد می‌شود، و پل فرو می‌ریزد.

مثال دیگر این است که: فرض می‌کنیم، گونه‌ای حیوان در کمال آسایش به زیستن ادامه داده و طی میلیون‌ها سال تکامل‌یافته است. محیط‌زیست به‌طور پیوسته تغییر کرده و بنابراین گونهٔ مزبور، به‌طور پیوسته، خود را با این محیط وفق داده است.

محیط مزبور دورهٔ خاصی را می‌گذراند و دیگر سازگار شدن برای این نوع حیوان امکان‌پذیر نیست. در این صورت، گونهٔ مزبور یا نابود می‌شود و یا برای بقا داشتن، با سرعت به‌گونه‌ای دیگر تکامل می‌یابد.

این نظریه که در دههٔ ۱۹۶۰ توسط کارهای **رنه توم**، متولد ۱۹۲۳، تنظیم شد، در دههٔ ۱۹۷۰ با مساعی **کریستوفر زیمان** مقبولیت عام یافت.

نظریهٔ مورد بحث که شاخهٔ خاصی از «نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی»[3] است، همان‌طور که ریاضی است، فلسفی نیز هست. توم بر این اعتقاد است که فاجعه در واقع،

ایجاد تغییر و از بین رفتن ثابت یک سیستم پویاست. بر این اساس، در مورد انقلاب فرانسه می‌گوید: این انقلاب در واقع انفجاری بود که بر اســاس این نظریه، تأثیرش هنوز از بین نرفته است. نظریهٔ فاجعه به مطالعه و دسته‌بندی پدیده‌هایی می‌پردازد که توســط تغییرات ناگهانی در رفتار حاصل از تغییــرات اندک در وضعیت‌های موجود، ایجاد می‌شــوند. نظریه مزبور در مورد پدیده‌هایی از قبیل پایداری کشتی‌ها در دریا و واژگون شدنشان، سقوط پل‌ها و... به‌کار می‌رود.[۴]

با اســتفاده از نظریهٔ مورد بحث، می‌توان تغییرات زمانی و مکانی سیستم‌های دینامیکی را روی شکل‌های هندسی، که به *مدل‌های فاجعه* موسوم‌اند، منطبق کرد. این نظریه رابطهٔ متقابل بین متغیرهای سیستم موردنظر را به صورت مدلی هندسی توصیف می‌کند.

باید دانســت که نظریهٔ فاجعه با آنچه فاجعه نامیده می‌شود، تفاوت دارد. به عبارت دیگر، این نظریه مربوط به موضوع‌های متعارف است که در هر نقطه از طبیعت قابل محاسبه‌اند. بنابراین از این قبیل است: تبدیل شگفت‌انگیز آب بــه یخ در حرارت صفر درجه، یا تبدیل آن به بخار در دمای صد درجه، تبدیــل ناگهانی دانه‌های ذرت به ذرت بوداده، و یا آشکار شدن ناگهانی رنگین‌کمان.

این تغییــرات در مرحله‌ای از زمان رخ می‌دهند که سیستم‌ها با وارد آمدن فشاری، چون افزایش دما، انرژی، یا اطلاعات، از حالت تعادل خارج شوند.

این نظریه یادآور ضرب‌المثل‌هــای خاصی از عامه است؛ ضرب‌المثل‌هایی که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از:

- اندک‌اندک به هم شود بسیار
  دانه‌دانه است غله در انبار
- قطره‌قطره جمع گردد وانگهی دریا شود

پی‌نوشت‌ها

۱. مصراعی از دو بیت زیر که شاعری در مورد پیشگویی انوری که توفان مهیبی می‌آید، و نیامدن توفان و باقی ماجرا سروده است:

گفت انوری کز اثر بادهای سخت
ویران شود سراچه و کـاخ سکندری
در روز حکم او نوزیده است هیچ باد
یـا مرسـل الریـاح! تـو دانی و انوری

2. catastrophe theory
3. dynamical systems theory

۴. این مطلب در فرهنگ ما به صورت «مَنّ‌الاخیر» آمده است، یعنی وزنهٔ اندکی که اگر در آخر به کشــتی اضافه شود، کشتی غرق می‌شود. چنان‌که مولانا در مثنوی شریف در مورد عشق فرموده است:

بر بزرگان شهد و بر طفلانْ ستْ شیر
او بـه هـر کـشتی بُـوَد مَـنّ‌الاخیر
(مثنوی معنوی/ دفتر ششم/ ۳۹۹۸)

آنچه از دوست رسد...

ســرکار خانم معصومه شاه‌خانی معصومی چند سؤال همراه با حل آن‌ها را ارسال کرده‌اند، از بین آن دو سؤال را انتخاب کردیم و درپی می‌آوریم.

دو مسئله کاربردی از حسابان

سؤال ۱. کاربرد مشتق و تابع درجهٔ دو

با طنابی به طول ۱ متر، ســه مربع یکسان و یک دایره ساخته‌ایم. اگر مجموع مساحت‌های این چهار شکل کمترین مقدار ممکن باشد، شعاع دایره چقدر است؟

پاسخ: اگر ضلع مربع را a و شعاع دایره را r بنامیم، مجموع محیط ســه مربع و یک دایرهٔ مورد نظر باید طول طناب اصلی، یعنی ۱ متر باشد. به تعبیری:

$$3(4a)+2\pi r=1 \rightarrow a=\frac{1-2\Pi r}{12}$$

حال از آنجا که مجموع مساحت سه مربع و یک دایرهٔ مورد بحث $S=3(a^2)+\pi r^2$ است، می‌توان گفت:

$$S(r)=3\left(\frac{1-2\pi r}{12}\right)^2+\pi r^2=\frac{3}{144}(1+4\pi^2 r^2-4\pi r)+\pi r^2$$

و برای مینیمم شدن S باید:

$$S'(r)=0 \rightarrow \frac{3}{144}(8\pi^2 r-4\pi)+2\pi r=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{6}\pi^2 r-\frac{1}{12}\pi+2\pi r=0$$

$$2\pi r-1+24r=0 \rightarrow r=\frac{1}{2\pi+24}$$

سؤال ۲. معادلهٔ درجهٔ ۲

شخصی ۱۰ میلیارد تومان سرمایه دارد و می‌خواهد در دو شرکت سرمایه‌گذاری کند. اگر سهم هر شرکت با توجه به جواب‌های معادلهٔ $x^2-5mx+12m=0$ تعیین شــود، سهم هر شــرکت را مشخص کنید.

پاسخ: کل سرمایهٔ شخص برابــر مجموع ریشه‌های معادله است. پس داریم:

$$S=-\frac{-5m}{1}=10 \rightarrow m=2 \rightarrow x^2-10x+24=0$$

$$\rightarrow x=6, x=4$$

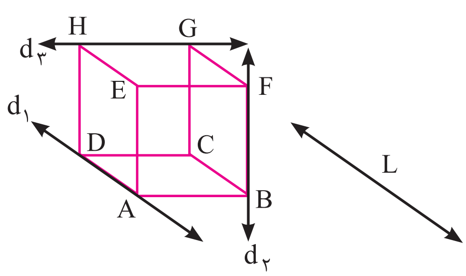
حسین کریمی

بحثی در باب خط و صفحه

در یک روز آفتابی با آسمانی صاف و عاری از آلودگی هوا، سه هواپیما در سه مسیر مستقیم در پرواز بودند و با به جا گذاشتن دود سفید در آسمان آبی، نمای زیبایی به وجود آمده بود. خلبان هواپیمای چهارم که ردّ مسیر آن با دود قرمز مشخص می‌شد، تصمیم گرفت که در یک مسیر مستقیم حرکت کند و هر سه دود سفید را قطع کند. وی می‌دانست که هیچ دو مسیر دود سفید در یک سطح (صفحه) واقع نیستند. آیا خلبان چهارم موفق می‌شود که به خواسته‌اش برسد؟ او حق انتخاب چند مسیر را دارد؟

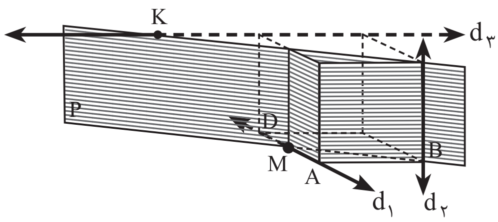
اکنون سؤال فوق را در قالب یک مسئلهٔ هندسی مطرح می‌کنیم:

مسئله: سه خط d_1، d_2 و d_3 که دو به دو نسبت به هم متنافرند، مفروض‌اند. آیا خطی مانند L می‌توان یافت که هر سه خط d_1، d_2 و d_3 را قطع کند؟ به چه تعداد؟



شکل ۱

نقطهٔ دلخواه M از d_1 را غیرواقع بر A و D در نظر می‌گیریم و صفحهٔ شامل نقطهٔ M و خط d_2 را P می‌نامیم.

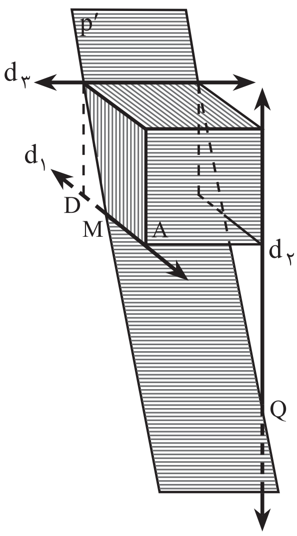


شکل ۲

نقطهٔ تلاقی d_3 با P را K در نظر می‌گیریم. اگر d_3 با صفحهٔ P موازی باشد، نقطهٔ M روی نقطهٔ A در نظر گرفته شده است که می‌باید محل انتخاب نقطهٔ M از خط d_1 را تغییر دهیم.

صفحهٔ P شامل نقاط M و K و همهٔ نقاط خط d_2 است. (۱)

صفحهٔ شامل نقطهٔ M و خط d_3 را 'P می‌نامیم.

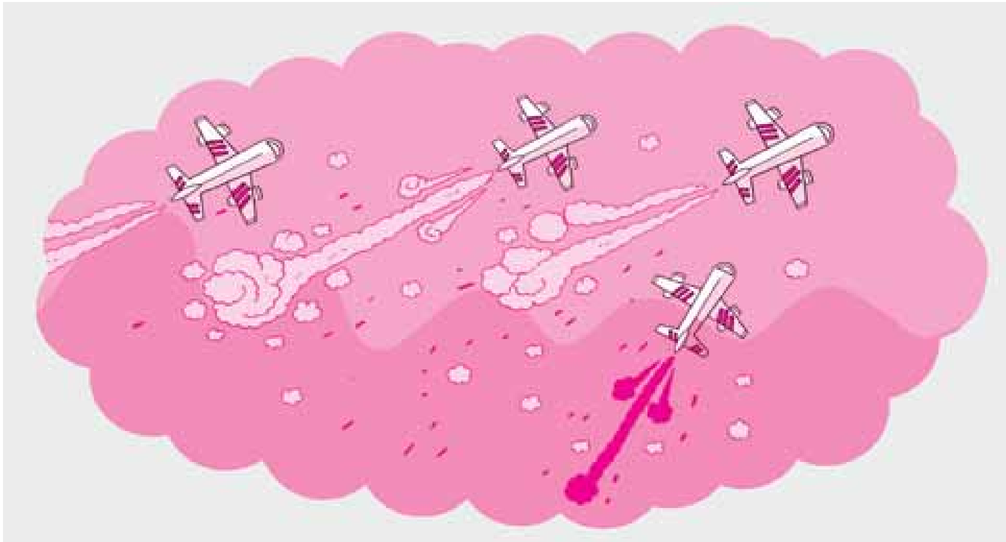


شکل ۳

نقطهٔ تلاقی d_2 با 'P را Q در نظر می‌گیریم.

اگر d_2 با صفحهٔ 'P موازی باشد، نقطهٔ M روی نقطهٔ D در نظر گرفته شده است که می‌باید محل انتخاب نقطهٔ M از خط d_1 را تغییر دهیم. صفحهٔ 'P شامل نقاط M، Q و همهٔ نقاط خط d_3 است. (۲)

هر دو صفحهٔ P و 'P شامل نقاط M، K و Q هستند (با توجه به ۱ و ۲). و نیز می‌دانیم که دو صفحهٔ P و 'P بر هم منطبق نیستند (هرکدام شامل خطی هستند که نسبت به هم متنافرند). بنابراین آن سه نقطه روی فصل مشترک دو صفحه قرار دارند؛ یعنی روی یک خط هستند. حال آن خط را L می‌نامیم.



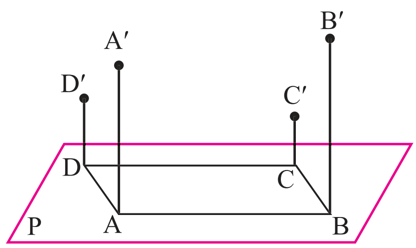
پس بدین‌ترتیب خطی یافت شد که سه خط دو به دو متنافــر d_1، d_2 و d_3 را به ترتیب در نقاط M، Q و K قطع کرده اســت. به دلیل آنکه برای انتخاب نقطهٔ M از خط d_1، بی‌شمار موقعیت را می‌توانیم در نظر بگیریم، لذا مسئله بی‌شمار جواب دارد.

■ در یک شب مهتابی و در کنار دریاچه‌ای، ستاره‌ها در آسمان صاف چشمک‌زنان زیبایی‌شان را به رخ می‌کشــیدند. اهالی منطقه شب‌ها برای استراحت و تفریح دور دریاچه جمع می‌شدند. آن شب چهار بالن فانوسی رقص‌کنان در آســمان توجه همه را به خود معطوف کرده بودند. هر کســی متناسب با ذهن خودش، غرق در رؤیت زیبایی‌های محیط بود.

در گوشــه‌ای فردی آینه‌ای در دست داشت و نگاهش بــه آینه بود و موقعیت خودش و آینه را تغییر می‌داد که توجه من به او جلب شد. پرسیدم به دنبال چه چیزی اســت؟ پاسخ داد: «می‌خواهم ببینم آیا می‌توان آینه را در شرایطی قرار داد که من تصویر آن چهار بالن فانوسی را روی آینه، به‌صورت رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع ببینم؟»

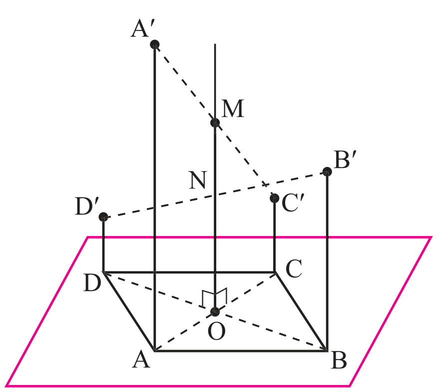
حال من از شما می‌پرســم: آیا آن فرد موفق به انجام چنین کاری خواهد بود؟ ســؤال فوق را صرف‌نظر از زاویه‌هــای تابش و بازتابش، در قالب یک مسئلهٔ هندسی مطرح می‌کنیم:

مسئله. چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، مانند A'، B'، C' و D' در فضا مفروض‌اند. صفحهٔ P را چنان بیابید که تصویر قائم آن‌ها روی صفحهٔ P، به ترتیب نقاط A، B، C و D رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند.



شکل ۴

فرض کنیم صفحهٔ P شامل متوازی‌الاضلاع ABCD را داشته باشیم که در آن O محل تلاقی دو قطر AC و BD است. در این صورت، AC تصویر قائم A'C' و نقطهٔ O وســط AC، تصویر قائم نقطهٔ M وسط A'C' است. BD تصویر قائم B'D' و نقطه O وسط BD، تصویر قائم نقطهٔ N وسط B'D' است.

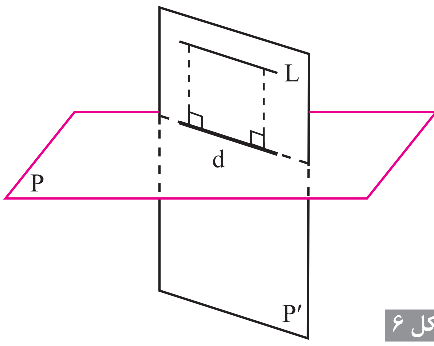


شکل ۵

چون تصویر قائم دو نقطهٔ متمایز M و N روی صفحه P، یک نقطه است، بنابراین امتداد MN عمود بر صفحهٔ P خواهد بود. اکنون با در دست داشتن امتداد MN به‌عنوان امتداد عمود بر صفحه، می‌توانیم صفحهٔ P را مشخص کنیم.

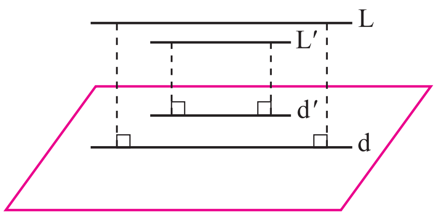
هر صفحه که عمود بر MN باشــد، جواب مسئله خواهد بود.

صفحـــهٔ P و خط L غیرواقع بـــر P و غیرعمود بر P مفروض‌اند. از L بی‌شمار صفحه می‌گذرد، ولی فقط یک صفحه مانند P' هســـت که شامل L و عمود بر صفحهٔ P باشد که در این صورت فصل مشترک دو صفحه (خط d) را تصویر قائم خط L روی صفحهٔ P می‌نامیم (شکل ۶).



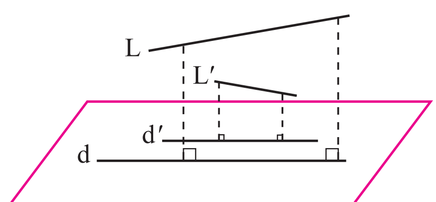
شکل ۶

در شکل ۷ مشاهده می‌کنیم که تصویر قائم دو خط موازی L و L' روی صفحهٔ P به ترتیب d و d' هستند که به موازات یکدیگرند.



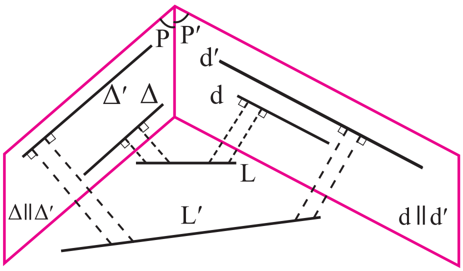
شکل ۷

ممکن است L و L' نسبت به هم متنافر باشند، ولی تصویرهای قائم آن‌ها روی صفحهٔ P به موازات هم باشند (d||d')؛ مانند شکل ۸.



شکل ۸

سؤال: آیا ممکن است تصویر قائم دو خط متنافر L و L' روی هر دو صفحهٔ P و P' که متقاطع‌اند، به موازات هم باشند؟ (شکل ۹)



شکل ۹

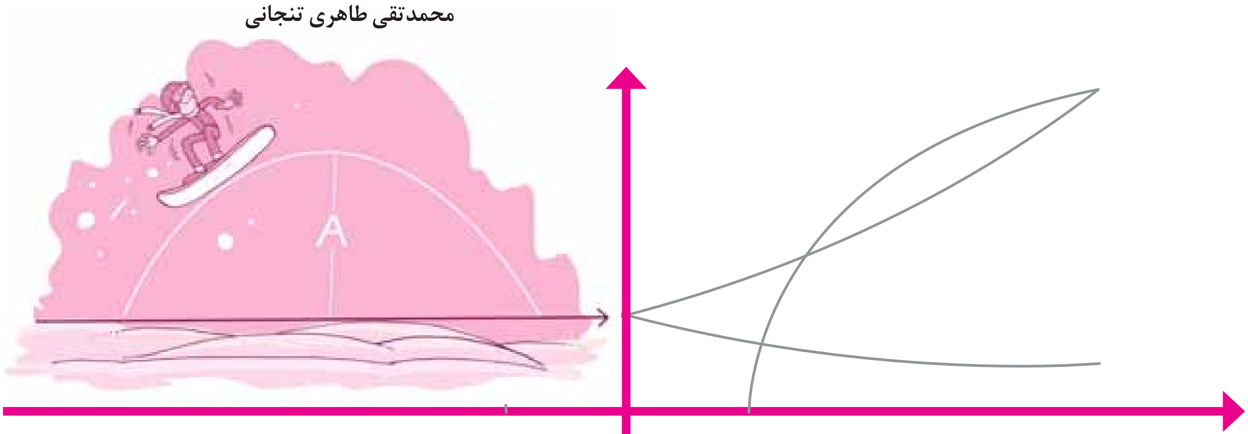
در چه صورت امکان دارد؟

قبل از پاسخ به سؤال فوق، ابتدا باید شرایط تحقق (شکل ۹) را بررسی کنیم.

در شـکل ۶ دیدیـم کـه خـط d به‌عنـوان تصویـر قائـم خـط L روی صفحـهٔ P معرفـی شـده اسـت کـه همـان فصـل مشـترک صفحـهٔ P بـا صفحـهٔ P' اسـت کـه هـم شـامل L و هـم عمـود بر P می‌باشـد. در مورد شـکل ۸ نیـز چنیـن اسـت. یعنـی بی‌شـمار صفحـه وجـود دارد کـه شـامل L هسـتند و بی‌شـمار صفحه شـامل L'، امـا فقـط دو صفحـه وجـود دارنـد که یکی از آن‌هـا شـامل L و دیگـری شـامل L' و بـه مـوازات یکدیگرنـد. حـال **اگـر** آن دو صفحـهٔ مـوازی، **عمود بـر صفحهٔ P** باشـند، آن‌گاه دو تصویـر قائم یعنی d و d' بـه مـوازات هـم خواهنـد بـود و این نشان می‌دهد کـه شـکل ۸ همیشـه قابل رخ دادن نیسـت و شـرایط ذکر شـده بایـد محقق شـود.

اکنون به راحتی می‌توانیم پاسـخ ســؤال پرسیده شــده را بدهیم. قطعاً دو صفحه بــه موازات هم وجود دارند که یکی شـــامل L و دیگری شامل L' است. **اگر** آن دو صفحهٔ موازی **بر فصل مشترک P و P' عمود باشند،** آن‌گاه آن دو صفحهٔ موازی بر P و P' نیز عمود خواهند بود. در نتیجه فصل مشترک‌های آن دو صفحهٔ موازی با P (خط‌های Δ و Δ') و فصل مشترک‌های آن دو صفحهٔ موازی با P' (خط‌های d و d') به موازات هم خواهند بود.

محمدتقی طاهری تنجانی



رسم نمودار یک تابع

مقدمه

با رسم نمودار یک تابع از طریق نقطه‌یابی آشنا هستید. این روش مشکلات و اشکالات خاص خودش را دارد و برای بررسی رفتار تابع در نقطه‌های متفاوت این روش کارساز نیست. از طرف دیگر، استفاده از روش‌های متداول رسم تابع و استفاده از جدول تغییرات و مشتق، هرچند بسیار کارساز است، اما در مسائلی که ضابطهٔ تابع دقیقاً مشخص شده باشد، می‌توان از آن استفاده کرد. در این مقاله روش‌هایی را ارائه کرده‌ایم که به کمک آن‌ها می‌توان نمودار یک تابع را از طریق نمودار تابعی دیگر رسم کرد. یادگیری این روش‌ها باعث خواهد شد که در رسم نمودار تابع‌ها بدون صرف وقت زیاد و با توجه به توابعی که از قبل رسم نمودار آن‌ها را می‌دانیم، شکل تقریبی از نمودار تابعی دیگر را به دست آوریم. در کتاب‌های درسی با برخی از روش‌ها، نظیر انتقال‌های افقی و عمودی و انبساط و انقباض نمودارها آشنا شده‌اید (و یا آشنا خواهید شد). در اینجا به‌صورت کامل همهٔ موارد مورد نیاز را بررسی می‌کنیم.

❋ رسم نمودار $y=f(x-a)$

فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ داده شده باشد. می‌خواهیم نمودار $y=f(x-a)$ را رسم کنیم. اگر $(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای از نمودار $y=f(x)$ باشد، بدیهی است که نقطهٔ $(x_۰+a,y_۰)$ نقطه‌ای از نمودار $y=f(x-a)$ است؛ زیرا:

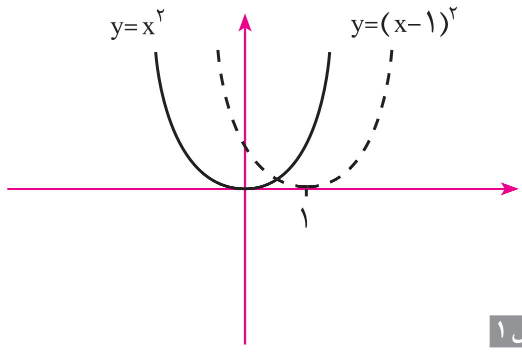
$$y_۰=f(x_۰+a-a)\Rightarrow y_۰=f(x_۰)$$

و برعکس، اگر $(x_۱,y_۱)$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x-a)$ باشد، نقطهٔ $(x_۱-a,y_۱)$ نقطه‌ای از نمودار $y=f(x)$ است، زیرا:

$$y_۱=f(x_۱-a)\Rightarrow(x_۱-a,y_۱)\in f$$

نتیجه آنکه: برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ کافی است هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ a به موازات محور xها انتقال دهیم.

مثال. رسم نمودار $y=(x-۱)^۲$ از طریق نمودار $y=x^۲$ را در شکل زیر می‌بینید.



شکل ۱

❋ رسم نمودار $y=b+f(x)$

فرض کنیم که نمودار $y=f(x)$ موجود باشد. می‌خواهیم نمودار $y=b+f(x)$ را رسم کنیم. اگر $(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای از نمودار $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ $(x_۰,y_۰+b)$ نیز نقطه‌ای از نمودار $y=b+f(x)$ است؛ زیرا:

$$y_۰+b=b+f(x_۰)\Rightarrow y_۰=f(x_۰)$$

و برعکس، اگر $(x_۱,y_۱)$ نقطه‌ای از نمودار $y=b+f(x)$ باشد، نقطهٔ $(x_۱,y_۱-b)$ نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ است؛ زیرا:

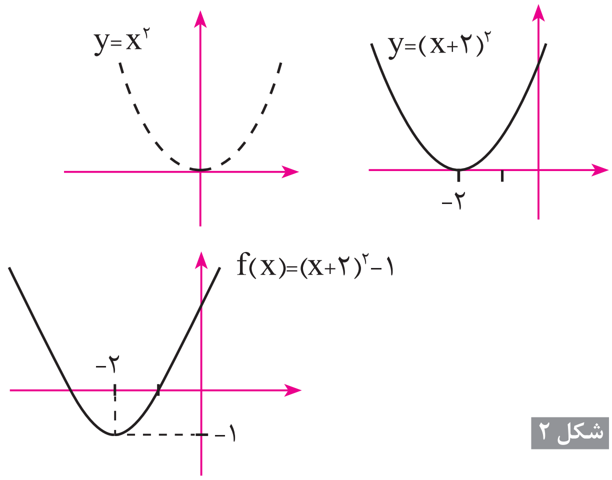
$$y_۱-b=f(x_۱)\Rightarrow(x_۱,y_۱-b)\in f$$

نتیجه آنکه: برای رسم نمودار $y=b+f(x)$ کافی است هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد به موازات محور yها انتقال دهیم.

مثال. **برای رسم تابع $f(x)=x^۲+۴x+۳$ می‌توان نوشت:**

$f(x)=(x+۲)^۲-۱$.

مراحل رسم تابع را در شکل ۲ می‌بینید.



شکل ۲

* رسم نمودار y=k f(x)

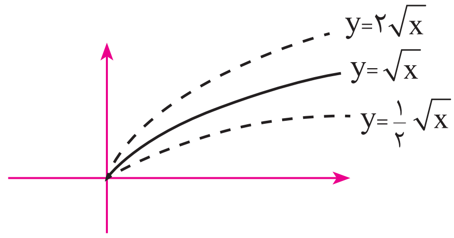
برای رسم تابع $g(x)=k\,f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌دانیم اگر (x_0,y_0) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد، داریم:

$$y_0=f(x_0)\Rightarrow k\,y_0=kf(x_0)\Rightarrow (x_0,k\,y_0)\in g$$

و برعکس، اگر (x_1,y_1) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $g(x)=k\,f(x)$ باشد، نقطهٔ $(x_1,k\,y_1)$ نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

در نتیجه برای رسم نمودار $y=k\,f(x)$ کافی است، عرض هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را k برابر، سپس نقطه‌های حاصل را به هم وصل کنیم. اگر $k>1$، نمودار $y=k\,f(x)$ حالت کشیدگی (انبساط) نسبت به محور yها دارد اگر $0<k<1$، حالت جمع‌شدگی (انقباض) نسبت به محور yها دارد. در حالتی که $k=-1$، نمودار $y=k\,f(x)$ برابر با $y=-f(x)$ خواهد بود که قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xهاست.

مثال. نمودارهای $y=2\sqrt{x}$ و $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ از روی نمودار $y=\sqrt{x}$ در شکل ۳ رسم شده‌اند.



شکل ۳

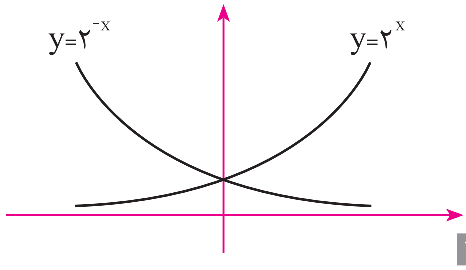
* رسم نمودار y=f(-x)

برای رسم تابع $y=g(x)=f(-x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر (x_0,x_0) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد، داریم: $y_0=f(x_0)$. حال می‌توان گفت نقطهٔ $(-x_0,y_0)$ نقطه‌ای از نمودار $y=g(x)$ است؛ زیرا:

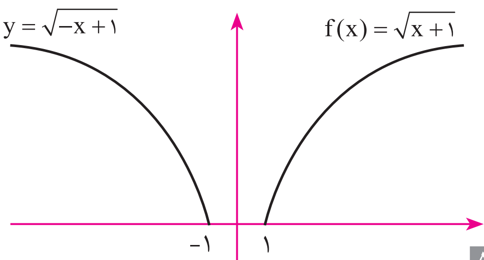
$$\begin{cases} y_0=f(x_0) \\ f(x_0)=g(-x_0) \end{cases} \Rightarrow y_0=g(-x_0)\Rightarrow(-x_0,y_0)\in g$$

می‌دانیم دو نقطهٔ (x_0,y_0) و $(-x_0,y_0)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند. در نتیجه برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم.

مثال. در شکل‌های ۴ و ۵ نمودار $y=f(x)$ و $y=f(-x)$ رسم شده‌اند.



شکل ۴



شکل ۵

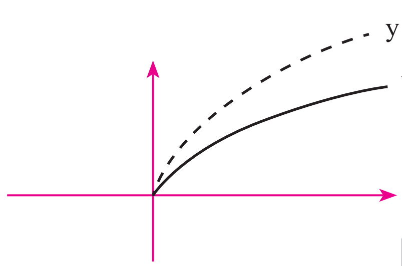
* رسم نمودار تابع y=f(k x)

اگر (x_0,y_0) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد، داریم: $y_0=f(x_0)$.

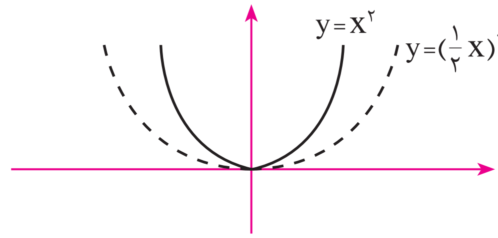
فرض کنیم: $y=g(x)=f(k\,x)$ در نتیجه نقطهٔ $(\frac{1}{k}x_0,y_0)$ نقطه‌ای از نمودار تابع $g(x)$ است. (بررسی کنید!)

اکنون برای رسم نمودار $y=f(k\,x)$ کافی است طول هر نقطه از نمودار $y=f(x_0)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم و سپس نقطه‌های حاصل را به هم وصل کنیم. در حالتی که داشته باشیم: $k>1$، نمودار نسبت به محور x جمع‌شدگی (انقباض) پیدا می‌کند و اگر داشته باشیم: $0<k<1$. نمودار نسبت به محور xها حالت کشیدگی (انبساط) می‌یابد.

مثال. در شکل‌های ۶ و ۷، نمودار تابع‌های $y=(\frac{1}{2}x)^2$ و $y=\sqrt{2x}$ از روی نمودار تابع‌های $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌اند.



شکل ۶



شکل ۷

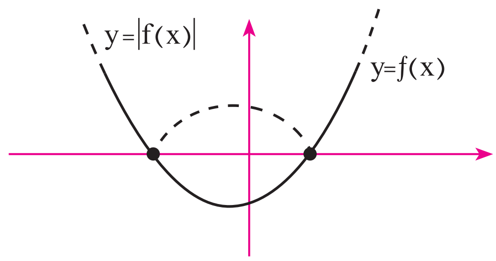
*** رسم نمودار $y=|f(x)|$**

طبق تعریف قدر مطلق می‌توان نوشت:

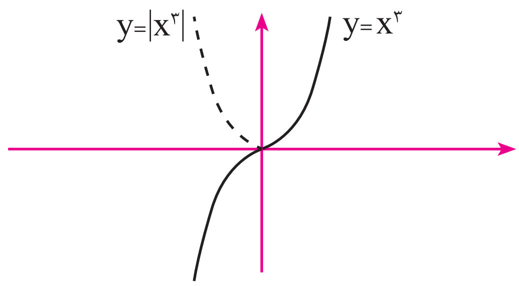
$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \\ -f(x) & f(x)<۰ \end{cases}$$

یعنی برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ در فواصلی که داریم: $f(x)>۰$، همان نمودار $y=f(x)$ را نگه می‌داریم و در فواصلی که داریم: $f(x)<۰$، قرینهٔ آن را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

مثال. در شکل‌های ۸ و ۹ نمودار چند تابع و قدر مطلق‌های آن‌ها آمده‌اند.



شکل ۸



شکل ۹

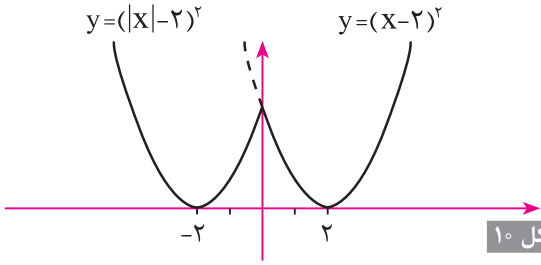
*** رسم نمودار $y=f(|x|)$**

با استفاده از تعریف قدر مطلق می‌توان نوشت:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq ۰ \\ f(-x) & x<۰ \end{cases}$$

در نتیجه در فواصلی که داریم: $x>۰$، نمودار تابع فوق همان نمودار $y=f(x)$ اســت، ولی در فواصلی که $x<۰$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها رسم می‌شود.

مثال. نمودار $y=(|x|-۲)^{۲}$ به‌صورت شکل ۱۰ رسم شده است.



شکل ۱۰

*** رسم نمودار $y=\frac{۱}{f(x)}$**

برای رســم نمودار $y=\frac{۱}{f(x)}$ به کمک نمــودار $y=f(x)$ به چند نکته باید توجه کرد:

۱. اگر دامنهٔ تابع f به‌صورت D_f باشد، دامنهٔ تابع $\frac{۱}{f}$ عبارت است از: $D_f-\{x\,|\,f(x)=۰\}$

۲. اگر نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ نقطهٔ دلخواهی از نمودار تابع $y=f(x)$ باشــد، نقطهٔ $(x_۰,\frac{۱}{y_۰})$ نقطه‌ای از نمودار $g(x)=\frac{۱}{f(x)}$ است. بنابراین در رســم نمودار $y=\frac{۱}{f(x)}$ در دامنهٔ مورد نظر عرض‌های نقاط به نسبت $\frac{۱}{f(x)}$ تغییر می‌کنند.

۳. اگر نقطه‌هایی از نمودار $y=f(x)$ دارای عرض‌های ۱ یا ۱- باشند، این نقطه‌ها به نمودار $y=\frac{۱}{f(x)}$ نیز تعلق دارند.

۴. اگر تابع f اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشــد، تابع $\frac{۱}{f}$ نیز اکیداً نزولی (اکیداً صعودی) است.

۵. اگر دامنهٔ دو تابع f و $\frac{۱}{f}$ یکسان باشد، در این صورت ماکزی‌مم مطلق f (مینی‌مم مطلق) مینی‌مم مطلق (ماکزی‌مم مطلق) $\frac{۱}{f}$ خواهد بود.

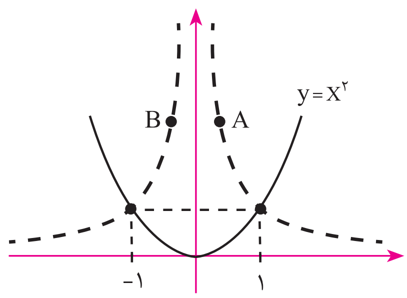
مثال. با توجه به نمودار $f(x)=x^{۲}$، نمودار $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ را رسم کنید.

حل: $D_g=R-\{۰\}$ است و نقطه‌های $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$ متعلق به هر دو تابع است. از طرف دیگر، در نقطه‌های $x=\pm\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$g(\frac{۱}{۲})=۴\ ,\ g(-\frac{۱}{۲})=۴$$

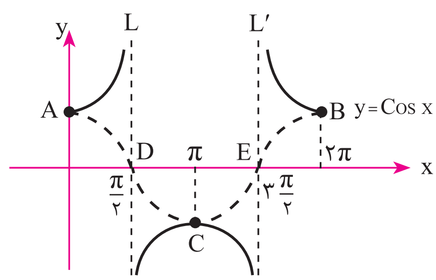
پــس نقطه‌های A و B متعلق به تابع $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ هســتند و تابع

f در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. یعنی $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً نزولی است. همچنین، تابع f در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است، پس تابع $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً صعودی است. از طرف دیگر، وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، $\frac{1}{x^2}$ به $+\infty$ نزدیک می‌شود. لذا محور yها یک مجانب قائم آن است. همچنین محور xها مجانب افقی تابع است. با اطلاعات فوق نمودار خطچین شدهٔ نمودار $y=\frac{1}{x^2}$ است.



شکل ۱۱

مثال. با توجه به نمودار تابع y=cos x در بازهٔ $[0,2\pi]$ نمودار تابع $y=\frac{1}{\cos x}$ را در دامنه‌اش و در محدودهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

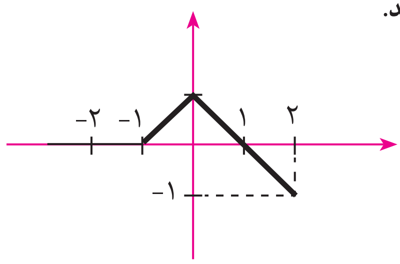


شکل ۱۲

حل: تابع y=cos x را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم می‌کنیم. نقطه‌های A، B و C به ترتیب دارای عرض‌های ۱، ۱ و ۱- هستند. در نتیجه در تابع جدید $\frac{1}{f}$ عرض‌های این نقطه‌ها تغییر نخواهند کرد و نقطه‌های D و E دارای عرض‌هـــای صفرند. در نتیجه تابع $y=\frac{1}{\cos x}$ در این نقطه‌ها تعریف نمی‌شود و خط‌های قائمی که از نقطه‌های D و E رسم می‌شوند، مجانب‌های قائم تابع‌اند. تابع در بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ اکیداً نزولی و در نتیجه $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً صعودی است و از نقطهٔ A می‌گذرد و خط L مجانب آن است. همچنین تابع در بازهٔ $(0,\pi)$ اکیداً نزولی و در نتیجه $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً صعودی است و از نقطهٔ C نیز می‌گذرد و خط L مجانب این شاخهٔ منحنی است.

به همیـــن ترتیب، تابع f در بازهٔ $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ صعودی و در نتیجه $\frac{1}{f}$ نزولی اســـت و خط ´L مجانب این شـــاخه اســـت و از نقطهٔ C می‌گـــذرد. و بالاخره، تابع f در بازهٔ $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ صعودی اســـت. در نتیجه $\frac{1}{f}$ در این بازه نزولی است و از B می‌گذرد. برای دقیق‌تر رسم شدن شکل می‌توان از نقطه‌های کمکی نیز استفاده کرد.

مثال. نمودار تابع f در شـــکل ۱۳ داده شـــده است. نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ را رســـم کنید ســـپس از روی نمودار برد تابع را تعیین کنید.

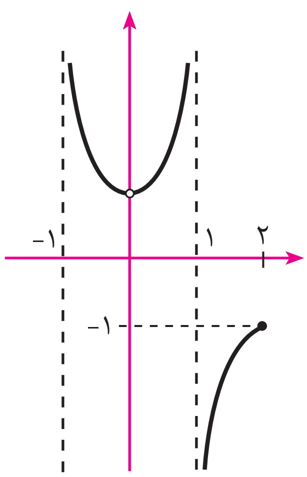


شکل ۱۳

حل: داریم: $f(-1)=f(1)=0$ لذا دامنـــهٔ تابع $D_f-\{1,-1\}$ و تابع دارای خطوط مجانب x=۱ و x=-۱ اســـت. و چون: f(۰)=۱، پس نقطهٔ (۰,۱) بـــه تابع $\frac{1}{f}$ نیز تعلق دارد. از طرف دیگر، f(۲)=-۱، پس نقطه (۲,-۱) نیز به تابع $\frac{1}{f}$ تعلق دارند.

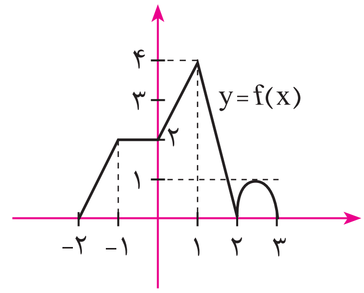
تابع f در بازهٔ (۰,۱) اکیداً نزولی و در نتیجه $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً صعودی و x=۱ مجانب این شـــاخه اســـت. تابع f در بازهٔ (۱,۲) اکیداً نزولی، در نتیجه $\frac{1}{f}$ در این بازه اکیداً صعودی و x=۱ مجانب آن است.

به همیـــن طریق تابع f در بازهٔ (۰و۱-) اکیداً صعودی و در نتیجه $\frac{1}{f}$ اکیداً نزولی و x=-۱ مجانب آن اســـت. در شکل ۱۴ نمودار $\frac{1}{f}$ بـــا توضیحات فوق رســـم شده اســـت. واضح است بـــرد تابع $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ خواهد بود.



شکل ۱۴

مثال. نمودار تابع f در شکل ۱۵ داده شده است. در هر قسمت نمودار تابع خواسته شده را رسم کنید.



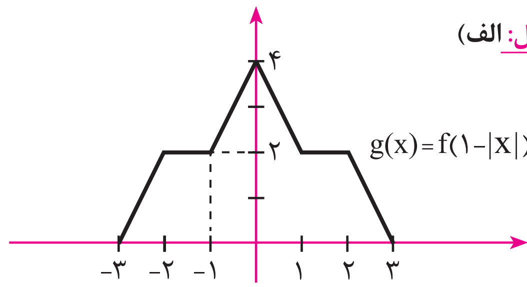
الف. $g(x)=f(1-|x|)$

ب. $g(x)=f(x+|x|)$

ج. $g(x)=f(x-2|x|)$

شکل ۱۵

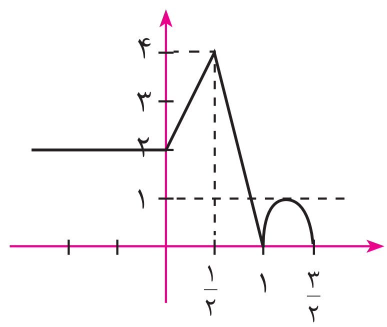
حل: الف)



$$f(1-|x|)=\begin{cases} f(1-x) & x\ge 0\\ f(1+x) & x<0\end{cases}$$

شکل ۱۶

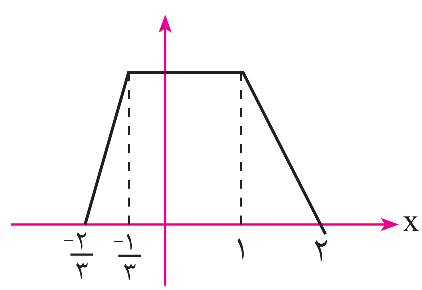
ب)



$$f(x+|x|)=\begin{cases} f(2x) & x\ge 0\\ f(0) & x<0\end{cases}$$

شکل ۱۷

پ) $$f(x-2|x|)=\begin{cases} f(-x) & x\ge 0\\ f(3x) & x<0\end{cases}$$



شکل ۱۸

مثال. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1-x & x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ را ابتدا نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم. سپس آن را سه واحد به چپ می‌بریم و بعد آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. ضابطه تابع به دست آمده چیست؟

حل:

مرحلهٔ اول: $$f(-x)=\begin{cases}1+x & -x\le 0\\ (-x)^2 & -x>0\end{cases}$$

مرحلهٔ دوم: $x\to x+3$ $$f(-x-3)=\begin{cases}4+x & x+3\ge 0\\ (x+3)^2 & x+3<0\end{cases}$$

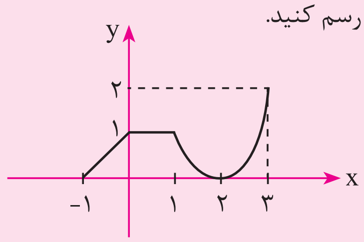
مرحلهٔ سوم: $$-f(-x-3)=\begin{cases}-4-x & x\ge -3\\ -(x+3)^2 & x<-3\end{cases}$$

مرحلهٔ چهارم: $$-f(-x-3)+1=\begin{cases}-3-x & x\ge -3\\ -(x+3)^2+1 & x<-3\end{cases}$$

تمرین

۱. نقطهٔ $(3,-5)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. در تابع $y=-2f(\frac{3-x}{2})+1$ این نقطه با چه نقطه‌ای متناظر می‌شود؟

۲. اگر نمودار $y=f(2x+3)-1$ به‌صورت شکل ۱۹ باشد، نمودار $y=f(x)$ را رسم کنید.



شکل ۱۹

۳. نمودار $|y-1|=\cos x$ را در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

۴. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$

نمودار هریک از تابع‌های زیر را با توجه به آن‌ها رسم کنید:

الف) $y=g(g(x))$ **ب)** $y=g(f(x))$ **پ)** $y=f(g(x))$

منابع

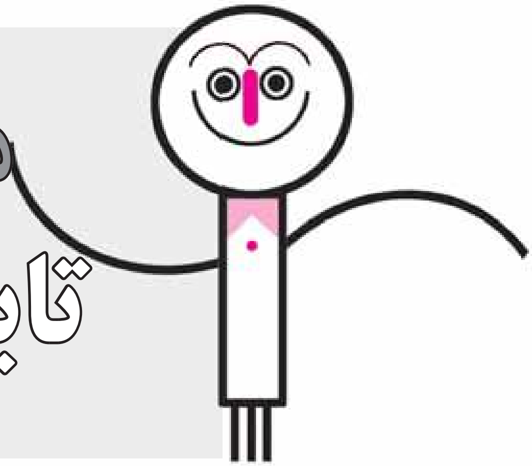
۱. رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۷، زمستان ۱۳۶۴، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش‌وپرورش.

۲. حسابان (۲)، پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش‌وپرورش.

۳. حساب دیفرانسیل و انتگرال، جیمز استوارت، جلد اول، ترجمه ارشک حمیدی، انتشارات فاطمی.

علی زهایی ـ محمود داورزنی

مدل سازی با تابع های مثلثاتی

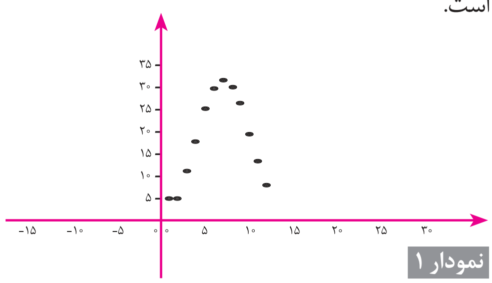


میانگین دمای هوا از دی‌ماه ۹۵ تا آذر ۹۶ در شهر تهران، به‌صورت جدول ۱ اندازه‌گیری شده است.

جدول ۱. دمای شهر تهران در سال ۲۰۱۷

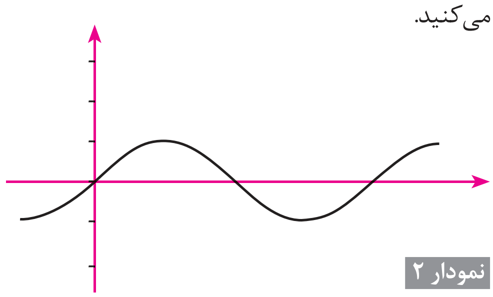
دی ۹۵	بهمن ۹۵	اسفند ۹۵	فروردین ۹۶	اردیبهشت ۹۶	خرداد ۹۶
۵/۴	۵/۴	۱۱/۴	۱۷/۸	۲۵/۴	۲۹/۸
تیر ۹۶	**مرداد ۹۶**	**شهریور ۹۶**	**مهر ۹۶**	**آبان ۹۶**	**آذر ۹۶**
۳۱/۶	۳۰/۲	۲۶/۸	۱۹/۵	۱۳/۵	۸/۳

این اطلاعات در دســتگاه نمودار ۱ نشان داده شده است.



نمودار ۱

بــا توجه به اینکه دمای هوا در ســال‌های بعد نیز به‌صورت تقریبی تکرار می‌شــود، اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، نمودار حاصل شبیه نمودار تابع مشهور «y=sin x» می‌شــود که آن را در نمودار ۲ مشــاهده می‌کنید.



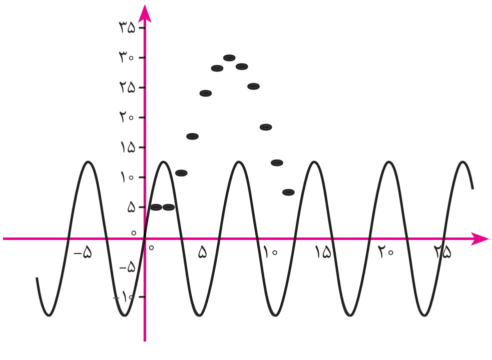
نمودار ۲

ســؤالی که اکنون پیش می‌آید این اســت که: آیا می‌توان یک تابع تغییرشکل یافته از این تابع به‌صورت $y = A\sin[\omega(x-a)]+B$ نوشت که تا حد امکان بر نقاطی که دمای شــهر تهران را نشان می‌دهند، تطبیق داشــته باشد؟ برای این کار باید نمودار تابع y=sin x را به اندازهٔ لازم، انبساط و انتقال دهیم تا جایی که به نقاط نمودار داده شده نزدیک شود.

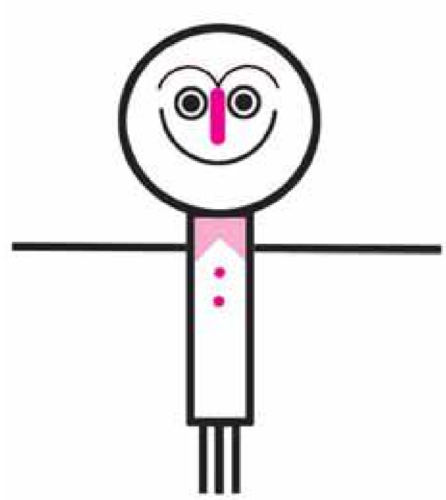
برد تابع y=sin x، بازهٔ [-۱,۱] اســت، در حالی‌که این مقــدار برای دمای تهــران در ســال ۲۰۱۷، بازهٔ [۵/۴,۳۱/۶] اســت. بنابرایــن میانگین دامنهٔ نوســان تابع سینوس برابر اســت با: $\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱$ و این مقدار برای دمای تهران چنین است: $\frac{۳۱/۶-۵/۴}{۲}=۱۳/۱$. بنابراین باید تابع y=sin x را به‌صورت زیر بنویسیم:

$y=۱۳/۱\sin x$

که دامنهٔ تغییر آن مانند دمای تهران شــود. نمودار ۳ نمودار تابــع y=۱۳/۱sin x و نمودار دمای تهران را در یک دستگاه نشان می‌دهد.



نمودار ۳



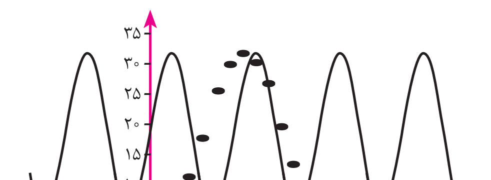
کاری که تا اینجا انجام داده‌ایم، یک انبساط قائم تابع $y=\sin x$ بوده است. بیشترین مقدار تابع $y=۱۳/۱\sin x$ برابر است با: ۱۳/۱ و برای اینکه حداکثر مقدار آن با یک انتقال عمودی به ۳۱/۶ (بیشـــترین دمای تهران) برسد، باید آن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$y=۱۳/۱\sin x+(۳۱/۶-۱۳/۱)=۱۳/۱\sin x+۱۸/۵$$

اگـــر m و M به ترتیب کمترین و بیشـــترین دمای تهران در سال ۲۰۱۷ باشند، با توجه به مطالب گفته‌شده داریـــم: $\frac{M-m}{۲}=۱۳/۱$ و با توجه به رابطهٔ بالا، انتقال عمودی نیز عبارت است از:

$$۳۱/۶-۱۳/۱=M-۱۳/۱=M-\frac{M-m}{۲}=\frac{M+m}{۲}$$

نمودار تابع $y=۱۳/۱\sin x+۱۸/۵$ نمودار ۴ است.

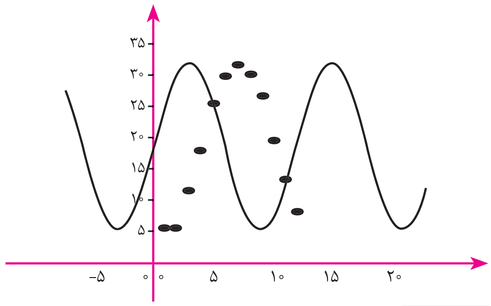


نمودار ۴

اکنون ایـــن نمودار را یک انبســـاط افقی می‌دهیم که میزان کشـــیدگی آن با میزان کشیدگی نقطه‌هایی که دما را نشـــان می‌دهند، یکی باشد. با توجه به اینکه دمای هوا برای دوازده ماه نوشـــته و سپس همان مقادیر (البته به‌صورت تقریبی) تکرار می‌شوند، دورهٔ تناوب تابع $y=A\sin[(\omega x)]+B$ باید ۱۲ باشد؛ پس:

$$\frac{۲\pi}{\omega}=۱۲\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۶}$$

نمودار ۵ نمودار تابع $y=۱۳/۱\sin(\frac{\pi}{۶}x)+۱۸/۵$ است.

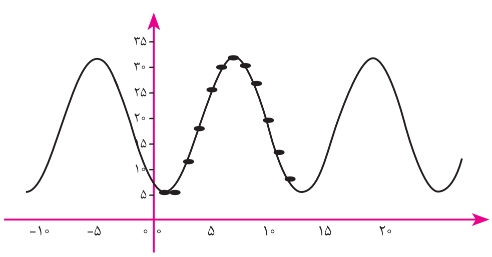


نمودار ۵

تنها کاری کـــه اکنون باید انجام دهیم، یک انتقال افقی اســـت تا این نمودار با نقطه‌های داده شده انطباق یابـــد. از نمـــودار تابع $y=۱۳/۱\sin(\frac{\pi}{۶}x)+۱۸/۵$ با دورهٔ تناوب T=۱۲ می‌توان مشـــاهده کرد که این تابع در بازهٔ [۰,۳] اکیداً صعـــودی و در فاصلهٔ [۳,۹] اکیداً نزولی اســـت. بنابراین در نقطهٔ به طول x=۳ ماکزیمم نسبی دارد و این در حالی است که دمای تهران در x=۷ بیشـــترین مقدار خود را به دست آورده است. پس باید نمودار تابع ذکر شده را ۴ واحد به راست انتقال دهیم و با این کار تابع زیر حاصل می‌شود:

$$y=۱۳/۱\sin\left[\frac{\pi}{۶}(x-۴)\right]+۱۸/۵$$

نمـــودار ۶، نمودار این تابع اســـت که تا حد امکان انطباق قابل قبولی را برای دمای تهران در سال ۲۰۱۷ نشان می‌دهد.



نمودار ۶

مرحله‌هایـــی را کـــه در مثـــال بالا انجام شـــدند تـــا اطلاعـــات داده شـــده از دمـــای تهران را بـــا تابع $y=A\sin[\omega(x-a)]+B$ نشـــان دهیـــم، در زیـــر خلاصه می‌کنیم (m و M به ترتیب کمترین و بیشترین داده هستند):

۱) $A=\frac{M-m}{۲}$

۲) $B=\frac{M+m}{۲}$

۳) $T=۱۲\Rightarrow \frac{۲\pi}{\omega}=۱۲\Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۶}$

۴) $\Rightarrow x\rightarrow x-۴$ ماکزیمم نسبی تابع $y=A\sin(\omega x)+B$ در x=۳ است، در حالی‌که بیشترین دما در x=۷ (ماه هفتم) است. اکنون یک مثال دیگر می‌آوریم و از نتایج به‌دست‌آمده در مثال قبل، استفاده می‌کنیم.

زمان‌های غروب خورشید

زمان‌های غروب خورشید در ماه‌های متفاوت سال و در شهر تهران مطابق با جدول ۲ است.

جدول ۲. زمان‌های غروب خورشید در ماه‌های متفاوت سال

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۱۹:۱۶	۱۹:۴۲	۲۰:۰۷	۲۰:۲۳	۲۰:۱۶	۱۹:۴۴
مهر	**آبان**	**آذر**	**دی**	**بهمن**	**اسفند**
۱۹:۰۰	۱۸:۱۹	۱۷:۵۳	۱۷:۵۵	۱۸:۱۹	۱۸:۵۰

زمان غروب خورشید هر ماه را به یک عدد حقیقی تبدیل می‌کنیم. مثلاً زمان غروب خورشید در ابتدای فروردین برابر است با:

$$۱۹:۱۶=۱۹+\frac{۱۶}{۶۰}=۱۹/۲۶$$

بنابراین جدول ۲ به‌صورت جدول ۳ درمی‌آید.

جدول ۳. تبدیل زمان‌های غروب خورشید به عددهای حقیقی

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۱۹/۲۶	۱۹/۷	۲۰/۱۱	۲۰/۳۸	۲۰/۲۶	۱۹/۷۳
مهر	**آبان**	**آذر**	**دی**	**بهمن**	**اسفند**
۱۹	۱۸/۳۱	۱۷/۸۸	۱۷/۹۱	۱۸/۱	۱۸/۸۳

دیرترین زمان غروب خورشید در ماه چهارم، یعنی تیرماه، برابر با ۲۰/۳۸ است. همچنین زودترین زمان غروب در ماه نهم برابر با ۱۷/۸۸ است. اگر تابع $y=A\sin[\omega(x-a)]+B$ بخواهد با زمان‌های غروب خورشید در تهران انطباق داشته باشد، داریم:

$$A=\frac{۲۰/۳۸-۱۷/۸۸}{۲}=۱/۲۵$$

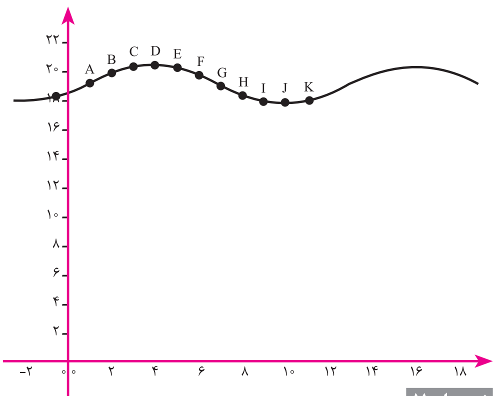
$$B=\frac{۲۰/۳۸+۱۷/۸۸}{۲}=۱۹/۱۳$$

$$T=۱۲\Rightarrow \frac{۲\pi}{\omega}=۱۲\Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۶}$$

دیرترین زمان غروب خورشید در x=۴ (ماه چهارم) است، در حالی‌که بیشترین مقدار تابع $y=A\sin(\omega x)+B$ با دورهٔ تناوب ۱۲ در x=۳ رخ داده است، بنابراین x به x-۱ تغییر می‌یابد و تابع زیر را به دست می‌آوریم:

$$y=۱/۲۵\sin\left[\frac{\pi}{۶}(x-۱)\right]+۱۹/۱۳$$

نمودار ۷ نمودار این تابع را به همراه زمان‌های غروب خورشید در شهر تهران نشان می‌دهد.



نمودار ۷

یکی از نکته‌های قابل‌توجه در مثال‌های بالا این است که در نوشتن ضابطهٔ تابع سینوسی تنها بیشترین و کمترین داده و همچنین تعداد داده‌ها مهم است و مقدار دیگر داده‌ها نقشی در تعیین این تابع ندارد. بنابراین می‌توانیم در داده‌های متناوب، فقط با در اختیار داشتن این مقادیر، معادلهٔ تابع سینوسی را بنویسیم و از آن به‌عنوان یک تابع برآورد یا پیش‌بینی‌کننده استفاده کنیم. مثال زیر این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد. قبل از بیان آن، انقلاب تابستانی و انقلاب زمستانی را تعریف می‌کنیم.

انقلاب تابستانی اوج ارتفاع خورشید در یکی از نیم‌کره‌های عرضی (شمالی یا جنوبی) کرهٔ زمین است که در نتیجهٔ آن، طولانی‌ترین طول روز در آن زمان به دست می‌آید. در نیم‌کرهٔ شمالی، متوسط اوج سالانهٔ خورشید در

۳۱ خرداد، ساعت ۱۷:۵۶ نصف‌النهاری به وقت ایران است.

از نظر نجومی، انقلاب تابستانی هر چهار سال یک بار در آخر خردادماه و سه بار نیز در اول تیرماه رخ می‌دهد. از نظر تقویمی و عرفی، انقلاب تابستانی را معمولاً روز اول تیرماه در نظر می‌گیرند. عکس این موضوع، انقلاب زمستانی است که در آن کوتاه‌ترین روز سال در آن زمان به دست می‌آید و در ایران، آن را اول دی‌ماه در نظر می‌گیرند و شب قبل آن را «شب یلدا» یا «شب چله» می‌نامند.

مثال. در شهر تهران، طول روز در انقلاب تابستانی برابر با ۱۴:۳۴ و در انقلاب زمستانی برابر با ۹:۴۵ است. طول روز را در دهم فروردین، به‌طور تقریبی تعیین کنید.

طول روزها طی یک سال به‌طور متناوب تکرار می‌شود. بنابراین اگر تابع $y = A\sin[\omega(x-a)] + B$ طول روزها را مشخص کند، سپس:

$$A = \frac{۱۴/۵۷ - ۹/۷۵}{۲} = ۲/۴۱$$

$$B = \frac{۱۴/۵۷ + ۹/۷۵}{۲} = ۱۲/۱۶$$

$$T = ۳۶۵ \Rightarrow \frac{۲\pi}{\omega} = ۳۶۵ \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{۳۶۵}$$

برای یافتن a، یعنی اندازهٔ انتقال افقی، ۳۶۵ روز سال (دورهٔ تناوب) را به چهار بازهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم:

$[۰,۹۱/۲۵],[۹۱/۲۵,۱۸۲/۵],[۱۸۲/۵,۲۷۳/۷۵],[۲۷۳/۷۵,۳۶۵]$

منحنی تابع $y = A\sin(\omega x) + B$ در بازهٔ $[۰,۹۱/۲۵]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۹۱/۲۵,۲۷۳/۷۵]$ اکیداً نزولی است. پس در x=۹۱/۲۵ ماکزیمم نسبی وجود دارد. با توجه به اینکه روز اول تیرماه (شروع انقلاب تابستانی)، روز ۹۴ام از سال است، پس در x=۹۴ ماکزیمم رخ می‌دهد. بنابراین انتقال افقی به میزان ۲/۷۵=۹۱/۲۵-۹۴ است و x به (x-۲/۷۵) تبدیل می‌شود. با توجه به مقادیر بالا تابع زیر به دست می‌آید:

$$y = ۲/۴۱\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(x - ۲/۷۵)\right] + ۱۲/۱۶$$

اکنون می‌توانیم طول روز را در دهم فروردین پیش‌بینی کنیم. برای این کار کافی است در تابع بالا قرار دهیم: x=۱۰.

$$\begin{aligned} x = ۱۰ \Rightarrow y &= ۲/۴۱\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(۱۰ - ۲/۷۵)\right] + ۱۲/۱۶ \\ &= ۲/۴۱\sin(۰/۱۲۴) + ۱۲/۱۶ \\ &= ۰/۲۹ + ۱۲/۱۶ \\ &= ۱۲/۴۵ \end{aligned}$$

عدد به‌دست‌آمده، یعنی ۱۲/۴۵ برابر با ۱۲ ساعت و ۲۷ دقیقه است. با نگاهی به تقویم، مقدار دقیق طول روز در دهم فروردین، ۱۲ ساعت و ۲۹ دقیقه است که با مقدار به‌دست‌آمده تنها ۲ دقیقه اختلاف دارد. پیش‌بینی طول روز در هر روز از سال، تنها با داشتن طول دو روز از سال، یکی از عجایب تابع‌های مثلثاتی است که نشان می‌دهد، شاید اساس خلقت بر پایهٔ این تابع‌ها باشد.

تمرین

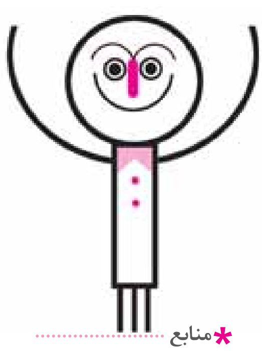
۱. آخرین شهری از ایران که آفتاب در آن غروب می‌کند، «چالدران» از آذربایجان غربی است. زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه این شهر طبق جدول زیر است.

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۱۹:۴۵	۲۰:۱۵	۲۰:۴۴	۲۱:۰۱	۲۰:۵۲	۲۰:۱۷
مهر	**آبان**	**آذر**	**دی**	**بهمن**	**اسفند**
۱۹:۲۸	۱۸:۴۳	۱۸:۱۳	۱۸:۱۴	۱۸:۴۰	۱۹:۱۴

ضابطهٔ تابع $y = A\sin[\omega(x-a)] + B$ را به گونه‌ای بیابید که بر این اطلاعات تا حد امکان انطباق داشته باشد و سپس نمودار آن را در یک دستگاه مختصات به همراه اطلاعات اولیه از زمان‌های غروب آفتاب رسم کنید.

۲. در هر شهر یا منطقه‌ای که زندگی می‌کنید، طول روز را در اول دی‌ماه و اول تیرماه مشخص کنید. سپس با کمک این دو عدد، طول روز را در پانزدهم خردادماه تعیین کنید. دقت جواب به‌دست‌آمده را با مراجعه به یک تقویم شرعی به دست آورید.

۳. با مراجعه به سایت سازمان هواشناسی کشور، شهر خود را انتخاب و میانگین دمای هوای ماه‌های متفاوت را در سال گذشته استخراج کنید. سپس سردترین و گرم‌ترین روزها را بیابید و با کمک این دو عدد، دمای هوا را در خردادماه، پیش‌بینی کنید.



*منابع

۱. سازمان هواشناسی کشور به آدرس: www.irimo.ir

۲. اوقات شرعی و جهت قبلهٔ آوینی به آدرس: www.prayer.aviny.com

۳. سایت http://fa.wikipedia.org

مرضیه سعید، مدرس دانشگاه فرهنگیان کازرون
و دبیر ریاضی آموزش‌وپرورش کازرون
عبدالرحمن شهیدزاده، مدرس دانشگاه سلمان‌فارسی کازرون
و دبیر ریاضی آموزش‌وپرورش کازرون

ارائهٔ یک فضای مثال ساختاریافته برای یافتن نقاط برخورد توابع f و f^{-1}

اشاره

از آنجا که استفاده از مثال در آموزش ریاضی و ساخت دانش نقش اساسی دارد و برای آموزش مفاهیم ریاضی، ارائهٔ یک فضای مثال ساختاریافته و جامع بسیار حائز اهمیت است، و همچنین یکی از موضوع‌های چالش‌برانگیز در بحث توابع، یافتن نقاط برخورد توابع f و f^{-1} است، لذا برای آشنایی بیشتر دانش‌آموزان، در این پژوهش سعی شده است به کمک شهود و رسم نمودارهای متفاوت توابع f و f^{-1} ، یک فضای مثال شامل انواع مسائل مطرح در دورهٔ متوسطهٔ دوم، سازمان‌دهی و ارائه شود.

مقدمه

در ساخت دانش و بازسازی مفاهیم ریاضی، مثال‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند. مثال‌های خوب مانند یک نمایشگر شفاف، ابزاری برای برقراری ارتباط میان فراگیرندگان، معلمان و مفاهیم هستند. نتایج تحقیق ریحانی و همکارانش (۱۳۹۲) نشان داد که معلمان به ضرورت استفاده از مثال‌ها واقف‌اند، ولی شناخت کافی از مثال آموزشی ندارند و فضای مثال آن‌ها به قدر کافی توسعه نیافته است. استفاده از مثال در آموزش ریاضی امری ضروری است. مثال‌ها با استفاده از ویژگی‌های خاص و قابلیت‌های منحصربه‌فرد خود در بازنمایی و ارائهٔ مفاهیم و نمایاندن فرایندهای شکل‌گیری یک مفهوم تأثیر بسیار زیادی در ذهن فراگیرندگان دارند [Bardelle & Ferrari, 2011]

مثال ریاضی

به تعبیر **واتسون** و **میسون** (۲۰۰۵)، مثال یعنی هر چیز قابل استفاده به‌عنوان یک مادهٔ خام اولیه که در درک ارتباطات، مفاهیم، ساختارها، استنتاج، استدلال و تعمیم به کار می‌رود. مثال‌ها به‌عنوان ابزاری کارامد برای بیان ویژگی‌های کلیدی از هر تعریف و یا توضیح آموزشی هستند که در فرایند حل یک مسئله دخالت دارند و می‌توانند در تشریح مفاهیم ریاضی و بیان ارتباط بین این مفاهیم مؤثر باشند [Bills and etal., 2006]. مجموعه‌ای از مثال‌ها که فراگیرنده یا آموزشگر در هر لحظه می‌تواند به آن‌ها دسترسی داشته باشد، «فضای مثال» نامیده می‌شود.

یافتن نقاط برخورد توابع f و f^{-1}

۱. تابع وارون

■**تعریف: اگر f تابعی یک به یک متشکل از زوج‌های مرتب (x,y) باشد، آن‌گاه تابعی چون f^{-1}، موسوم به وارون f وجود دارد که مجموعهٔ زوج‌های مرتب (y,x) است و با ضابطهٔ**

$$y=f(x) \text{ اگر و تنها اگر } x=f^{-1}(y) \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. دامنهٔ f^{-1}، برابر با برد f و برد f^{-1}، برابر با دامنهٔ f است.

براساس تعریف فوق، شرط اینکه f تابع وارون داشته باشد، این است که یک به یک باشد. از معادلهٔ (۱) داریم:

$$f^{-1}(y)=x \qquad (۲)$$

هرگاه f(x) را به جای y قرار دهیم، خواهیم داشت:

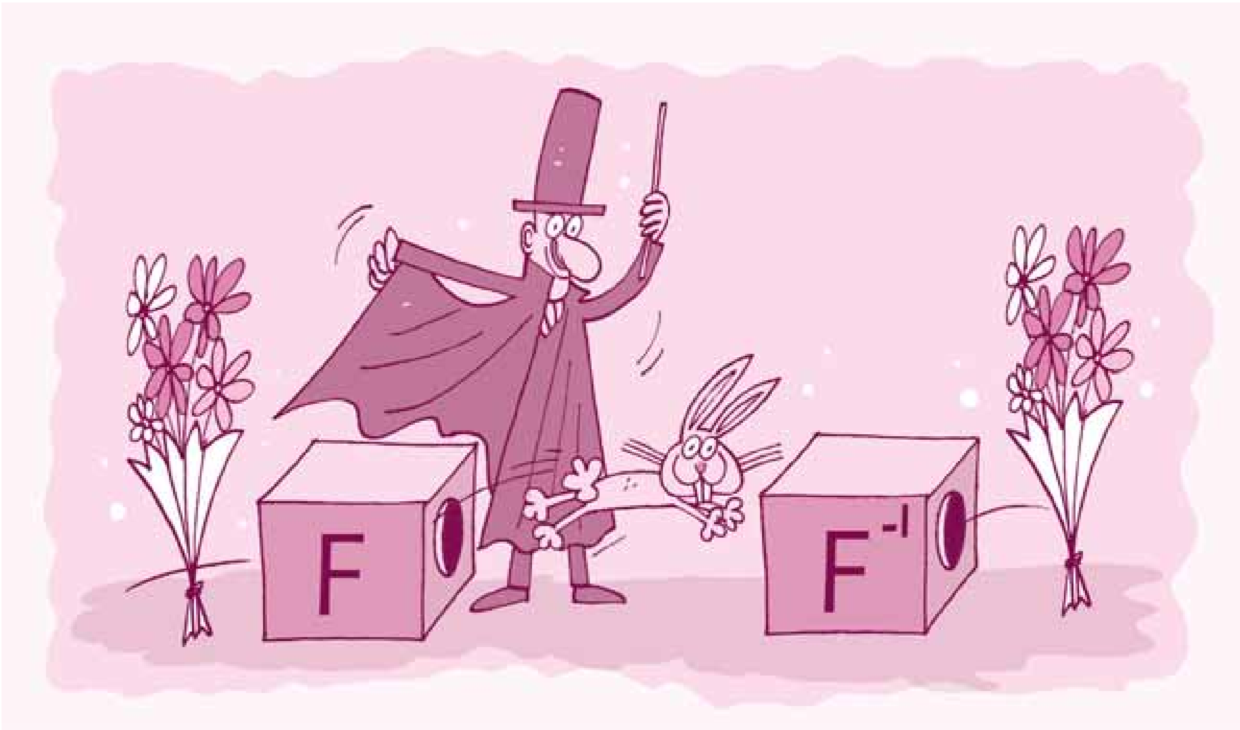
$$f^{-1}(f(x))=x \qquad (۳)$$

با این شرط که x در دامنهٔ f باشد. به این ترتیب در معادلهٔ (۲) y را حذف کرده‌ایم. حال بین همین دو معادله x را حذف می‌کنیم. برای این کار می‌نویسیم: $f(x)=y$ و $f^{-1}(y)$ را به جای x قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$f(f^{-1}(y))=y \qquad (۴)$$

که در آن y دامنهٔ f^{-1} است و چون نمادی که برای متغیر مستقل به کار می‌رود، دلخواه است، می‌توانیم در (۴) به جای y، x را بنویسیم. به دست می‌آوریم:

$$f(f^{-1}(x))=x \qquad (۵)$$



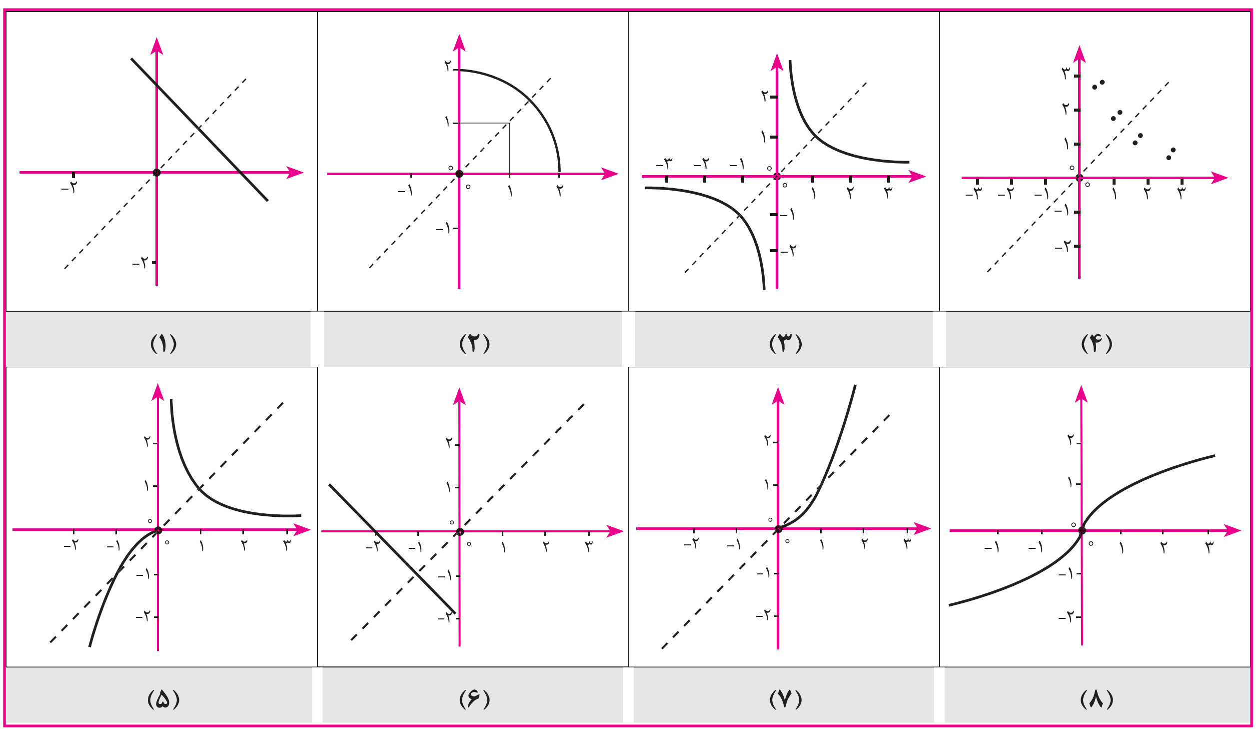
کـه x در دامنهٔ f^{-1} اسـت. از (۳) و (۵) می‌بینیـم کـه اگـر وارون تابـع f، f^{-1} باشـد، آن‌گاه وارون f^{-1}، f اسـت. ایـن نتیجه و نتایـج (۳) و (۵) را به‌صـورت قضیـه زیـر بیـان می‌کنیم:

قضیــه: اگــر f تابعــی یک بــه یــک باشــد، آن‌گاه f^{-1} نیز یک تابــع اســت داریم:

$$x \in D_f \to f^{-1}(f(x)) = x \text{ ، } x \in D_{f^{-1}} \to f(f^{-1}(x)) = x$$

۲. ارائه ساختاری برای فضای مثال در یافتن نقاط برخورد توابع f و f^{-1}

به نمودارهای زیر توجه کنید:



(۱) (۲) (۳) (۴)

(۵) (۶) (۷) (۸)

مشاهده می‌شود که نمودارهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نسبت به نیم‌ساز ربع‌های اول و سوم، و نمودارهای (۵) و (۶) تنها در بخشی از دامنه متقارن هستند، ولی نمودارهای (۷) و (۸) متقارن نیستند. طبیعی است که اگر توابع متقارن نسبت به محور y=x را در راستای این محور انتقال دهیم، تقارن آن‌ها نسبت به این محور حفظ می‌شود. اکنون به بررسی توابع f و f^{-1} و محل برخورد آن‌ها طبق ضابطه‌شان می‌پردازیم و یک فضای مثال ساختاریافته برای آن ارائه می‌دهیم.

برای یافتن محل برخورد دو تابع y=f(x) و y=g(x) کافی است قرار دهیم: f(x)=g(x). مجموعه جواب‌های این معادله محل برخورد این دو تابع است. ابتدا با توجه به ضابطهٔ تابع f و با تعویض متغیرهای x و y در آن، ضابطهٔ وارون تابع، یعنی f^{-1} را می‌یابیم. سپس برای یافتن محل برخورد f و f^{-1} به نکات زیر توجه می‌کنیم:

- در بخش یا بخش‌هایی از دامنهٔ f، مانند مجموعهٔ I ($I \subseteq D_f \cap D_{f^{-1}}$) که ضابطهٔ f و f^{-1} یکسان است، به عبارت دیگر: $(\forall x \in I) f(x) = f^{-1}(x)$، محل برخورد f و f^{-1} همان نقاط مجموعهٔ I است.
- در بخش یا بخش‌های دیگر دامنهٔ f، یعنی $D_f - I$ که ضابطهٔ f و f^{-1} یکسان نیست، محل برخورد در صورت وجود، روی خط y=x است و از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:

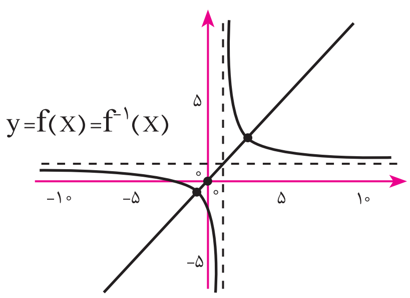
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = f(x)$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱},\ D_f = R - \{۱\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱},\ D_{f^{-1}} = R_f = R - \{۱\}$

$\Rightarrow f(x)^{-1} = f(x),\ \forall x \in D_f$

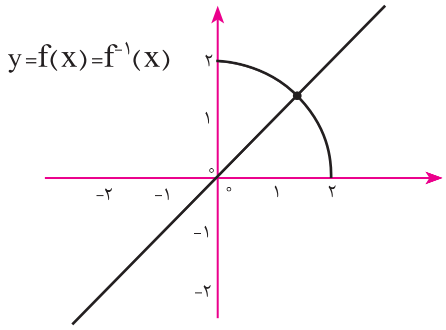


نقاط برخورد f و f^{-1} تمام اعضای دامنهٔ f و تعداد آن نامتناهی است.

۲) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}\ ,\ D_f = [۰, ۲]$

$f^{-1}(x) = \sqrt{۴ - x^۲}\ ,\ D_{f^{-1}} = R_f = [۰, ۲]$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x),\ \forall x \in D_f$

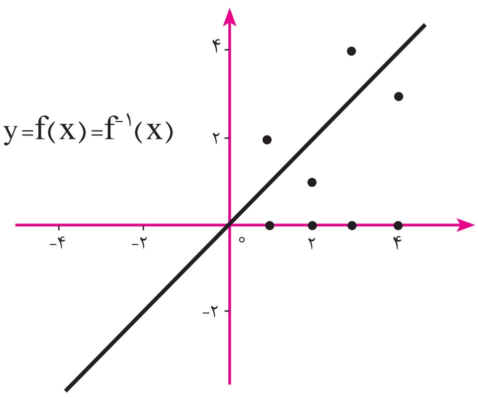


نقاط برخورد f و f^{-1} تمام اعضای دامنهٔ f و تعداد آن نامتناهی است.

۳) $f = \{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\},\ D_f = \{۱,۲,۳,۴\}$

$f^{-1} = \{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\},\ D_{f^{-1}} = R_f = \{۱,۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow f(x)^{-1} = f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$



نقاط برخورد f و f^{-1} تمام اعضای دامنهٔ f و تعداد آن متناهی است.

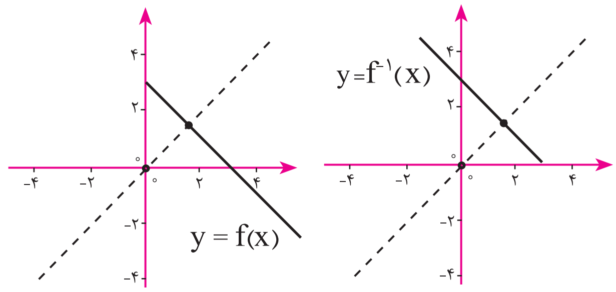
۴) $f(x) = ۳ - x,\ D_f = [۰, +\infty)$

$f^{-1}(x) = ۳ - x,\ D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, ۳]$

$\Rightarrow \forall x \in I = D_f \cap D_{f^{-1}} = [۰, ۳]; f^{-1}(x) = f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in D_f - I \rightarrow$

$$\begin{cases} y = ۳ - x \\ y = x \end{cases} \rightarrow ۳ - x = x \rightarrow ۲x = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} \in I$$

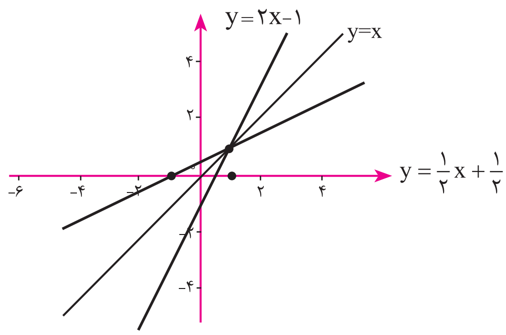


نقاط برخورد f و f^{-1} تمام اعضای I و تعداد آن نامتناهی است.

۵) $f(x) = 2x - 1,\ D_f = R$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ D_{f^{-1}} = R_f = R \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x - 1 = x \rightarrow x = 1$$

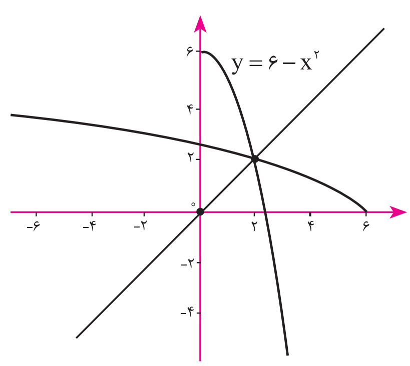


نقطهٔ برخورد f و f^{-1} تنها در x=۱ روی نیمساز ربع اول و سوم و تعداد آن یکی است.

۶) $f(x) = 6 - x^2,\ D_f = [0, +\infty)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{6 - x}\ ,D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 6] \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

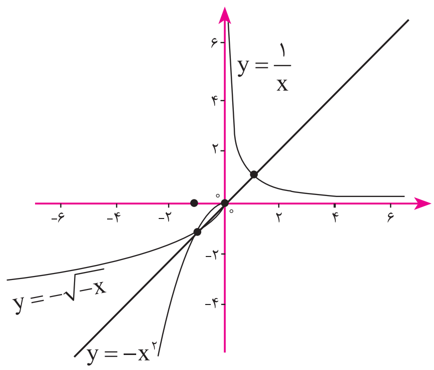
$$\rightarrow 6 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$$



نقطهٔ برخورد f و f^{-1} تنها در x=۲ روی نیمساز ربع اول و سوم و تعداد آن یکی است.

۷) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -x^2 & x \le 0 \end{cases}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \rightarrow I = (0, +\infty) \\ -\sqrt{-x} & x \le 0 \rightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow -x^2 = x \rightarrow x = -1, 0 \end{cases}$$



نقاط برخورد f و f^{-1} تمام نقاط مجموعهٔ I و در ۰ و ۱−=x روی نیمساز ربع اول و سوم و تعداد آن نامتناهی است. برای یافتن نقاط برخورد یک تابع با وارون آن به کمک ضابطهٔ تابع، می‌باید از ضابطهٔ وارون تابع مطلع شویم. اگر ضابطه‌های f و f^{-1} روی مجموعهٔ I یکسان باشند، واضح است که مجموعهٔ نقاط برخورد، همان I است. در بخش‌های دیگر یعنی $D_f - I$، نقاط برخورد در صورت وجود، تنها روی خط y=x است و کافی است معادلهٔ f(x)=x را حل کنیم. حال سؤال این است که چه موقع تابع f و f^{-1} دارای ضابطه یکسان هستند و چگونه تشخیص دهیم؟

در ادامه می‌خواهیم بدانیم، تحت چه شرایطی یک تابع وارونش را روی نیمساز ربع اول و سوم یا خارج از آن قطع می‌کند.

الف. تابع‌هایی که محل برخوردشان با وارونشان (در صورت وجود) تنها روی خط y=x است

■ **قضیه:** اگر f و f^{-1} نقطهٔ مشترکی مانند (a,b) که a≠b (روی نیمساز ربع اول و سوم نباشد) داشته باشند، آنگاه f لزوماً روی بخشی از دامنه‌اش، نزولی اکید خواهد بود.

■ **اثبات:** از آنجا که a≠b : می‌توان دو حالت زیر را در نظر گرفت:

● **حالت اول:** b>a

$$(a,b) \in f, (a,b) \in f^{-1} \Rightarrow (b,a) \in f^{-1}, (b,a) \in f$$

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \xrightarrow{b>a} f(a) > f(b)$$

بنابر تعریف، تابع f از نقطهٔ (a,b) به (b,a) نزول می‌کند، در نتیجه می‌توان گفت که روی بخشی از دامنه‌اش، نزولی اکید خواهد بود.

● **حالت دوم:** a>b

$$(a,b)\in f,(a,b)\in f^{-1} \Rightarrow (b,a)\in f,(b,a)\in f^{-1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(a)=b \\ \\ f(b)=a \end{array}\right. \xrightarrow{b<a} f(a)<f(b)$$

به‌طور مشابه، تابع f از نقطهٔ (b,a) بـه (a,b) نزول می‌کند. در نتیجه می‌توان گفت که روی بخشی از دامنه‌اش، نزولی اکید خواهد بود.

■ **نتیجه:** اگر f روی کل دامنه صعودی اکید باشد، f و f^{-1} در صورت برخورد، هیچ نقطهٔ مشترکی خارج از خط y=x نخواهند داشت.

ب. تابع‌هایی که ممکن است محل برخورد آن‌ها با وارونشان خارج از خط y=x باشد

● **تابع‌های متقارن نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم:** با توجه به نمودارهای رسم شده و ضابطهٔ آن‌ها می‌توان گفت تابع‌هایی نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم متقارن هستند که دارای ضابطهٔ یکسان باشند و با توجه به تعریف تابع وارون، تابع‌هایی که ضابطهٔ آن‌ها متقارن است، دارای این ویژگی هستند.

اگر داشته باشیم: f(x,y)=۰، این رابطه را متقارن گوییم هرگاه با تعویض جای x و y در این معادله، همان معادلهٔ اولیه حاصل شود؛ مانند:

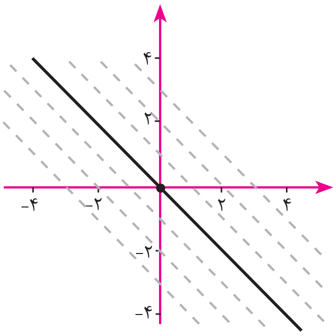
$xy=۱$ ، $x^۳y^۳=۸$ ، $x\sin y+y\sin x=۱$

ضابطهٔ این‌گونه تابع‌ها با وارونشان یکسان است. بنابراین می‌توان گفت در کل دامنه یکدیگر را قطع می‌کنند.

حال به بررسی تابع‌های چندجمله‌ای، هموگرافیک، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی می‌پردازیم. به این صورت که تابع‌های متقارن نسبت به محور y=x را می‌یابیم و سپس ضابطهٔ آن‌ها را براساس انتقال در راستای خط y=x در حالت کلی بیان می‌کنیم.

۱. تابع‌های چندجمله‌ای

● **تابع‌های چندجمله‌ای درجه یک (توابع خطی):** اگر خط‌هایی با شیب مثبت و منفی در دستگاه مختصات رسم کنیم، مشاهده می‌شود که نمودار آن‌ها نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم متقارن نیست، مگر تابع y=x (منطبق بر نیم‌ساز ربع اول و سوم) و خانوادهٔ تابع‌های y=-x+k (k∈R) (در واقع همان خط y=-x است که به صورت عمود بر خط y=x انتقال یافته و حالت تقارن آن حفظ شده است) (شکل ۱).



شکل ۱

برای اثبات این موضوع از فرم ضمنی معادلهٔ خط کمک می‌گیریم:

$ax+by+c=۰ \quad (a,b,c\in R\ ,\ a,b\neq ۰)$ **(۱)**

با تعویض x و y خواهیم داشت:

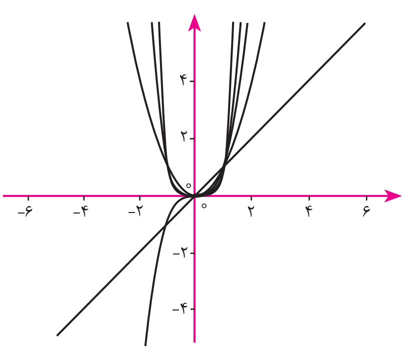
$ay+bx+c=۰$ **(۲)**

با توجه به تعریف تابع متقارن به‌دست می‌آوریم: a=b یا a=-b و c=۰. حال با تبدیل معادلهٔ (۱) به صورت متعارفی و قرار دادن $\frac{-c}{b}=k\ (k\in R)$، بـه معادله‌های y=x و y=-x+k می‌رسیم که متقارن هستند. بنابراین محل برخورد این تابع‌های متقارن با وارونشان در تمام نقاط دامنهٔ آن‌هاست و بقیهٔ تابع‌های خطی با وارونشان تنها یک برخورد روی خط y=x دارند.

● **تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ دو و بالاتر:** اگر y=f(x) یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n≥۲ باشد، وارون آن نمی‌تواند f یا بخشی از آن باشد. زیرا وارونش یک چندجمله‌ای از درجهٔ n نخواهد شد. در غیر این صورت، اگر قرار دهیم:

$f(x)=p_n(x)$ و $f^{-1}(x)=q_n(x)$ کـه $p_n(x)$، $q_n(x)$ هر دو چندجمله‌ای از درجهٔ n باشند، طبق ترکیب تابع‌ها داریم:

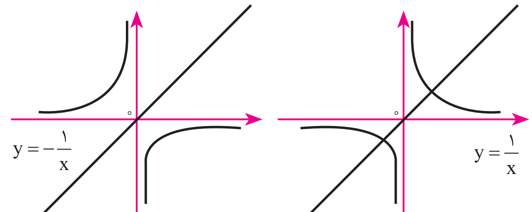
$f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$ که حاصل ترکیب f و f^{-1} تابعی درجهٔ ۱ است، حال آنکه با فرض درجهٔ n بودن f و f^{-1}، حاصل ترکیب دو تابع، از درجهٔ $n^۲$ می‌شود و به تناقض می‌رسیم. بنابراین در صورت برخورد احتمالی f و f^{-1}، این برخورد تنها روی نیم‌ساز ربع اول و سوم رخ می‌دهد (شکل ۲).



شکل ۲

۲. تابع‌های هموگرافیک

فرم کلی تابع هموگرافیک به این صورت است:
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ،(ad-bc≠۰) کـــه در حالت اســـتاندارد با مرکز مبدأ مختصات به صورت $y=\pm\frac{1}{x}$ درمی‌آید (شکل ۳).



شکل ۳

نمودار این دو تابع نســـبت به خط y=x متقارن است. اگر نمودار این تابع را با توجه به مرکز آن روی y=x انتقال دهیم، تقارن نمودار حفظ خواهد شد. در واقع از خانوادهٔ تابع‌های هموگرافیک تابع‌هایی متقارن هستند که مرکز آن‌ها روی خط y=x باشد.

اگـــر معادلهٔ تابـــع هموگرافیک را به صورت ضمنی بنویســـیم، خواهیم داشت:

$$ax-dy-cxy+b=0 \quad (ad-bc\neq 0) \qquad (۳)$$

با تعویض x و y در معادله به‌دست می‌آوریم:

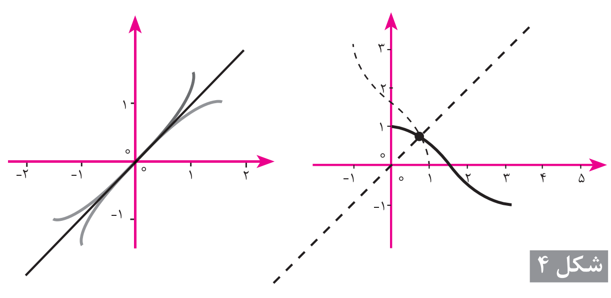
$$ay-dx-cxy+b=0 \qquad (۴)$$

با توجه به تعریف تابع متقارن و مقایسهٔ (۳) و (۴) داریم: a=-d.
بنابراین فرم کلی تابع هموگرافیک متقارن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}\ ,\ (a^2+bc\neq 0)$$

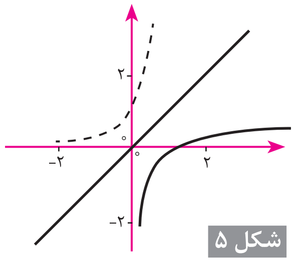
۳. تابع‌های مثلثاتی

تابع‌هایـــی به فرم y=a sin bx و y=a cos bx را که: a,b∈R در نظر بگیرید. با توجه به نمودار آن‌ها در شـــکل (۴) واضح اســـت که متقارن نیستند و محل برخورد احتمالی تابع‌های f و f^{-1} روی نیم‌ساز ربع اول و سوم قرار دارد.


شکل ۴

۴. تابع‌های نمایی و لگاریتمی

تابع‌های نمایی به فرم $y=k\,a^{bx}$ که:
a≠۱ ,a>۰ ,a ,b ,k∈R و توابع لگاریتمی به فرم $y=k\log_a bx$ را درنظر بگیرید. با توجه به نمودار آن‌ها در شکل (۵) واضح است که متقارن نیســـتند و محل برخورد احتمالی تابع‌هـــای f و f^{-1} روی نیم‌ساز ربع اول و سوم قرار دارد.


شکل ۵

■ **مثال:** تابع $f(x)=x^3-x$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاط برخورد f تابع و وارون آن را به‌دست آورید.

از آنجا که تابع f متقارن نیست، پس ضابطهٔ توابع f و f^{-1} یکسان نیست. بنابراین نقطهٔ برخورد f و f^{-1} در صورت وجود روی y=x خواهد بود. کافی است برای یافتن نقاط موردنظر در معادلهٔ $y=x^3-x$ ، x را به جای y قرار می‌دهیم و معادله را حل کنیم:

$$x^3-x=x\rightarrow x^3-2x=0\rightarrow x(x^2-2)=0$$
$$\rightarrow x=-\sqrt{2},0,\sqrt{2}$$

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

تعامل بین معلمان و فراگیرندگان نیازمند به‌کارگیری مجموعه‌ای از مثال‌هاســـت که به کمک آن‌ها بین هدف‌هـــا و روش‌های تدریس هماهنگی ایجاد کند. اصلی‌ترین نتیجه و دستاورد به‌کارگیری مثال‌ها این است که می‌توانند معلم و فراگیرنده را به درک مشترکی از مفهوم برسانند. آگاهی دانش‌آموزان از توانمندی‌ها، محدودیت‌ها و مشکلات کار با مثال‌ها، و همچنین توسعه و سازمان‌دهی فضای مثال شخصی خود، برای آن‌ها بسیار ضروری است. فضای مثال محدود دانش‌آموزان می‌تواند منشـــأ تأثیرات نامطلوب در یاددهی ریاضی باشد. از این رو، با توجه به تحقیقات اندکی که در کشـــورمان دربارهٔ مثال و نقش آن در یاددهی و یادگیری ریاضی انجام گرفته است، بر آن شدیم که در مورد یافتن نقاط برخـــورد توابع f و f^{-1}، فضای مثالی برای توابع معروف و پرکاربرد دورهٔ متوسطه دوم سازمان‌دهی کنیم. همچنین می‌توان فضای مثال را برای تابع‌های دیگر از جمله تابع‌های کسری و رادیکالی توسعه داد.

منابع

1. Bardelle, C., Ferrari, P., «Definitions and examples in elementary calculus: the case of monotonicity of functions», 2011.
2. Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., Zaslavsky, O., «Exemplification in mathematics education», Proceedings of international Conference on Mathematics Education Research, Prague, 2006.
3. Leithold, L., The Calculus With Analytic Geometry, Harper & RowPublishers, NewYork, 1986.
4. Roland, T., Zaslavsky, O., «Pedagogical example-spaces», Notes for the mini conference on Exemplification in Mathematics, Oxford Univesity, 2005.
5. Vinner, S., The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
6. Watson, A., Chick, H., «Qualities of examples in learning and teaching», ZDM Mathematics Education, 2011.
7. Watson, A., Mason, J., Mathematics as a constructive activity: Learners Generating Examples, Mahwah, NewJersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.
8. Zodic, I., Zaslavsky, O., «Characteristics of teacher's choice of examples in and for the mathematics classroom», Educational Studies in Mathematics, 2008.

۹. ریحانی، ابراهیم و همکاران. (۱۳۹۲). «بررســـی شناخت معلمان ریاضی دورهٔ متوسطه از مثال ریاضی و نحوهٔ به‌کارگیری آن در معرفی یک مفهوم». فصلنامهٔ نوآوری‌های آموزشی. شمارهٔ ۴۶.
۱۰. کثیری، حســـین. (۱۳۸۸). «نقش مثال‌ها در یادگیری ریاضی» (پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی). دانشگاه شهید بهشتی. تهران.

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

آزمایشگاه ریاضی (قسمت سوم)

مقدمه

یکی از مباحث پایه‌ای در درس ریاضی۱ دورهٔ دوم متوسطه آشـــنایی با مفاهیم پایه‌ای ریاضی است. به‌کارگیری رایانه و نرم‌افزارهای آموزشی در امر یادگیری بسیار مؤثر است. در این راستا آزمایشگاه ریاضی محیطی مناسب به منظور نیل به این هدف است. در این قسمت در ادامهٔ موضوع مثلثات به ارائهٔ چند فعالیت دیگر و اجرای آن‌ها با نرم‌افزار «جئوجبرا» می‌پردازیم.

فعالیت ۱. محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه

فرض کنیم a زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشـد و: $\text{Cos}\,a=-\frac{۳}{۵}$. می‌خواهیم سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ a را بیابیم.

می‌دانیم که نسبت مثلثاتی Cos از رابطهٔ $\frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ وتر}}$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه می‌خواهیم این مثلث در دایرهٔ مثلثاتی رسم شود، نسبت فوق را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$\text{Cos}a=-\frac{۳}{۵}=-\frac{۰/۶}{۱}$$

لذا اندازهٔ وتر برابر ۱ و اندازهٔ ضلع مجاور برابر ۰/۶ و با توجه به رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ضلع مقابل برابر ۰/۸ خواهد شد.

- **گام اول:** به کمک دستورهای زیر دایرهٔ مثلثاتی را رسم کنید:

۱) A=(۰,۰)

۲) P: circle (A,۱)

- **گام دوم:** بـا توجـه به اینکه زاویهٔ a در ناحیهٔ دوم اسـت، دستورهای زیر را برای مشخص کردن سایر رأس‌های مثلث ABC وارد کنید (تصویر ۱):

۱) B=(-۰/۶,۰/۸)
۲) C=(-۰/۶,۰)
۳) a: segment (B,C)
۴) b: segment (A,C)
۵) c: segment (A,B)

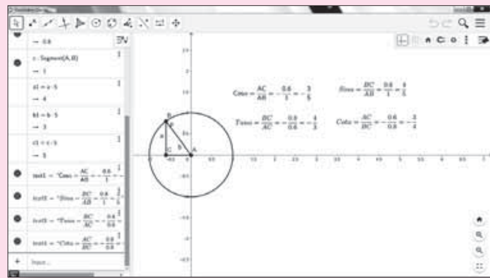
- **گام سوم:** در این مرحله با توجه به تغییراتی که ابتدا انجام دادیم و اندازهٔ وتر را از ۵ به ۱ تبدیل کردیم، اندازهٔ اضلاع مثلث را در ۵ ضرب می‌کنیم. بدین منظور دستورهای زیر را وارد کنید:

۱) a۱=a*۵
۲) b۱=b*۵
۳) c۱=c*۵

- **گام چهارم:** اکنون با اسـتفاده از ابـزار متن (ABC Text)، دستورهای زیر را وارد کنید:

۱) Cosa = \frac{AC} {AB} = – \ frac{b} {c} = – \ frac{b۱} {c۱}
۲) Sina = \frac{BC} {AB} = \frac{a} {c} = \frac{a۱} {c۱}
۳) Tana = \frac{BC} {AC} = – \ frac{a} {b} = – \ frac{a۱} {b۱}
۴) Cota = \frac{AC} {BC} = – \ frac{b} {a} = – \ frac{b۱} {a۱}

نکته: در عبارت‌های فوق برای درج b_1, a_1, c_1, a, b و c در کادر مربوط به ابزار متن، از قسمت Advanced سربرگی که آیکون برنامهٔ جئوجبرا را دارد، استفاده می‌کنیم.

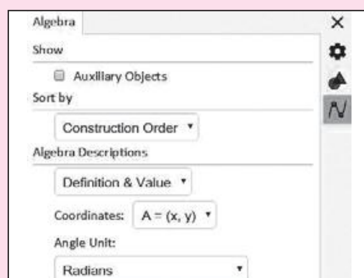


تصویر ۱

فعالیت ۲. مفهوم رادیان

می‌دانیم ۱ رادیان برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی دایره‌ای است که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره برابر است. در گام‌های زیر مراحل رسم زاویه‌های ۱ رادیان، $\frac{۳}{۲}$ رادیان، ۲ رادیان، ۳ رادیان، ۴ رادیان، ۵ رادیان و ۶ رادیان مشخص شده‌اند (تصویر ۳).

- **گام اول:** با استفاده از قسمت تنظیمات ⚙ قسمت «Algebra» مقدار «Angle Unit» را به «Radians» تغییر دهید (تصویر ۲).



تصویر ۲

- **گام دوم:** دستورهای زیر را برای رسم دایرهٔ مثلثاتی وارد کنید:

۱) O=(۰,۰)
۲) v:circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)

- **گام سوم:** با استفاده از ابزار Check Box به تعداد زاویه‌های داده شده Check Box ایجاد کنید:

برای ۱ رادیان به این صورت عمل کنید: بعد از انتخاب ابزار و کلیک روی صفحه در قسمت «Caption» عبارت «۱ رادیان» را تایپ کنید و روی ok کلیک کنید. سپس با استفاده از قسمت «Settings» شی ایجاد شده در سربرگ «Scripting»، در کادر مربوط به «On Update» دستورهای زیر را وارد کنید:

B=Rotate (A,۱,O)
w:CircularSector (O,A,B)

b=false	c=false
d=false	e= false
f= false	g= false

تا زمانی که تمام Check Box ها ایجاد نشده‌اند، روی آن‌ها کلیک نکنید. حال Check Box مربوط به $\frac{۳}{۲}$ رادیان را ایجاد و دستورهای زیر را وارد کنید:

B=Rotate (A, ۱/۵,O)
w:CircularSector (O,A,B)

a=false	c=false
d=false	e= false
f= false	g= false

Check Box مربوط به ۲ رادیان:

B=Rotate (A,۲,O)
w:CircularSector (O,A,B)

a=false	c=false
d=false	e= false
f= false	g= false

Check Box مربوط به ۳ رادیان:

B=Rotate (A,۳,O)
w:CircularSector (O,A,B)

a=false	b=false
c=false	e= false
f= false	g= false

Check Box مربوط به ۴ رادیان:

B=Rotate (A,۴,O)
w:CircularSector (O,A,B)

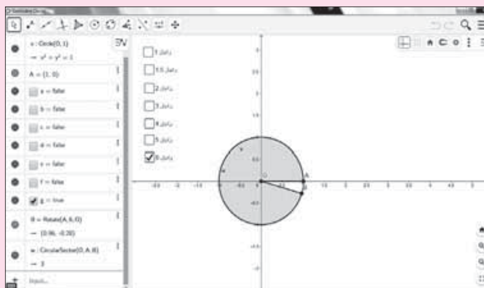
a=false	d=false
c=false	e= false
f= false	g= false

Check Box مربوط به ۵ رادیان:

B=Rotate (A,۵,O)
w:CircularSector (O,A,B)
b=false c=false
d=false e= false
g= false

Check Box مربوط به ۶ رادیان:

B=Rotate (A,۶,O)
w:CircularSector (O,A,B)
a=false b=false
c=false d= false
e= false f= false



تصویر ۳

فعالیت۳. مشـــخص کردن زاویه‌ها در دایرهٔ مثلثاتی بر حسب رادیان

- **گام اول:** مانند فعالیت‌های قبل دایرهٔ مثلثاتی را رســم کنید و ســپس در حالتی که واحد نمایش زاویه درجه اســت، از ابزار «Slider» یـک نوار لغزنده به صفحه بیفزایید و مقدار «Min» را °۰ و مقــدار «Max» را °۳۶۰ قــرار دهید. در نهایت مقدار «Increment» را برابر °۱۵۰ قرار دهید و واحد نمایش زاویه را به رادیان تبدیل کنید (تصویر۴).

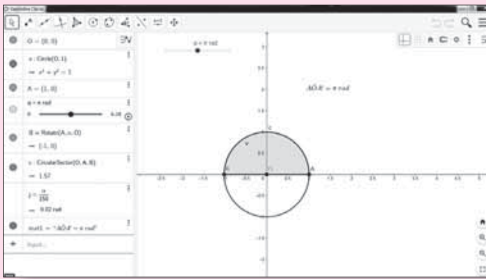
- **گام دوم:** نقطــهٔ A و دوران یافتهٔ آن با زاویه که در نوار لغزنده به دســت می‌آید و همچنین قطاعی از دایره را که شامل نقطهٔ A و دوران یافته آن است، به کمک دستورهای زیر رسم کنید:

۱) A=(۱,۰)
۲) B=Rotate (A,a,O)
۳) CircularSector (O,A,B)
۴) j=a/۱۵°

- **گام سوم:** با استفاده از ابزار متن عبارت زیر را در صفحه وارد کنید:

j) \hat{AOA'}=a

در عبارت فوق هنگام کار با ابزار متن حروف j و a را از قسمت Advanced و سربرگی که آیکون جئوجبرا را دارد، انتخاب کنید.



تصویر ۴

فعالیت۴. تبدیل زاویه‌ها برحســب درجـــه به رادیان

در گام‌های زیــر زاویه‌های ۰/۵ رادیــان، ۱ رادیان، ۲ رادیان، ۳ رادیان و ۳/۱۴ رادیان به درجه تبدیل می‌شوند.

نکتهٔ ۱. برای انجام این فعالیت باید واحد نمایش زاویهٔ رادیان انتخاب شود.

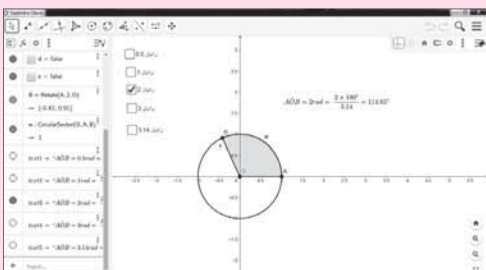
نکتهٔ ۲. برای درج علامت درجه در بالای عددها می‌توان دو کلید Left Alt و O را فشار داد.

- **گام اول:** هماننــد فعالیت ۲، دایرهٔ مثلثاتی را رســم کنید و با استفاده از ابزار Check Box که در آنجا اشاره شد، برای هر یک از اندازه‌های بالا یک Check Box ایجاد کنید.

- **گام دوم:** با استفاده از ابزار متن، عبارت زیر را در صفحه درج کنید:

\hat{AOB}=۰/۵rad=\frac{۰/۵×۱۸۰°}{۳/۱۴}=۲۸/۶۶°

حــال در قســمت مربــوط بــه تنظیمــات ایــن متــن وارد سربــرگ «Advanced» شــویــد و داخــل کــادر «Condition to Show Object» را a=true تایپ کنید. بدین ترتیب زمانی متن بالا نمایش داده می‌شود که مقدار متغیر a برابر true باشد. به همین ترتیب برای سایر حالت‌ها نیز متن را اضافه کنید و تنظیمات مربوط را انجام دهید (تصویر ۵).



تصویر ۵

تنظیمات مربوط به ۱ رادیان:

\hat{AOB}=۱ rad=\frac{۱×۱۸۰°}{۳/۱۴}=۵۷/۳۲°
Condition to Show Object=>b=true

تنظیمات مربوط به ۲ رادیان:

\hat{AOB}=۲ rad=\frac{۲×۱۸۰°}{۳/۱۴}=۱۱۴/۶۵°

Condition to Show Object=> c=true

تنظیمات مربوط به ۳ رادیان:

\hat{AOB}=۳ rad=\frac{۳×۱۸۰°}{۳/۱۴}=۱۷۱/۹۷°

Condition to Show Object=>d=true

تنظیمات مربوط به ۳/۱۴ رادیان:

\hat{AOB}=۳/۱۴ rad=\frac{۳/۱۴×۱۸۰°}{۳/۱۴}=۱۸۰°

Condition to Show Object=> e=true

در ادامه زاویه‌های زیر به رادیان تبدیل شده‌اند:

۳۰°,۳۶°,۴۵°,۶۰°,۹۰°,۱۲۰°,۱۸۰°,۲۲۵°

برای انجام این فعالیت باید واحد نمایش زاویهٔ درجه انتخاب شود.

- **گام اول:** همانند فعالیت ۲، دایرهٔ مثلثاتی را رسم کنید و با استفاده از ابزار Check Box که در آنجا اشاره شد، برای هر یک از اندازه‌های بالای یک، Check Box ایجاد کنید.
- **گام دوم:** همانند گام ۲ حالت قبلی به‌صورت زیر عمل کنید:

تنظیمات مربوط به ۳۰°:

\hat{AOB}=۳۰°=\frac{۳۰°×۳/۱۴}{۱۸۰°}=۰/۵۲ rad

Condition to Show Object => a=true

تنظیمات مربوط به ۳۶°:

\hat{AOB}=۳۶° =\frac{۳۶°×۳/۱۴}{۱۸۰°}=۰/۶۲۸ rad

Condition to Show Object => b=true

تنظیمات مربوط به ۴۵°:

\hat{AOB}=۴۵° = \frac{۴۵°×۳/۱۴}{۱۸۰°}=۰/۷۸۵ rad

Condition to Show Object => c=true

تنظیمات مربوط به ۶۰°:

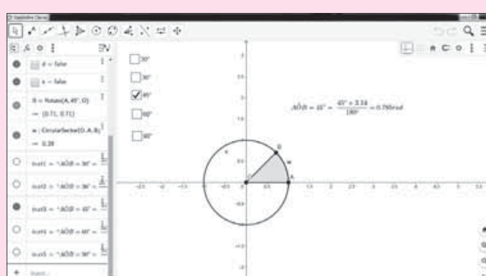
\hat{AOB}=۶۰° = \frac{۶۰°×۳/۱۴}{۱۸۰°}=۱/۰۵ rad

Condition to Show Object => d=true

تنظیمات مربوط به ۹۰°:

\hat{AOB}=۹۰° = \frac{۹۰°×۳/۱۴}{۱۸۰°}=۱/۵۷ rad

Condition to Show Object => e=true



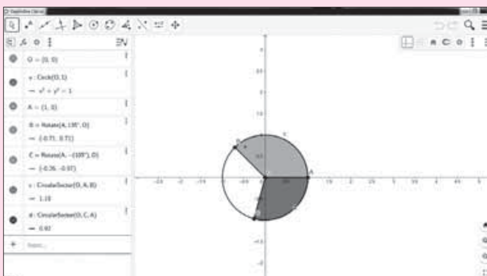
تصویر ۶

برای سایر زاویه‌ها به همین شکل ادامه دهید.

در شکل ۷ زاویه‌های ۱۰۵°- و ۳۱۵° با اجرای دستورهای زیر نمایش داده شده‌اند:

۱) O=(۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A= (۱,۰)
۴) B=Rotate (A, ۱۳۵°, O)
۵) C=Rotate (A, -۱۰۵°, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, C, A)

نحوه تغییر رنگ قطاع‌ها قبلا ذکر شده است.

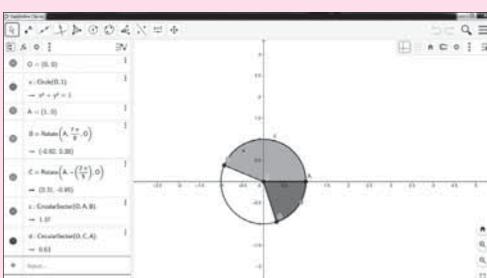


تصویر ۷

در شکل ۸ زاویه‌های $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان با به‌کارگیری دستورهای زیر نمایش داده می‌شوند.

۱) O = (۰,۰)
۲) v: Circle (O,۱)
۳) A= (۱,۰)
۴) B=Rotate(A, (۷π) / ۸, O)
۵) C=Rotate(A, (-(۲π)) / ۵, O)
۶) CircularSector(O, A, B)
۷) CircularSector(O, C, A)

نکته: برای درج علامت پی کافی است عبارت pi را تایپ کنید که به صورت خودکار به π تبدیل می‌شود.



تصویر ۸

فعالیت ۵. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

در گام‌های زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان محاسبه شده‌اند.

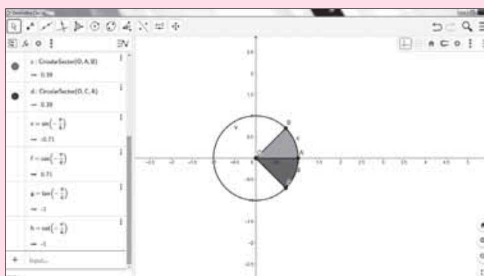
● **گام ۱:** دستورهای زیر را جهت رسم دایره مثلثاتی و زاویه $-\frac{\pi}{۴}$ و قرینه آن وارد کنید:

۱) O= (۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)
۴) B=Rotate (A, π / ۴, O)
۵) C=Rotate (A, -π / ۴, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, C, A)

● **گام ۲:** برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $-\frac{\pi}{۴}$ دستورهای زیر را وارد کنید:

۸) e=sin (-π / ۴)
۹) f=cos (-π / ۴)
۱۰) g=tan (-π / ۴)
۱۱) h=cot (-π / ۴)

با وارد کردن دستورهای بالا مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی محاسبه و در پایین همان دستور نشان داده می‌شود.



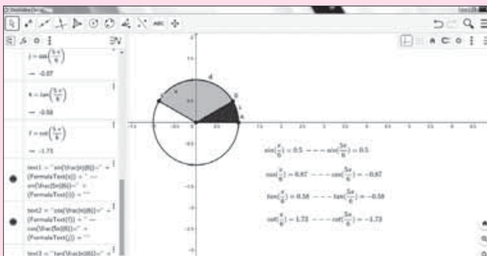
تصویر ۹

فعالیت ۶. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های با مجموع یا تفاضل π رادیان

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$

۱) O=(۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)
۴) B=Rotate (A, $\frac{\pi}{۴}$, O)
۵) C=Rotate (A, -$\frac{\pi}{۴}$, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, A, C)
۸) e=sin (π /۶)
۹) f=cos (π /۶)
۱۰) g=tan (π /۶)
۱۱) h=cot (π /۶)
۱۲) i=sin (5π /۶)
۱۳) j=cos (5π /۶)
۱۴) k=tan (5π /۶)
۱۵) l=cot (5π /۶)

برای نمایش اطلاعات و مقایسه نسبت‌ها از ابزار متن استفاده می‌کنیم. در تایپ متن‌ها باید حروف l, k, j, i, h, g, f و e از قسمت Advanced و سربرگی که آیکون جئوجبرا دارد، انتخاب شوند تا مقدار عدد آن‌ها نمایش داده شود.



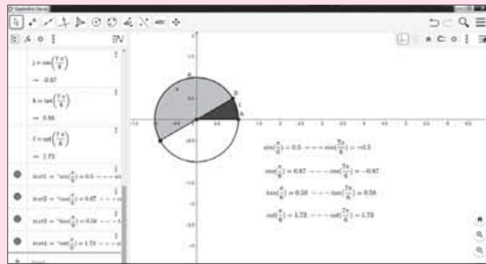
تصویر ۱۰

۱۶) sin (\frac{π}{۶})=e --- sin (\frac{۵π}{۶})=i
۱۷) cos (\frac{π}{۶})=f --- cos (\frac{۵π}{۶})=j
۱۸)tan (\frac{π}{۶})=g --- tan (\frac{۵π}{۶})=k
۱۹)cot (\frac{π}{۶})=h --- cot (\frac{۵π}{۶})=l

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$

۱) O= (۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A= (۱,۰)
۴) B=Rotate (A, π / ۴, O)
۵) C=Rotate (A, -π / ۴, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, A, C)
۸) e=sin (π /۶)
۹) f=cos (π /۶)
۱۰) g=tan (π /۶)
۱۱) h=cot (π /۶)
۱۲) i=sin (7π /۶)
۱۳) j=cos (7π /۶)
۱۴) k=tan (7π /۶)
۱۵) l=cot (7π /۶)
۱۶) sin (\frac{π}{۶})=e --- sin (\frac{۷π}{۶})=i
۱۷) cos (\frac{π}{۶})=f --- cos (\frac{۷π}{۶})=j

۱۸)tan (\frac{π}{۶})=g --- tan (\frac{۷π}{۶})=k
۱۹)cot (\frac{π}{۶})=h --- cot (\frac{۷π}{۶})=l

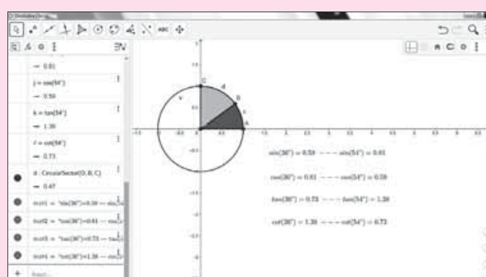


تصویر ۱۱

فعالیت ۷. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های با مجموع یا تفاضل $\frac{\pi}{2}$ رادیان

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه °۳۶ و °۵۴

۱) O= (۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A= (۱,۰)
۴) B=Rotate (A, ۳۶°, O)
۵) C=Rotate (B, ۵۴°, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, B, C)
۸) e=sin (۳۶°)
۹) f=cos (۳۶°)
۱۰) g=tan (۳۶°)
۱۱) h=cot (۳۶°)
۱۲) i=sin (۵۴°)
۱۳) j=cos (۵۴°)
۱۴) k=tan (۵۴°)
۱۵) l=cot (۵۴°)
۱۶) sin (۳۶°)=e --- sin (۵۴°)=i
۱۷) cos (۳۶°)=f --- cos (۵۴°)=j
۱۸) tan (۳۶°)=g --- tan (۵۴°)=k
۱۹) cot (۳۶°)=h --- cot (۵۴°)=l

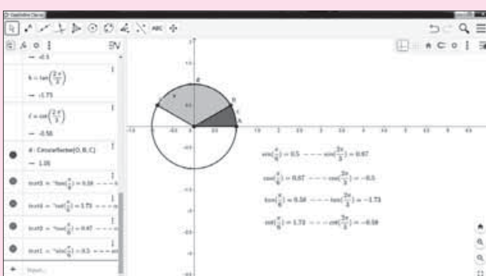


تصویر ۱۲

ملاحظه می‌شود در صورتی که دو زاویه متمم باشند سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است.

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3}$

۱) O= (۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A= (۱,۰)
۴) B=Rotate (A, π / ۶, O)
۵) C=Rotate (B, ۲π / ۳, O)
۶) CircularSector (O, A, B)
۷) CircularSector (O, B, C)
۸) e=sin (π / ۶)
۹) f=cos (π / ۶)
۱۰) g=tan (π / ۶)
۱۱) h=cot (π / ۶)
۱۲) i=sin (۲π / ۳)
۱۳) j=cos (۲π / ۳)
۱۴) k=tan (۲π / 3)
۱۵) l=cot (2π / 3)
۱۶) sin(\frac{π}{۶})=e --- sin (\frac{۲π}{۳})=i
۱۷) cos(\frac{π}{۶})=f --- cos (\frac{۲π}{۳})=j
۱۸) tan(\frac{π}{۶})=g --- tan (\frac{۲π}{۳})=k
۱۹) cot(\frac{π}{۶})=h --- cot (\frac{۲π}{۳})=l



تصویر ۱۳

در قسمت بعدی به معرفی سایر فعالیت‌ها در مبحث مثلثات می‌پردازیم.

*منابع
۱. کتاب درسی ریاضی ۲ دوره دوم متوسطه علوم تجربی ـ ۱۳۹۷
2- www.geogebra.org

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

حمیدرضا امیری

ماتریس‌ها

ماتریس A آرایشی مستطیلی از عددهاست که معمولاً به شکل $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود.

m فهرســـت افقی عددها، سطرهای A نامیده می‌شود و n فهرست عمودی عددها، ستون‌های آن است. به این ترتیب درایهٔ (عنصر) a_{ij}، ijامین درایه نامیده شده که روی سطر iام و ستون jام واقع شده است. ما غالباً برای سادگی، یک ماتریس را به‌صورت $A=\left[a_{ij}\right]$ نشان می‌دهیم.

ماتریسی با m سطر و n ستون را ماتریسی «m در n» می‌نامند که این‌گونه نوشته می‌شود: m×n. جفت عددهای m و n را مرتبهٔ (اندازهٔ) ماتریس می‌نامیم.

دو ماتریس A و B مساوی هستند و می‌نویسیم A=B، هرگاه هم مرتبه بوده و درایه‌های متناظر آن‌ها مساوی باشند. بنابراین تساوی دو ماتریس m×n هم‌ارز است با یک دستگاه شامل mn تساوی، به ازای هر جفت از درایه‌های متناظر.

ماتریسی با تنها یک سطر، ماتریس سطری یا بردار سطری نامیده می‌شود، و ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی یا بردار ستونی نامیده می‌شود. ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر نامیده می‌شود و معمولاً با نماد o نمایش داده می‌شود.

ماتریس‌هایی که همهٔ درایه‌های آن‌ها عددهای حقیقی هستند، ماتریس‌های حقیقی نامیده می‌شوند یا ماتریس‌هایی روی R گفته می‌شوند. این کتاب اساساً با ماتریس‌های حقیقی سروکار دارد.

مثال: الف. آرایش مستطیلی $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۵ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۳ است. سطرهای آن $[۱ \quad -۴ \quad ۵]$ و $[۰ \quad ۳ \quad -۲]$ و ستون‌هایش $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$ هستند.

ب. ماتریس $o=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر و ۲×۴ است.

پ. فرض کنید $\begin{bmatrix} x+y & ۲z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت چهار درایهٔ متناظر باید با هم مســـاوی باشـــند؛ یعنی $x+y=۳$، $x-y=۱$، $۲z+t=۷$ و $z-t=۵$.

جواب‌های دستگاه‌های معادلات عبارت‌اند از: $x=۲ \;,\; y=۱ \;,\; z=۴ \;,\; t=-۱$

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Matrix .... ماتریس
2. Rectangular .... مستطیل‌شکل
3. Arry .... آرایه، آرایش
4. Horizontal .... افقی
5. Vertical .... عمودی
6. Row .... سطر
7. Column .... ســـتون
8. Element .... عنصر
9. Corresponding .... متناظـــر
10. Equivalent .... هـــم‌ارز

1.3 MATRICES

A matrix A is rectangular array of numbers usually presented in the from $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

The m horizontal lists of numbers are called the *rows* of A, and the n vertical lists of numbers are its *columns*. Thus the element a_{ij}, called the ij entry, appears in row i and column j. We frequently denote such a matrix simply by writing $A=\left[a_{ij}\right]$.

A matrix with m rows and n columns is called an m by n matrix, written m×n. The pair of numbers m and n is called the size of the matrix. Two matrices A and B are equal, written A=B, if they have the same size and if corresponding elements are equal. Thus the equality of two m×n matrices is equivalent to a system of mn equalities, one for each corresponding pair of elements.

A matrix with only one row is called a row matrix or row vector, and a matrix with only one column is called a column matrix or column vector. A matrix whose entries are all zero is called a zero matrix and will usually be denoted by 0.

Matrices whose entries are all real numbres are called *real matrices* or are said be *matrices over* R. This book will be mainly concerned with such real matrices.

EXAMPLE 1.5

(a) The rectangular array $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۵ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ is a 2×3 matrix. Its rows are $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$, and its columns are $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$, and $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$.

(b) The 2×4 zero matrix is the matrix $o=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$.

(c) Suppose $\begin{bmatrix} x+y & ۲z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$

Then the four corresponding entries must be equal. That is, $x+y=۳$, $x-y=۱$, $۲z+t=۷$, $z-t=۵$

The solution of the system of equations is $x=۲$, $y=۱$, $z=۴$, $t=-۱$

1.4 MATRIX ADDITION AND SCALAR MULTIPLICATION

Let $A=\left[a_{ij}\right]$ and $B=\left[b_{ij}\right]$ be two matrices of the same size, say, m×n matrices. The sum of A and B, written A+B, is the matrix obtained by adding corresponding elements from A and B. That is,The product of matrix A by a scalar k,written k. A or simply kA, is the matrix obtained by

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{۱۱}+b_{۱۱} & a_{۱۲}+b_{۱۲} & \dots & a_{۱n}+b_{۱n} \\ a_{۲۱}+b_{۲۱} & a_{۲۲}+b_{۲۲} & \dots & a_{۲n}+b_{۲n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m۱}+b_{m۱} & a_{m۲}+b_{m۲} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

multiplying each element of A by k. That is, Observe that A+B and kA are also m×n matrices. We also define

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{۱۱} & ka_{۱۲} & \dots & ka_{۱n} \\ ka_{۲۱} & ka_{۲۲} & \dots & ka_{۲n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m۱} & ka_{m۲} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$-A=(-۱)A$ and $A-B=A+(-B)$

Matrix -A is called the negative of matrix A. The sum of matrices having different sizes is not defined.

آموزشی

سیمین اکبری‌زاده، دبیر بازنشستهٔ اراک

کاربرد هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری

محاسبهٔ روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده

اشاره

هم‌نهشتی یکی از مباحث نظریهٔ عددهاست که در کتاب «ریاضیات گسستهٔ» پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی گنجانده شده است. در این نوشتار برآنیم که خوانندگان را با کاربرد هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و تعیین روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده آشنا سازیم.

در این راستا سه نوع تمرین را بررسی خواهیم کرد. در هر سه نوع روز هفتهٔ مربوط به تاریخ معینی از یک سال را داریم و هدفمان به ترتیب تعیین:

• روز هفتهٔ مربوط به تاریخ دیگری از همان سال، • روز هفتهٔ مربوط به همان تاریخ از سال دیگر، و بالاخره، • روز هفتهٔ مربوط به تاریخ دیگری از سال دیگر است. برای مثال خواهیم دید چگونه بدون گشت‌وگذار در اینترنت و تقویم، با توجه به اینکه سال نو (۹۸) با پنج‌شنبه آغاز می‌شود، می‌توان روز هفتهٔ مربوط به این موارد را تعیین کرد:

- **روز معلم سال ۱۳۹۸؛**
- **روز اول فروردین سال‌های ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰؛**
- **روز طبیعت سال ۱۳۷۴.**

مقدمه

می‌دانیم اول فروردین سال ۱۳۹۸ روز پنج‌شنبه است. آخرین چهارشنبه فروردین این سال چه روزی از ماه است؟ روزهای فروردین ماه سال ۱۳۹۸ را همراه با تاریخ آن‌ها در جدول زیر می‌بینیم.

شنبه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه
۳۱					۱	۲
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

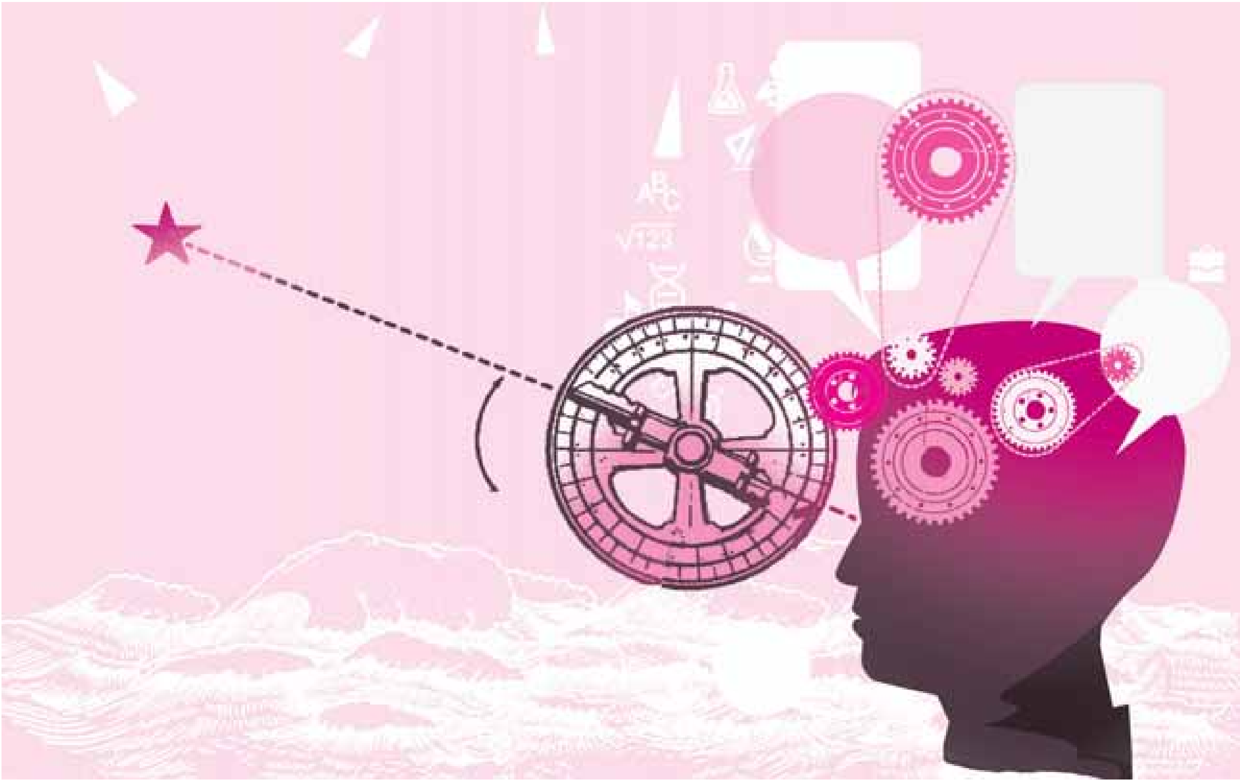
طبق این جدول، تاریخ چهارشنبه‌های فروردین ۱۳۹۸ عبارت‌اند از: ۷، ۱۴، ۲۱ و ۲۸ و آخرین چهارشنبه فروردین این سال بیست‌وهشتم است. ویژگی مشترک این چهار عدد چیست؟

بله درست حدس زدید: هفت تا هفت تا اضافه شده‌اند. به‌عبارت دیگر، باقی‌ماندهٔ همهٔ آن‌ها بر عدد هفت مساوی است. این مطلب حاکی از آن است که روزهای هفته، مثلاً چهارشنبه، پس از گذشت هفت روز دوباره تکرار می‌شود. یعنی اگر این چهارشنبه چهاردهم ماه باشد، چهارشنبهٔ آینده بیست‌ویکم ماه است و به همین ترتیب. در واقع دو عدد ۱۴ و ۲۱ در تقسیم بر هفت، باقی‌مانده‌های یکسان دارند. می‌گوییم ۱۴ و ۲۱ به پیمانهٔ هفت هم‌نهشت هستند و می‌نویسیم: $۲۱\overset{۷}{\equiv}۱۴$.

تعریف

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر a-b مضرب m باشد (m|a-b)، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$ یا (پیمانهٔ m) a≡b. به تعبیر دیگر، هم‌نهشتی به معنای هم‌باقی‌ماندگی است.

مثال ۱. گزارهٔ $۸\overset{۷}{\equiv}۲۹$ درست است، زیرا: ۷|(۸-۲۹) یعنی ۷|۲۱ (توجه داریم که باقی‌ماندهٔ دو عدد ۲۹ و ۸ بر ۷ یکسان و عدد ۱ است).



مثال ۲. گزارهٔ $۲۸ \overset{۷}{\equiv} ۸$ نادرســـت است، زیرا: $۷ \nmid ۲۰$. (باقی‌ماندهٔ ۲۸ بر ۷ صفر اســـت، ولی باقی‌ماندهٔ ۸ بر ۷، یک است و این دو هم باقی‌مانده نیستند.)

مثال ۳. $۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$. ســـمت راســـت این هم‌نهشـــتی عددهای زیادی می‌توان نوشت. اما در این مقاله بهترین عدد، کوچک‌ترین عدد نامنفی است که همان باقی‌ماندهٔ ۳۶۵ بر ۷، یعنی ۱ است. و نیز باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۶۶ بر ۷، عدد ۲ است، پس می‌نویسیم: $۳۶۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$.

چند ویژگی هم‌نهشتی

۱. به طرفین هم‌نهشـــتی می‌توان یک عدد صحیح اضافه کرد.

۲. طرفین هم‌نهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد.

مثال ۴. می‌دانیم: $۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$ ، پس: $۲(۳۶۵) \overset{۷}{\equiv} ۲$

۳. طرفین دو هم‌نهشتی هم‌پیمانه را می‌توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد.

مثال ۵. می‌دانیــم: $۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$ و $۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$

پس: $۳۶۵+۳۶۶ \overset{۷}{\equiv} ۱+۲$ ، یعنی: $۳۶۵+۳۶۶ \overset{۷}{\equiv} ۳$.

نتیجه: هم‌نهشتی خاصیت خطی دارد.

مثال ۶.

$$\overset{d}{\boxed{۲(۳۶۵)+۷(۳۶۶)+۴}}$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۲(۱)+۷(۲)+۴ \overset{۷}{\equiv} ۲۰$$

و

$$۲۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow d \overset{۷}{\equiv} ۶$$

یادمان باشد، وقتی d به صورت مجموع چند عدد اســـت و می‌خواهیم باقی‌مانـــدهٔ آن را بر عددی، مثلاً ۷ بیابیم، ابتدا به جـــای هر عدد باقی‌مانده‌اش بر ۷ را قرار می‌دهیم تا عدد کوچک‌تری حاصل شـــود. سپس باقی‌مانـــدهٔ این عدد بر ۷ را به‌دســـت می‌آوریم. یعنی لازم به محاســـبهٔ ضرب و جمع اولیه نیســـت، بلکه از خاصیت خطی بودن و تعدی در هم‌نهشـــتی استفاده می‌کنیم.

سخنی برای شما

از هم‌نهشتی برای پیدا کردن روز هفتهٔ مربوط به یک تاریخ از یک سال خاص استفاده می‌کنیم؛ البته با فرض آنکه روز هفتهٔ مربوط به یک تاریخ از یک سال را داشته باشیم. (مجهول می‌تواند به جای روز هفته، روز ماه نیز باشد.) کافی است با در نظر گرفتن اینکه ۶ ماه فروردین تا شهریور هر یک ۳۱ روز و ۵ ماه مهر تا بهمن هر یک ۳۰ روز و ماه اسفند در سال کبیسه ۳۰ روز و در سال‌های ساده ۲۹ روز است، تعداد روزهای سال که بین دو تاریخ معلوم و مجهول است را به‌دست آوریم. قرارمان این باشد که روز مبدأ جزو روزهای بین این دو تاریخ شمارش نشود. این عدد را با d نمایش می‌دهیم و با توجه به آنکه روزهای هفته ۷ روز به ۷ روز عیناً تکرار می‌شوند، باقی‌ماندهٔ d را بر ۷ به‌دست می‌آوریم. اگر باقی‌ماندهٔ d بر ۷ را r بنامیم، می‌گوییم d هم‌نهشت r به پیمانه ۷ است و می‌نویسیم: $d \overset{۷}{\equiv} r$. در ادامه:

الف. اگر روز مجهول **بعد** از روز معلوم باشد، روز هفتهٔ مجهول rمین روز **بعد** از روز هفتهٔ معلوم است.

ب. اگر روز مجهول **قبل** از روز معلوم باشد، روز هفتهٔ مجهول rمین روز **قبل** از روز هفتهٔ معلوم است.

به تعبیر دیگر، روز تعیین‌نشده در فرض مسئله (روز معلوم) را مبدأ و متناظر با صفر و ۶ روز دیگر هفته را به ترتیب متناظر با ۱ تا ۶ در نظر می‌گیریم. آن‌گاه با توجه به r به‌دست آمده که بین ۰ تا ۶ است و روز متناظر با آن، روز هفتهٔ مجهول را می‌یابیم.

تمرین ۱

سال نو با پنج‌شنبه آغاز می‌شود. مدیری تصمیم گرفته است، ۱۲ اردیبهشت یک اردوی دو روزه برای معلمان مدرسه تدارک ببیند؛ البته به شرطی که ۱۲ اردیبهشت مصادف با پنج‌شنبه باشد. حدس شما دربارهٔ این اردو چیست؟ آیا اردو برگزار می‌شود یا خیر؟

پاسخ: بین ۱ فروردین سال ۹۸ (تاریخ معلوم که پنج‌شنبه است) و ۱۲ اردیبهشت سال ۹۸ (تاریخ مجهول). $\underset{\text{اردیبهشت}}{۱۲} + \underset{\text{بقیه فروردین}}{۳۰} = ۴۲$ روز وجود دارد و چون ۷ روز به ۷ روز پنج‌شنبه تکرار می‌شود و $۴۲ \overset{۷}{\equiv} ۰$، بنابراین ۱۲ اردیبهشت ۹۸ نیز مثل ۱ فروردین پنج‌شنبه است و اردو برگزار خواهد شد.

تمرین ۲

۲۹ اسفند یک سال روز یک‌شنبه بوده است. ۲۵ خرداد همان سال چه روزی از هفته بوده است؟

پاسخ: تعداد روزهای بین ۲۵ خرداد یک سال تا ۲۹ اسفند همان سال برابر است با:

$$d = \underset{\text{بقیه خرداد}}{۶} + \underset{\text{۳ ماه تیر تا شهریور}}{۳(۳۱)} + \underset{\text{۵ ماه مهر تا بهمن}}{۵(۳۰)} + ۲۹ = ۲۷۸$$

یعنی ۲۷۸ روز بین این دو تاریخ وجود دارد و: $۲۷۸ \overset{۷}{\equiv} ۵$. پس ۲۵ خرداد همان سال پنجمین روز قبل از یک‌شنبه، یعنی سه‌شنبه است.

در این تمرین، برای تفهیم بهتر، خودمان را درگیر محاسبهٔ مجموع کردیم، ولی از این به بعد از خاصیت خطی بودن هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم؛ به این شکل: $d \overset{۷}{\equiv} ۶+۳(۳)+۵(۲)+۱$، پس: $d \overset{۷}{\equiv} ۲۶ \overset{۷}{\equiv} ۵$.

و برای یافتن پاسخ نهایی، اگر بخواهیم از روش تناظر استفاده کنیم، روز معلوم یعنی یک‌شنبه را به صفر نظیر می‌کنیم و روزهای قبل از آن را به ترتیب به ۱ تا ۶.

۱شنبه	شنبه	جمعه	۵شنبه	۴شنبه	۳شنبه	۲شنبه
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مجهول، روز متناظر با ۵ یعنی سه‌شنبه است.

تمرین ۳

سال نو با پنج‌شنبه آغاز می‌شود. دبیر هندسهٔ **مهرشاد** تصمیم دارد آخرین دوشنبهٔ اردیبهشت ماه از آن‌ها امتحان بگیرد. امتحان مهرشاد چندم اردیبهشت است؟

پاسخ:

- **روش اول:** دوشنبه‌های پیش‌رو با توجه به فرض مسئله به ترتیب: ۵، ۱۲، ۱۹، ۲۶ فروردین و ۲، ۹، ۱۶، ۲۳ و ۳۰ اردیبهشت هستند و امتحان هندسه ۳۰ اردیبهشت برگزار می‌شود.

● **روش دوم:**

۱شنبه	شنبه	جمعه	۵شنبه	۴شنبه	۳شنبه	۲شنبه
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

با توجه به تناظر بـــالا، می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تعداد روزهای بین دو تاریخ بر عدد ۷، ۴ باشد. پس هدف حل معادلهٔ هم‌نهشتی چنین است:

$$۴ \overset{۷}{\equiv} \underset{\text{تعداد روزهای اردیبهشت}}{\underset{\downarrow}{x}} + \underset{\text{بقیه روزهای فروردین}}{\underset{\downarrow}{۳۰}}$$

البته با شـــرط اینکه x بزرگ‌ترین عدد بین ۱ تا ۳۱ باشد. داریم: $x \overset{۷}{\equiv} -۲۶$ و می‌دانیم: $۲۸ \overset{۷}{\equiv} ۰$ با جمع این دو خواهیم داشت: $۲ \overset{۷}{\equiv} x$ پس: $x=۳۰$.

اینـــک قبل از اینکه یـــک گام جلوتـــر برداریم، به توضیحاتی دربارهٔ سال کبیسه می‌پردازیم؛ چرا که ممکن است بین تاریخ معلوم و مجهول چند سال فاصله باشد.

لحظهٔ تحویل سال

سال‌تحویل لحظه‌ای است که مرکز زمین بر نقطهٔ اعتدال بهاری قرار می‌گیرد. روز اول فروردین‌ماه روزی است که تحویل سال بین ظهر روز پیش و ظهر آن روز صورت پذیرفته باشـــد. برای مثال، سال ۱۳۹۵ حدود ساعت ۸ صبح یکشنبه تحویل شد. به همین دلیل روز اول فروردین ۱۳۹۵ یک‌شـــنبه بود. در حالی‌که ســـال ۱۳۹۶، حدود ســـاعت '۱۳:۵۰ دوشنبه تحویل شد. به همین دلیل اول فروردین ۱۳۹۶ سه‌شنبه بود.

هر ســـال که لحظه تحویلش پیش از ظهر و لحظهٔ تحویل سال بعدش بعدازظهر باشد، سال کبیسه شمرده می‌شود؛ مانند سال ۱۳۹۵.

اندکی دربارهٔ سال کبیسه

مدت‌زمانی را که طول می‌کشـــد تا زمین یک دور کامل به دور خورشید بزند، یک سال می‌گوییم. براساس محاسبه‌های دانشمندان و اخترشناسان ایرانی که «تقویم جلالی» بر آن محاسبه‌ها متکی است، ۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۵۸ روز مدت‌زمان لازم برای گردش زمین به‌دور خورشـــید اســـت. یعنی هر سال ۳۶۵ روز و ۵ ساعت و ۴۸ دقیقه و ۴۵/۵ ثانیه است. برای اینکه خطای تقویم در مقایسه با میزان دقیق آن به حداقل برســـد، برخی از سال‌ها را ۳۶۶ روز (سال کبیسه) و بقیه را ۳۶۵ روز (سال ساده) در نظر می‌گیرند.

تقویم کنونی متداول کشـــور ما کـــه قانون آن در فروردین ۱۳۰۴ تصویب شده بود، توسط زنده‌یاد دکتر **احمد بیرشـــک** براساس کبیســـهٔ جلالی معروف به «کبیسهٔ خیامی» تنظیم شده است. در این گاه‌شماری شمسی (خورشیدی) دو نوع کبیسه وجود دارد: کبیسهٔ چهارساله بعد از سه سال ساده، و کبیسهٔ پنج‌ساله بعد از چهار سال ساده.

طبق این گاه‌شـــماری، هر دوره به چند زیردوره و هر زیردوره به بخش‌های متفاوت ۲۹، ۳۳ و ۳۷ ســـاله تقسیم شده است که از نظر تعداد کبیسه‌های چهارساله و پنج‌سالهٔ موجود متفاوت هســـتند. سال‌های کبیسهٔ اخیر عبارت‌اند از: ۶۲، ۶۶، ۷۰، *۷۵، ۷۹، ۸۳، ۸۷، ۹۱، ۹۵، ۹۹، ۱۴۰۳ و *۱۴۰۸ و.... سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۴۰۸ کبیسهٔ پنج‌ساله هستند و بقیه سال‌ها کبیسهٔ چهارساله.

هم فال و هم تماشا

تمرین ۴

اول فروردیـــن ســـال‌های ۹۶، ۹۷ و ۹۸ بـــه ترتیب ۳شنبه، ۴شنبه و ۵شـــنبه است. به نظر شما اول فروردین سال‌های ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰ چه روزهایی از هفته خواهند بود؟

پاسخ: توجـــه داریم که ســـال ۱۳۹۸ ساده است و ۳۶۵ روز، ولی سال ۱۳۹۹ کبیسه است و ۳۶۶ روز.

الف. بین ۹۸/۱/۱ تا ۹۹/۱/۱، ۳۶۵ روز وجود دارد و: $۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$. پـــس ۱ فروردین ۱۳۹۹ یکمین روز بعد از پنج‌شنبه، یعنی جمعه است.

ب. بیـــن ۱۳۹۸/۱/۱ تـــا ۱۴۰۰/۱/۱، $\overset{d}{\boxed{۳۶۶ + ۳۶۵}}$ روز وجـــود دارد و داریم: $d \overset{۷}{\equiv} ۱ + ۲ \overset{۷}{\equiv} ۳$. پس ۱ فروردین ۱۴۰۰ ســـومین روز بعد از پنج‌شنبه، یعنی یک‌شنبه است.

به عبارت دیگر، با توجه به اینکه:

$۳۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$ تعداد روز سال ساده و $۳۶۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$ تعداد روز سال کبیسه

برای گذر از یک سال به سال بعد، روز هفته برای یک تاریخ مفروض یکی به جلو می‌رود، مگر اینکه از روز کبیسه، یعنی ۲۹ اسفند، عبور کنیم که در این حالت دو روز جلو می‌رود. در این تمرین، با توجه به اینکه ۱ فروردین ۱۳۹۸، پنج‌شنبه است: ۱ فروردین ۱۳۹۹ (یک سال بعد)، یک روز جلو می‌افتد و جمعه است، در حالی که ۱ فروردین ۱۴۰۰ (دو سال بعد)، سه روز $(\underset{\text{سادهٔ ۱۴۰۰}}{۱} + \underset{\text{کبیسهٔ ۱۳۹۹}}{۲})$ جلو می‌افتد و یک‌شنبه است.

از این به بعد می‌توانیم هنگام محاسبهٔ روز هفتهٔ مربوط به یک تاریخ به‌عنوان راه میان‌بر، به تعداد سال کبیسهٔ موجود بین دو تاریخ ۲ و به تعداد سال ساده بین آن‌ها ۱ قرار دهیم.

تمرین ۵

کیانا روز جمعه ۱۷ فروردین ۱۳۹۷، شمع هفت سالگی‌اش را فوت کرد. او در چه روزی از هفته به‌دنیا آمده است؟

پاسخ: ۹۷/۱/۱۷ روز جمعه است (تاریخ معلوم).

می‌خواهیم ببینیم ۹۰/۱/۱۷ چه‌روزی از هفته بوده است (تاریخ مجهول).

بین این دو تاریخ ۷ سال وجود دارد که ۲ سال ۹۱ و ۹۵ کبیسه و ۵ سال باقی‌مانده ساده بوده‌اند. پس تعداد روزهای بین این دو تاریخ برابر است با: d=۵(۳۶۵)+۲(۳۶۶). یعنی: $d \overset{۷}{\equiv} ۵(۱)+۲(۲) = ۹$.

بنابراین: $d \overset{۷}{\equiv} ۲$ و کیانا دو روز **قبل** از جمعه، یعنی چهارشنبه متولد شده است.

☹ **هشدار برای دانش‌آموزان کم‌دقت:** روز مجهول پیش از روز معلوم بود. پس تولد دو روز **قبل** از جمعه است، نه بعد از آن.

تمرین ۶

کیاراد روز شنبه ۳ تیر ۹۶ متولد شد. پدر و مادرش تصمیم دارند، اولین سالی که روز تولد او مصادف با پنج‌شنبه است، برایش مراسم جشن تولد برگزار کنند. جشن تولد کیاراد در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پاسخ: طبق فرض، ۹۶/۴/۳ روز شنبه است. می‌خواهیم ببینیم ؟ را چه سالی انتخاب کنیم تا ۳/۴/؟، روز پنج‌شنبه باشد و متناظر با ۵ (پنج‌شنبه، پنجمین روز بعد از شنبه است).

فرض می‌کنیم تعداد سال‌های سادهٔ بین ۹۶ و سال مجهول، x باشد و تعداد سال کبیسهٔ بین آن‌ها y. لذا باید: $۵ \overset{۷}{\equiv}$ تعداد روزهای بین آن‌ها. یعنی باید معادلهٔ $x(۳۶۵)+y(۳۶۶) \overset{۷}{\equiv} ۵$ را با فرض $x > y$ حل کنیم.

در معادلهٔ $x+۲y \overset{۷}{\equiv} ۵$، کوچک‌ترین جواب با شرط x>y عبارت است از: $\begin{cases} x = ۳ \\ y = ۱ \end{cases}$. یعنی بعد از ۱+۳ سال دیگر (سال ۱۴۰۰) جشن تولد کیاراد برگزار خواهد شد.

راه میان‌بر: چون پنج‌شنبه، ۵ روز بعد از شنبه است، اگر سال‌های پیش‌رو همه ساده بودند، ۵ سال آینده جواب سؤال بود. ولی با عنایت به اینکه بین هر ۴ سال یک سال کبیسه داریم، ۴ سال آینده پاسخ سؤال است.

و اما سری سوم تمرین‌ها

تمرین ۷

تاریخ تولد **مهراد** ۹۱/۲/۳ است. او در چه روزی از هفته به‌دنیا آمده است؟

پاسخ: یکی از تفاوت‌های بین این تمرین و تمرین ۵ آن است که تاریخ مبدأ، داده نشده و آن را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. برای مثال، امروز که مشغول نوشتن این مقاله هستم، یعنی: ۲۱ آذر ۹۷، مصادف با روز چهارشنبه است (تاریخ معلوم). می‌خواهیم ببینیم ۳ اردیبهشت ۹۱ چه‌روزی از هفته بوده است (تاریخ مجهول).

بین ۳ اردیبهشت ۹۱ تا ۳ اردیبهشت ۹۷، ۶ سال وجود دارد که ۲ سال ۹۱ و ۹۵ کبیسه بوده‌اند و ۴ سال بقیه ساده. بنابراین تعداد روزهای بین این دو تاریخ ۴(۳۶۵)+۲(۳۶۶) است.

از طرف دیگر، بین ۱۳ اردیبهشت ۹۷ تا ۲۱ آذر ۹۷

$$۲۱ + \underbrace{۲(۳۰)}_{\text{دو ماه مهر و آبان}} + \underbrace{۴(۳۱)}_{\text{چهار ماه خرداد تا شهریور}} + \underbrace{۲۸}_{\text{بقیه اردیبهشت}}$$

روز وجود دارد.

بنابراین تعداد روزهای بین دو تاریخ معلوم و مجهول برابر است با:

$$d=۴(۳۶۵)+۲(۳۶۶)+۲۸+۴(۳۱)+۲(۳۰)+۲۱$$

و می‌دانیم:

$$d\overset{۷}{\equiv}۴(۱)+۲(۲)+۰+۴(۳)+۲(۲)+۰$$

$$d\overset{۷}{\equiv}۲۴\overset{۷}{\equiv}۳$$

پس مهراد ۳ روز **قبل** از چهارشنبه، یعنی یک‌شنبه متولد شده است.

تمرین ۸

آخرین روز سال ۱۳۹۷، چهارشنبه است. روز طبیعت در سال ۱۳۷۴ چه روزی از هفته بوده است؟

پاسخ: ۹۸/۱/۱ پنج‌شنبه است (تاریخ معلوم).

؟

۷۴/۱/۱۳ چه‌روزی از هفته بوده‌است؟ (تاریخ مجهول).

برای شمارش تعداد روزهای بین این دو تاریخ از روش متمم استفاده می‌کنیم. توجه داریم که بین ۷۴/۱/۱۳ تا ۹۸/۱/۱۳، ۲۴ سال وجود دارد که ۶ تای آن‌ها کبیسه بوده‌اند. پس:

$$d=[۱۸(۳۶۵)+۶(۳۶۶)]-۱۲$$

$$\Rightarrow d\overset{۷}{\equiv}[۱۸(۱)+۶(۲)]-۱۲$$

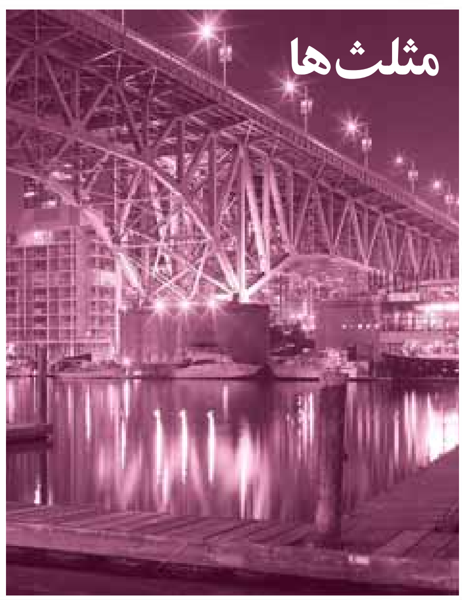
$$\Rightarrow d\overset{۷}{\equiv}۱۸\overset{۷}{\equiv}۴$$

یعنی ۱۳ فروردین ۷۴، ۴ روز قبل از پنج‌شنبه و یک‌شنبه بوده است.

ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور

مثلث‌ها



مثلث را می‌توان با هر سه نقطه‌ای که بر خطی راست قرار نداشته باشند، تعریف کرد. در این صورت مثلث صرفاً ناحیه‌ای است که توسط سه پاره‌خطی محصور شده است که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند.

سطح مثلث را می‌توان با رسم مستطیل‌هایی به دور آن محاسبه کرد. اگر یک ضلع را به‌عنوان قاعدهٔ مثلث انتخاب و ارتفاع مثلث را فاصلهٔ عمودی رأس سوم آن از قاعده تعریف کنیم، آن‌گاه سطح مثلث نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در طول قاعده است.

مثلث‌ها و تعمیمات بُعدهای بالاترشان غالباً به‌عنوان طریقی ساده در توصیف اجسام پیچیده‌تر به کار می‌روند. برای مثال، اشیای بسیاری را می‌توان با چسباندن پهلوی هم مثلث‌ها مدل‌بندی کرد. البته این مفهوم برای مهندسانی آشناست که شکل‌های پیچیده‌ای از قبیل دیوارهای خم‌دار را برای مقاوم‌تر کردن آن‌ها، به مثلث‌های راست‌ـ‌ضلع تقسیم می‌کنند.

میرشهرام صدر

دورهمی ریاضی

پیشامدهای مستقل

اشاره

شـــاید برای شما هم در کلاس درس ریاضی، سؤال‌ها یا ابهام‌هایی پیش آمده باشند که پاسخ به آن‌ها به وقت زیادی نیاز داشته باشد و از حوصلهٔ کلاس خارج باشد. ما در دورهمی‌های ریاضی به حل چنین مشکلات یا ابهام‌هایی می‌پردازیم. به همین دلیل بود که با تعدادی از دانش‌آموزان علاقه‌مند به مباحث ریاضی به بحث و گفت‌وگو نشستیم. در این مقاله به پاسخ سؤال‌ها یا ابهام‌هایی در مبحث «پیشامدهای مستقل» پرداخته‌ایم.

از شـــما دانش‌آموزان عزیز درخواست می‌کنیم، سؤال‌ها و ابهام‌هایی را که از متن کتاب‌های درس ریاضی برایتان به وجود می‌آید، برایمان بفرستید تا در دورهمی‌های بعدی به آن‌ها پاسخ دهیم.

در کتاب درســی آمده اســت که دو پیشامد A و B را مستقل می‌گوییم هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشــد. به عبارت دیگر، دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \qquad (۱)$$

اکنون اگر در مسئله‌ای از ما پرسیده شود: آیا پیشامدهای A و B مســتقل هستند، بی‌درنگ دستور بالا را بررسی می‌کنیم. اگر برابری (۱) برقرار باشــد، دو پیشامد را مستقل، و در غیر این صورت آن‌ها را پیشامدهای وابسته می‌گوییم.

اما اینکه وقوع پیشامد B در احتمال وقوع A تأثیر دارد یا ندارد، بررسی نمی‌شود. اکنون سؤال این است: **هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونهٔ ما باشند، چگونه بررسی کنیم که وقوع B در احتمال وقوع A تأثیر دارد یا ندارد؟**

برابری (۱) که شـــما به آن اشاره کردید، در حقیقت با به‌کار بردن دستور محاسبهٔ احتمال شرطی و اینکه دو پیشامد A و B مستقل باشند، به دست می‌آید. یعنی پشت صحنهٔ دستور (۱) این بررسی انجام می‌شود که: آیا وقوع B در احتمال وقوع A تأثیر دارد یا ندارد؟

اکنون دستور محاسبه احتمال شرطی را بیان کنید.

فرض کنیم A و B دو پیشامد در فضای نمونهٔ هم‌شانس S باشند. احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B اتفاق افتاده باشد را با نماد P(A|B) نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

فرض کنید تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A) پیشامد آنکه تاس عددی فرد بیاید.

B) پیشامد آنکه تاس عددی اول بیاید.

C) پیشامد آنکه تاس عددی بزرگ‌تر از ۴ بیاید.

پیشامدهای A، B و C را با اعضایش مشخص کنید.

A={۱,۳,۵} تاس عددی فرد بیاید.

B={۲,۳,۵} تاس عددی اول بیاید.

C={۵,۶} تاس عددی بزرگ‌تر از ۴ بیاید.

احتمال پیشامد A و P(A|C) را محاسبه کنید؟

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

برای محاسبهٔ P(A|C) باید P(A∩C) را محاسبه کنیم. به همین منظور ابتدا پیشامد A∩C را تعیین می‌کنیم.

$$A\cap C=\{۱,۳,۵\}\cap\{۵,۶\}=\{۵\}$$

$$P(A\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۲}{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

برای محاسبهٔ P(A|C) می‌توان فضای نمونه را به پیشامد C کاهش داد و احتمال پیشامد A را روی فضای نمونهٔ جدید C محاسبه کرد. در این حالت C={۵,۶} و احتمال فرد بودن عدد تاس روی این فضای نمونهٔ جدید برابر با $\frac{۱}{۲}$ است؛ یعنی $P(A\mid C)=\frac{۱}{۲}$.

آفرین. هر دو راه‌حل درست هستند و ملاحظه می‌کنید که: $P(A)=\frac{۱}{۲}$؛ یعنی احتمال وقوع پیشامد A برابر با $\frac{۱}{۲}$ و این در حالی است که: $P(A\mid C)=\frac{۱}{۲}$. یعنی چنانچه پیشامد C واقع شود، آن‌گاه احتمال وقوع A برابر با $\frac{۱}{۲}$ می‌شود و این بدان معناست که وقوع C در احتمال وقوع A تأثیر ندارد. بنابراین: P(A|C)=P(A) .

از رابطهٔ P(A|C)=P(A) درمی‌یابیم که وقوع پیشامد C، در احتمال وقوع A تأثیری ندارد. بنابراین A و C دو پیشامد مستقل هستند.

با توجه به بررسی‌های انجام شده، یک نفر نشان بدهد که هرگاه A و C دو پیشامد مستقل در فضای هم‌شانس S باشد، آن‌گاه:

P(A∩C)=P(A)×P(C)

در رابطهٔ P(A|C)=P(A)، به جای P(A|C)، مقدار آن را طبق دستور احتمال شرطی قرار می‌دهیم:

$$P(A\mid C)=P(A)$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=P(A)$$

$$\Rightarrow P(A\cap C)=P(A)\times P(C) \qquad (۲)$$

درست است. حالا متوجه شدید که پشت صحنهٔ رابطهٔ (۲) این بررسی انجام شده است که:

P(A|C)=P(A)

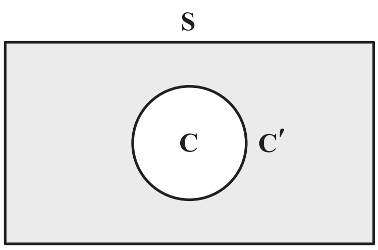
یعنی وقوع C، تأثیری در احتمال وقوع A ندارد و لذا A و C مستقل هستند.

در ادامه به نکتهٔ جدیدی اشاره می‌کنم:

دو پیشامد A و C مستقل‌اند، هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.

دیدیم که وقوع C در احتمال وقوع A تأثیری نداشت. اما عدم وقوع C چگونه می‌تواند در احتمال وقوع A بی‌تأثیر باشد؟!

وقتی می‌گوییم عدم وقوع C، یعنی پیشامد C اتفاق نیفتد.



پس مکمل آن، یعنی پیشامد 'C اتفاق می‌افتد. حال باید بررسی کنیم که وقوع 'C تأثیری در احتمال وقوع A دارد یا ندارد.

یعنی باید درستی رابطهٔ P(A)=P(A|C') را بررسی کنیم. داریم: $P(A)=\frac{۱}{۲}$. برای محاسبهٔ P(A|C') ابتدا پیشامد 'C را مشخص می‌کنیم:

C'={۱,۲,۳,۴}

سپس (A∩C') را تعیین می‌کنیم:

$$A\cap C'=\{۱,۳,۵\}\cap\{۱,۲,۳,۴\}=\{۱,۳\}$$

$$P(A\mid C')=\frac{P(A\cap C')}{P(C')}=\frac{\frac{۲}{۶}}{\frac{۴}{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون ملاحظه می‌کنید که:

$$P(A \mid C') = P(A) = \frac{۱}{۲}$$

یعنـــی عدم وقوع C هـــم در احتمال وقوع A تأثیری نداشـــته اســـت. بنابراین پیشامد C واقع شود یا نشـــود، در احتمال وقوع A تأثیری ندارد و در نتیجه پیشـــامدهای A و C مســـتقل‌اند.

متناظر با این مطلب، داریم: $P(A \cap C') = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ و $P(A) = \frac{۱}{۲}$ و $P(C') = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$P(A \cap C') = P(A) \times P(C')$

نتیجه: برای بررســـی اینکه دو پیشامد A و C مستقل‌اند یا وابسته، کافی است یکی از برابری‌های زیر را بررسی کنیم:

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ (I)

$P(A \mid C) = P(A)$ (II)

بنابراین وقتی از رابطهٔ (I) برای بررســـی دو پیشـــامد مستقل استفاده می‌کنیم، در حقیقت به نوعی درستی رابطهٔ (II) را بررســـی می‌کنیم و این دو رابطهٔ هم‌ارز هستند؛ یعنی:

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \Leftrightarrow P(A \mid C) = P(A)$$

با یک مثال توضیح دهید که چگونه وقوع یک پیشـــامد در احتمال وقوع پیشـــامد دیگر تأثیـــر می‌گذارد و به اصطلاح دو پیشامد وابسته می‌شوند.

پیشامدهای A و B را که در ابتدای جلسه بازگو کردم، در نظر بگیرید و $P(A)$ و $P(A|B)$ را محاسبه کنید.

چنان‌که: $P(A|B) \neq P(A)$ ، یعنی وقوع پیشامد B در احتمـــال وقوع A تأثیر می‌گذارد. در نتیجه پیشـــامدهای A و B مستقل نیستند، بلکه وابسته‌اند.

$$A = \{۱,۳,۵\} \quad ; \quad B = \{۲,۳,۵\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

برای محاســـبهٔ $P(A|B)$ کافی است فضای نمونه را به پیشامد B کاهش داد، ســـپس احتمال فرد بودن را روی این فضای نمونهٔ جدید محاسبه کرد که برابر است با:

$$P(A \mid B) = \frac{۲}{۳}$$

چه نتیجه‌ای گرفتید؟

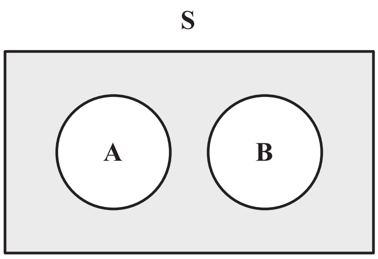
ملاحظـــه می‌کنیم که: $P(A \mid B) = \frac{۲}{۳} \neq \frac{۱}{۲} = P(A)$

پس دو پیشامد A و B وابسته‌اند.

آیا وقتی می‌گوییم A و B دو پیشامد مستقل در فضای نمونه S هستند، یعنی این دو پیشامد ناسازگارند؟ آیا بین دو پیشامد مستقل و دو پیشامد ناسازگار در یک فضای نمونه، رابطه‌ای وجود دارد؟

دو پیشامد ناسازگار را تعریف کنید؟

هرگاه A و B دو پیشـــامد در فضای نمونه S باشند، به طوری که: $A \cap B = \varnothing$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌گوییم.



فـــرض کنید A و B دو پیشـــامد در فضـــای نمونهٔ S می‌باشند، به طوری که:

$P(A) > ۰ \quad , \quad P(B) > ۰$

اکنون اگر این دو پیشامد ناسازگار باشند، یعنی: $A \cap B = \varnothing$ و در نتیجـــه: $P(A \cap B) = ۰$. در ایـــن حالـــت واضح اســـت که: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ بنابراین A و B نمی‌توانند مســـتقل باشند.

نتیجه: هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونهٔ S باشند، به طـــوری کـــه: $P(A) > ۰$, $P(B) > ۰$. در این صورت این دو پیشامد نمی‌توانند مستقل باشند.

یعنی، خانم؛ امکان ندارد که دو پیشامد هم مستقل و هم ناسازگار باشند؟

فرض کنید A و B دو پیشـــامد نـــاســـازگار و مستقل در فضای نمونهٔ S باشند. در این صورت داریم:

مستقل‌اند $B, A \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ناسازگارند $B, A \Leftrightarrow P(A \cap B) = ۰$

با مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$P(A)\times P(B)=۰ \Rightarrow P(A)=۰ \quad A=\varnothing$$

یا $P(B)=۰ \Rightarrow B=\varnothing$

نتیجه: هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که مستقل و ناسازگار باشند، آن‌گاه حداقل یکی از این پیشامدها نشدنی است.

بچه‌ها ذکر این نکته را ضروری می‌دانم که ممکن است دو پیشامد در یک فضای نمونه مستقل و همان دو پیشامد در فضای نمونهٔ دیگری وابسته باشند. یعنی آنچه که دربارهٔ استقلال دو پیشامد بیان می‌شود، استقلال براساس مدل احتمال است. برای مثال، فرض کنیم در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۷ مهرهٔ آبی قرار دارد. از این کیسه دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید پیشامد A این باشد که اولین مهره قرمز و پیشامد B این باشد که دومین مهره قرمز باشد. آیا A و B مستقل‌اند؟

چنانچه A و B مستقل باشند، آن‌گاه: $P(B|A)=P(B)$. بنابراین ابتدا $P(B)$ را طبق قانون احتمال کل محاسبه می‌کنیم:

$$P(B)=P(B\mid A)\times P(A)+P(B\mid A^c)\times P(A^c)$$
$$=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

چون مهره‌ها را با جای‌گزینی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه مهرهٔ دوم قرمز باشد، به شرطی که مهرهٔ اول هم قرمز باشد، برابر است با:

قرمز

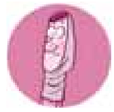
$$P(B\mid A)=\frac{(\ \ )}{\binom{۱۲}{}}=\frac{}{۱۲}$$

در نتیجه A و B مستقل‌اند.

اکنون مثال قبل را در نظر بگیرید و این‌دفعه مهره‌ها را بدون جای‌گذاری خارج کنید. آیا A و B مستقل‌اند؟

مگر فرقی هم می‌کند؟

این دفعــه مقادیر $P(B|A)$, $P(B)$ را بدون جای‌گذاری مهره‌ها محاسبه کنید و تفاوت را ببینید. تعجب نکنید! این حقیقت دارد.



ابتدا مقدار $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(B)=P(B\mid A)\times P(A)+P(B\mid A^c)\times P(A^c)$$
$$=\frac{۴}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۲}+\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

اما چون مهرهٔ اول به کیسه باز گردانده نمی‌شود و قرار است که مهرهٔ اول قرمز باشد، پس برای محاسبهٔ $P(B|A)$ با کیسه‌ای روبه‌رو هستیم که در آن ۴ مهرهٔ قرمز و ۷ مهرهٔ آبی موجود است. در نتیجه داریم:

قرمز

$$P(B\mid A)=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}=\frac{۴}{۱۱}$$

ملاحظه می‌کنیم که: $P(B|A)\neq P(B)$ و این یعنی در این فضای نمونه A و B وابسته‌اند.

تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای $A=\{۴,۵\}$, $B=\{۲,۵,۶\}$ را در نظر بگیرید. برای مدل‌های احتمال (فضاهای هم‌شانس یا غیرهم‌شانس) زیر تحقیق کنید که آیا A و B مستقل از هم هستند؟

الف.

$$P(\{۶\})=P(\{۲\})=۰\,,$$
$$P(\{۵\})=P(\{۱\})=P(\{۳\})=P(\{۴\})=\frac{۱}{۴}$$

ب.

$$P(\{i\})=\frac{۱}{۶}\quad,\quad i=۱,۲,\ldots,۶$$

در حالت الف، واضح است که:

$$P(A)=P(\{۴,۵\})=P(\{۴\})+(\{۵\})=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

برای محاسبهٔ $P(A|B)$ از دستور احتمال شرطی استفاده می‌کنیم:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{۵\})}{P(\{۲,۵,۶\})}$$
$$=\frac{\frac{۱}{۴}}{P(\{۲\})+P(\{۵\})+P(\{۶\})}$$
$$=\frac{\frac{۱}{۴}}{۰+\frac{۱}{۴}+۰}=۱$$

دراین حالت ملاحظه می‌کنیم که: $P(A|B)\neq P(A)$. در نتیجه A و B دو پیشامد وابسته‌اند.

در ایــن حالــت بــرای محاســبهٔ احتمال شــرطی، نمی‌توان فضای نمونه را به B کاهش داد و از دســتور $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد؟

این دســـتور را فقط می‌توان در فضای نمونهٔ هم‌شانس به کاربرد و در فضاهای نمونهٔ غیرهم‌شـــانس از دستور اصلی استفاده می‌کنیم.

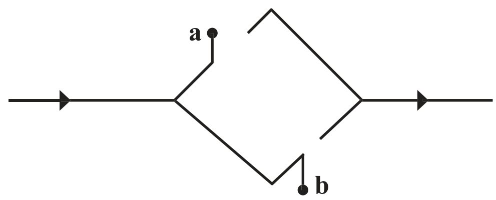
در حالت ب، فضای احتمال هم‌شـــانس اســـت. واضح است که $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و می‌توان از دستور زیر $P(A|B)$ محاسبه کرد:

$$P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه A و B مستقل از هم هستند.

این مســـئله را در کتابی دیدم. چگونه می‌توان احتمال آن را محاسبه کرد؟

شـــکل زیر یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، هریک از کلیدهای a و b، به ترتیب با احتمال‌های P و P-۱ به‌طور مســـتقل از هم باز یا بسته می‌شوند. اگر ولتاژی وارد مدار شود، احتمال آنکه به خارج منتقل شود، چقدر است؟



چناچه کلید a یا کلید b بســـته باشد، جریان به خارج منتقل خواهد شد. بنابراین، باید احتمال آن را محاسبه کنیم که حداقل یکی از دو کلید a یا b بسته باشد.

یعنی باید $P(a\cup b)$ را محاسبه کنیم؟

بله درست است! و حالا راه‌حل را ادامه دهید.

چون باز یا بسته بودن کلیدها مستقل از هم هستند، داریم:

$$\begin{aligned}P(a\cup b)&=P(a)+P(b)-P(a\cap b)\\&=P(a)+P(b)-P(a)\times P(b)\\&=P+(۱-P)-P(۱-P)\\&=P+۱-P-P+P^{۲}\\&=۱-P+P^{۲}\end{aligned}$$

امیدوارم از این دورهمی ریاضی لذت برده باشید و مشکلات شما درخصوص پیشامدهای مستقل رفع شده باشد. تا یک دورهمی دیگر، همگی شـــما را به خداوند بزرگ می‌سپارم.

*منابع

۱. آمار و احتمال (کتاب درسی) پایهٔ یازدهم/ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.

۲. سعید قهرمانی، مبانی احتمال، مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران.

۳. احمد پارسیان، مبانی احتمال و آمار، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان.

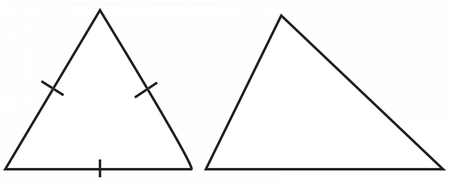
ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور

انواع مثلث‌ها

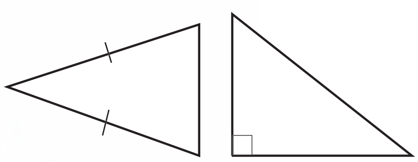
چندین نوع خاص از مثلث موجودند که هر یک از آن‌ها نام مخصوص خودشان را دارند. در هر مثلث، مجموع زاویه‌های درونی π رادیان (یا °۱۸۰) است و رابطه‌ای آشکار بین اندازهٔ زاویه‌ها و طول‌های اضلاع وجود دارد.

مثلث «متســـاوی‌الاضلاع» (equilateral) ســـه ضلع برابر دارد که به این معنی نیز هست که هر سه زاویهٔ آن بـــا هم برابرند. از آنجا که مجموع زاویه‌ها π رادیان اســـت، هر یک از این زاویه‌ها باید $\frac{\pi}{۳}$ یا °۶۰ باشـــد. مثلث «متساوی‌الساقین» (isosceles) دارای دو ضلع برابر است و بنابراین باید دو زاویهٔ برابر داشته باشد.



مختلف‌الاضلاع　　متساوی‌الاضلاع

«مثلث قائم‌الزاویـــه» (right-angled) زاویه‌ای قائمه، $\frac{\pi}{۲}$ یـــا °۹۰، دارد و «مثلث مختلف‌الاضلاع» (scalene) دارای سه ضلع به طول‌های مختلف و سه زاویه به اندازه‌های مختلف است.



قائم‌الزاویه　　متساوی‌الساقین

الهه مهران‌راد، دبیر دبیرستان‌های تهران

آنچه از دوست رسد...

هنر حل مسئله

اشاره

«حل مسئله» هنری عملی است و تمرین مداوم به تقویت آن کمک می‌کند. گاه به جای حل چند مسئله، حل یک مسئله از راه‌های متفاوت امکان این تمرین را بیشتر می‌کند.
در ادامه دو راه‌حل برای حل یک مسئله آورده شده است. شما نیز سعی کنید، مسئله‌ها را با روش‌های متفاوت حل کنید و ذهن خود را به چالش بکشید تا هنر حل مسئله در شما تقویت شود و راحت‌تر به حل مسئله‌ها بپردازید.

مسئله: دایره‌ای به شعاع ۹ واحد داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به محیط ۱۲۰ واحد محاط شده است. طول وتر این مثلث چقدر است؟

● راه‌حل اول:

$$x+y+z=۱۲۰$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{AOC}}+S_{\overset{\Delta}{BOC}}$$

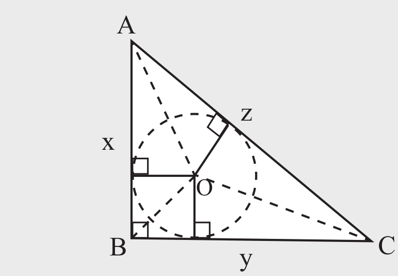
$$\frac{xy}{۲}=\frac{۹x}{۲}+\frac{۹y}{۲}+\frac{۹z}{۲}$$

$$\frac{xy}{۹}=x+y+z\Rightarrow\frac{xy}{۹}=۱۲۰\Rightarrow xy=۱۰۸۰$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:z^۲=x^۲+y^۲\Rightarrow z^۲=(x+y)^۲-۲xy$$

$$z^۲=(۱۲۰-z)^۲-۲(۱۰۸۰)$$

$$\cancel{z^۲}=۱۲۰^۲-۲۴۰z+\cancel{z^۲}-۲۱۶۰\Rightarrow z=۵۱$$



شکل ۱

● راه‌حل دوم:

چهارضلعی OKBN مربع است (شکل ۲).

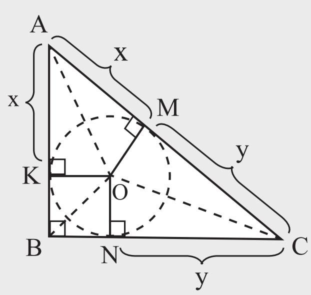
$\Leftarrow$ BK=BN=۹

می‌دانیم، اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره‌ای رسم کنیم، طول دو قطعه مماس با هم برابر است:

AK=AM=x

MC=NC=y

$۹+۹+x+x+y+y=۱۲۰\Rightarrow z=x+y=۵۱$



شکل ۲

عباس قلعه‌پور اقدم، مریم خورشید، لیلا کولایی‌زاده
دبیران ریاضی ناحیه ۱ و ۲ ارومیه

بررسی آماری شاخص جرم تودهٔ بدنی

اشاره

در این مقاله فرمولی برای تعیین میزان تناسب وزن[1] و قد معرفی می‌شود که عدد خروجی آن به «شاخص جرم تودهٔ بدنی» (معادل واژهٔ انگلیسی Body Mass Index) یا به اختصار «BMI» موسوم است. پس از معرفی این شاخص به سراغ سه جامعهٔ آماری (۱. کارمندان مرد یک شرکت؛ ۲. دانش‌آموزان مدرسهٔ ابتدایی پسرانه؛ ۳. دانش‌آموزان هنرستان دخترانه) می‌رویم و «BMI» را در نمونه‌هایی که از این جوامع انتخاب کرده‌ایم، اندازه می‌گیریم. سپس به وسیلهٔ جدول‌ها و نمودارهای استاندارد مربوطه، داده‌های جمع‌آوری شده را طبقه‌بندی و با رسم نمودارهای آماری، آن‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. هدف نویسندگان مقاله، نه ارائهٔ یک تحقیق آماری قابل استناد، بلکه آشنایی دانش‌آموزان با «BMI» و تمرین مطالب مطرح شده در فصل سوم کتاب «آمار و احتمال» پایهٔ یازدهم با نمونه‌های واقعی است.

مقدمه

آیا مقدار وزن و اندازهٔ قد خود را می‌دانید؟ اگر نمی‌دانید، آن‌ها را به دقت اندازه‌گیری کنید. سپس وزن و قد خود را بر حسب کیلوگرم و متر در فرمول زیر قرار دهید:

$$\text{شاخص جرم تودهٔ بدنی} = \frac{\text{وزن}}{(\text{قد})^2}$$

عدد به دست آمده شاخص تودهٔ بدنی شماست که اگر تا انتهای مقاله با ما باشید، متوجه خواهید شد که چقدر تناسب اندام دارید، چقدر اضافه وزن دارید یا برعکس چقدر باید وزنتان افزایش یابد.

کم‌تحرکی، فاصله گرفتن از غذاهای طبیعی و تغذیهٔ ناصحیح طبق الگوهای غربی (مانند فست‌فودها)، آلودگی هوا و ...، محصول فناوری و مدرنیته هستند که به جزء جدایی‌ناپذیر زندگی امروزی انسان‌ها تبدیل شده‌اند. این عوامل مشکلاتی نظیر شیوع چاقی در بزرگ‌سالان و حتی کودکان و نوجوانان را به وجود آورده‌اند که یکی از مهم‌ترین دلایل ابتلا به انواع بیماری‌های خطرناک و کشنده محسوب می‌شود. بنابراین، با توجه به اهمیت سلامتی، باید میزان و معیاری در دست باشد تا هر فرد بتواند از میزان اضافه یا کمبود وزن خود آگاه شود. یکی از رایج‌ترین معیارها BMI است که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم.

BMI چیست؟

شاخص جرم تودهٔ بدنی که به اختصار BMI نامیده می‌شود، مقیاسی برای اندازه‌گیری میزان تناسب وزن نسبت به قد افراد است. این شاخص از طریق تقسیم وزن بر مجذور (توان دوم) قد فرد محاسبه می‌شود که در آن، وزن برحسب کیلوگرم و قد با یکای متر سنجیده می‌شود.

$$\text{شاخص جرم تودهٔ بدنی} = \frac{\text{وزن به کیلوگرم}}{(\text{قد به متر})^{۲}}$$

مثال. شاخص تودهٔ بدنی برای فردی با وزن ۶۴ کیلوگرم و قد ۱۷۲ سانتی‌متر، به طریق زیر محاسبه می‌شود.

$$BMI = \frac{۶۴}{(۱/۷۲)^{۲}} = ۲۱/۶$$

یکای BMI

در «سیستم اندازه‌گیری استاندارد بین‌المللی» (SI)، یکای جرم کیلوگرم و یکای طول متر است. لذا در این سیستم یکای BMI کیلوگرم بر متر مربع است. ولی کشورهایی وجود دارند که به جای «SI» از «سیستم اندازه‌گیری انگلیسی» استفاده می‌کنند. در این سیستم، طول با واحدهایی چون «فوت» (متر ۰/۳۰۴۸= ۱ فوت) و «اینچ» (متر ۰/۰۲۵۴= ۱ اینچ) و جرم با یکای «پوند» (کیلوگرم ۰/۴۵۴=۱ پوند)، اندازه‌گیری می‌شوند. در چنین کشورهایی، وسایل اندازه‌گیری مانند ترازو و خط‌کش نیز غالباً با این واحدها درجه‌بندی شده‌اند. لذا یکای «BMI» به دست آمده در این شرایط، «پوند بر فوت مربع» یا «پوند بر اینچ مربع» خواهد شد. از طرف دیگر، عددهای به دست آمده برای BMI باید به وسیلهٔ جدول‌هایی که برحسب «کیلوگرم بر متر مربع»، تنظیم شده‌اند، تفسیر شوند. لذا باید طریقهٔ تبدیل این یکاها را بدانیم.

$$۱\left(\frac{\text{پوند}}{\text{اینچ مربع}}\right) = ۷۰۳\left(\frac{\text{کیلوگرم}}{\text{متر مربع}}\right) \quad ، \quad ۱\left(\frac{\text{پوند}}{\text{فوت مربع}}\right) = ۴/۸۸\left(\frac{\text{کیلوگرم}}{\text{متر مربع}}\right)$$

اجازه دهید، طریقهٔ به دست آوردن یکی از روابط بالا را در اینجا ارائه کنیم:

$$۴/۸۸\left(\frac{\text{کیلوگرم}}{\text{متر مربع}}\right) = \frac{\text{۰/۴۵۴ کیلوگرم}}{\text{۰/۳۰۴۸ متر} \times \text{۰/۳۰۴۸ متر}} = \frac{\text{۱ پوند}}{\text{۱ فوت} \times \text{۱ فوت}} = ۱\,\frac{\text{پوند}}{\text{فوت مربع}}$$

نوبت شماست که صحت فرمول دوم را بررسی کنید.

تاریخچه، کارایی و محدودیت‌های شاخص BMI

شاخص BMI بین سال‌های ۱۸۳۰ تا ۱۸۵۰ میلادی، توسط **آدولف کوتله**، دانشمند بلژیکی ابداع شد. بعدها در سال ۱۹۷۲ در یک مجلهٔ علمی مطرح شد و از آن پس به‌عنوان یکی از معتبرترین مقیاس‌ها برای اندازه‌گیری اضافه یا کمبود وزن مورد استفادهٔ پزشکان و متخصصان تغذیه قرار گرفت. سادگی محاسبهٔ این شاخص آن را به یکی از کاراترین روش‌های بی‌هزینه برای سنجش تناسب اندام تبدیل کرد. هرچند این شاخص برای افراد معلول، ورزشکار حرفه‌ای و سالخوردگان کارایی لازم را ندارد.

طبقه‌بندی‌ها

بعد از محاسبهٔ شاخص تودهٔ بدنی افراد، نوبت به تفسیر نتایج می‌رسد. برای ارزیابی عدد به دست آمده، «سازمان جهانی بهداشت» نتایج تحقیقات خود را برای افراد بزرگ‌سال بالای ۲۰ سال، در جدول ۱ خلاصه کرده است.

جدول ۱ دسته‌بندی بزرگ‌سالان ($۲۰ <$) براساس شاخص تودهٔ بدنی

BMI	ارزیابی
کمتر از ۱۸/۵	کمبود وزن
۱۸/۵ ـ ۲۴/۹	وزن طبیعی و نرمال
۲۵ ـ ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ ـ ۳۴/۹	چاقی درجه ۱
۳۵ ـ ۳۹/۹	چاقی درجه ۲
بیشتر از ۴۰	چاقی مفرط و مرگبار

مثال. شاخص تودهٔ بدنی فردی با وزن ۱۱۰ کیلوگرم و قد ۱۷۹ سانتی‌متر برابر ۳۴/۳ است. بنابراین با توجه به جدول، چنین شخصی در ردهٔ چاقی درجهٔ (۱) قرار می‌گیرد.

طبقه‌بندی افراد زیر ۲۰ سال براساس شاخص تودهٔ بدنی

فرمول محاسبهٔ شاخص تودهٔ بدنی برای کودکان و نوجوانان زیر ۲۰ سال، هیچ تفاوتی با بزرگ‌سالان ندارد. ولی برای تفسیر و طبقه‌بندی عدد به دست آمده در افراد ۲ تا ۲۰ سال، درصدی را برای مقایسهٔ این افراد با هم‌سن و هم‌جنس‌های خود در نظر می‌گیرند و عدد به دست آمده برای BMI را به وسیلهٔ نمودارهایی که برای پسر و دختر متفاوت‌اند، به عددی به نام «صدک» تبدیل می‌کنند. درواقع در طبقه‌بندی بزرگ‌سالان، سن فرد اهمیتی ندارد. ولی در افراد زیر ۲۰ سال، عدد BMI و سن شخص در طبقه‌بندی او دخیل‌اند. اجازه دهید، ابتدا نمودارها را که جداگانه برای پسر و دختر تنظیم شده‌اند، ببینیم (نمودارهای ۱ و ۲).

برای فهم نمودارها دو مثال می‌آوریم:

- **پســـــربچه‌ای ۱۰ ساله با شـــاخص تودهٔ بدنی ۱۳:** محور افقی نمودار، ســـن و محور عمودی سمت چپ، BMI را نشان می‌دهد. محور عمودی سمت راست، محور صدکی است. نقطهٔ به مختصات $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱۳ \end{bmatrix}$ در محدودهٔ صدکی زیر ۵ قرار می‌گیرد. در نمودار ۱ نقطهٔ مربوطه مشخص شده است.
- **دختری ۱۵ ساله با شاخص تودهٔ بدنی ۲۶:** نقطهٔ به مختصات $\begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۲۶ \end{bmatrix}$ در نمودار دخترهـــا، در محدودهٔ صدکی ۸۵ تا ۹۵ قرار می‌گیرد. در نمودار ۲، نقطهٔ مربوطه مشخص شده است.

پـس از تعیین محدودهٔ صدک، افراد زیر ۲۰ ســال طبق جدول۲ طبقه‌بندی می‌شوند.

جدول ۲ دسته‌بندی افراد زیر ۲۰ سال

صدک BMI	تفسیر
کمتر از صدک ۵	کمبود وزن
صدک ۵ تا ۸۵	وزن طبیعی و نرمال
صدک ۸۵ تا ۹۵	در معرض خطر
صدک بیتر از ۹۵	اضافه وزن

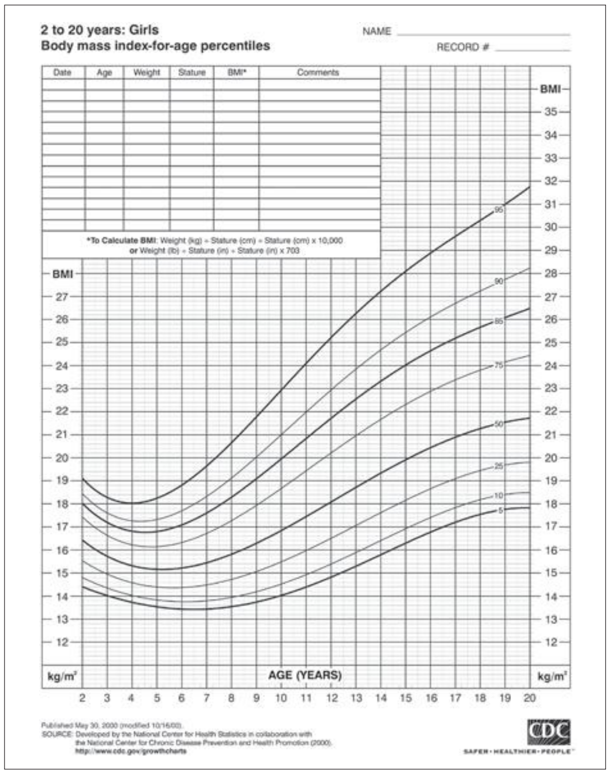
نتیجه: پسربچهٔ ۱۰ ســـاله در مثال مربوط به نمودارها، با مشکل کمبود وزن روبه‌روســـت و دختر ۱۵ ساله در معرض خطر قرار دارد و باید وزنش را کاهش دهد.

بررسی شاخص تودهٔ بدنی در سه جامعهٔ آماری

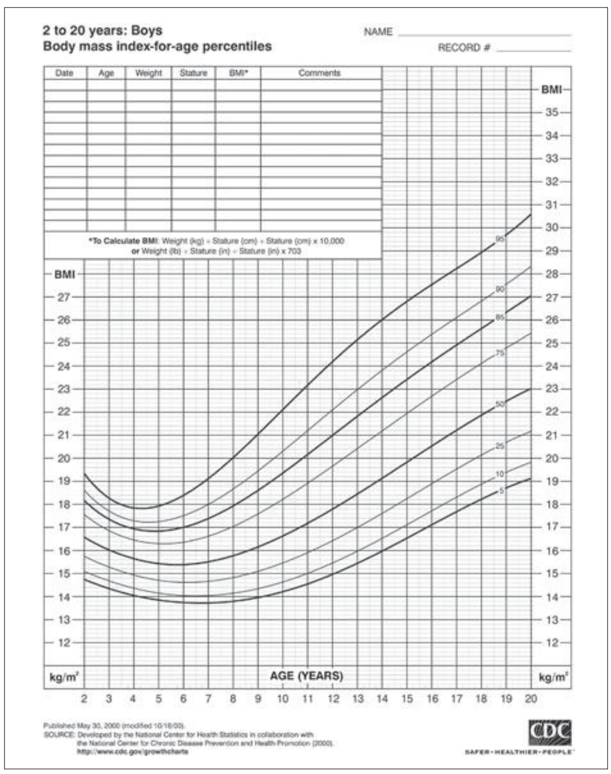
- **جامعهٔ آماری نخست:** کارمندان مرد یک شرکت (۲۰ > سن).
  - **اندازهٔ جامعه:** ۸۳ نفر
  - **اندازهٔ نمونه:** ۴۵ نفر
  - **روش انتخاب نمونه:** تصادفی ساده
  - **داده‌ها:** قد و وزن
  - **روش جمع‌آوری داده‌ها:** از طریق پرسش
  - **هدف:** محاسبهٔ BMI برای اعضای نمونه و طبقه‌بندی آن‌ها

جمع‌آوری داده‌ها

هریک از ۸۳ کارمند را با همان شـــماره‌ای که در فهرســـت اخذ شده از شرکت مشخص شده بودند، در نظر گرفتیم. با تولید عددهای تصادفی، از بیـــن عددهای ۱ تا ۸۳، ۴۵ عدد انتخاب و اعضای نمونه مشخص شـــدند. وزن‌ها و قدها را اندازه گرفتیم و با فرمول، شاخص تودهٔ بدنی را محاســـبه کردیم که نتایج در جدول ۳ آمده‌اند. حال با مشخص کردن دسته‌ها، جدول فراوانی را رسم می‌کنیم.

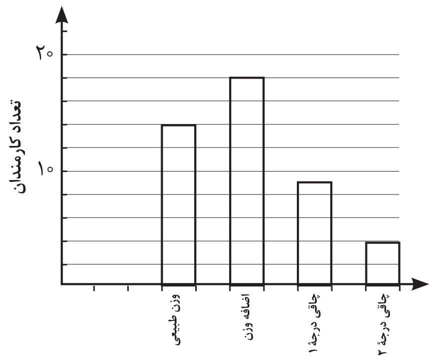


نمودار ۱ نمودار صدکی برای پسران



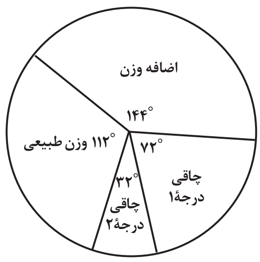
نمودار ۲ نمودار صدکی برای دختران

تعداد کارمندان
وزن طبیعی
اضافه وزن
چاقی درجه ۱
چاقی درجه ۲

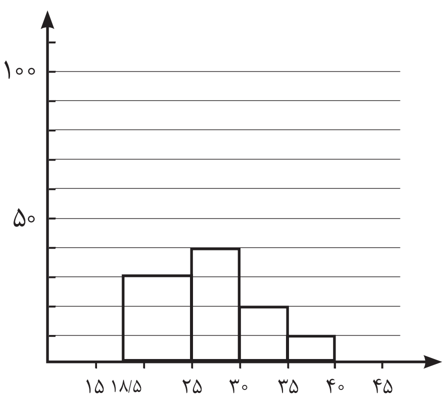


نمودار ۳ نمودار میله‌ای فراوانی مطلق

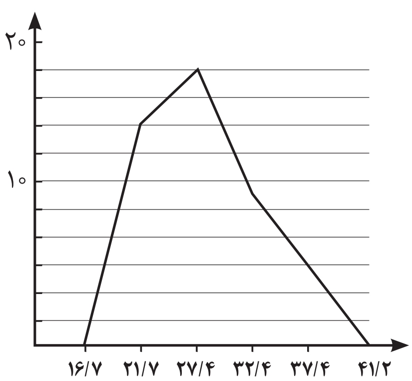
°۱۴۴ اضافه وزن
°۱۱۲ وزن طبیعی
°۳۲ چاقی درجهٔ ۲
°۷۲ چاقی درجهٔ ۱



نمودار ۴ نمودار دایره‌ای



نمودار ۵ نمودار مستطیلی فراوانی نسبی



نمودار ۶ نمودار چند بر فراوانی

جدول ۳

ردیف	وزن kg	قد cm	BMI	ردیف	وزن kg	قد cm	BMI
۱	۷۱	۱۶۵	۲۶/۱	۲۴	۱۰۸	۱۹۲	۲۹/۳
۲	۷۷	۱۸۲	۲۳/۳	۲۵	۹۰	۱۷۶	۲۹/۱
۳	۱۱۰	۱۷۹	۳۴/۳	۲۶	۷۵	۱۷۶	۲۴/۲
۴	۷۸	۱۸۳	۲۳/۴	۲۷	۵۸	۱۷۲	۱۹/۶
۵	۹۸	۱۸۹	۲۷/۴	۲۸	۱۰۴	۱۸۰	۳۲/۱
۶	۱۱۴	۱۸۰	۳۵/۲	۲۹	۹۳	۱۶۷	۳۳/۴
۷	۸۶	۱۸۰	۲۶/۵	۳۰	۱۰۲	۱۷۸	۳۲/۲
۸	۹۲	۱۹۲	۲۵	۳۱	۷۸	۱۷۷	۲۴/۹
۹	۸۷	۱۹۱	۲۳/۹	۳۲	۷۱	۱۷۱	۲۴/۳
۱۰	۸۱	۱۷۹	۲۵/۳	۳۳	۱۰۴	۱۸۰	۳۲/۱
۱۱	۷۶	۱۶۸	۲۶/۹	۳۴	۷۸	۱۷۰	۲۷
۱۲	۱۰۵	۱۷۱	۳۵/۹	۳۵	۷۲	۱۷۰	۲۴/۹
۱۳	۶۰	۱۷۳	۲۰/۱	۳۶	۷۲	۱۷۱	۲۴/۶
۱۴	۷۹	۱۷۸	۲۴/۹	۳۷	۸۳	۱۷۰	۲۸/۷
۱۵	۸۵	۱۷۶	۲۷/۴	۳۸	۷۸	۱۸۰	۲۴/۱
۱۶	۸۰	۱۷۸	۲۵/۳	۳۹	۹۰	۱۷۱	۳۰/۸
۱۷	۸۳	۱۷۳	۲۷/۷	۴۰	۹۲	۱۷۷	۲۹/۴
۱۸	۷۱	۱۷۵	۲۳/۲	۴۱	۹۵	۱۶۹	۳۳/۳
۱۹	۱۰۳	۱۹۶	۲۶/۸	۴۲	۸۰	۱۷۲	۲۷
۲۰	۸۰	۱۸۰	۲۴/۷	۴۳	۱۱۷	۱۷۸	۳۶/۹
۲۱	۷۳	۱۶۵	۲۶/۸	۴۴	۸۸	۱۶۸	۳۱/۲
۲۲	۸۰	۱۶۷	۲۸/۷	۴۵	۱۰۷	۱۷۲	۳۶/۲
۲۳	۱۰۵	۱۷۸	۳۳/۱				

جدول ۴ وزن، قد و شاخص تودهٔ بدنی جامعهٔ آماری نخست بدنی

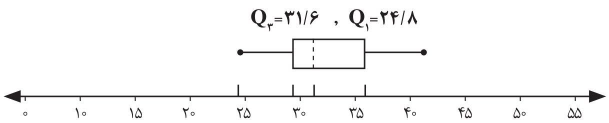
دسته‌ها	مرکز دسته	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
۱۵ ـ ۱۸/۴	۱۶/۷	۰	۰	۰
۱۸/۵ ـ ۲۴/۹	۲۱/۷	۱۴	۰/۳۱	۳۱
۲۵ ـ ۲۹/۹	۲۷/۴	۱۸	۰/۴	۴۰
۳۰ ـ ۳۴/۹	۳۲/۴	۹	۰/۲	۲۰
۳۵ ـ ۳۹/۹	۳۷/۴	۴	۰/۰۹	۹

با دقت در جدول ۴ ملاحظه می‌شود که ۱۴ نفر (۳۱ درصد)، وزن طبیعی و نرمال دارند. ۱۸ نفر (۴۰ درصد) با مشکل اضافه وزن روبه‌رو هستند و در معرض خطر چاقی‌اند. ۹ نفر (۲۰ درصد) چاق درجهٔ ۱ و ۴ نفر (۹ درصد) هم چاق درجهٔ ۲ محسوب می‌شوند. هیچ‌یک از ۴۵ نفر با مشکل کمبود وزن یا چاقی مفرط دست و پنجه نرم نمی‌کنند. حال نوبت به رسم نمودارها می‌رسد.

برای رسم نمودار جعبه‌ای، داده‌ها (BMI ۴۵ نفر) را مرتب می‌کنیم.

۲۴/۳	۲۴/۲	۲۴/۱	۲۳/۹	۲۳/۴	۲۳/۳	۲۳/۲	۲۰/۱	۱۹/۶
۲۶/۱	۲۵/۳	۲۵/۳	۲۵	۲۴/۹	۲۴/۹	۲۴/۹	۲۴/۷	۲۴/۶
۲۷/۷	۲۷/۴	۲۷/۴	۲۷	۲۷	۲۶/۹	۲۶/۸	۲۶/۸	۲۶/۵
۳۲/۱	۳۲/۱	۳۲/۲	۳۰/۸	۲۹/۴	۲۹/۳	۲۹/۱	۲۸/۷	۲۸/۷
۳۶/۹	۳۶/۲	۳۵/۹	۳۵/۲	۳۴/۳	۳۳/۴	۳۳/۳	۳۳/۱	۳۲/۲

دادهٔ بیست و سوم، یعنی ۲۷ میانه است. همچنین میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها برابر است با: «۲÷(۲۴/۹+۲۴/۷)»، یعنی ۲۴/۸ است. همچنین میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها برابر است با: ۲÷(۳۲/۱+۳۱/۲)، یعنی ۳۱/۶ است.



نمودار ۷ نمودار جعبه‌ای

میانگین داده‌ها از فرمول $\bar{x}=\frac{x_۱+...+x_n}{n}$ برابر با ۲۷/۹۴ و واریانس با فرمول $S^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+...+(x_n-\bar{x})^۲}{n}$، ۱۷/۹ به دست آمد.

اکنون نوبت شماست که واریانس را از فرمول $S^۲=\frac{x_۱{}^۲+...+x_n{}^۲}{n}-(\bar{x})^۲$ محاسبه کنید.

نمودار جعبه‌ای برای مقایسهٔ دو جامعه کاربرد دارد. اگر ما برای مثال، نمونه‌ای از کارمندان زن این شرکت را بررسی می‌کردیم، با مقایسهٔ نمودار جعبه‌ای دو نمونه می‌توانستیم اطلاعاتی از قبیل کمترین داده، بیشترین داده، میانه و ... را مقایسه کنیم. درخصوص واریانس نیز که از شاخص‌های پراکندگی است، مقایسهٔ واریانس دو جامعه معلوم می‌کند که داده‌ها چقدر از هم دورند و در کدام جامعه اختلاف داده‌ها زیاد است.

- **جامعهٔ آماری دوم:** دانش‌آموزان یک هنرستان دخترانه (۲۰ > سن)
  - **اندازهٔ جامعه:** ۳۰۰ نفر
  - **اندازهٔ نمونه:** ۹۰
  - **روش انتخاب نمونه:** دو مرحله‌ای؛ مرحلهٔ اول، خوشه‌ای و مرحلهٔ دوم، تصادفی ساده
  - **روش جمع‌آوری داده‌ها:** از طریق انجام آزمایش
  - **هدف:** محاسبهٔ BMI و طبقه‌بندی با استفاده از جدول ۲.
  - **جمع‌آوری داده‌ها:** پس از انتخاب نمونهٔ ۹۰ نفری از دختران هنرآموز، قد و وزن آن‌ها را اندازه گرفتیم و BMI ها را محاسبه کردیم. سپس از طریق نموداری که مخصوص دختران ۲ تا ۲۰ سال است، صدکی را که هر نفر به آن تعلق دارد، پیدا کردیم. نتایج در جدول ۵ خلاصه شده‌اند. توضیح اینکه در این جدول صدک زیر ۵ را با «A»، صدک بین ۵ تا ۸۵ را با B، صدک ۸۵ تا ۹۵ را با C و بالاتر از ۹۵ را با D نشان داده‌ایم.

جدول ۵

۱۵= سن						۱۶= سن						۱۷= سن					
ردیف	BMI	P	ردیف	BMI	P	ردیف	BMI	P	ردیف	BMI	P	ردیف	BMI	P	ردیف	BMI	P
۱	۲۹/۸	D	۱۶	۱۹/۷	B	۳۱	۲۱/۸	B	۴۶	۱۸/۱	B	۶۱	۱۸/۳	B	۷۶	۲۰/۵	B
۲	۲۷/۳	C	۱۷	۱۸/۷	B	۳۲	۲۱/۲	B	۴۷	۱۵/۶	A	۶۲	۱۹/۴	B	۷۷	۱۷/۱	A
۳	۳۰/۱	D	۱۸	۱۸/۶	B	۳۳	۲۶/۸	C	۴۸	۱۵/۷	A	۶۳	۲۵/۴	C	۷۸	۱۷/۵	B
۴	۲۴/۱	C	۱۹	۲۲/۱	B	۳۴	۱۹/۶	B	۴۹	۱۹/۲	B	۶۴	۱۸/۵	B	۷۹	۲۰/۷	B
۵	۱۹/۱	B	۲۰	۲۷/۶	C	۳۵	۲۷/۷	C	۵۰	۲۳/۸	B	۶۵	۲۰/۶	B	۸۰	۲۲/۱	B
۶	۱۸/۲	B	۲۱	۲۱/۸	B	۳۶	۲۱/۸	B	۵۱	۲۰/۱	B	۶۶	۲۵/۸	C	۸۱	۲۰/۴	B
۷	۳۰/۴	D	۲۲	۲۰/۵	B	۳۷	۱۸/۸	B	۵۲	۱۵	A	۶۷	۲۴/۹	B	۸۲	۲۴/۵	B
۸	۲۰/۴	B	۲۳	۲۰/۳	B	۳۸	۱۵/۵	A	۵۳	۲۰	B	۶۸	۲۵/۳	C	۸۳	۲۰/۴	B
۹	۱۶/۷	B	۲۴	۲۱/۷	B	۳۹	۳۱/۴	D	۵۴	۲۲/۹	B	۶۹	۱۸/۵	B	۸۴	۲۰/۸	B
۱۰	۲۱/۹	B	۲۵	۱۹/۶	B	۴۰	۱۹/۹	B	۵۵	۱۷/۷	B	۷۰	۱۹/۴	B	۸۵	۲۱/۵	B
۱۱	۲۰/۶	B	۲۶	۲۰/۳	B	۴۱	۲۱/۶	B	۵۶	۲۷/۸	C	۷۱	۲۴/۳	B	۸۶	۲۴/۵	B
۱۲	۲۲/۹	B	۲۷	۲۲/۸	B	۴۲	۱۹/۸	B	۵۷	۱۹/۳	B	۷۲	۲۰/۸	B	۸۷	۱۷/۲	A
۱۳	۱۹/۲	B	۲۸	۱۹	B	۴۳	۲۷/۶	C	۵۸	۱۸/۷	B	۷۳	۱۷/۶	B	۸۸	۲۸/۲	C
۱۴	۱۹/۷	B	۲۹	۱۵/۳	A	۴۴	۲۰/۸	B	۵۹	۲۸/۱	C	۷۴	۲۴/۶	B	۸۹	۳۰/۴	D
۱۵	۳۰/۹	D	۳۰	۲۱/۲	B	۴۵	۲۴/۴	B	۶۰	۲۷/۷	C	۷۵	۲۴/۳	B	۹۰	۳۰/۶	D

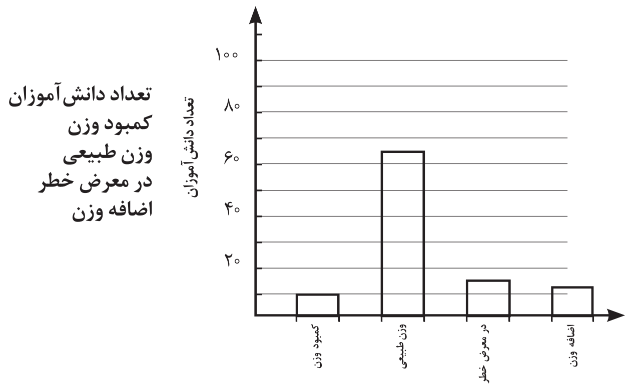
بـــا این توضیح که در جدول «P» حـــرف اول «Percentile» به معنی صدک است، جدول فراوانی را تشکیل می‌دهیم.

با دقت در جدول ۶ ملاحظه می‌شود که ۸ درصد از دانش‌آموزان کمبود وزن دارند، ۷۰ درصد در شرایط طبیعی و نرمال هستند، ۱۴ درصـــد در معرض خطر چاقی و عواقب آن قرار دارند، و ۸ درصد هم دارای اضافه وزن هستند.

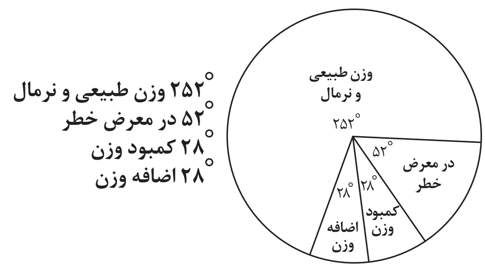
جدول ۶

دسته‌ها	مرکز دسته	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
۰ ـ ۵ A	۲/۵	۷	۰/۰۸	۸
۵ ـ ۸۵ B	۴۵	۶۳	۰/۷	۷۰
۸۵ ـ ۹۵ C	۹۰	۱۳	۰/۱۴	۱۴
۹۵ ـ ۱۰۰ D	۹۷/۵	۷	۰/۰۸	۸
جمع		۹۰	۱	۱۰۰

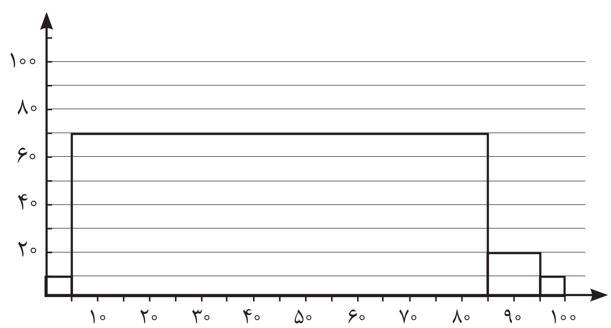
در ادامه به رسم نمودارها می‌پردازیم.



نمودار ۸ نمودار میله‌ای فراوانی مطلق



نمودار ۹ نمودار دایره‌ای



نمودار ۱۰ نمودار مستطیلی فراوانی نسبی

- **جامعهٔ آماری سوم:** دانش‌آموزان مدرسهٔ ابتدایی پسرانه
  - **اندازهٔ جامعه:** ۲۶۰ نفر
  - **اندازهٔ نمونه:** ۱۱۲ نفر
  - **روش انتخاب نمونه:** خوشه‌ای ـ تصادفی
  - **داده‌ها:** قد و وزن
  - **روش جمع‌آوری:** آزمایش

داده‌ها را به‌صورت سه‌تایی‌ها و به فرم (قد و وزن و سن) می‌نویسیم.

(۱۲۱, ۲۵, ۷)	(۱۲۳, ۲۱/۷, ۷)	(۱۲۴, ۲۳, ۷)	(۱۱۰, ۱۹, ۷)	(۱۱۱, ۲۰/۳, ۷)	(۱۳۱, ۳۰, ۷)
(۱۲۴, ۲۲/۷, ۷)	(۱۱۹, ۲۱/۸, ۷)	(۱۲۲, ۱۹/۴, ۷)	(۱۲۰, ۲۶, ۷)	(۱۲۱, ۲۵, ۷)	(۱۲۶, ۲۷, ۷)
(۱۱۶, ۲۱/۴, ۷)	(۱۲۲, ۲۳/۸, ۷)	(۱۲۷, ۳۰, ۷)	(۱۲۷, ۲۸/۲, ۷)	(۱۲۸, ۲۵, ۷)	(۱۱۹, ۱۹/۶, ۷)
(۱۳۱, ۳۳, ۸)	(۱۲۱, ۲۱, ۸)	(۱۲۴, ۲۳/۷, ۸)	(۱۲۹, ۲۵/۷, ۸)	(۱۲۷, ۳۱, ۷)	(۱۱۸, ۲۰/۸, ۷)
(۱۲۹, ۲۵, ۸)	(۱۲۰, ۲۲/۸, ۸)	(۱۲۴, ۲۳/۳۰, ۸)	(۱۳۱, ۲۵, ۸)	(۱۳۰, ۲۷/۸, ۸)	(۱۲۰, ۱۹/۲, ۸)
(۱۳۳, ۳۶, ۸)	(۱۲۷, ۲۵, ۸)	(۱۳۳, ۳۰/۵, ۸)	(۱۲۷, ۲۴/۳, ۸)	(۱۳۲, ۳۸, ۸)	(۱۲۸, ۲۴/۳, ۸)
(۱۳۶, ۲۹, ۹)	(۱۳۱, ۲۶, ۹)	(۱۲۵, ۲۲/۸, ۸)	(۱۳۱, ۲۷/۲۰, ۸)	(۱۳۷, ۳۵, ۸)	(۱۲۱, ۲۴, ۸)
(۱۴۵, ۵۸/۴, ۹)	(۱۲۲, ۲۲, ۹)	(۱۳۹, ۲۸, ۹)	(۱۴۲, ۴۰, ۹)	(۱۳۳, ۲۶/۷, ۹)	(۱۳۰, ۲۶, ۹)
(۱۲۷, ۲۶, ۹)	(۱۲۸, ۲۵/۸, ۹)	(۱۲۶, ۲۸, ۹)	(۱۳۷, ۲۸/۳, ۹)	(۱۳۶, ۲۱, ۹)	(۱۳۶, ۳۴/۱, ۹)
(۱۳۶, ۳۱, ۹)	(۱۳۱, ۲۵/۳, ۹)	(۱۳۶, ۲۹/۵, ۹)	(۱۳۴, ۳۵, ۹)	(۱۳۴, ۲۸/۲, ۹)	(۱۲۵, ۲۴/۲, ۹)
(۱۴۰, ۲۸/۷, ۱۰)	(۱۴۴, ۳۹, ۱۰)	(۱۳۶, ۳۰/۵, ۱۰)	(۱۴۰, ۳۲/۸, ۱۰)	(۱۳۲, ۲۷, ۱۰)	(۱۴۴, ۳۲/۴, ۱۰)
(۱۴۰, ۳۲, ۱۰)	(۱۳۷, ۲۷, ۱۰)	(۱۲۷, ۲۴/۱, ۱۰)	(۱۳۴, ۳۲/۲, ۱۰)	(۱۳۴, ۴۶, ۱۰)	(۱۳۶, ۴۱/۸, ۱۰)
(۱۴۱, ۳۱, ۱۰)	(۱۲۹, ۲۲/۷, ۱۰)	(۱۴۰, ۳۱/۵, ۱۰)	(۱۴۷, ۴۰/۲, ۱۰)	(۱۴۵, ۳۱/۵, ۱۰)	(۱۴۷, ۵۲/۷, ۱۰)
(۱۴۵, ۳۴/۵, ۱۱)	(۱۴۱, ۳۰/۸, ۱۱)	(۱۴۹, ۳۹, ۱۱)	(۱۴۵, ۵۵, ۱۱)	(۱۳۹, ۶۴, ۱۰)	(۱۲۸, ۲۴, ۱۰)
(۱۳۹, ۳۴/۶, ۱۱)	(۱۴۶, ۳۵/۷, ۱۱)	(۱۴۴, ۳۲, ۱۱)	(۱۴۴, ۵۲/۱, ۱۱)	(۱۴۵, ۳۶, ۱۱)	(۱۴۴, ۳۹, ۱۱)
(۱۴۵, ۳۲, ۱۱)	(۱۴۱, ۳۳/۶, ۱۱)	(۱۲۷, ۳۰, ۱۱)	(۱۴۸, ۴۰, ۱۱)	(۱۴۷, ۳۹, ۱۱)	(۱۳۹, ۳۲/۳, ۱۱)
(۱۵۴, ۳۴/۵, ۱۲)	(۱۴۲, ۳۵, ۱۲)	(۱۴۲, ۳۹, ۱۱)	(۱۴۱, ۳۲/۲, ۱۱)	(۱۳۵, ۲۸, ۱۱)	(۱۴۲, ۳۶, ۱۱)
(۱۳۹, ۳۹/۳, ۱۲)	(۱۴۹, ۴۲, ۱۲)	(۱۴۸, ۴۹, ۱۲)	(۱۴۰, ۳۱, ۱۲)	(۱۵۰, ۶۷, ۱۲)	(۱۵۰, ۷۵, ۱۲)
		(۱۴۱, ۴۴, ۱۲)	(۱۵۵, ۶۳, ۱۲)	(۱۵۷, ۵۰, ۱۲)	(۱۴۰, ۳۱, ۱۲)

نوبت شماست جامعهٔ آماری سوم را همانند جامعهٔ دوم بررسی کنید.

ارزیابی مشکلات

در انجام این پروژه با مشکلاتی به این شرح روبه‌رو بودیم:

۱. همکاری نکردن کارمندان زن در جامعهٔ اول برای ارائهٔ داده‌ها؛

۲. تمایل نداشتن برخی از هنرآموزان برای سنجش قد و وزن؛

۳. بر هم خوردن نظم مدرسه در حین داده‌گیری از آموزشگاه ابتدایی.

تشکر و قدردانی

نویسندگان لازم می‌دانند از مدیریت آموزش‌وپرورش ناحیهٔ ۱ ارومیه، مدیریت «آموزشگاه ابتدایی پسرانهٔ شهید عبدیلی ارومیه» و مدیریت «هنرستان دخترانهٔ عاطفه»، از بابت همکاری در جمع‌آوری داده‌ها، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشند.

پی‌نوشت‌ها

۱. اشتباه رایج در به‌کارگیری واژهٔ «وزن» به جای «جرم»، عادت غلطی است که ما نویسندگان مقاله برای حفظ امانت‌داری در استفاده از منابع، آن را تغییر نداده‌ایم.

2. mass: جرم
3. weight: وزن
4. Age: سن
5. Height: قد
6. inch: اینچ
7. foot: فوت
8. Pound: پوند
9. Boy: پسر
10. girl: دختر
11. Body: بدن
12. Adolphe Quetelet: آدولف کوتله
13. Percentile: صدک

منابع

۱. آمار و احتمال پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه (۱۳۹۶). دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری. چاپ اول.

۲. آمار و مدل‌سازی سال دوم نظری (رشته‌های ریاضی ـ انسانی) و سال سوم رشتهٔ علوم تجربی (۱۳۸۲). دفتر تألیف کتاب‌های درسی. چاپ چهارم.

۳. امانی، علیرضا (بی‌تا). «شاخص جرم توده بدنی کودکان و نوجوانان، BMI». مجلهٔ علوم ورزشی.

۴. پژوهشگاه ملی مهندسی ژنتیک و زیست‌فناوری، کمیتهٔ تربیت‌بدنی. «شاخص توده بدنی (BMI) چیست؟»

۵. ولی‌زاده، مجید؛ صحبتلو، فریبا؛ موسوی نسب، نورالدین (۱۳۸۴). «بررسی شاخص‌های تن‌سنجی (وزن، قد و شاخص تودهٔ بدنی) دانش‌آموزان دختر مدارس راهنمایی زنجان، سال ۸۴ ـ ۱۳۸۳». مجلهٔ علمی پژوهشی دانشگاه علوم پزشکی زنجان. پاییز.

6. "Anthropometric Reference Data For children and Adults. united states". CDC DHHS. 2016.

7. "Body Mass Index: BMI For children and Teens. center for Disease control. from the original on 2013-10-29. Retrieved 2013-12-16.

عنایت‌الله راستی‌زاده

روشی متفاوت برای حل برخی معادلات مثلثاتی

(روش حداکثر ـ حداقل)

اشاره

گذشته از اینکه حل بسیاری از معادلات مثلثاتی مستلزم دانستن روابط مثلثاتی بین نسبت‌ها و استفادهٔ مناسب و درست از آن‌هاست، اما در حل معادلات مثلثاتی، چه معادلاتی که روش‌های دسته‌بندی شده و مشخصی دارند و چه معادلاتی که از روش سرراست و معلومی نمی‌توان آن‌ها را حل کرد، گاهی برخی روش‌های ابتکاری می‌توانند به سادگی به حل معادله بینجامند. در این مقاله مؤلف می‌کوشد با چند مثال متنوع و توضیح قواعد مورد نیاز، ابزاری متفاوت را برای حل برخی معادلات معرفی کند.

روش حداکثر ـ حداقل چیست؟ و چه شرایطی برای آن لازم است؟

در این روش برای حل معادلهٔ مثلثاتی P(x)=Q(x)، در صورت امکان و با استفاده از روش‌های تعیین ماکزی‌مم و مینی‌مم، حداقل و حداکثر دو عبارت مثلثاتی P(x) و Q(x) را می‌یابیم. فرض کنیم: $P(x) \le A$ و $Q(x) \ge A$ باشد.

در این صورت بدیهی است که تنها امکان وجود جواب برای معادلهٔ P(x)=Q(x) آن است که هر دو برابر A باشند. جواب‌های مشترک دو معادلهٔ سادهٔ P(x)=A و Q(x)=A در بازهٔ داده شده (در صورت وجود) پاسخ‌های معادلهٔ P(x)=Q(x) هستند. بنابراین شرایط استفاده از این روش به‌طور خلاصه آن است که:

۱. امکان محاسبهٔ ماکزی‌مم و مینی‌مم (یا دست‌کم یکی از این‌ها) برای دو سمت معادله برقرار باشد و حداقلِ مقدار یکی، برابر حداکثرِ مقدار دیگری باشد.

۲. اشتراک جواب برای جاهایی که یک طرف حداکثر مقدار خود، و طرف دیگر حداقل مقدار خود را می‌گیرد، وجود داشته باشد.

برای روشن شدن توضیحات بالا، در ادامه به ذکر چند نمونه خواهیم پرداخت.

نمونهٔ ۱. جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۲}(\operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x)=۵-۶\operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

حل: نخست توجه کنیم که:

$$-\sqrt{a^۲+b^۲} \le a\operatorname{Sin} x+b\operatorname{Cos} x \le \sqrt{a^۲+b^۲}$$

پس: $-\sqrt{۲} \le \operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x \le \sqrt{۲}$ و در نتیجه داریم:

$$-۲ \le P(x)=\sqrt{۲}(\operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x) \le ۲$$

از سوی دیگر: $Q(x)=۵-۶\operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} x=۵-۳\operatorname{Sin}۲x$

و چون: $-۱ \le \operatorname{Sin}۲x \le ۱$

پس: $۲ \le Q(x)=۵-۶\operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} x \le ۸$

بنابراین حداقل مقدار سمت راست معادله برابر ۲ است و این در حالی است که حداکثر مقدار سمت چپ معادله نیز برابر ۲ است؛ یعنی:

$$P(x) \le ۲ \le Q(x)$$

داریم: $P(x)=۲ \Rightarrow \sqrt{۲}(\operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x)=۲$

چون: $\operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x=\sqrt{۲}\operatorname{Sin}(x+\frac{\pi}{۴})$

در نتیجه:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

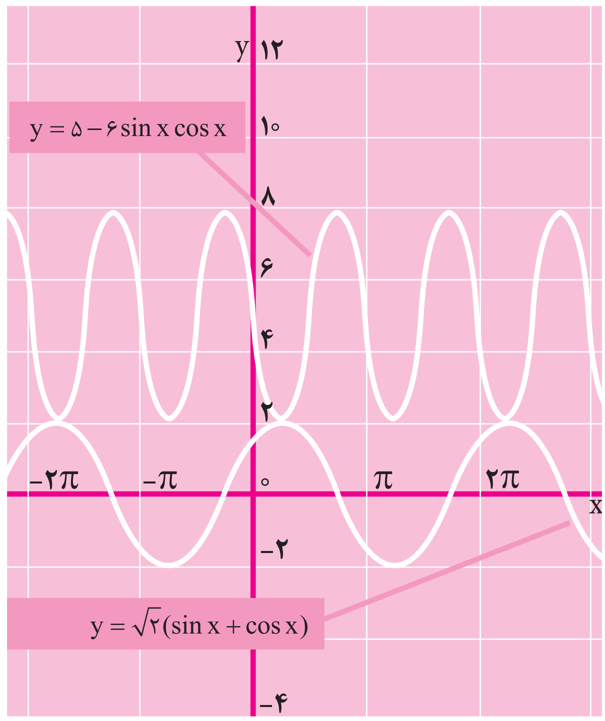
$$\Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$Q(x)=2 \Rightarrow 5-6\sin x\cos x=2$$

$$\Rightarrow 3\sin 2x=3 \Rightarrow \sin 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

و تنها جواب مشترک $P(x)=Q(x)=2$ در بازهٔ [ ] برابر $x=\frac{\pi}{4}$ است (به **نمودار ۱** توجه کنید).



نمودار ۱

تذکر: در کتاب‌های مرجع مثلثات، نمونه‌های مشابه نمونهٔ ۱ اصطلاحاً «معادلات کلاسیک نوع چهارم» نامیده می‌شوند که دارای روش‌های کلیشه‌ای خاصی هستند. نمونهٔ بعدی نیز در کتاب‌های منبع، به کلاسیک (نوع سوم) معروف است.

نمونهٔ ۲. جواب‌های معادلهٔ

$$2\sin^2x+2\sin x\cos x-\cos^2x=3$$

را در بازهٔ $[0,2\pi]$ به دست آورید.

حل: ابتدا معادله را به‌صورت $2\sin^2x-\cos^2x=3-2\sin x\cos x$ می‌نویسیم. داریم:

$$P(x)=2\sin^2x-\cos^2x=2\sin^2x-(1-\sin^2x)$$

$$\Rightarrow P(x)=3\sin^2x-1\,;\ 0\le\sin^2x\le1$$

$$\Rightarrow -1\le P(x)\le 2$$

از سوی دیگر:

$$Q(x)=3-2\sin x\cos x=3-\sin 2x$$

$$-1\le\sin 2x\le1\Rightarrow 2\le Q(x)\le4$$

از این‌رو حداکثر $P(x)$ برابر حداقل $Q(x)$ شده است. شرط نخست محقق شده است و ادامه می‌دهیم:

$$P(x)=2\Rightarrow 3\sin^2x-1=2\Rightarrow\sin^2x=1$$

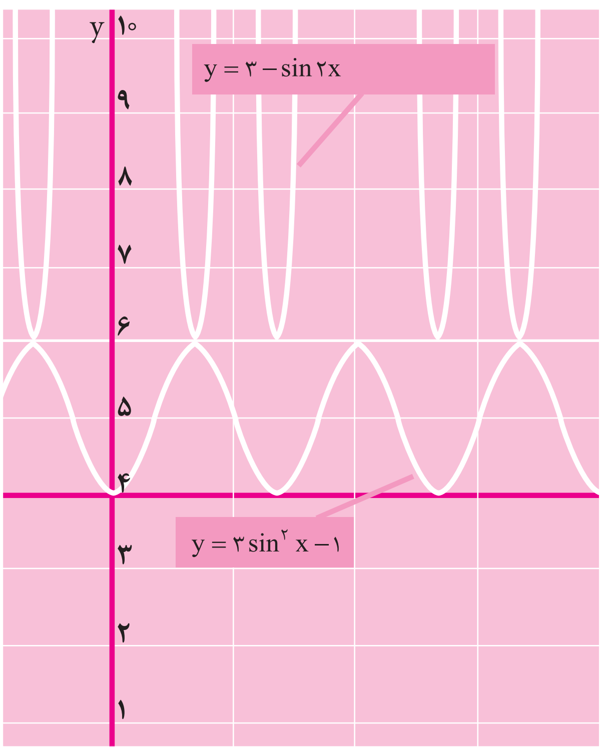
$$\Rightarrow \sin x=1,\sin x=-1\Rightarrow\boxed{x_1=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_2=3\frac{\pi}{2}}$$

$$Q(x)=2\Rightarrow 3-\sin 2x=2\Rightarrow\sin 2x=1$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{x_3=\frac{\pi}{4}\ ,\ x_4=5\frac{\pi}{4}}$$

همچنان که دیده می‌شود، جواب مشترکی بین دو معادلهٔ $P(x)=2$ و $Q(x)=2$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ وجود ندارد و بنابراین معادلهٔ داده شده فاقد جواب است.

(به **نمودار ۲** توجه کنید).



نمودار ۲

اگرچه یافتن پاسخ برای دو نمونهٔ فوق، از روشی غیر آنچه ذکر شد، امکان‌پذیر بود، اما در دو نمونهٔ بعدی خواهید دید که دسترسی به پاسخ بدون استفاده از ایدهٔ مطرح شده در این مقاله، اگر نگوییم غیرممکن است، لااقل به سادگی میسر نیست.

■**نمونهٔ ۳.** مجموع جواب‌های معادلهٔ $\tan^۲x+۹Cot^۲x=۵-Cos۳x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به دست آورید:

حل: با فرض $P(x)=\tan^۲x+۹Cot^۲x$ ، به کمک نامساوی مشهور میانگین حسابی ـ میانگین هندسی می‌توان نشان داد که: $P(x)\geq ۶$.
این نامساوی بیان می‌دارد که هرگاه $a>۰$ و $b>۰$، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

پس:

$$\frac{\tan^۲x+۹Cot^۲x}{۲}\geq\sqrt{(\tan^۲x)(۹Cot^۲x)}$$

$$\Rightarrow \tan^۲x+۹Cot^۲x\geq ۲\sqrt{۹\times ۱}\Rightarrow P(x)\geq ۶$$

همچنین و با فرض: $Q(x)=۵-Cos۳x$ و اینکه: $-۱\leq Cos۳x\leq ۱$

نتیجه می‌شود: $۴\leq Q(x)\leq ۶$

پس: $Q(x)\leq ۶\leq P(x)$

از این‌رو شرط نخست برقرار است. یعنی بیشترین مقدار یک طرف معادله با کمترین مقدار طرف دیگر معادله برابر است. داریم:

$$Q(x)=۶\Rightarrow ۵-Cos۳x=۶\Rightarrow Cos۳x=-۱$$

$$\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}$$

و جواب‌های در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ این (سمت) معادله عبارت‌اند از:

$$\boxed{x_۱=\frac{\pi}{۳}}\quad,\quad x_۲=\pi\quad,\quad\boxed{x_۳=\frac{۵\pi}{۳}}$$

از سوی دیگر باید $P(x)=۶$ را حل کرد (یا ۳ جواب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ فوق را در آن امتحان کرد). داریم:

$$\tan^۲x+۹Cot^۲x=۶\Rightarrow \tan^۴x-۶\tan^۲x+۹=۰$$

$$\Rightarrow(\tan^۲x-۳)^۲=۰\Rightarrow\tan^۲x=۳$$

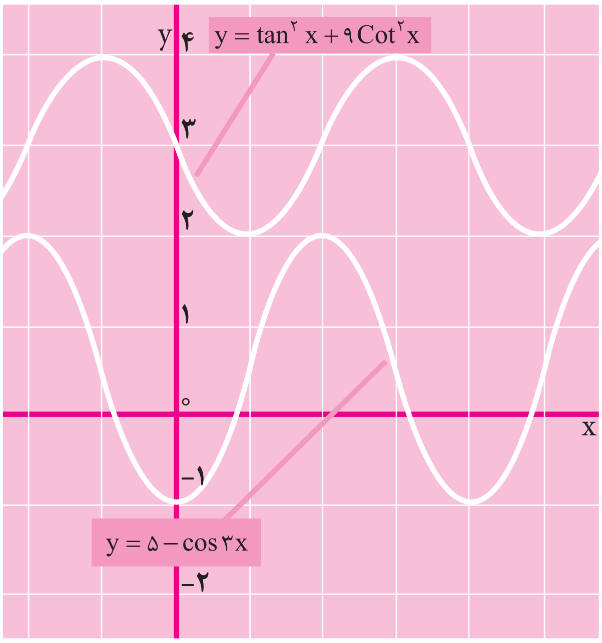
$$\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

و جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از:

$$x=\boxed{\frac{\pi}{۳}}\ ,\ \frac{۲\pi}{۳}\ ,\ \frac{۴\pi}{۳}\ ,\ \boxed{\frac{۵\pi}{۳}}$$

پس جواب‌های مشترک $P(x)=Q(x)=۶$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تنها $x=\frac{\pi}{۳}$ و $x=\frac{۵\pi}{۳}$ هستند و مجموع آن‌ها می‌شود: $\frac{\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi$

(به **نمودار ۳** که به یاری نرم‌افزار گِرافر و با گوشی اندرویدی رسم شده است توجه کنید و از زیبایی‌های این روش و گستردگی حیطهٔ عمل لذت ببرید!)



نمودار ۳

آیا راه‌حل ساده‌تری به جز استفاده از این روش می‌توان سراغ گرفت!

به نمونهٔ بعدی توجه کنید!

■**نمونهٔ ۴.** معادلهٔ مثلثاتی

$$\tan^۲x+Cot^۲x=Sin(x+\frac{\pi}{۱۲})-\sqrt{۳}\,Cot(x+\frac{\pi}{۱۲})$$

در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ چند جواب دارد؟ آن‌ها را مشخص کنید.

حل: با فرض $P(x)=\tan^۲x+Cot^۲x$ و استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی ـ میانگین هندسی (که قبلاً ذکر شد) داریم:

$$\frac{\tan^۲x+Cot^۲x}{۲}\geq\sqrt{(\tan^۲x)(Cot^۲x)}$$

$$\Rightarrow\tan^۲x+Cot^۲x\geq ۲$$

(از نامساوی معروف $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ برای $a>۰$ هم می‌توان بهره گرفت.)

همچنین با فرض

$$Q(x)=\text{Sin}(x+\frac{\pi}{۱۲})-\sqrt{۳}\,\text{Cos}(x+\frac{\pi}{۱۲})$$

و استفاده از این موضوع که:

$$-\sqrt{a^۲+b^۲}\leq a\,\text{Sin}\,x+b\,\text{Cos}\,x\leq\sqrt{a^۲+b^۲}$$

نتیجه می‌شود: $-۲\leq Q(x)\leq ۲$

لـذا ماکزی‌مم یک طرف معادله بـا مینی‌مم طرف دیگر معادله یکسان است.

امـا این کافی نیسـت. همچنان‌که گفتیم، باید دیـد: آیا نقطهٔ مشترکی وجود دارد؟

$$P(x)=۲\Rightarrow \tan^۲x+\text{Cot}^۲x=۲$$

$$\Rightarrow \tan x=\pm۱\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

و جواب‌ها در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ عبارت‌اند از:

$$x=\pm\frac{۷\pi}{۴}\ ,\ \pm\frac{۳\pi}{۴}\ ,\ \pm\frac{\pi}{۴}\ ,\ \pm\frac{۵\pi}{۴}$$

حال معادلهٔ $Q(x)=۲$ را حل می‌کنیم:

$$\text{Sin}(x+\frac{\pi}{۱۲})-\sqrt{۳}\,\text{Cos}(x+\frac{\pi}{۱۲})=۲$$

با انتخاب $X=x+\frac{\pi}{۱۲}$ و تقسیم تمام جمله‌ها بر ۲ داریم:

$$\frac{۱}{۲}\text{Sin}X-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{Cos}X=۱$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\frac{\pi}{۳}\text{Sin}X-\text{Sin}\frac{\pi}{۳}\text{Cos}X=۱$$

$$\Rightarrow \text{Sin}(X-\frac{\pi}{۳})=۱\Rightarrow X-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow X=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\xrightarrow{X=x+\frac{\pi}{۱۲}}$$

$$x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

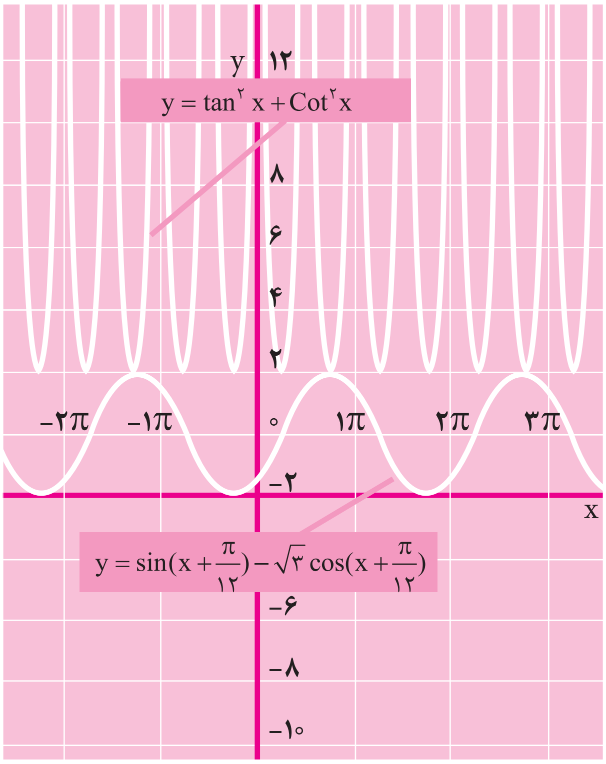
و جواب‌های در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ عبارت‌اند از:

$$x=\frac{۳\pi}{۴}\ ,\ \frac{-۵\pi}{۴}$$

به این ترتیب و با توجه به جواب‌های مشترک $P(x)=Q(x)^۲$ تنها جواب‌های معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ عبارت‌اند از:

$$x=\frac{۳\pi}{۴}\ ,\ x=\frac{-۵\pi}{۴}$$

(به **نمودار ۴** نیز توجه کنید!)



نمودار ۴

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید و جواب‌ها را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

الف)

$$(\text{Sin}۲x+\sqrt{۳}\text{Cos}۲x)^۲=۵+\text{Cos}(\frac{\pi}{۶}-۲x)$$

ب)

$$۲\text{Sin}^۲x-\text{Cos}^۲x-۲=\sqrt{۳}\,\text{Sin}\,x-\text{Cos}\,x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ج)

$$\text{Cos}\,۵x+\text{Cos}\,x=\tan^۲(x+\frac{\pi}{۴})+\text{Cot}^۲(x+\frac{\pi}{۴})$$

قاسم شعبانی، دبیر ریاضی استان مازندران، بابل

شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

مازندران ـ بابلسر

گزارشی از سخنرانی پروفسور امیدعلی شهنی کرم‌زاده

اشاره

سخنرانی پروفسور کرم‌زاده، با عنوان «*تفاوت یادگیری ریاضی با فهم آن*» و تفکرات ایشان در آموزش و فهم ریاضیات، نگارنده را بر آن داشت که برداشتم را از سخنرانی ایشان به رشتهٔ تحریر درآورم. این مقاله از سخنرانی جلسهٔ عمومی کنفرانس برگرفته شده است.

متن سخنرانی پروفسور کرم‌زاده در سه قسمت تدوین شده است. هر قسمت با موضوعی جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد که با حل مسئله‌ای مرتبط با آن همراه است. در قسمت اول، سخنران به شیوه‌ای کاملاً ویژه، با استدلال منطقی و با حل مسئله‌ای از تائو، برایمان ثابت می‌کند که وظیفهٔ یک ریاضی‌دان چیست.

در قسمت دوم، با اشاره به قضیهٔ دو نیم‌ساز و مرور روش‌های گذشته در اثبات آن، اصول حاکم بر آموزش ریاضیات را یادآور می‌شود؛ اینکه محدود کردن دانش‌آموز به راه‌حل مستقیم (با فرض بامعنی بودن آن)، بازدارندهٔ آزادی فکر و اندیشه است. در قسمت سوم، با اثبات قضیهٔ مورلی، توسط ایده‌ای که خود پرورانده است، ما را با «روش ایده‌پردازی» و اثر آن بر فهم ریاضی آشنا می‌کند. به این ترتیب، اثبات ساده و روانی از این قضیه که یکی از زیباترین قضایای هندسه است، شکل می‌گیرد. آنچنان زیبا و لطیف که شایسته است در برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه جای گیرد.

قسمت اول: مسئله‌ای از تائو

❋ همهٔ جواب‌های صحیح غیرصفر از معادلهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{a+b}$ را بیابید. $(a+b\neq 0)$ ❋

تائو روش حلی برای این مسئله ارائه می‌کند که چندان مناسب نیست. حتی در نوشتهٔ خود اشاره می‌کند که روش حل زشتی را به‌کار برده است! روش حل تائو به‌صورت زیر است:

از معادلهٔ داده شده، بعد از مرتب کردن نسبت به متغیر مثلاً a، خواهیم داشت:

$$a^2+(2-n)b.a+b^2=0$$

که معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب a است. جواب‌های آن در صورت وجود این‌گونه‌اند:

$$a=\frac{(n-2)b\pm b\sqrt{n^2-4n}}{2}$$

برای اینکه a عدد صحیح باشد، لازم است که عبارت n^2-4n مربع کامل عدد حسابی باشد. پس می‌نویسیم:

$$(n-2)^2-4=m^2 (m\in w)$$

نتیجه می‌شود:

$$(n-2-m)\times(n-2+m)=4$$

و چون سمت چپ تساوی حاصل‌ضرب دو عدد صحیح است، با در نظر گرفتن حاصل‌ضرب‌های به‌صورت 2×2 یا 1×4 و حل دستگاه دو معادله دو مجهول خطی، جواب $n=4$ حاصل می‌شود.

در این قسمت پروفسور کرم‌زاده اشاره کرد که اگر تائو یک حقیقت ساده را می‌دانست، به سادگی می‌توانست این مسئله را ثابت کند و آن حقیقت این است که:

جمع یک عدد گویا با عکس آن هیچ‌وقت عدد صحیح نمی‌شود، مگر اینکه آن کسر برابر یک باشد.

ایشان این ادعا را به‌صورت زیر اثبات کرد:

فرض کنید $\frac{a}{b}$ عدد گویای تحویل‌ناپذیری باشـــد؛ یعنی: ۱=(a,b). می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^۲+b^۲}{ab}$$

اگر این عبـــارت عدد صحیح باشـــد، $a^۲+b^۲$ بر ab بخش‌پذیر اســـت. پس $a^۲+b^۲$ بر a نیز بخش‌پذیر است؛ یعنی:

$$a \mid a^۲+b^۲ \Rightarrow a \mid b^۲ \Rightarrow a \mid b$$

که با توجه به: ۱=(a,b) **امکان ندارد**، مگر اینکه: ۱=a=b.

در ادامـــه، حل مســـئلهٔ تائو را به روش پروفســـور کرم‌زاده دنبال می‌کنیم:

ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{(a+b)^۲}{ab}=n$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n-۲$$

سمت راست یک عدد صحیح است و سمت چپ مجموع یک عدد گویا با معکوس آن. این در صورتی امکان‌پذیر اســـت که ۱=a=b کـــه نتیجه می‌دهد: n=۴.

جناب دکتر کرم‌زاده از تائـــو به بزرگی یاد کرد و چنین تصوری را برایمان به وجود آورد که اگر ریاضیات را هنر زیبا و خوش‌نقش و نگار ذهن و اندیشـــه تلقی کنیم، تائو در نواختن آهنگ ذهن بی‌نظیر اســـت. این آهنگ بی‌نظیر به علت ندانستن مسئلهٔ بالا یک لحظه از نت خارج شد!

قسمت دوم: قضیهٔ دو نیم‌ساز ـ اثبات مستقیم

پروفســـور کرم‌زاده در قســـمتی از سخنرانی خود به قضیهٔ دو نیم‌ساز اشاره کرد. قبل از آن، ایشان از **کاکستر** ـ یکی از بزرگان هندسه ـ نام برد و اشاره کرد که بزرگان ریاضی همچون **اشتینر**، کاکســـتر و ... اشتباهاتی دارند.

کتاب «مقدمه‌ای از شـــناخت هندسه» از کاکستر را قبلاً دیده بودم. انتظار اشـــتباه از کاکستر غیرمنتظره بود و یا اشـــتینر! اهمیت قضیهٔ دو نیم‌ســـاز برایمان روشن است. داستان از این قرار اســـت که نخستین بار ریاضی‌دانی به نام **لموس** در ســـال ۱۸۴۰ قضیهٔ دو نیم‌ساز را به‌صورت زیر مطرح می‌کند:

«در یک مثلث، دو نیم‌ساز داخلی برابرند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد».

یک طرف قضیه اثبات ســـاده‌ای دارد، ولی از اثبات طرف دوم آن عاجز می‌ماند. پس از اشتینر سوئیسی کمک می‌خواهد. اشتینر هم راه‌حل پیچیده‌ای به روش تناقضی (برهـــان خلف) ارائه می‌کند. از آن به بعد کوشـــش‌های فراوانی توسط ریاضی‌دانان بزرگی صورت گرفت تا راه‌حل ساده (و البته روش مستقیمی) برای آن بیابند.

تا اینجا چندان متوجه نبودیم چه اشتباهی صورت گرفته اســـت، تا اینکه پروفســـور از جمع پرسید: «اصلاً روش اثبات مســـتقیم یعنی چه؟ آیا تعریف مشـــخصی برای روش اثبات مســـتقیم داریم؟ این همه تلاش شده راه‌حل مستقیم برای مسائلی از این دست پیدا شود. آیا امکان‌پذیر است؟»

اســـتاد در ادامه افزودند: اصولاً بیان اینکه برای یک مسئله راه‌حل مستقیم ارائه شود، و چنین محدودیتی در روش حل قرار داده شود، اشتباه است! کاری است عبث و بیهوده! ریاضی مبتنی بر آزادی فکر و اندیشه است. افکار و اندیشه‌های یک جوان یا دانش‌آموز را نباید محدود کرد که حتماً چنین روشی را به‌کار برد؛ آن هم زمانی که هنوز تعریف مشخصی از روش مستقیم ارائه نشده است. به نظر می‌رسد که در گذشته ریاضی‌دانان بزرگ در مبارزه‌طلبی، به رقیب که راه‌حل تناقضی ارائه می‌کرد، می‌گفتند: «اگر می‌توانید راه‌حل مستقیمی برای آن ارائه کنید».

ایشـــان در تعریف روش اثبات مســـتقیم گفت: «اثبات مستقیم اثباتی است که در آن فقط از اصول استفاده شده باشد و هر قضیه‌ای که در اثبات بدان ارجاع شده باشد نیز، با استفاده از اصول نتیجه شـــده باشـــد و روش تناقضی در کار نباشد».

پروفســـور به روش حلی از این قضیه اشـــاره کرد که به نظر می‌رسد ســـاده‌ترین راه‌حل ارائه شده تاکنون باشد. اثباتی بسیار زیبا و دلپذیر که جا دارد در برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه جای گیرد. کافی است ابتدا مسئلهٔ زیر را ثابت کنیم:

■ **مسئله: در هر مثلثی که دو زاویهٔ نابرابر داشته باشد، نیم‌ساز زاویهٔ بزرگ‌تر، از نیم‌ساز زاویهٔ کوچک‌تر، کوچک‌تر است** (اثبات در مجلهٔ برهان ریاضی، شمارهٔ ۸، اردیبهشت ۹۶).

با حل این مسئله اثبات قسمت دوم قضیه دو نیم‌ساز بسیار ساده می‌شود. دو زاویهٔ نابرابر در مثلث، دو نیم‌ساز نابرابـــر را نتیجه می‌دهند. پس دو نیم‌ســـاز برابر در یک مثلث، دو زاویهٔ برابر را نتیجه می‌دهند.

قسمت سوم: دانستن یا ایده‌پردازی؟ قضیه مورلی

در قسمت سوم و پایانی، ایده‌پردازی و اثر آن در فهم ریاضی و راهکارهای اثبات ارائه شد.

پروفسور کرم‌زاده در قسمتی از سخنرانی خود توضیح می‌دهد: «شاید ذهنمان به موضوعی عادت کرده باشد و فقط دانش آن را داشته باشیم ولی این نوع دانش ارزشی ندارد مگر اینکه فهمی از ساختارهای درونی آن یا قدرت ایده‌پردازی در آن موضوع را داشته باشیم.

بهتر است با مثال موضوع را دنبال کنیم:

نیم‌ســـاز داخلی یک زاویه، مکان هندســـی نقاطی از درون زاویه اســـت که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. ولی تا به حال در مورد وضعیت کلی‌تـــری از این خاصیت فکـــری و یا ایده‌ای نداشته‌ایم! آیا تعمیمی وجود دارد؟ نیم‌ساز چه ایدهٔ جدیدی می‌تواند داشته باشد؟»

پروفســـور در انتهای سخنرانی‌اش اشاره‌ای به قضیهٔ مورلی دارد؛ به این صـــورت که: «**در هر مثلث از تقاطع خطوطی که هر زاویهٔ رأس را به ســـه قسمت مساوی تقسیم می‌کند (خطوط کنار هم)، مثلثی حادث می‌شود که متساوی‌الاضلاع است**».

فرانک مورلی ریاضی‌دان انگلیسی، بیان می‌کند: «اگر مثلث دل‌خواهی را در نظر بگیریم و بعد هر سه زاویهٔ آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و خط‌های مقسم این زاویه‌ها را امتداد دهیم تا درون مثلث اول، مثلثی حادث شود، مثلث ایجاد شده متساوی‌الاضلاع است».

اثبات‌های متفاوتی برای این قضیهٔ بسیار زیبا در ۱۲۰ سال اخیر ارائه شده‌اند. تلاش‌های زیادی برای یافتن راه‌حل ساده‌ای در حد متوسطه، ریاضی‌دانان بزرگی را به خود مشغول کرده است. شاید حس زیبای وصف‌ناشدنی قضیهٔ مورلی عامل این

همه علاقه‌مندی باشد. یافتن اثبات‌های گذشته چندان مشکل نیست. کافی است در «گوگل» جست‌وجو کنید. از اثبات **آلن کن** برندهٔ «مدال فیلدز» که با استفاده از عددهای مختلط صورت گرفته است تا اثبات ابتکاری **جان هارتون کانوی**.

جان کانوی، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی، این اواخر اثباتی از قضیهٔ مورلی ارائه کرد و مدعی شد، «ساده‌ترین اثبات موجود از قضیهٔ مورلی است». ریاضی‌دان دیگری به نام **ا. کین**، در مقاله‌ای مدعی شد که اثبات کانوی اثباتی خلق‌الساعه است (یعنی به یکباره از هیچ پدید آمده است) و این موضوع را از نظر زیباشناسی نقصی بر اثبات کانوی دانست. (ظاهراً نظرش این است که هرآنچه ساده و طبیعی به ذهن متبادر شود، زیباست).

پروفسور کرم‌زاده در پاسخی هوشمندانه به ا. کین اشاره می‌کند که اثبات کانوی بسیار زیرکانه است. نه‌تنها خلق‌الساعه نیست، بلکه ریشه در بعضی تعاملات کاملاً طبیعی دارد. سپس می‌کوشد تا اثبات کانوی را ساده کند و به خوبی با قضیه‌ای که خود ساخته است، اثباتی به مراتب ساده‌تر از اثبات کانوی ارائه می‌کند.

روش اثبات پروفسور کرم‌زاده در یک ایدهٔ ابتکاری پیاده‌سازی می‌شود. به نظر می‌رسد ایدهٔ ایشان بدین‌گونه شکل گرفته باشد: وقتی به تثلیث زاویه در قضیهٔ مورلی توجه می‌کنیم، می‌بینیم که هر خط درون زاویه، یک نیم‌ساز از زاویهٔ کوچک‌تر است که درون آن قرار گرفته است. پس ایشان دنبال خاصیت جدیدی از نیم‌ساز زاویه می‌گردد تا بتواند از آن در اثبات قضیهٔ مورلی استفاده کند. پروفسور قضیه‌ای را مطرح می‌کند که یک شرط لازم و کافی برای نقطه‌های روی نیم‌ساز زاویه ارائه می‌کند که می‌توان به نوعی آن را تعمیم‌یافتهٔ خاصیت نیم‌ساز دانست. پروفسور قضیهٔ زیر را مطرح کرد:

قضیهٔ نیم‌ساز پروفسور کرم‌زاده

اگر نقطهٔ A درون زاویهٔ xoy باشد و نقطه‌های B و C به ترتیب نقاطی بر اضلاع ox و oy باشند، هر دو گزاره از سه گزارهٔ زیر سومی را نتیجه می‌دهد:

۱. نقطهٔ A روی نیم‌ساز زاویهٔ xoy قرار دارد.

۲. AB=AC

۳. زاویه‌های OBA و OCA یا مساوی‌اند یا مکمل هم.

این قضیه در حین ابتکاری بودنش، اثبات ساده‌ای دارد. کافی است حالت هم‌نهشتی (ض ز ض) و حالت (ز ض ز) به‌کار رود. حتی برای دانش‌آموز متوسطهٔ اول قابل فهم است.

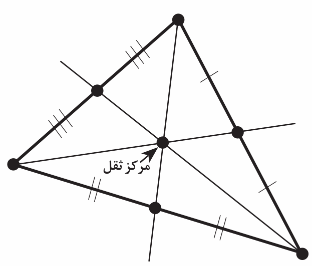
ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور

مرکز مثلث

راه‌های بسیاری برای تعریف مرکز مثلث وجود دارند. برای مثال، این مرکز می‌تواند نقطه‌ای متساوی‌الفاصله از سه رأس مثلث، مرکز بزرگ‌ترین دایره‌ای که می‌توان درون مثلث رسم کرد، یا مرکز دایره‌ای مماس بر هر یک از ضلع‌های مثلث باشد. همهٔ این تعریف‌ها، تعریف‌هایی *طبیعی‌اند*، گرچه ممکن است این مرکزها در یک مکان یکسان بر هم منطبق نباشند.

یکی از مفیدترین مرکزهای مثلث «مرکز ثقل» آن است. اگر از هر رأس مثلث خطی به وسط ضلع مقابل آن رسم کنیم، آن‌گاه مرکز ثقل جایی است که سه خط در آنجا تلاقی می‌کنند. این واقعیت که این سه خط در نقطه‌ای یگانه تلاقی می‌کنند، به‌طور کامل واضح نیست. مرکز ثقل نقطه‌ای را تشکیل می‌دهد که اگر مثلث از ماده‌ای با چگالی یکنواخت بریده شده باشد، مرکز جرم آن محسوب می‌شود. اگر چنین مثلثی را از هر نقطهٔ دیگر آویزان کنیم، مکانی متعادل با مرکز ثقل در زیر نقطهٔ هستهٔ مرکزی، بر خطی قائم و گذرنده از این هسته، خواهد یافت.



پیدا کردن مرکز ثقل یک مثلث

حسین نامی ساعی

رمز گنج برهان

چند روزی از درس ماتریس‌ها، با سرفصل‌های دترمینان ماتریس، معکوس کردن و سرفصل‌های دیگر، می‌گذشت. من و محمد با هم یک بازی ماتریسی اختراع کردیم به اسم «رمز ماتریسی». بازی را با این شرط‌ها تعریف کرده بودیم:

۱. یک کلمه یا یک جمله را به‌عنوان رمز انتخاب کنیم.

۲. تعداد حرف‌های رمز، مربع کامل باشد: ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ و ...، حرف.

۳. تکرار حرف‌ها در کلمه و یا جمله اشکالی ندارد.

۴. هر حرف کلمه یا جملهٔ رمز را با یک عدد طبیعی از ۱ تا ۳۲ و به ترتیب از حرف «الف» تا «ی» متناظر می‌کنیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ	د	ذ	ر	ز	ژ	س	ش
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲
ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ک	گ	ل	م	ن	و	ه	ی

۵. کلمه یا جملهٔ رمز را به‌صورت یک ماتریس مربع ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴، ۵×۵ و ... از سمت راست به چپ، از سطر ۱ شروع و به ترتیب سطر ۲، سطر ۳ و ... می‌نویسیم.

۶. هر حرف از کلمه یا جملهٔ ماتریس رمز را با یک عدد از ۱ تا ۳۲ متناظر می‌کنیم (به ترتیب توضیحات بند ۴).

۷. ماتریس رمز حرفی را به ماتریس عددی تبدیل می‌کنیم و اسم این ماتریس را X می‌گذاریم.

۸. جای سطرها را با ستون‌ها عوض می‌کنیم؛ سطر اول ستون اول، سطر دوم ستون دوم، و سطر سوم ستون سوم می‌شود و به همین ترتیب. اسم ماتریسی را که جای سطر و ستون آن عوض شده است، X^T می‌گذاریم. این ماتریس را «ترانهادهٔ ماتریس X» می‌نامیم.

۹. X^T را وارون می‌کنیم و اسم آن را ماتریس وارون X^T یعنی $(X^T)^{-1}$ می‌گذاریم. ماتریس وارون شده را من و محمد به یکدیگر می‌دهیم.

۱۰. برای به دست آوردن ماتریس رمز لازم است وارون $(X^T)^{-1}$ را به دست آوریم. درواقع ماتریس وارون $(X^T)^{-1}$، X^T است.

۱۱. سـپس در ماتریس X^T، جای سطر و ستون‌هایش را عوض می‌کنیم و ماتریس رمز به‌صورت عددی ظاهر می‌شود.

۱۲. برای هر عدد، حرف متناظرش را به ترتیب از سطر ۱ به سطر ۲ و ... از راست به چپ و از بالا به پایین به دست می‌آوریم و کنار هم قرار می‌دهیم و به این ترتیب کلمه یا جملهٔ رمز پیدا می‌شود.

> **نکته:** در این بازی ما برای وارون کردن ماتریس‌های رمز از ماشین‌حساب محاسبه‌گر وارون استفاده می‌کردیم.

آن روز کلمات متفاوتی را رمز کردیم و با هم ردوبدل کردیم که چند تا از آن‌ها و مراحل رمز کردن و رمزنگاری‌شان را با هم می‌خوانیم:

الف. کلمهٔ رمز «کتاب»

● **ماتریس رمز:**

$$\begin{bmatrix} \text{ت} & \text{ک} \\ \text{ب} & \text{ا} \end{bmatrix}$$

● **تبدیل ماتریس رمز از حرف به عدد:** تناظر کردن حرف‌های کلمهٔ کتاب با عددهای ۱ تا ۳۲؛ متناظر هر حرف با یک عدد.

ک ≡ ۲۵، ت ≡ ۴، ا ≡ ۱ و ب ≡ ۲

$$\begin{bmatrix} \text{ت} & \text{ک} \\ \text{ب} & \text{ا} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس رمز برابر است با:

$$X = \begin{bmatrix} ۴ & ۲۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

● **ترانهاده کردن یا تعویض جای سطرها با ستون‌ها:**

$$X^T = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

● **به دست آوردن وارون X^T، یعنی: $(X^T)^{-1}$ (با ماشین‌حساب ماتریس‌ها)[۲]:**

$$(X^T)^{-1} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲۵ & ۱ \end{bmatrix}^{(-۱)} = \frac{۱}{(۴\times ۱)-(۲\times ۲۵)} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲۵ & ۴ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{-۱}{۴۶} & \frac{۲}{۴۶} \\ \frac{۲۵}{۴۶} & \frac{-۴}{۴۶} \end{bmatrix}$$

این ماتریس را که ماتریس تغییریافته طبق شرط‌های بین من و محمد بود، به محمد دادم و از او خواستم ماتریس و کلمهٔ رمز را پیدا کند. محمد اعمال زیر را روی آن انجام داد:

● ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۴۶} & \frac{۲}{۴۶} \\ \frac{۲۵}{۴۶} & \frac{-۴}{۴۶} \end{bmatrix}$ را با ماشین‌حساب ماتریسی معکوس کرد. درواقع $(X^T)^{-1}$ را معکوس کرد و X^T را به دست آورد:

$$X^T = \left((X^T)^{-1}\right)^{(-۱)} = \begin{bmatrix} \frac{-۱}{۴۶} & \frac{۲}{۴۶} \\ \frac{۲۵}{۴۶} & \frac{-۴}{۴۶} \end{bmatrix}^{(-۱)} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

ترانهادهٔ این ماتریس را حساب کرد (جای سطر و ستون‌ها را عوض کرد) و ماتریس X را به دست آورد:

$$(X^T)^T = \begin{bmatrix} ۴ & ۲۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = X$$

در آخر به جای عددها حرف‌های متناظرشان را (از ۳۲ حرف فارسی به ترتیب از «الف» تا «ی» و از ۱ تا ۳۲) قرار داد:

$$X = \begin{bmatrix} ۴ & ۲۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ت} & \text{ک} \\ \text{ب} & \text{ا} \end{bmatrix}$$

از سطر اول، از راست به چپ تا پایان سطر دوم (از راست به چپ) را پشت سر هم نوشت:

ک ت ا ب

و رمز را پیدا کرد: **کتاب**.

ب. محمد یک رمز ۳×۳ را به عدد تبدیل و جای سطر و ستون‌هایش را عوض کرده بود (ترانهاده). ماتریس ترانهاده را وارون کرد و وارون آن را به من داد و گفت رمز را پیدا کن. وارون ترانهادهٔ آن ماتریس این بود:

$$(X^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-۲۲۱}{۷۰} & \frac{۹۳}{۷۰} & \frac{۱۱۳}{۲۸۰} \\ \frac{۶}{۳۵} & \frac{-۳}{۳۵} & \frac{۱}{۷۰} \\ \frac{۱۹۳}{۷۰} & \frac{-۷۹}{۷۰} & \frac{-۹۰}{۲۸۰} \end{bmatrix}$$

من با ماشین‌حساب وارون این ماتریس را به دست آوردم و وارون وارون $(X^T)^{-1}$ را که می‌شود X^T نوشتم:

$$\left((X^T)^{-1}\right)^{(-1)} = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۴ & ۱۵ \\ ۲۸ & ۱ & ۳۲ \\ ۱۲ & ۲۸ & ۱۲ \end{bmatrix} = X^T$$

و بعد این ماتریس را ترانهاده کردم:

$$(X^T)^T = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۴ & ۱۵ \\ ۲۸ & ۱ & ۳۲ \\ ۱۲ & ۲۸ & ۱۲ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۲۸ & ۱۲ \\ ۴ & ۱ & ۲۸ \\ ۱۵ & ۳۲ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

در ادامه، حرف‌های متناظر با عددهای این ماتریس را پیدا کردم:

$$\begin{bmatrix} ۱۳ & ۲۸ & ۱۲ \\ ۴ & ۱ & ۲۸ \\ ۱۵ & ۳۲ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ز} & \text{م} & \text{ر} \\ \text{ت} & \text{ا} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ی} & \text{ر} \end{bmatrix}$$

از بالا به پایین و از چپ به راست سطرها را پشت سر هم نوشتم:

ر م ز م ا ت ر ی س

کلمهٔ رمز «**رمز ماتریس**» بود.

ج. من یک ماتریس ۴×۴ را شامل ۱۶ حرف و سه کلمه رمز کردم. این ۱۶ حرف را به‌صورت ماتریس ۴×۴ و هر حرف را متناظر با یک عدد (از عدد ۱ تا ۳۲) نوشتم و ماتریس X حاصل شد. ماتریس حاصل را ترانهاده (X^T) و آن را وارون کردم $\left((X^T)^{-1}\right)$. حاصل یک ماتریس ۴×۴ بود که آن را به محمد دادم:

$$(X^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-۴۴۹}{۴۵۵۷} & \frac{-۵۴۱}{۳۰۳۸} & \frac{۵}{۱۳۰۲} & \frac{۲۲۱۵}{۹۱۱۴} \\ \frac{-۹۴۰}{۴۵۵۷} & \frac{-۱۹۰۶}{۱۵۱۹} & \frac{-۲۰۵}{۶۵۱} & \frac{۶۸۳۵}{۴۵۵۷} \\ \frac{-۷۳}{۱۵۱۹} & \frac{-۴۹۹}{۱۵۱۹} & \frac{-۲۴}{۲۱۷} & \frac{۶۵۲}{۱۵۱۹} \\ \frac{۴۰۰}{۱۵۱۹} & \frac{۲۱۱۰}{۱۵۱۹} & \frac{۷۸}{۲۱۷} & \frac{-۲۵۵۳}{۱۵۱۹} \end{bmatrix}$$

محمد با ماشین‌حساب وارون این ماتریس را محاسبه کرد:

$$\left((X^T)^{-1}\right)^{(-1)} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲۹ & ۱۵ & ۳۰ \\ ۱۰ & ۱ & ۳۰ & ۱۰ \\ ۱۶ & ۳۱ & ۴ & ۳۱ \\ ۱۲ & ۱۲ & ۲۸ & ۱۹ \end{bmatrix} = X$$

حاصل را هم ترانهاده کرد:

$$(X^T)^T = \begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ & ۱۶ & ۱۲ \\ ۲۹ & ۱ & ۳۱ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۳۰ & ۴ & ۲۸ \\ ۳۰ & ۱۰ & ۳۱ & ۱۹ \end{bmatrix} = X$$

و حرف‌های متناظر با عددهای این ماتریس را به دست آورد و آن را به‌صورت یک ماتریس حرفی ۴×۴ نوشت:

$$X = \begin{bmatrix} \overset{\text{ب}}{۲} & \overset{\text{د}}{۱۰} & \overset{\text{ش}}{۱۶} & \overset{\text{ر}}{۱۲} \\ \overset{\text{ن}}{۲۹} & \overset{\text{ا}}{۱} & \overset{\text{ه}}{۳۱} & \overset{\text{ر}}{۱۲} \\ \overset{\text{س}}{۱۵} & \overset{\text{و}}{۳۰} & \overset{\text{ت}}{۴} & \overset{\text{م}}{۲۸} \\ \overset{\text{و}}{۳۰} & \overset{\text{د}}{۱۰} & \overset{\text{ه}}{۳۱} & \overset{\text{ط}}{۱۹} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{د} & \text{ش} & \text{ر} \\ \text{ن} & \text{ا} & \text{ه} & \text{ر} \\ \text{س} & \text{و} & \text{ت} & \text{م} \\ \text{و} & \text{د} & \text{ه} & \text{ط} \end{bmatrix}$$

در آخر از سطر اول تا سطر چهارم را از راست به چپ پشت سر هم نوشت:

ر ش د ب ر ه ا ن م ت و س ط ه د و

و رمز را رمزگشایی کرد:

«رشد برهان متوسطه دو»

پی‌نوشت‌ها

۱. شرط آنکه X^T وارون $(X^{T^{-1}})$ باشد آن است که: $(X^T)^{-1}.X^T=I$
حاصل این ضرب ماتریس واحد باشد.

۲. برای سهولت محاسبه‌ها می‌توانیم از نرم‌افزار ماشین‌حساب ماتریس استفاده کنیم. این نرم‌افزار از نشانی «matrixcafe.org» قابل دانلود است.

ریاضی ۱

(مجتبی رفیعی)

۱. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری‌که: $n(U)=۱۲۰$، $n(A)=۷۵$، $n(B)=۵۰$ و $n(A\cap B)=۳۵$، مطلوب است:

الف. $n(A\cup B)$ **ب.** $n(A\cap B')$

پ. $n(A'\cap B)$ **ت.** $n(A'\cap B')$

۲. اگر $A_n=\left[\frac{-۳}{n},\frac{n-۱}{۲}\right)$ باشد، آن‌گاه حاصل $A_۱\cup(A_۲\cap A_۳)$ را به‌دست آورید و تعداد عددهای صحیح در بازهٔ به‌دست آمده را معین کنید.

۳. تفاضل دو جملهٔ متوالی از الگوی غیرخطی زیر برابر ۲۸ است. آن دو جمله را بیابید؟

$a_n=۴n^۲-۱$

۴. ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک‌سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

۵. عدد $\sqrt[۳]{-۳\sqrt{۳}}$ را به‌صورت یک رادیکال بنویسید.

۶. نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقطه‌های (۱،-۴) و (۲،-۳) می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

۷. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف. $۴x^۲-۲x-\frac{۱}{۲}=۰$ **ب.** $۳x^۲-۶x+۳=۱$

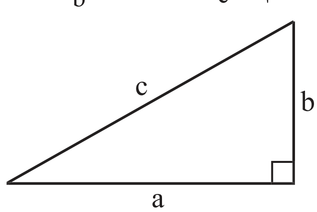
۸. حاصل عبارت $\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^۳}-\sqrt[۴]{(\sqrt{۳}-۲)^۴}-\sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۲)^۵}$ را بیابید؟

۹. $A=\sin\theta+\cos\alpha$ (برای همهٔ مقادیر α و β) همواره عددی در بازهٔ [a,b] است. مطلوب است محاسبهٔ مقدار عددی 3a-5b (b=maxA و a=minA).

۱۰. درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{۱}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\cot\alpha}{\cos\alpha}}=|\cot\alpha|$$

۱۱. در مثلث زیر، اگر $\frac{b}{c}=\frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.



شکل۱

۱۲. خطـی از نقطهٔ $A(2،3)$ می‌گذرد و محور xها را در جهت مثبت با زاویهٔ 45° قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول ۴ روی این خط کدام است؟

۱۳. حدود a را طوری تعیین کنید که عبارت

$y = ax^2 + (a-1)x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}$ همواره منفی باشد.

۱۴. نامعادلهٔ $\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$ را حل کنید.

۱۵. اگر داشته باشیم $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}} = y^{\frac{1}{3}}$، چه رابطه‌ای بین y و x برقرار است؟

۱۶. جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی نصف جملهٔ سوم است. جملهٔ پانزدهم این دنباله چندبرابر قدر نسبت آن است؟

۱۷. یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۱۸. نامعادلهٔ قدرمطلقی $3x<|2x-1|\leq 4$ را حل کنید.

۱۹. ابتدا کسرها را گویا و سپس مجموع آن‌ها را حساب کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$$

۲۰. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم و سپس تاسی می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف. تاس زوج بیاید.

ب. سکه رو بیاید.

ج. تاس فرد و سکه پشت بیاید.

د. تاس فرد یا سکه پشت بیاید.

۲۱. در یک کارخانه پنج نوع کالای A، B، C، D و E تولید می‌شود. می‌خواهیم برای آزمایش، دو نوع از این پنج نوع کالا را به تصادف انتخاب و آزمایش کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف. A انتخاب شود.

ب. A و B انتخاب نشوند.

پ. C انتخاب شود، ولی D انتخاب نشود.

ریاضی ۲

(آناهیتا کمیجانی)

۱. وارون تابع با ضابطهٔ $y=8x^3+12x^2+6x-1$ را به دست آورید.

۲. اگر f^{-1} و g^{-1} وارون تابع‌های f و g باشند و داشته باشیم: $g(x) = \frac{3f(x)+2}{1-f(x)}$، در این صورت $g^{-1}(x)$ را بیابید.

۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی محور xها واقع و بر دو خط $x-y=2$ و $x-y=-1$ مماس باشد.

۴. اگر ماکزی‌مم عبارت $2\text{Cos}\,x + \text{Sin}(x+\frac{\pi}{4})$ برابر k باشد، k^2 را به دست آورید.

۵. در بناهای تاریخی یزد درهایی به شکل  (یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای روی آن) وجود دارد. اگر محیط این در ۲۰ متر باشد، عرض مستطیل را طوری بیابید که نوردهی آن ماکزیمم شود.

۶. حد روبه‌رو را بیابید.

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}-1}{x^2-7x-8}$$

۷. یک لوزی با قطرهای ۲ و ۶ را یک بار حول قطر بزرگ و یک بار حول قطر کوچکش دوران می‌دهیم. نسبت حجم دو جسم ایجاد شده را به دست آورید.

۸. اگر احتمال به دنیا آمدن فرزند پسر با بهره هوشی بالاتر از ۱۹۰ برابر ۰/۰۳ و احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر با همین بهرهٔ هوشی ۰/۰۴ باشد، احتمال اینکه فرزند جدید خانواده‌ای بهرهٔ هوشی پایین‌تر از ۱۹۰ داشته باشد، چقدر است؟

۹. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در دومی ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج می‌کنیم و بدون آنکه به آن نگاه کنیم، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهرهٔ دوم خارج شده آبی است؟

سؤالات حسابان ۱

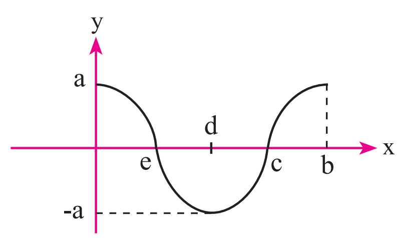
(محمدتقی طاهری تنجانی)

۱. ثابت کنید: $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$

۲. درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)-\cos(\alpha-5\pi)}{\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}=1$$

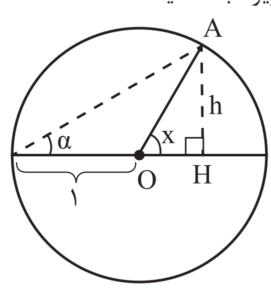
۳. در یک اندازه‌گیری روزانهٔ تقریبی، عمق آب بندرگاهی با فرمول $y=4\cos 30x^\circ$ مدل‌سازی می‌شود که y بر حسب متر و نسبت به دریای آزاد است (مثلاً ۲- یعنی ۲ متر زیر سطح دریای آزاد). x نیز تعداد ساعات گذشته از زمان شروع بالاترین مدّ است.



الف. اگر نمودار y بر حسب x به‌صورت بالا باشد، مقدارهای c، d، a، b و e را به دست آورید.

ب. بالاترین جزر و مد هر روز در ساعت ۳ بعدازظهر اتفاق می‌افتد. اولین جزر و مد در چه زمانی صورت می‌گیرد؟

۴. الف. با استفاده از شکل زیر ثابت کنید:



$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$$

ب. به روش جبری اتحاد فوق را ثابت کنید.

۵. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{9-x^2}$ **ب.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$

۶. حد راست تابع‌های زیر را در نقطه‌های خواسته شده به دست آورید:

الف. $f(x)=\frac{x-5}{[x]+[-x]}$ $(x=3)$ **ب.** $g(x)=\frac{x^2[x]-8}{x[x]-4}$ $(x=2)$

۷. نشان دهید تابع $f(x)=[x^2]+x[-x]$ در x=۱ دارای حدّ است.

۸. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|\frac{2m+1}{1-m}|<1$ یک همسایگی متقارن به مرکز x_0 و شعاع r باشد، x_0 و r را مشخص کنید.

۹. پیوستگی توابع زیر را در نقطهٔ x=۰ بررسی کنید:

الف. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ **ب.** $g(x)=\left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]$

۱۰. تعیین کنید تابع $f(x)=[2x]-[4x]$ در بازهٔ (۰و۲) در چند نقطه ناپیوسته است؟

هندسه ۲

(آناهیتا کمیجانی)

۱. دو دایره هم‌مرکز C(O,R) و C'(O',R')، با فرض R>R' در نظر بگیرید. ثابت کنید مماس‌هایی که از نقاط متفاوت واقع بر دایره C، بر دایرهٔ C' رسم می‌شوند، متساوی‌اند.

۲. از نقطهٔ A، دایرهٔ C(O,R) با زاویهٔ 60° رؤیت می‌شود.

الف. همهٔ نقاطی را بیابید که شرایط نقطهٔ A را داشته باشند.

ب. اگر مجموعهٔ نقاط با شرایط A را یک شکل هندسی در نظر بگیریم، مساحت محدود به دایرهٔ C و این شکل هندسی چقدر است؟

۳. دایره‌ای بر یک nضلعی منتظم به ضلع a محیط است. شعاع دایره و مساحت چندضلعی را برحسب a به دست آورید.

۴. یک هشت‌ضلعی منتظم بر دایره‌ای محیط است. اگر طول ضلع هشت‌ضلعی a باشد، مساحت آن را بیابید.

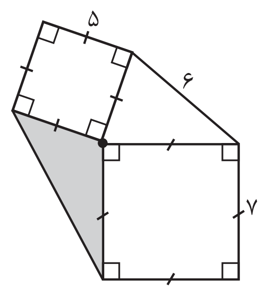
۵. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d واقع‌اند. اگر فاصلهٔ A تا خط d دوبرابر فاصلهٔ نقطهٔ B تا خط d باشد و M نقطه‌ای روی خط d باشد، به طوری که AM+MB کوتاه‌ترین مسیر باشد، و زاویهٔ بین خط قائمی که از A بر d رسم می‌شود و AM برابر 30° باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر چندبرابر فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d است؟

۶. نقطهٔ $A(3,0)$ را حول مبدأ مختصات و در جهت خلاف عقربهٔ ساعت 60° دوران می‌دهیم. اگر 'A دوران‌یافتهٔ A باشد، مختصات 'A را بیابید.

۷. دو دایرهٔ متخارج با شعاع‌های R',R $(R>R')$ از مرکز تجانس با زاویهٔ ۶۰ درجه رؤیت می‌شوند. فاصلهٔ دورترین نقاط دو دایره را به دست آورید.

۸. در مثلث ABC، رابطهٔ $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2}{b^2}$ بین ضلع‌ها و زاویه‌ها برقرار است. ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه است.

۹. در شکل ۱ مساحت و محیط مثلث خاکستری را بیابید.



شکل ۱

۱۰. در مثلث ABC، AB=۸ , AC=۱۲ , BC=۱۵ مفروض است. نیم‌ساز زاویه‌های داخلی و خارجی A را رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل و امتداد ضلع مقابل را در نقطه‌های D و 'D قطع کند. مساحت مثلث 'ADD را به دست آورید.

سؤالات آمار و احتمال

(محمود داورزنی)

۱. در جای خالی عبارت‌های مناسب «لازم»، «کافی» و «لازم و کافی» را قرار دهید.

الف. $a^2-4=0$ شرط .... است برای $a+2=0$ $(a\in R)$.

ب. شرط .... برای آنکه $a^2+b^2=0$ آن است که $a=0$ و $b=0$.

پ. $x\in Q$ شرط .... است برای آنکه $x\in R$.

۲. نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید.

$$\forall a,b\in R,\left[ab=0\Rightarrow(a=0\vee b=0)\right]$$

۳. مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند افراز دو عضوی دارد؟

۴. درستی گزاره‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

۱) $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

۲) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۵. در یک تاس، احتمال رو شدن مضرب‌های ۳، نصف احتمال رو شدن سایر اعداد است. در یک پرتاب این تاس، چقدر احتمال دارد که عددی بزرگ‌تر از ۳ **ظاهر نشود**؟

۶. قرار است پنج سکه که سه تای آن‌ها طلاست، به‌طور تصادفی بین پنج نفر به ترتیب توزیع شود. آیا شانس دریافت سکهٔ طلا برای همه یکسان است؟ چرا؟

۷. در یک شرکت، ۵ درصد مردان و ۲ درصد زنان درامدی بسیار بالا دارند. اگر ۳۰ درصد کارکنان این شرکت زن باشند، با چه احتمالی، فردی که به تصادف انتخاب شده و درامد بالایی دارد، زن است؟

۸. دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند و $P(B-A)=P(A-B)=\frac{1}{4}$ حاصل $P(A\cap B)$ را به دست آورید.

۹. میانگین ۱۰ عدد مساوی ۱۲ شده است. اگر یک عدد را کنار بگذاریم، میانگین ۹ عدد باقی‌مانده مساوی ۱۱ می‌شود. عددی که کنار گذاشته‌ایم، چند است؟

۱۰. یک کارمند اداره، زمان تقریبی رسیدن به محل کار خود را (با واحد دقیقه) در دو دورهٔ ۱۵ روزه که با ماشین شخصی و اتوبوس طی کرده، به‌صورت زیر نوشته است:

ماشین شخصی = ۱۳, ۱۴, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۱, ۲۲, ۲۲, ۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸, ۳۰, ۳۳, ۴۳

اتوبوس = ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۸, ۲۰, ۲۰, ۲۱, ۲۱, ۲۳, ۲۸, ۳۰

با رسم نمودار جعبه‌ای، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف. کدام وسیلهٔ نقلیه او را سریع‌تر به محل کار می‌رساند؟

ب. کدام وسیله برای رسیدن به مقصد مطمئن‌تر است؟

۱۱. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف. فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه براساس نمونه، .... است.

ب. آمارگیری از کل جامعه معمولاً امکان‌پذیر نیست، به همین

دلیل از .... برای تخمین .... استفاده می‌شود.

پ. اعضای جامعه در نمونه‌گیری خوشه‌ای، شانس .... در انتخاب شدن دارند.

ت. در یک جامعهٔ آماری که از نظر صفت مورد نظر ناهمگون است، از روش نمونه‌گیری .... استفاده می‌شود.

۱۲. یک اسپینر با برآمدهای ۱، ۲ و ۳ را سه بار می‌چرخانیم. اگر $\bar{x}$ میانگین برآمدهای رو شده و $P(\bar{x})$ احتمال وقوع آن‌ها باشد، حاصل $P(۲)-P(۳)$ کدام است؟

ریاضی ۳

(آناهیتا کمیجانی)

۱. اگر $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$ باشند، تابع $f(x)$ را به دست آورید.

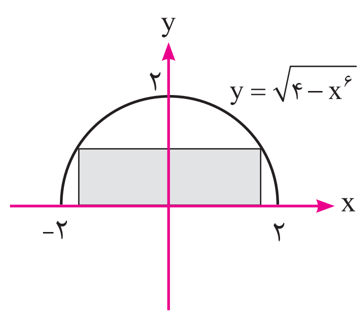
۲. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(۳\sin x-۲)(۴\cos x+۳)=۰$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

۳. حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

الف. $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۵+x}}{۱-\sqrt{۵-x}}$ **ب.** $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{\sqrt[۳]{۱+x}-۱}$

۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ \ ; \ x\geq ۲ \\ x^۲+b \ ; \ x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ را به دست آورید.

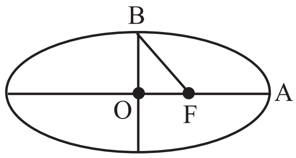
۵. ماکزیمم مساحت مستطیل‌های واقع در نیم‌دایرهٔ شکل ۱ را به دست آورید.



شکل ۱

۶. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع $a=۶$، $b=۸$ و $c=۱۰$ را به ترتیب حول اضلاع a، b و c دوران دهیم، حجم‌های به دست آمده را مشخص کنید.

۷. در شکل ۲، اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۴}{۵}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث OBF چقدر است؟



شکل ۲

۸. مرکز دایره‌ای نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. محل برخورد این دایره با محور عرض‌ها را مشخص کنید.

۹. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ قرمز و در دومی ۳ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

۱۰. در کلاس A، ۲۰ درصد و در کلاس B، ۱۰ درصد دانش‌آموزان به والیبال علاقه دارند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A، $\frac{۴}{۵}$ دانش‌آموزان کلاس B باشند و دانش‌آموزی به تصادف از این دو کلاس انتخاب شود، با چه احتمالی این دانش‌آموز به والیبال علاقه ندارد؟

سؤالات حسابان ۲

(محمدتقی طاهری تنجانی)

۱. اگر تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر و $g(x)=x^۲+۱$ و $(fog)(x)=x^۲+x+۱$ باشند مقدار $F'(۲)$ را به دست آورید.

۲. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به تغییر x در بازهٔ $[۰,۳]$ را با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=\sqrt{۲}$ مقایسه کنید.

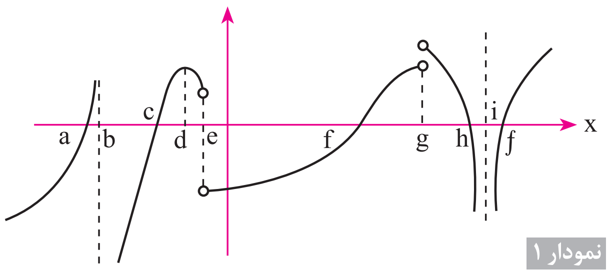
۳. منحنی تابع‌های $f(x)=۲x^۳+bx+۲$ و $g(x)=(a-۱)x^۲-۱$ در نقطه‌ای به طول یک بر هم مماس‌اند. مقادیر a و b را بیابید.

۴. تابع f به ازای هر x و y حقیقی در رابطهٔ $f(x+y)=f(x)+f(y)+۴xy$ صدق می‌کند. اگر $f'(۰)=۲$ باشد، $f'(x)$ را به دست آورید.

۵. ثابت کنید اگر جهت تقعر تابعی در نقطه‌ای مانند $x_{\circ}$ تغییر کند و تابع در همسایگی این نقطه دو بار مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f''(x_{\circ})=\circ$ و $x_{\circ}$ نقطهٔ عطف منحنی آن است.

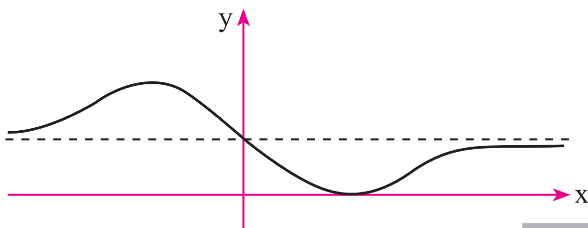
۶. اگر ارتفاع یک موشک پرتاب شده (با واحد متر) از رابطهٔ $f(t)=-t^{۳}+۹۶t^{۲}+۱۹۵t+۵$ (t با واحد ثانیه) مشخص شود، حداکثر ارتفاع موشک از زمان شلیک چقدر است؟

۷. نمودار مشتق تابعی که در R پیوسته است، مانند نمودار ۱ است. نقطه‌های اکسترمم و عطف تابع و نوع آن‌ها را مشخص کنید.



نمودار ۱

۸. نمودار ۲ منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{۲}+ax+b}{۲x^{۲}+x+۱}$ است. مقادیر a و b را بیابید.



نمودار ۲

۹. به کمک آزمون مشتق دوم نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}x-\sin x$ را محاسبه کنید.

۱۰. کمترین فاصلهٔ سهمی $y=x^{۲}+۲x+۳$ از نیم‌ساز ناحیهٔ اول و سوم چقدر است؟

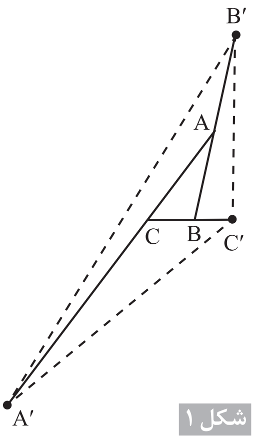
هندسه (۱) دهم

(حسین کریمی)

۱. به کمک خط‌کش و پرگار پاره‌خط‌هایی به طول‌های زیر رسم کنید:

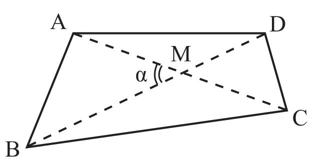
الف. $\sqrt{۳}$ سانتی‌متر **ب.** $\sqrt[۴]{۳}$ سانتی‌متر

۲. ابتدا ثابت کنید در مثلث ABC که در آن: AB=c و AC=b، داریم: $S_{\Delta}=\dfrac{۱}{۲}b.c.\sin\hat{A}$. سپس با استفاده از آن و اینکه: $\sin(۱۸\circ^{\circ}-\alpha)=\sin\alpha$ ، ثابت کنید که اگر در مثلث ABC، AB را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B' $(AB'=AB)$، AC را به اندازهٔ دوبرابر خودش تا نقطهٔ A' $(CA'=۲CA)$ و BC را به اندازهٔ نصف خودش تا نقطهٔ C' $(BC'=\dfrac{۱}{۲}BC)$ امتداد دهیم، مساحت مثلث A'B'C' هشت‌برابر مساحت مثلث ABC خواهد بود (شکل ۱).

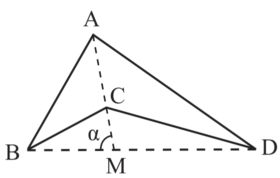


شکل ۱

۳. ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی دلخواه مانند ABCD با فرض آنکه اندازهٔ زاویه بین دو قطر AC و BD برابر α باشد، از رابطهٔ $S=\dfrac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\alpha$ قابل محاسبه است (شکل ۲ ـ الف و ب).



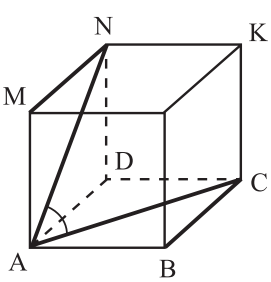
شکل۲ـ الف



شکل۲ـ ب

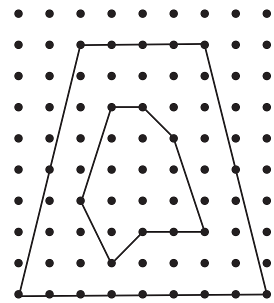
۴. n نفر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند و ۲۸ قطعه طناب داریم که هر دو نفر، با در دست گرفتن یک سر طنابی به هم مرتبط شده‌اند. n را به دست آورید.

۵. با استفاده از شکل ۳ (مکعب به ضلع a) ثابت کنید نیم‌ساز زاویه A در صفحهٔ ABCD، یعنی AC، با نیم‌ساز زاویهٔ A در صفحهٔ ADNM، یعنی AN، زاویهٔ $۶\circ^{\circ}$ می‌سازد (شکل ۳).



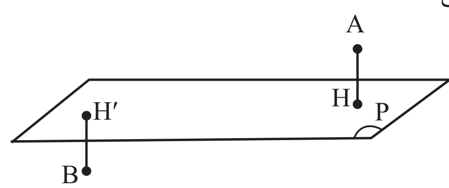
شکل ۳

۶. مســاحت محصور بین چهارضلعی و هفت‌ضلعی در شکل ۴ را به دست آورید.



شکل ۴

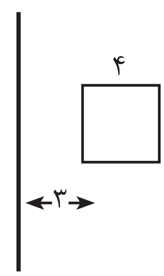
۷. دو نقطهٔ A و B در دو طرف صفحهٔ P و به یک فاصله از آن واقع‌اند. ثابت کنید پاره‌خط AB صفحهٔ P را در نقطهٔ وسـط پاره‌خط 'HH قطع می‌کند.



شکل ۵

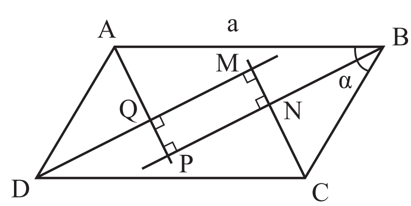
۸. دو صفحهٔ متمایز P و Q بر صفحهٔ R عمودند. در مورد وضعیت دو صفحهٔ P و Q نسبت به هم بحث کنید.

۹. در شکل ۶ مربع به ضلع ۴ سانتی‌متر را حول خط d دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



شکل ۶

۱۰. از تقاطع نیم‌سازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b و زاویهٔ حادهٔ α مستطیلی پدید آمده است. اندازهٔ اضلاع مستطیل را برحسب b، a و α به دست آورید.



شکل ۷

هندسه (۳) دوازدهم

(حسین کریمی)

۱. با فرض $A(1,2,3)$ ، $B(2,1,5)$ و $C(4,-3,-11)$ طول میانهٔ AM از مثلث ABC را به دست آورید.

۲. در متوازی‌الاضــلاع ABCD، I را محــل تلاقی دو قطر در نظر می‌گیریم. با فرض آنکه O نقطه‌ای دلخواه باشد، ثابت کنید:

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=4\vec{OI}$$

۳. برای هر شش عدد دلخواه a، b، c، x، y و z نشان دهید:

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

۴. بــا فرض $2x-3y+6z=14$، حداقل مقدار $x^2+y^2+z^2$ را به دســت آورید.

۵. m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $D(1,1,m)$ با سه نقطهٔ $B(2,1,0)$ ، $A(0,1,-4)$ و $C=(2,-1,-6)$ در یک صفحه واقع باشد.

۶. در ســهمی $y^2=4x+2y-21$ رأس را M و کانــون را N فــرض می‌کنیم. در ســهمی $y^2=-4x+2y-13$ نیز رأس را 'M و کانون را 'N در نظــر می‌گیریم. اندازهٔ قطر کوچک بیضی‌ای را که دو رأس کانونی آن N و 'N و کانون‌های آن M و 'M باشــند، به دســت آورید.

۷. ثابت کنید اگر خط d دایره‌ای به شعاع R را به زاویهٔ α قطع کند (زاویهٔ بین d و مماس بر دایــره در نقطهٔ تلاقی)، آن‌گاه، طول وتر پدید آمده برابر است با: $2R\sin\alpha$.

۸. مکان هندســی نقاطی از صفحه را پیدا کنید که دو مماس رسم شده از آن نقاط بر دایرهٔ C(O,R)، با هم زاویهٔ $60°$ بسازند.

۹. با فرض $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ثابت کنید: $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$

۱۰. بــا فرض $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ x & y\end{bmatrix}$ ، x و y را چنان بیابید که داشته باشیم: $A\times B=B\times A$.

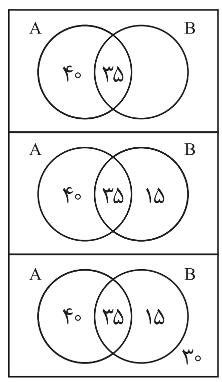
پاسخ مسائل

پاسخ ریاضی ۱

۱. با توجه به نمودار ون داریم:

از آنجا که داریم: $n(A)=۷۵$ و $n(A\cap B)=۳۵$، نتیجه می‌گیریم که A ۴۰ عضو دارد که در $(A\cap B)$ نیستند.

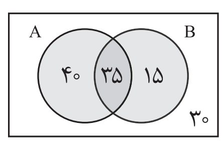
با استدلال مشابه برای B داریم:



از $۴۰+۳۵+۱۵=۹۰$ و $n(U)=۱۲۰$ نتیجه می‌گیریم ۳۰ عضو مجموعهٔ مرجع در هیچ‌یک از مجموعه‌های A و B یا اشتراکشان نیستند.

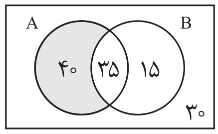
با توجه به نمودار ون:

الف. $A\cup B$



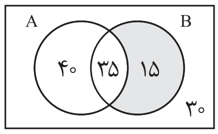
الف. $n(A\cup B)=۹۰$

ب. $A\cap B'$



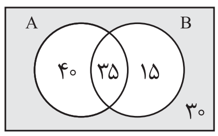
ب. $n(A\cap B')=۴۰$

پ. $A'\cap B$



پ. $n(A'\cap B)=۱۵$

ت. $A'\cap B'$



ت. $n(A'\cap B')=۳۰$

۲. با توجه به معلومات سؤال، ابتدا $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را تشکیل می‌دهیم:

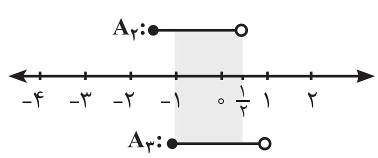
$$A_۱=\left[\frac{-۳}{۱},\frac{۱-۱}{۲}\right)=[-۳,۰)$$

$$A_۲=\left[\frac{-۳}{۲},\frac{۲-۱}{۲}\right)=\left[\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

$$A_۳=\left[\frac{-۳}{۳},\frac{۳-۱}{۲}\right)=[-۱,۱)$$

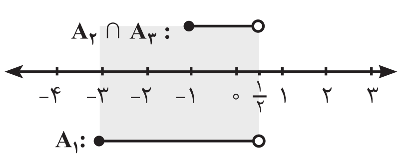
حال $A_۲\cap A_۳$ را با استفاده از محور به‌دست می‌آوریم:

$$A_۲\cap A_۳=\left[-۱,\frac{۱}{۲}\right)$$



و اجتماع آن را با $A_۱$ رسم می‌کنیم:

$$A_۱\cup(A_۲\cap A_۳)=\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right).$$



عددهای صحیح موجود در این بازه عبارت‌اند از: ۰، ۱-، ۲-، ۳-

⇐ در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

۳. اگر a_n و $a_{n+۱}$ را در دو جملهٔ متوالی درنظر بگیریم، داریم:

$$a_{n+۱}-a_n=۲۸$$

$$\left(۴(n+۱)^۲-۱\right)-\left(۴n^۲-۱\right)=۲۸$$

$$\left(۴(n^۲+۲n+۱)-۱\right)-\left(۴n^۲-۱\right)=۲۸$$

$$۴n^۲+۸n+۴-۱-۴n^۲+۱=۲۸$$

جملات سوم و چهارم

$$۸n+۴=۲۸\Rightarrow ۸n=۲۴\Rightarrow n=۳,\ n+۱=۴$$

۴.

> جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی
>
> $a_n=a_۱+(n-۱)d$
>
> قدر نسبت: d، جملهٔ اول دنباله: $a_۱$

$$a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ a_۴,\ a_۵$$

$$\frac{a_۳+a_۴+a_۵}{۳}=a_۱+a_۲$$

$$\frac{a_۱+۲d+a_۱+۳d+a_۱+۴d}{۳}=a_۱+a_۱+d$$

$$\frac{۳a_۱+۹d}{۳}=۲a_۱+d$$

$$a_۱+۳d=۲a_۱+d$$

$$۲d=a_۱$$

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵=a_۱+a_۱+d+a_۱+۲d+a_۱+۳d+a_۱+۴d=۱۰۰$$

$$۵a_۱+۱۰d=۱۰۰\xrightarrow{a_۱=۲d}۵\times۲d+۱۰d=۱۰۰$$

$$۱۰d+۱۰d=۱۰۰$$

$$۲۰d=۱۰۰\Rightarrow d=۵$$

$$a_۱=۲d=۱۰$$

نحوهٔ توزیع نان بین ۵ نفر ← ۳۰، ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۰

۵.

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\\ a\ge ۰,m,n\in N\end{array}}$$

ابتدا منفی را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{-۳\sqrt{۳}}=-\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}=-\sqrt[۳]{۳\times۳^{\frac{۱}{۳}}}=-\sqrt[۳]{۳^{\frac{۴}{۳}}}$$

$$=-(۳^{\frac{۴}{۳}})^{\frac{۱}{۳}}=-(۳^{\frac{۴}{۹}})=-\sqrt[۹]{۳^۴}=-\sqrt[۹]{۸۱}$$

۶. $y=ax^۲+bx+c$

$(۰,-۳)$: $-۳=c$

$(۱,-۴)$: $a+b-۳=-۴\Rightarrow a+b=-۱\Rightarrow ۲a+۲b=-۲$

$(۲, -۳): ۴a + ۲b - ۳ = -۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۰$

$$\begin{cases} ۲a + ۲b = -۲ \\ ۴a + ۲b = ۰ \end{cases}$$

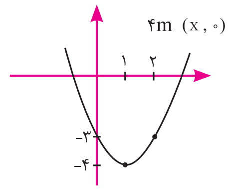
$-۲a = -۲ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$

$۲a + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲ + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲b = -۴ \Rightarrow \boxed{b = -۲}$

$y = x^{۲} - ۲x - ۳$

دامنه $= R$

برد $= [-۴, +\infty)$



۷.

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲} \\ (a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲} \end{array}}$$

با دیدن عبارت‌های $۴x^{۲}$ و $۳x^{۲}$ که در آن‌ها $x^{۲}$ مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف. روش اول: در عبارت $a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$، a را برابر با $۲x$ می‌گیریم که در آن صورت $a^{۲} = ۴x^{۲}$ خواهد بود:

$$(۲x)^{۲} - ۲(۲x)(\frac{۱}{۲}) - \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\xrightarrow[+\frac{۳}{۴}]{\text{طرفین}} (۲x^{۲}) - ۲(۲x)(\frac{۱}{۲}) - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$(۲x)^{۲} - ۲(۲x)(\frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$۴x^{۲} - ۲x + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$(۲x - \frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow (۲x - \frac{۱}{۲}) = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۴} \\ ۲x - \frac{۱}{۲} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جمله‌ها را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۴x^{۲} - ۲x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\frac{۴x^{۲}}{۴} - \frac{۲x}{۴} - \frac{\frac{۱}{۲}}{۴} = \frac{۰}{۴} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸} = ۰$$

از اینجا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^{۲} - ۲(\frac{۱}{۴})x - \frac{۱}{۸} = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین } +\frac{۳}{۱۶}}$$

$$x^{۲} - ۲(\frac{۱}{۴})x - \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$x^{۲} - ۲(\frac{۱}{۴})x + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$(x - \frac{۱}{۴})^{۲} = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow x - \frac{۱}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۴} \\ x = \frac{-\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

> **دقت:** در هر دو روش جواب به‌دست‌آمده باید یکسان باشد، وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم. به‌علاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهایی به‌دست‌آمده در معادلهٔ اصلی، از صحت جواب به‌دست‌آمده مطمئن شویم.

ب. اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم، به $۳x^{۲} = (\sqrt{۳}x)^{۲}$ برمی‌خوریم و حل معادله مشکل می‌شود. بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جمله‌ها به ۳، معادله را به شکل استاندارد درمی‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$۳x^{۲} - ۶x + ۳ = ۱ \xrightarrow{\div ۳} x^{۲} - ۲x + ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (x-۱)^{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\pm\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱ = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۳} \\ x = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} + ۱ = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

۸.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{زوج } n \quad \sqrt[n]{a^{n}} = |a| \\ \text{فرد } n \quad \sqrt[n]{a^{n}} = a \end{array}}$$

$$\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^{۳}} - \sqrt[۴]{(\sqrt{۳}-۲)^{۴}} - \sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۲)^{۵}} =$$

$$(\sqrt{۳}-۲) - |\sqrt{۳}-۲| - (\sqrt{۳}-۲)$$

$$= -|\sqrt{۳}-۲|_{\sqrt{۳}-۲<۰} - (-(\sqrt{۳}-۲)) = \sqrt{۳} - ۲$$

۹.

$-۱ \le \sin\theta \le ۱$

$\underline{-۱ \le \cos\alpha \le ۱}$

$-۲ \le \sin\theta + \cos\alpha \le ۲$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۳a - ۵b = -۶ - ۱۰ = -۱۶$$

۱۰.

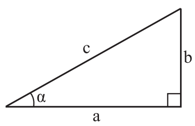
$$\sqrt{\frac{\left(\frac{۱}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\cot\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{۱-\sin^{۲}\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\cos^{۲}\alpha\cos\alpha}{\sin^{۲}\alpha}}{\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}}$$

$$= \sqrt{\cot^{۲}\alpha} = |\cot\alpha|$$

۱۱. با درنظر گرفتن زاویهٔ بین ضلع a و c به‌عنوان زاویهٔ α داریم:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{۱}{۳} \qquad ۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$



$$۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$\Rightarrow ۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\frac{۱}{۹}}$$

$$\cot^{۲}\alpha + ۱ = ۹ \rightarrow \cot^{۲}\alpha = ۸ \rightarrow \cot\alpha = \sqrt{۸} = \frac{a}{b}$$

۱۲. برای نوشتن معادلهٔ خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است:

$A = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ و شیب $= \tan ۴۵ = ۱$

$y = mx + b$

$$\xrightarrow{m=۱} y = x + b \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}} ۳ = ۲ + b \Rightarrow b = ۱ \rightarrow y = x + ۱$$

$$y \overset{x=۴}{=\!=\!=} ۴ + ۱ = ۵ \qquad (۴, ۵)$$

۱۳. می‌دانیم عبارت $y = ax^{۲} + bx + c$ زمانی همواره منفی خواهد بود که: $\begin{cases} a < ۰ \\ \Delta < ۰ \end{cases}$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a < ۰ \, (I) \\ (a-۱)^{۲} - ۴(a)(\frac{-۱}{۲} + \frac{۱}{۲a}) = a^{۲} - ۲a + ۱ + \frac{۴a}{۲} - \frac{۴a}{۲a} < ۰ \end{cases}$$

$$a^{۲} - ۲a + ۱ + ۲a - ۲ < ۰ \Rightarrow a^{۲} - ۱ < ۰$$

$$a^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

a		-۱		۱	
$a^{۲} - ۱$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\Rightarrow \boxed{-۱ < a < ۱} \, (II)$

$\boxed{I, II} \Rightarrow \boxed{-۱ < a < ۰}$

۱۴. دو نامعادله حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{x-۱}{x} > \overbrace{\frac{x+۱}{x+۲}}_{II} > \frac{x+۳}{x+۴}}^{I}$$

$$(I): \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{x^2+5x+4-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5x+4-x^2-5x-6}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \xrightarrow[\text{عبارت مثبت}]{\text{صورت منفی}} \text{مخرج منفی}$$

x		-۴		-۲	
x+۲	−		−	∘	+
x+۴	−	∘	+		+
(x+۲)(x+۴)	+	∘	−	∘	+

$\Rightarrow -4<x<-2$

$$(II): \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+2)-x(x+1)}{x(x+2)} > 0$$

$$\frac{x^2+x-2-(x^2+x)}{x(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2-x^2-x}{x(x+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} > 0 \xrightarrow[\text{عبارت مثبت}]{\text{صورت منفی}} \text{مخرج منفی}$$

x		-۲		∘	
x	−		−	∘	+
(x+۲)	−	∘	+		+
x(x+۲)	+	∘	−	∘	+

$-2<x<0$

$I \cap II = (-4,-2) \cap (-2,0) = \varnothing$ نامعادله جواب ندارد.

۱۵.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad m,n \in N, a \geq 0}$$

ابتدا عبارت دارای x را ساده می‌کنیم.

از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x \times x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}}} = (x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$x^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}} (x^{\frac{1}{6}})^3 = (y^{\frac{1}{3}})^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow \sqrt{x} = y$$

۱۶.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی
$a_n = a_1 + (n-1)d$
d: قدر نسبت , a_1: جملهٔ اول دنباله

$$a_1 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_1+2d}{2} \rightarrow 2a_1 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 2d + 14d = 16d$$

جملهٔ پانزدهم ۱۶ برابر قدر نسبت دنباله است.

۱۷. از ترکیب هر ۲ رنگ، هر ۳ رنگ و هر ۴ رنگ، رنگ‌های جدیدی به وجود می‌آیند. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4!}{2!\,2!} + \frac{4!}{3!\,1!} + \frac{4!}{4!\,0!} = 6+4+1 = 11$$

۱۱ رنگ از ترکیب ۴ رنگ اصلی به‌وجود می‌آید.

مجموع رنگ‌ها:

۱۵رنگ = ۴ رنگ اصلی + ۱۱ رنگ ترکیبی

دقت کنید زمانی که نقاشی کشیده می‌شود، خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با هم ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری به‌وجود می‌آیند. پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیشتر از ۱۵ رنگ است.

۱۸. ابتدا نامعادله را به نامعادله‌های ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$4 \leq |2x-1| < 3x \rightarrow \begin{cases} |2x-1| < 3x \rightarrow \begin{cases} 2x-1 < 3x \\ 2x-1 > -3x \end{cases} \\ \text{و} \\ |2x-1| \geq 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 4 \\ 2x-1 \leq -4 \end{cases} \end{cases}$$

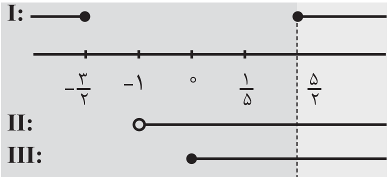
$$(I)\begin{cases} 2x-1 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{5}{2}} \\ \text{یا} \\ 2x-1 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{-3}{2}} \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} 2x-1 < 3x \Rightarrow \boxed{x > -1} \\ \text{و} \\ 2x-1 > -3x \Rightarrow 5x > 1 \Rightarrow \boxed{x > \frac{1}{5}} \end{cases}$$

با توجه به نکته زیر: $3x \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 0}$

$(III)\ |x|<a(a\geq 0)$

$I \cap II \cap III : x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$



۱۹.

$$(I)\ \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2}$$

$$(II)\ \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$$

$$\xrightarrow{I,II} \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2} + \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)+3(x-2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)+3(x-2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x^2-4}$$

۲۰. فضای نمونه‌ای عبارت است از:

S={(۱،ر)، (۱،پ)، (۲،ر)، (۲،پ)، (۳،ر)، (۳،پ)، (۴،ر)، (۴،پ)، (۵،ر)، (۵،پ)، (۶،ر)، (۶،پ)}

الف. اگر پیشامد زوج آمدن تاس را A بنامیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

طبعاً پیشامد فرد آمدن تاس، A' و برابر است با:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ب. اگر پیشامد رو آمدن سکه را B بنامیم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

طبعاً پیشامد پشت آمدن سکه، B' و برابر است با:

$$P(B') = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$$

ج. پیشامد تاس فرد و سکه پشت بیاید، یعنی: (A'∩B')

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{3}{12}$$

د. پیشامد تاس فرد یا سکه پشت بیاید، یعنی: $(A'\cup B')$

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

۲۱.

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$$

الف. $P(A)=\dfrac{\overset{\text{انتخاب A}}{\binom{1}{1}}\times\overset{\text{انتخاب دومین کالا}}{\binom{4}{1}}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{4}{10}$

ب. $P(B)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}$

پ. $P(C)=\dfrac{\overset{\text{انتخاب C}}{\binom{1}{1}}\times\overset{\text{انتخاب دومین کالا}}{\binom{3}{1}}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}$

پاسخ ریاضی ۲

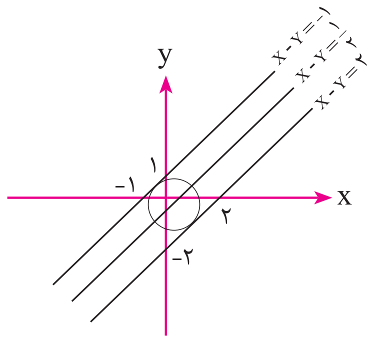
۱.
$$x=8y^3+12y^2+6y-1\xrightarrow{+2}x+2=8y^3+12y^2+6y+1$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد}}x+2=(2y+1)^3$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}}2y+1=\sqrt[3]{x+2}\xrightarrow{-1}2y=\sqrt[3]{x+2}-1$$
$$\xrightarrow{\div 2}y=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+2}-1)$$

۲. چون f و g وارون‌پذیرند، در نتیجه:

$$g(x)=\frac{3f(x)+2}{1-f(x)}\Rightarrow x=\frac{3f(y)+2}{1-f(y)}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x-xf(y)=3f(y)+2$$
$$\to 3f(y)+xf(y)=x-2\to f(y)(x+3)=x-2\to f(y)=\frac{x-2}{x+3}$$
$$\xrightarrow{\text{وارون } g(x)}g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{x-2}{x+3})$$

۳. چون دو خط x-y=۲ و x-y=-۱ با هم موازی هستند، در نتیجه:

$$x-y=\frac{2+(-1)}{2}\to x-y=\frac{1}{2}$$



پس مرکز دایره روی محور xها قرار دارد: $o(\frac{1}{2},0)$ و فاصلهٔ بین این دو خط مماس بر دایره، همان قطر دایره است.

در نتیجه:

$$\text{فاصله } d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}\to d=\frac{|2-(-1)|}{\sqrt{1+1}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\ \text{قطر}\ \Rightarrow R=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ \text{شعاع دایره}$$

معادلهٔ دایره:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\to(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{8}$$

۴. می‌دانیم:

$$\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)$$

در نتیجه:

$$2\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{4})=2\mathrm{Cos}\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)$$
$$=2\mathrm{Cos}\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Sin}\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Cos}\,x$$
$$=(2+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{Cos}\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Sin}\,x$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

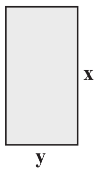
$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\,\mathrm{Sin}\,x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

در نتیجه:

$$k=\sqrt{a^2+b^2}\to k=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(2+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}+2\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$$

در نتیجه:

$$\boxed{k^2=5+2\sqrt{2}}$$



۵. نوردهی در وقتی ماکزیمم می‌شود که مساحتش ماکزیمم باشد.

مساحت کل در برابر است با مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره روی آن. در نتیجه:

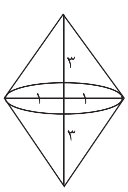
$$s=xy+\frac{\pi(\frac{y}{2})^2}{2}\Rightarrow s=xy+\frac{\pi y^2}{8}$$
$$\text{محیط}=20\Rightarrow 2x+y+2\pi(\frac{y}{2})=20\to 2x+y+\pi y=20$$
$$\to 2x=20+y(-1-\pi)\xrightarrow{\text{طول مستطیل}}$$
$$\text{مساحت } x=\frac{20+y(-1-\pi)}{2}$$
$$s=(\frac{20-y(\pi+1)}{2})(y)+\frac{\pi y^2}{8}$$
$$\to s=10y-\frac{y^2(\pi+1)}{2}+\frac{\pi y^2}{8}$$
$$s'_y=0\to 10-y(\pi+1)+\frac{\pi y}{4}=0$$
$$\to y(\pi+1)-\frac{\pi y}{4}=10$$
$$\to y((\pi+1)-\frac{\pi}{4})=10$$
$$y=\frac{10}{\frac{3\pi}{4}+1}=\frac{40}{3\pi+4}$$

۶. ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج $\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}-1$ ضرب می‌کنیم. در نتیجه:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}-1}{x^2-7x-8}\times\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1}$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-1-1}{(x^2-7x-8)(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1)}$$

سپس از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)(x+1)(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{(x-8)(x+1)(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)}{(x-8)(x+1)(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{1}{216}$$



۷. اگر لوزی را حول قطر ۶ دوران دهیم، دو مخروط با شعاع قاعدهٔ ۱ و ارتفاع ۳ حاصل می‌شود:

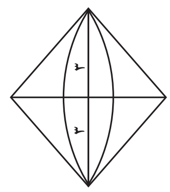
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \to V_1 = \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 3 \times \pi$$ مخروط

$$\xrightarrow{\text{دو مخروط}} V_1' = 2\pi$$

اگر لوزی را حول قطر ۲ دوران دهیم، دو مخروط با شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۱ حاصل می‌شود:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \to V_2 = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 1$$ مخروط

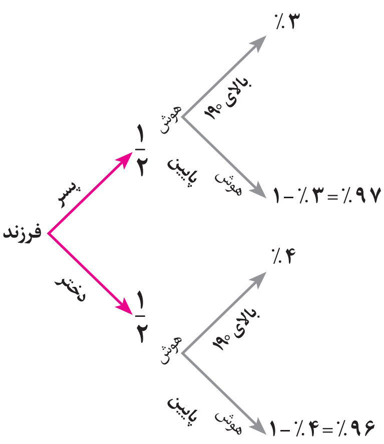
$$\xrightarrow{\text{دو مخروط}} V_2' = 6\pi$$



در نتیجه نسبت حجم دو جسم ایجاد شده برابر است با:

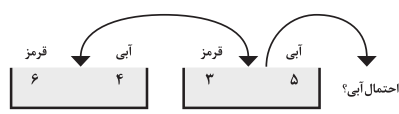
$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{2\cancel{\pi}}{6\cancel{\pi}} = \frac{1}{3}$$

۸. طبق نمودار درختی:



$$\text{احتمال این‌که } P(\text{بهرهٔ هوشی} > 190) = \underbrace{\frac{1}{2}\times 0/97}_{\text{پسر}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times 0/96}_{\text{دختر}}$$

$$= 0/485 + 0/48 = 0/965$$



۹. احتمال مهره‌ای که از ظرف اول بیرون می‌آوریم، قرمز باشد، — و آن که آبی باشد، $\frac{4}{10}$ است.

در نتیجه:

$\frac{6}{10}$ قرمز $\times \frac{5}{9}$ آبی

$$\xrightarrow{\text{جمع دو حالت}} \frac{6}{10}\times\frac{5}{9} + \frac{4}{10}\times\frac{6}{9} = \frac{54}{90}$$

$\frac{4}{10}$ آبی $\times \frac{6}{9}$

پاسخ سؤالات حسابان ۱

۱.

$$\mathrm{Sin}18^\circ\, \mathrm{Cos}36^\circ = \frac{\mathrm{Sin}18\,\mathrm{Cos}18\,\mathrm{Cos}36}{\mathrm{Cos}18}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}36)\mathrm{Cos}36}{\mathrm{Cos}18}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\mathrm{Sin}72}{\mathrm{Cos}18}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\mathrm{Sin}72}{\mathrm{Sin}(90-18)} = \frac{1}{4}$$

۲.

$$\mathrm{Cos}(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \mathrm{Cos}(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$$

$$= -\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha-5\pi) = \mathrm{Cos}(5\pi-\alpha)$$

$$= \mathrm{Cos}(4\pi+\pi+\alpha)$$

$$= \mathrm{Cos}(\pi+\alpha) = -\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\mathrm{Sin}(\frac{9\pi}{2}+\alpha) = \mathrm{Sin}(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$$

$$= \mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\mathrm{Sin}(\pi+\alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$$

۳. الف. $\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha - (-\mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha} = 1$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4\mathrm{Cos}\,0 = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 4\mathrm{Cos}30x \Rightarrow \mathrm{Cos}30x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 3 \\ 30x = 270^\circ \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = 9 \quad , \quad e = 3$$

$$y = -4 \Rightarrow -4 = 4\mathrm{Cos}30x^\circ \Rightarrow \mathrm{Cos}30x^\circ = -1$$

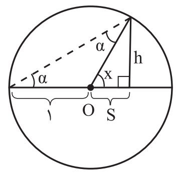
$$\Rightarrow 30x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 6 \Rightarrow d = 6$$

$$y = 4 \Rightarrow 4 = 4\mathrm{Cos}30x^\circ \Rightarrow \mathrm{Cos}30x^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 30x^\circ = 360 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow b = 12$$

ب. با توجه به شکل، اولین جر و مد (مینی‌مم) بعد از ساعت ۳ در ساعت ۹ اتفاق می‌افتد.

۴. الف. α زاویهٔ محاطی و x زاویهٔ مرکزی است. پس: x=2α.



$$\tan\alpha = \tan\frac{x}{2} = \frac{h}{1+s} = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{1+\mathrm{Cos}\,x}$$

$$(h = \mathrm{Sin}\,x \quad , \quad s = \mathrm{Cos}\,x)$$

ب.

$$\frac{\mathrm{Sin}\,x}{1+\mathrm{Cos}\,x} = \frac{2\mathrm{Sin}\frac{x}{2}\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}{2\mathrm{Cos}^2\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{x}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

۵. الف.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{9-x^2} \tfrac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{9-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(3x+7)-16}{(3-x)(3+x)(\sqrt{3x+7}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{(3+x)(\sqrt{3x+7}+4)} = \frac{-1}{16}$$

ب.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}$$

[از آنجا که حد مخرج صفر و حد صورت مخالف صفر است، این حد وجود ندارد. با توجه به حدود نامتناهی در پایهٔ دوازدهم می‌توان حاصل حد را ∞ در نظر گرفت.]

۶. الف.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-5}{[x]+[-x]} = \frac{-2}{3+(-4)} = 2$$

ب.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x[x]-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{2x-4}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = 4$$

۷. حد راست و حد چپ تابع f را در x=1 محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+}[x^2]+x[-x] = 1-2 = -1 \\ \lim_{x\to 1^-}[x^2]+x[-x] = 0-1 = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حد چپ = حد راست}} \lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

۸.

$$\left|\frac{2m+1}{1-m}\right| < 1 \longrightarrow |2m+1| < |1-m|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4m^2+4m+1 < 1+m^2-2m$$

$$\Rightarrow 3m^2+6m < 0 \Rightarrow 3m(m+2) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < 0 \Rightarrow \quad \text{مجموعهٔ جواب} = (-2,0)$$

$$\text{مرکز همسایگی} = x_0 = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$\text{شعاع همسایگی} = r = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

۹. الف.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ تابع در x=0 برابر نیستند. پس تابع در این نقطه حد ندارد و لذا پیوسته نیست.

ب. به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$0 \le \frac{x^2}{1+x^2} < 1 \quad \text{پس:} \quad f(x) = \left[\frac{x^2}{1+x^2}\right] = 0$$

تابع ثابت f(x) همواره پیوسته است.

۱۰.

$$0 < 2x < 4 \Rightarrow 2x = 1,2,3 \Rightarrow x = \frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$$

$$0 < 4x < 8 \Rightarrow 4x = 1,2,3,\dots,7$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\dots,\frac{7}{4}$$

در نقطه‌های $\frac{7}{4}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ تابع [2x] پیوسته و تابع [4x] ناپیوسته است. بنابراین مجموعشان هم ناپیوسته است.

در نقطه‌های $\frac{1}{2}$ ، ۱، $\frac{3}{2}$ و ۲ هر دو تابع ناپیوسته‌اند و مجموعشان باید بررسی شود.

$$\begin{cases} \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} f(x) = 1-2 = -1 \,, \quad \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x) = 0-1 = -1 \\ f(\frac{1}{2}) = 1-2 = -1 \Rightarrow \end{cases}$$

تابع f در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است.

$$\begin{cases} \lim_{x\to1^+} f(x) = 2-4 = -2 \,, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = 1-3 = -2 \\ f(1) = 2-4 = -2 \Rightarrow \end{cases}$$

تابع f در x=1 پیوسته است.

$$\begin{cases} \lim_{x\to(\frac{3}{2})^+} f(x) = 3-6 = -3, \quad \lim_{x\to(\frac{3}{2})^-} f(x) = 2-5 = -3 \\ f(\frac{3}{2}) = -3 \Rightarrow \end{cases}$$

f در $x = \frac{3}{2}$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = 4-8 = -4, \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = 3-7 = -4$$

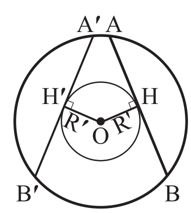
$$f(2) = 4-8 = -4 \Rightarrow$$

تابع f در x=2 پیوسته است.

بنابراین تابع در ۴ نقطه ناپیوسته است.

حل مسائل هندسه ۲

۱. فرض می‌کنیم از نقطه‌های A و A' دو مماس بر دایرهٔ C'(O',R') رسم شده باشد (شکل ۲). نشان می‌دهیم طول AB و A'B' برابر است.



شکل ۲

از مرکز دایره بر مماس‌ها عمود رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه بنابر رابطهٔ فیثاغورس داریم:

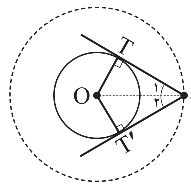
$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\Delta}{H}O : OH^2 + AH^2 = OA^2 \to R'^2 + AH^2 = R^2 \to AH^2 = R^2 - R'^2 \\ A'\overset{\Delta}{H'}O : OH'^2 + A'H'^2 = OA'^2 \to R'^2 + A'H'^2 = R^2 \to A'H'^2 = R^2 - R'^2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AH^2 = A'H'^2 \Rightarrow AH = A'H' \to 2AH = 2A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$

۲. الف. از نقطه A دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم (شکل ۳). مثلث‌های OTA و OT'A هم‌نهشت هستند.

$$\hat{A} = 60 \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 30^\circ$$

$$\sin A_1 = \frac{OT}{OA} \to OA = \frac{R}{\sin 30} = 2R$$



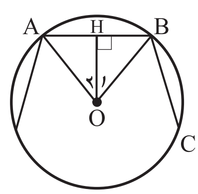
شکل ۳

نقطهٔ A به فاصلهٔ 2R از نقطهٔ O قرار دارد. بنابراین مجموعهٔ نقطه‌های A، یک دایره به مرکز O و شعاع 2R است.

ب. دایرهٔ بزرگ‌تر به شعاع 2R و دایرهٔ کوچک‌تر به شعاع R است. مساحت محدود بین آن‌ها برابر است با:

$$S=\pi(2R)^2-\pi(R)^2=3\pi R^2$$

۳. ضلعی منتظم از n مثلث متساوی‌الساقین OAB تشکیل شده است (شکل ۴). اندازهٔ زاویه $\hat{O} = \frac{360}{n}$ است. از O بر AB عمود می‌کنیم.



شکل ۴

در مثلث متساوی‌الساقین OAB، OH نیمساز و عمود منصف است.

$$AH = HB = \frac{a}{2}, O_1 = O_2 = \frac{\pi}{n}$$

در مثلث OHB داریم:

$$\sin\hat{O}_1 = \frac{HB}{OB} \to \sin\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

بنابراین:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

و مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin\hat{O}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} R \times R \times \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \quad (1)$$

با جای‌گذاری $R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ در رابطهٔ ۱ داریم:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

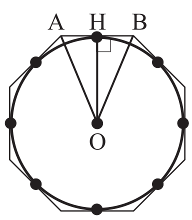
$$= \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} \times 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{a^2}{4} \times \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a^2}{4}\tan\frac{\pi}{n}$$

مساحت ضلعی منتظم از n تا مثلث OAB تشکیل شده، بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$S = n\, S_{OAB} = n\left(\frac{a^2}{4}\tan\frac{\pi}{n}\right) = \frac{na^2}{4}\tan\frac{\pi}{n}$$

۴. رأس‌های هشت‌ضلعی را به مرکز دایره وصل می‌کنیم (شکل ۵). هشت مثلث متساوی‌الساقین هم‌نهشت داریم:



شکل ۵

$$\hat{O} = \frac{360}{8} = 45$$

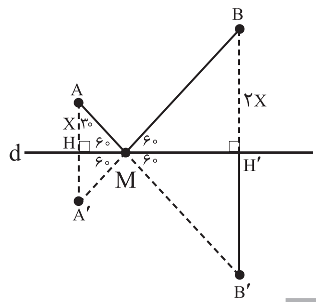
$$\sin O_1 = \frac{AH}{OA} \to \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \to R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{8}}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin O = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right)\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right)\sin 45$$

$$= \frac{a^2}{8\sin\frac{\pi}{8}}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{8}$$

هشت‌ضلعی $S = 8\, S_{OAB} = 8\left(\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{8}\right) = 2a^2\cot\frac{\pi}{8}$

۵. بازتاب A را نسبت به خط d به دست می‌آوریم و 'A می‌نامیم (شکل ۶). 'A را به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. AM+MB کوتاه‌ترین مسیر است. مثلث‌های AHM و A'HM هم‌نهشت هستند.



شکل ۶

$M_1=M_2=۶۰$ و زاویه‌های M_3 و M_4 متقابل به رأس‌اند:

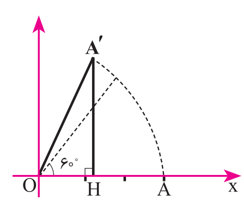
$M_3=M_4=۶۰$

$$\overset{\Delta}{MAH}: Cos۳۰ = \frac{AH}{AM} \to AM = \frac{AH}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}AH$$

$$\overset{\Delta}{BMH'}: Sin۶۰ = \frac{BH'}{BM} \to BM = \frac{۲AH}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}AH$$

$$\frac{AM+BM}{AH} = \frac{\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}AH}{AH} = ۲\sqrt{۳}$$

۶. نقطهٔ $A=(۳,۰)$ و $OA=۳$ مفروض است (شکل ۷). دوران‌یافتهٔ A نسبت به نقطهٔ O و زاویهٔ ۶۰°، نقطهٔ 'A است. طبق دوران: $OA=OA'=۳$



شکل ۷

$$Cos۶۰ = \frac{OH}{OA'} \to \frac{۱}{۲} = \frac{OH}{۳} \to OH = \frac{۳}{۲} = x_{A'}$$

$$Sin۶۰ = \frac{A'H}{OA'} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{A'H}{۳} \to A'H = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = y_{A'}$$

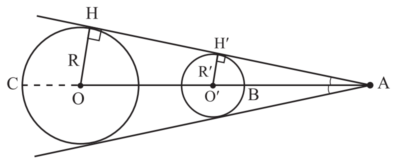
$$A' = \left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

۷. الف. فرض می‌کنیم تجانس مستقیم باشد. مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ متخارج، نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌های خارجی آن‌هاست (شکل ۸):

$$\widehat{A} = ۶۰ \to \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = ۳۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AH'O'}: Sin A_1 = \frac{O'H'}{AO'} \to Sin۳۰ = \frac{R'}{AO'} \to AO' = ۲R'$$

$$\overset{\Delta}{AH'O}: Sin A_1 = \frac{OH}{AO} \to Sin۳۰ = \frac{R}{AO} \to AO = ۲R$$

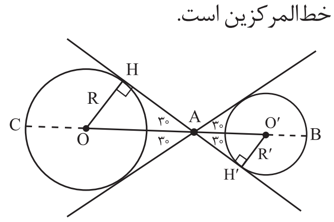


شکل ۸

فاصلهٔ دورترین نقطه‌های دو دایره فاصلهٔ B تا C است که برابر است با:

$$BC = BO' + OO' + OC = R' + (OA + O'A) + R'$$
$$= R' + (۲R - ۲R') + R$$
$$BC = ۳R - R'$$

ب. فرض می‌کنیم دو دایره مجانس معکوس یکدیگر باشند (شکل ۹). مرکز تجانس معکوس دو دایره نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین است.



شکل ۹

$$\overset{\Delta}{OAH}: Sin A_1 = \frac{OH}{OA} \to OA = ۲OH = ۲R$$

$$\overset{\Delta}{O'AH'} = Sin۳۰ = \frac{O'H'}{O'A} \to O'A = ۲R'$$

$$BC = BO' + OO' + OC = R' + ۲R' + ۲R + R = ۳(R+R')$$

۸. بنابر قضیهٔ سینوس در مثلث داریم:

$$\frac{a}{Sin A} = \frac{b}{Sin B} = \frac{c}{Sin C} = ۲R$$

بنابراین: $b=۲R\, SinB$, $a=۲RSinA$.

با جای‌گذاری در رابطهٔ $\frac{tan A}{tan B} = \frac{a^2}{b^2}$ داریم:

$$\frac{۴R^2 Sin^2A}{۴R^2 Sin^2B} = \frac{\frac{Sin A}{Cos A}}{\frac{Sin B}{Cos B}} \Rightarrow \frac{Sin^2A}{Sin^2B} = \frac{Sin A\, Cos B}{Sin B\, Cos A} \Rightarrow$$

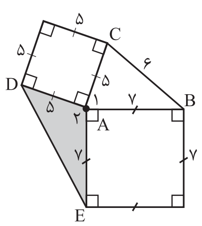
$$\frac{Sin A}{Sin B} = \frac{Cos B}{Cos A}$$

$$Sin A\, Cos A = SinBCosB \Rightarrow \frac{Sin۲A}{۲} = \frac{Sin۲B}{۲} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = B \\ A + B = ۹۰ \end{cases}$$

مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه است.

۹.



شکل ۱۰

$$\overset{\Delta}{ABC}: ۶^2 = ۵^2 + ۷^2 - ۲(۵)(۷)CosA_1$$

$$Cos A_1 = \frac{۷۴ - ۳۶}{۷۰} = \frac{۳۸}{۷۰} = \frac{۱۹}{۳۵}$$

$$A_1 + ۹۰ + ۹۰ + A_2 = ۳۶۰ \to A_1 + A_2 = ۱۸۰$$

$$\to A_2 = ۱۸۰ - A_1 \to Cos A_2 = Cos(۱۸۰ - A_1)$$

$$= -Cos A_1 = -\frac{۱۹}{۳۵}$$

$$\overset{\Delta}{ADE}: AD^2 + AE^2 - ۲AD \times AE\, Cos A_2 = DE^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = ۴۹ + ۲۵ - ۲(۵)(۷) \times \frac{-۱۹}{۳۵} = ۱۱۲$$

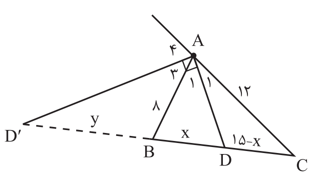
$$DE = \sqrt{۱۱۲} \;,\; \text{محیط}\, ADE = \sqrt{۱۱۲} + ۱۲$$

$$S_{ADE} = \frac{۱}{۲} AD \times AE \times SinA_2$$

$$= \frac{۱}{۲} ۵ \times ۷ \times (Sin(۱۸۰ - A_1)) = \frac{۳۵}{۲} SinA_1$$

$$= \frac{۳۵}{۲} \times \sqrt{۱ - \left(\frac{-۱۹}{۳۵}\right)^2} = \frac{۳۵}{۲} \times \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳۵} = ۶\sqrt{۳}$$

۱۰. بنابر قضیهٔ نیمساز در مثلث ABC داریم (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\to\frac{۸}{۱۲}=\frac{x}{۱۵-x}$$
$$x=۶\ ,\ ۱۵-x=۹$$
$$\frac{AB}{AC}=\frac{D'B}{D'C}\Rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{y}{y+۱۵}\Rightarrow y=۳۰$$

$$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times DC$$
$$=۸\times۱۲-۶\times۹=۴۲\to AD=\sqrt{۴۲}$$
$$AD'^{۲}=D'B\times D'C-AB\times AC$$
$$=۳۰\times۴۵-۸\times۱۲=۱۲۵۴\Rightarrow AD'=\sqrt{۱۲۵۴}$$
$$S_{ADD'}=AD\times AD'\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۴۲})\sqrt{۱۲۵۴}=۳\sqrt{۱۴۶۳}$$

پاسخ سؤالات آمار و احتمال

۱. **الف.** لازم

ب. لازم و کافی

پ. کافی

۲.

$$\exists a,b\in R\ ,\ [ab=۰\wedge(a\neq۰\wedge b\neq۰)]$$

۳.

$$\text{افرازهای ممکن}\begin{cases}\{-\}\{-----\}\to\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}=۵\\ \{--\}\{---\}\to\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=۱۰\end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{تعداد افرازها}=۵+۱۰=۱۵$$

۴.

$$۱)\ \ A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow(A\cup B)'=B'$$
$$\Leftrightarrow A'\cap B'=B'\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$
$$۲)\ \ (A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$
$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$$
$$=A\cap(B-C)$$

۵.

$$P(۳)=P(۶)=\frac{۱}{۲}P(۱)=\frac{۱}{۲}P(۲)=\frac{۱}{۲}P(۴)=\frac{۱}{۲}P(۵)$$
$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$
$$\xrightarrow{P(۳)=x}۲x+۲x+x+۲x+۲x+x=۱$$
$$\Rightarrow۱۰x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}\ ,\ \ P(\{۱,۲,۳\})$$
$$=P(۱)+P(۲)+P(۳)$$
$$=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۶. احتمال دریافت سکهٔ طلا برای نفر اول $\frac{۳}{۵}$ است. این احتمال در نفر دوم، به دریافت کردن یا نکردن سکهٔ طلا در نفر اول بستگی دارد.

پس احتمال دریافت سکهٔ طلا در نفر دوم عبارت است از: $\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$. برای نفر سوم نیز با توجه به دریافت‌های افراد اول و دوم، احتمال دریافت سکهٔ طلا عبارت است از:

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

به همین ترتیب، احتمال دریافت سکهٔ طلا برای همهٔ افراد یکسان است.

۷. اگر B، W و M از راست به چپ، به ترتیب پیشامدهای زن بودن، درامد بالا داشتن و مرد بودن باشند، داریم:

$$P(W\mid B)=\frac{P(B\mid W)P(W)}{P(W)P(B\mid W)+P(M)P(B\mid M)}$$
$$=\frac{۰/۰۲\times۰/۳}{۰/۳\times۰/۰۲+۰/۷\times۰/۰۵}\approx۰/۱۴۶$$

۸.

$$\begin{cases}P(A-B)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}\\ P(B-A)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(B)-P(B\cap A)=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$
$$\xrightarrow{P(A\cap B)=x}\begin{cases}P(A)=x+\frac{۱}{۴}\\ P(B)=x+\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\text{مستقل}\ B,A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\Rightarrow x=(x+\frac{۱}{۴})(x+\frac{۱}{۴})\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

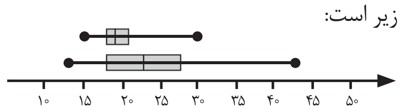
۹.

$$\frac{x_۱+\ldots+x_۹}{۹}=۱۱\Rightarrow x_۱+\ldots+x_۹=۹۹$$
$$\frac{x_۱+\ldots+x_۹+A}{۱۰}=۱۲\Rightarrow\frac{۹۹+A}{۱۰}=۱۲\Rightarrow A=۲۱$$

۱۰.

$$\begin{cases}\text{ماشین شخصی}=\min=۱۳,Q_۱=۱۸,Q_۲=۲۲,Q_۳=۲۸,\max=۴۳\\ \text{اتوبوس}=\min=۱۶,Q_۱=۱۷,Q_۲=۱۸,Q_۳=۲۱,\max=۳۰\end{cases}$$

بنابراین، نمودار جعبه‌ای این زمان‌ها به‌صورت زیر است:



در استفاده از اتوبوس، میانه برابر ۱۸ است. بنابراین، در ۵۰ درصد اوقات، زمان مسافرت با این وسیله کمتر از ۱۸ دقیقه است، در حالی‌که این عدد برای ماشین شخصی ۲۲ دقیقه است. پس اتوبوس وسیلهٔ نقلیهٔ سریع‌تری از ماشین شخصی است.

از سوی دیگر، دامنهٔ میان‌چارکی برای ماشین و اتوبوس عبارت است از:

$$\begin{cases}\text{ماشین شخصی}:IQR=Q_۳-Q_۱=۲۸-۱۸=۱۰\\ \text{اتوبوس}:IQR=Q_۳-Q_۱=۲۱-۱۷=۴\end{cases}$$

بنابراین، زمان رسیدن اتوبوس به مقصد، در ۵۰ درصد مواقع، فاصلهٔ زمانی کمتر از ۴ دقیقه دارد، در حالی‌که این زمان برای ماشین شخصی ۱۰ دقیقه است. پس اتوبوس وسیلهٔ نقلیهٔ مطمئن‌تری از ماشین شخصی است.

۱۱. **الف.** آمار استنباطی **ب.** آماره ـ پارامتر
پ. برابر **ت.** خوشه‌ای

۱۲. اگر A و B به ترتیب پیشامدهای این باشند که میانگین برآمدها ۲ و ۳ باشند، پس:

$$A=\begin{Bmatrix}\{۱,۲,۳\},\{۲,۱,۳\},\{۱,۳,۲\},\{۲,۳,۱\},\\ \{۳,۱,۲\},\{۳,۲,۱\},\{۲,۲,۲\}\end{Bmatrix}$$
$$B=\{\{۳,۳,۳\}\}$$

اسپینر در هر بار چرخش سه برامد دارد. پس در سه بار چرخش داریم: $n(s)=۳^۳=۲۷$
بنابراین:

$$P(۲)-P(۳)=P(A)-P(B)=\frac{۷}{۲۷}-\frac{۱}{۲۷}=\frac{۶}{۲۷}$$

پاسخ سؤالات ریاضی ۳ تجربی

۱.

$$g(x)=۲x-۳,f(g(x))=f(۲x-۳)=۴(x^۲-۴x+۵)$$

با فرض $۲x-۳=t$ داریم:

$$۲x-۳=t\to۲x=t+۳\to x=\frac{t+۳}{۲}$$

با جای‌گذاری این عبارت می‌توان نوشت:

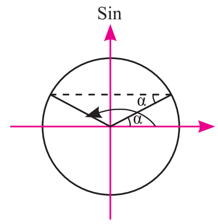
$$f(t)=۴((\frac{t+۳}{۲})^۲-۴(\frac{t+۳}{۲})+۵)$$
$$=۴(\frac{t^۲+۶t+۹}{۴}-۲t-۶+۵)=t^۲-۲t+۵$$
$$\xrightarrow{\text{تبدیل } t \text{ به } x}f(x)=x^۲-۲x+۵$$

۲.

$$(۳\sin x-۲)(۴\cos x+۳)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۳\sin x-۲=۰\to\sin x=\frac{۲}{۳}\\ ۴\cos+۳=۰\to\cos x=-\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی برای معادلهٔ $\sin x=\frac{۲}{۳}$ دو جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ داریم:

$\sin(\pi-\alpha)=\frac{۲}{۳}$ و $\sin\alpha=\frac{۲}{۳}$.



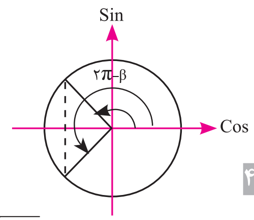
شکل ۳

برای معادلهٔ $\cos x=-\frac{۳}{۴}$ نیز در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب داریم:

$\cos(۲\pi-\beta)=-\frac{۳}{۴}$ و $\cos\beta=-\frac{۳}{۴}$

که مجموع جواب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\alpha+(\pi-\alpha)+\beta+(۲\pi-\beta)=۳\pi$$



شکل ۴

۳. الف.

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳-\sqrt{۵+x}}{۱-\sqrt{۵-x}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\to\lim_{x\to۴}\frac{۳-\sqrt{۵+x}}{۱-\sqrt{۵-x}}\times\frac{۳+\sqrt{۵+x}}{۳+\sqrt{۵+x}}\times\frac{۱+\sqrt{۵-x}}{۱+\sqrt{۵-x}}$$

$$=\lim_{x\to۴}\frac{(۹-(۵+x))(۱+\sqrt{۵-x})}{(۱-(۵-x))(۳+\sqrt{۵+x})}$$

$$=\lim_{x\to۴}\frac{(۴-x)(۱+\sqrt{۵-x})}{(x-۴)(۳+\sqrt{۵+x})}$$

$$=\lim_{x\to۴}-\frac{۱+\sqrt{۵-x}}{۳+\sqrt{۵+x}}=-\frac{۱+۱}{۳+۳}=-\frac{۱}{۳}$$

ب.

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{\sqrt[۳]{۱+x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

ک.م.م فرجهٔ رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم و آن را t می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$x+۱=t^۶\to\sqrt[۶]{x+۱}=t\to x=t^۶-۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{\sqrt[۳]{۱+x}-۱}=\lim_{t\to۱}\frac{\sqrt{t^۶}-۱}{\sqrt[۳]{t^۶}-۱}=\lim_{t\to۱}\frac{|t^۳|-۱}{t^۲-۱}$$

چون $t>۰$ است، پس $|t^۳|=t^۳$ و داریم:

$$\lim_{t\to۱}\frac{t^۳-۱}{t^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{t\to۱}\frac{(t-۱)(t^۲+t+۱)}{(t-۱)(t+۱)}$$

$$=\lim_{t\to۱}\frac{t^۲+t+۱}{t+۱}=\frac{۳}{۲}$$

۴. تابع f در x=۲ پیوسته است، بنابراین:

$$\lim_{t\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=f(۲)$$

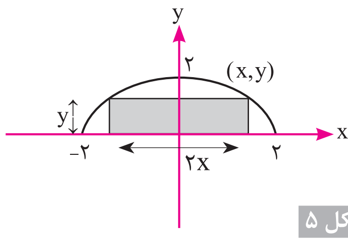
$$\to۴+b=۲a+۱=۲a+۱\to۲a-b=۳$$

تابع f در x=۲ مشتق‌پذیر است، بنابراین:

$$f'(x)=\begin{cases}a & : \quad x\ge۲\\ ۲x & : \quad x<۲\end{cases}\to f'_-(۲)=f'_+(۲)$$

$$\to۴=a\to a=۴\to b=۵\to a+b=۹$$

۵. اگر اسم یکی از رأس‌های مستطیل را که روی نیم‌دایره واقع است، A بنامیم و مختصات آن (x,y) باشد، طول مستطیل ۲x و عرض آن y است. حال مساحت مستطیل را حساب می‌کنیم:



شکل ۵

$$S=۲x\sqrt{۴-x^۲}\to S'=۲\times\sqrt{۴-x^۲}+\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}\right)\times۲x$$

$$\to S'=\frac{۲(۴-x^۲)-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{۸-۴x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰$$

$$\to۴x^۲=۸\to x=\pm\sqrt{۲}$$

A در ربع اول واقع شده؛ پس طول آن مثبت و برابر $\sqrt{۲}$ است. با توجه به جدول تغییرات، مساحت مستطیل در $x=\sqrt{۲}$ دارای ماکزیمم است و مقدار آن برابر است با:

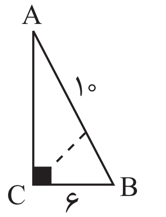
$$S=۲\times\sqrt{۴-x^۲}=۲(\sqrt{۲})\sqrt{۴-(۲)^۲}=۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۴$$

x	۰		$\sqrt{۲}$		۲
s'		+	۰	−	
s		↗	max	↘	

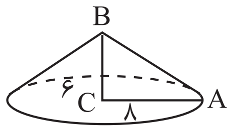
شکل ۶

۶. حول a=BC=۶: از دوران مثلث ABC حول ضلع a، مخروطی با شعاع ۸ و ارتفاع ۶ واحد به دست می‌آید:

$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\pi\times۸^۲\times۶=۱۲۸\pi$$



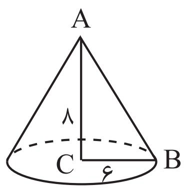
شکل ۷



شکل ۸

حول b=AC=۸: از دوران مثلث ABC حول ضلع b، مخروطی با شعاع ۶ و ارتفاع ۸ واحد به دست می‌آید:

$$V_۲=\frac{۱}{۳}\pi\times۶^۲\times۸=۹۶\pi$$



شکل ۹

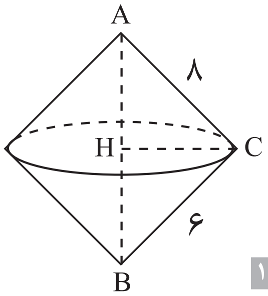
حول c=AB=۱۰: اگر مثلث را حول AB دوران دهیم، دو مخروط به وجود می‌آید. شعاع هر دو مخروط CH و ارتفاع یکی BH و دیگری AH است. CH ارتفاع وارد بر وتر را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AC\times BC=\frac{۱}{۲}CH\times AB$$

$$\to۸\times۶=CH\times۱۰\to CH=۴/۸$$

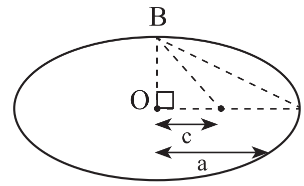
$$V_۳=V_{\text{مخروط اول}}+V_{\text{مخروط دوم}}=\frac{۱}{۳}\pi\times(CH)^۲\times AH+\frac{۱}{۳}\pi\times(CH)۲\times BH=\frac{۱}{۳}\pi\times(CH)^۲\times\underbrace{(AH+BH)}_{AB}$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\pi\times(۴/۸)^۲\times۱۰=۷۶/۸\pi$$



شکل ۱۰

۷. با توجه به شکل ۱۱، در هر دو مثلث ABF، OBF ارتفاع مثلث برابر BO است. بنابراین نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی AF به OF است.



شکل ۱۱

$$OF = C\ ,\ AF = a - c \quad , \quad e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \to c = \frac{4}{5}a$$

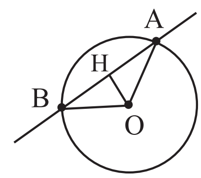
از طرف دیگر:

$$\frac{AF}{OF} = \frac{a-c}{a} = \frac{a - \frac{4}{5}a}{a} = \frac{1}{4}$$

$$\to \frac{S_{ABF}}{S_{OBF}} = \frac{AF}{OF} = \frac{1}{4}$$

۸. طول وتر، یعنی AB برابر ۶ است، پس: AH=۳. حال فاصلهٔ نقطهٔ O(۲,-۳) را از خط ۳x-۴y+۲=۰ پیدا می‌کنیم.

$$OH = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{5} = 4$$



شکل ۱۲

$$\to OA^2 = r^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\to r^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \to r = 5$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

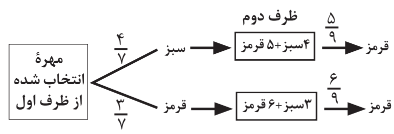
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

در محل برخورد این دایره با محور عرض‌ها مقدار x برابر صفر است، بنابراین:

$$(0-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \to (y+3)^2 = 21 \to y = -3 \pm \sqrt{21}$$

۹. رنگ مهرهٔ خارج شده در آخرین مرحله از ظرف دوم، وابسته به رنگ مهره‌ای است که از ظرف اول به ظرف دوم منتقل شده است.

نمودار درختی این مسئله را با توجه به این مطلب رسم می‌کنیم:



$$\to P(\text{قرمز بودن}) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{6}{9} = \frac{38}{63}$$

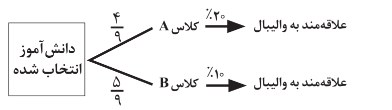
۱۰.

$$n(A) = \frac{4}{5}n(B) \to n(A) + n(B) = n(S)$$

$$\to \frac{4}{5}n(B) + n(B) = n(S) \to \frac{9}{5}n(B) = n(S)$$

$$\to n(B) = \frac{5}{9}n(S) \to P(S) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{9}\ ,\ P(A) = \frac{4}{9}$$

حال نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



$$\to P(\text{علاقه‌مند به والیبال}) = \frac{4}{9} \times 0/2 + \frac{5}{9} \times 0/1 = \frac{13}{90}$$

پس احتمال علاقه نداشتن به والیبال $\frac{77}{90}$ است.

پاسخ سؤالات حسابان ۲

۱.

$$(fog)(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow g'(x).f'(G(x)) = 2x + 1$$

$$\overset{x=1}{\Rightarrow} g'(1).f'(g(1)) = 3 \frac{g(1) = 2}{g'(1)} 2f'(2) = 3 \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}$$

۲.

$$\text{آهنگ متوسط}: \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{9 + 16} - \sqrt{16}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \Rightarrow \quad \text{آهنگ لحظه‌ای}: f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{18}} = \frac{1}{3}$$

آهنگ متوسط در بازهٔ [۰,۳] با آهنگ لحظه‌ای در $x = \sqrt{2}$ برابر است.

۳.

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \Rightarrow 4 + b = a - 2 \Rightarrow a - b = 6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a = 2, b = -4 \\ f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2(a-1) = 6 + b \Rightarrow 2a - b = 8 \end{cases}$$

۴.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) + 4x \circ \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) + 4x\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} + 4x \quad (*)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 4xy$$

$$\overset{x=y=0}{\Rightarrow} \quad f(0) = f(0) + f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(0) = 2 \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = 2 \overset{*}{\Rightarrow} f'(x) = 2 + 4x$$

۵. چون تابع f(x) در همسایگی نقطهٔ x_0 دو بار مشتق‌پذیر است و تقعر تابع در این نقطه تغییر می‌کند، پس یا سمت چپ x_0، $f''(x_0)>0$ و سمت راست آن $f''(x_0)<0$ و یا برعکس، سمت چپ $f''(x_0)<0$ و سمت راست آن $f''(x_0)>0$ است. چون تابع در نقطهٔ $x_0=0$ دو بار مشتق‌پذیر است، پس $f''(x)$ در x_0 پیوسته است، در نتیجه باید $f''(x_0)=0$. و چون در نقطهٔ x_0، $f'(x_0)$ وجود دارد، پس در این نقطه دارای مماس است و لذا این نقطه، نقطهٔ عطف تابع است.

۶. فرض کنیم دامنهٔ تغییر t بازهٔ $[0,t]$ باشد، برای یافتن ماکزی‌مم F داریم:

$$f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$
$$f''(t) = -6t + 192$$
$$f'(t) = -3(t - 65)(t + 1)$$

ریشه‌های معادلهٔ $f'(t)=0$ عبارت‌اند از: $t=-1$ (که در بازه مورد نظر قرار ندارد) و $t=65$. با محاسبهٔ $f''(65)=-198$ به این نتیجه می‌رسیم که F در $t=65$ ماکزی‌مم دارد و مقدار آن برابر ۱۴۳۶۵۵ متر است که ۶۵ ثانیه پس از شلیک به دست می‌آید.

۷. چون تابع F در R پیوسته است، پس همهٔ نقطه‌های نشان داده شده در دامنهٔ تعریف تابع قرار دارند. نقطهٔ a نقطه مینی‌مم تابع است، زیرا سمت چپ آن تابع نزولی (مشتق منفی است) و سمت راست آن تابع صعودی است (مشتق مثبت است). سمت چپ نقطهٔ b مشتق مثبت بی‌نهایت و سمت راست آن مشتق منهای بی‌نهایت است. پس این نقطه ماکزیمم است. البته این نقطه، نقطهٔ بازگشتی تابع است، زیرا مشتق تابع در این نقطه نامتناهی با علامت‌های متفاوت است. نقطه‌های g, c, f نیز مینی‌مم هستند. نقطه‌های e و b نیز ماکزیمم‌اند. نقطهٔ g اکسترمم نیست (در طرفین این نقطه مشتق تغییر علامت ندارد). سمت چپ نقطهٔ i تابع 'y اکیداً نزولی و سمت راست آن تابع 'y اکیداً صعودی است. یعنی تقعر تابع در این نقطه تغییر جهت می‌دهد. ضمناً مشتق تابع در این نقطه ∞- است، پس دارای مماس قائم است. این نقطه، نقطهٔ عطف (عطف قائم) تابع است.

۸.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0 + a(0) + b}{2(0)^2 + 0 + 1} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

نمـــودار بر محور طول‌ها مماس اســـت و طول نقطهٔ تماس مثبت و نقطهٔ تماس مینی‌مم است. پس معادلهٔ تقاطع منحنی با y=۰ ریشهٔ تکراری دارد:

$$y=\frac{(x^{۲}+ax+\frac{۱}{۲})}{۲x^{۲}+x+۱}=۰\Rightarrow x^{۲}+ax+\frac{۱}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}$$

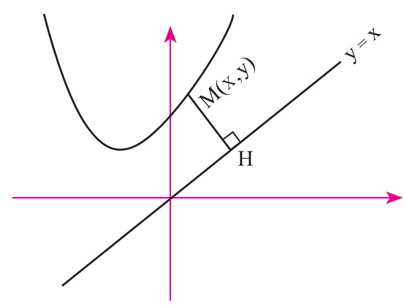
اگر $a=\sqrt{۲}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}+ax+\frac{۱}{۲}=۰$ منفی می‌شـــود، پـــس غیرقابل قبول اســـت. در نتیجه: $a=-\sqrt{۲}$.

۹.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\cos x=۰\Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\ \text{نقاط بحرانی}$$
$$f''(x)=\sin x$$

$$\begin{cases} f''(۲k\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin(۲k\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴} \\ =\frac{\sqrt{۲}}{۲}>۰\Rightarrow \text{نقطه‌های } x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \text{ مینی‌مم نسبی‌اند.} \\ f''(۲k\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴} \\ =\frac{-\sqrt{۲}}{۲}<۰\Rightarrow \text{نقطه‌های } x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \text{ ماکزی‌مم نسبی‌اند.} \end{cases}$$

۱۰. فرض کنیم M(x,y) نقطه‌های روی منحنی سهمی مورد نظر باشد.



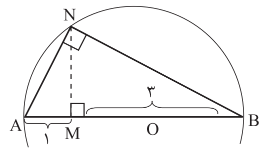
فاصلـــهٔ آن از خـــط y=x (یا x-y=۰) را تعیین می‌کنیم و ســـپس مینی‌مم آن را به دســـت می‌آوریم:

$$MH=\frac{|x-y|}{\sqrt{۱+۱}}\Rightarrow MH=\frac{|x-(x^{۲}+۲x+۳)|}{\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{|x^{۲}+x+۳|}{\sqrt{۲}}$$
$$(MH)'=\frac{۲x+۱}{\sqrt{۲}}=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow MH=\frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۱}{۴\sqrt{۲}}$$

حل مسائل هندسه (دهم) ۱

۱. دایرهٔ به شعاع ۲ ســانتی‌متر را رسم می‌کنیم (شکل ۱) و M را روی قطر AB چنان در نظر می‌گیریم که: AM=۱ و BM=۳. از M عمودی بر AB رســم می‌کنیم تا دایــره را در N قطع کند. داریم:

$$\Delta ABN\ ,\ \hat{N}=۹۰^\circ\ ,\ NM\perp AB$$
$$\Rightarrow MN^{۲}=AM.MB\Rightarrow MN=\sqrt{۳}$$

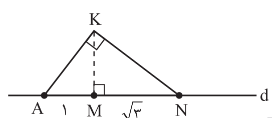


شکل ۱

روی خــط d، دایــره‌ای به قطر AN رســم می‌کنیــم (شــکل ۲) کــه در آن: AM=۱ و $MN=\sqrt{۳}$.

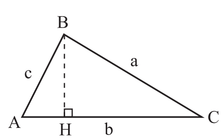
حال از M عمودی بر AN رســم می‌کنیم تا دایره را در K قطع کند که در این صورت داریم:

$$\Delta AKN\ ,\ \hat{K}=۹۰^\circ\ ,\ MK\perp AN$$
$$\Rightarrow MK^{۲}=AM.MN\Rightarrow MK=\sqrt[۴]{۳}$$



شکل ۲

۲.

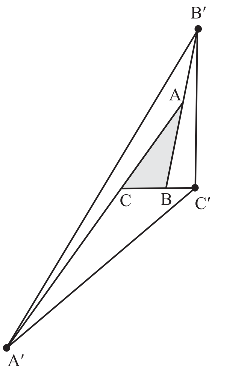


شکل ۳

$$\Delta ABH:\operatorname{Sin}A=\frac{BH}{AB=c}\Rightarrow BH=c.\operatorname{Sin}\hat{A}$$
$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}AC.BH=\frac{۱}{۲}(b)(c.\operatorname{Sin}\hat{A})$$

فرض کنیم: $S_{ABC}=S$

$$S_{AB'A'}=\frac{۱}{۲}AB'.AA'.\operatorname{Sin}(۱۸۰^\circ-\hat{A})=\frac{۱}{۲}AB.(۳AC).\operatorname{Sin}\hat{A}=۳S$$
$$S_{B'BC'}=\frac{۱}{۲}BB'.BC'.\operatorname{Sin}(۱۸۰^\circ-\hat{B})=\frac{۱}{۲}(۲AB)(\frac{۱}{۲}BC).\operatorname{Sin}\hat{B}=S$$
$$S_{A'CC'}=\frac{۱}{۲}CA'.CC'.\operatorname{Sin}(۱۸۰^\circ-\hat{C})=\frac{۱}{۲}(۲CA)(\frac{۳}{۲}CB).\operatorname{Sin}\hat{C}=۳S$$
$$S_{A'B'C'}=S_{AB'A'}+S_{B'BC'}+S_{A'CC'}+S_{ABC}=۳S+S+۳S+S=۸S$$



شکل ۴

۳. الف.

$$S=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{CMD}+S_{DMA}$$
$$=\frac{۱}{۲}AM.MB\operatorname{Sin}\alpha+\frac{۱}{۲}MB.MC.\operatorname{Sin}(۱۸۰-\alpha)$$
$$+\frac{۱}{۲}MC.MD.\operatorname{Sin}\alpha+\frac{۱}{۲}MD.MA\operatorname{Sin}(۱۸۰-\alpha)$$
$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\operatorname{Sin}\alpha(AM+MC)(BM+MD)$$
$$=\frac{۱}{۲}AC.BD.\operatorname{Sin}\alpha$$

ب.

$$S=(S_{ABM}-S_{CBM})+(S_{AMD}-S_{CMD})$$
$$=(\frac{۱}{۲}MB.MA.\operatorname{Sin}\alpha-\frac{۱}{۲}MB.MC.\operatorname{Sin}\alpha)$$
$$+[(\frac{۱}{۲}MA.MD.\operatorname{Sin}(۱۸۰-\alpha)-\frac{۱}{۲}MC.MD.\operatorname{Sin}(۱۸۰-\alpha)]$$
$$S=\frac{۱}{۲}\operatorname{Sin}\alpha.MB.(MA-MC)+\frac{۱}{۲}MD.(MA-MC)\operatorname{Sin}\alpha$$
$$S=\frac{۱}{۲}\operatorname{Sin}\alpha.MB.AC+\frac{۱}{۲}\operatorname{Sin}\alpha.MD.AC$$
$$S=\frac{۱}{۲}AC.(MB+MD)\operatorname{Sin}\alpha=\frac{۱}{۲}AC.BD.\operatorname{Sin}\alpha$$

۴. مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها باید ۲۸ باشد.

$$n+\frac{(n-۳)n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n^{۲}-n}{۲}=۲۸\Rightarrow n=۸$$

۵. $AN=a\sqrt{۲}\ ,\ AC=a\sqrt{۲}\ ,\ NC=a\sqrt{۲}$

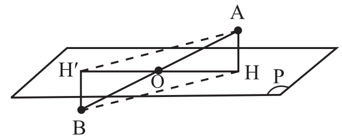
مثلـث ANC متسـاوی‌الاضلاع اسـت، پس: $\widehat{NAC}=۶۰^\circ$.

۶.

$$S=\frac{\text{تعداد نقاط مرزی}}{۲}+\text{تعداد نقاط درونی}-۱$$
$$S=S_{\text{بزرگ}}-S_{\text{کوچک}}=\left[\frac{۱۶}{۲}-۱+۴۱\right]-\left[\frac{۸}{۲}-۱+۹\right]$$
$$=۴۸-۱۲=۳۶$$

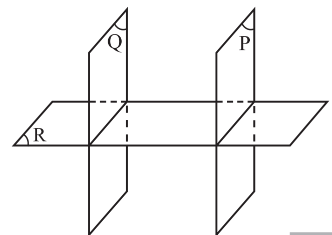
۷. با توجه به اینکه: $AH\parallel BH'\ ,\ AH=BH'$ AHBH' متوازی‌الاضلاع است (شکل ۵). پس قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و چون HH' روی صفحهٔ P واقع اســت و AB، HH' را در O قطع

کرده است. بنابراین AB صفحهٔ P را در O قطع می‌کند.



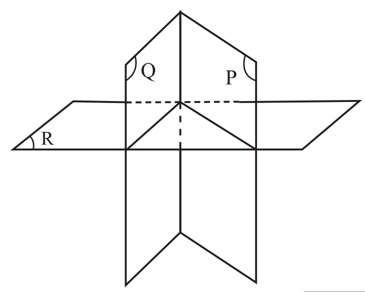
شکل ۵

۸. یا دو صفحهٔ P و Q به موازات یکدیگرند، مانند شکل ۶.



شکل ۶

یا دو صفحهٔ P و Q متقاطع‌اند که در این صورت فصل مشترک آن‌ها بر صفحهٔ R عمود خواهد بود؛ مانند شکل ۷.



شکل ۷

۹. (حجم استوانه به شعاع ۷ و ارتفاع ۴)= حجم موردنظر (حجم استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۴)−

$$=\pi(۷)^۲\times ۴-\pi(۳)^۲\times ۴=۱۶۰\pi$$

۱۰. $\Delta ABP: AP=a.\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}$ ①، $BP=a.\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{۲}$ ②

$\Delta ADQ: AQ=b.\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}$ ③، $\Delta BNC: BN=b.\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{۲}$ ④

①−③ $\Rightarrow AP-AQ=(a-b)\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}$

$\Rightarrow PQ=(a-b)\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}$

②−④ $\Rightarrow BP-BN=(a-b)\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{۲}$

$\Rightarrow PN=(a-b)\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{۲}$

حل مسائل هندسه ۳ (دوازدهم)

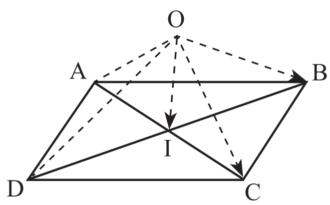
۱. وسط BC $M: M(\frac{۲+۴}{۲}, \frac{-۳+۱}{۲}, \frac{-۱۱+۵}{۲})$

$\Rightarrow M(۳,-۱,-۳)$

$|AM|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۱-۲)^۲+(۳+۳)^۲}$

$=\sqrt{۴۹}=۷$

۲.



$OI: \vec{OB}+\vec{OD}=۲\vec{OI}$ میانه است در $\overset{\Delta}{OBD}$

$OI: \vec{OA}+\vec{OC}=۲\vec{OI}$ میانه است در $\overset{\Delta}{OAC}$

$\Rightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=۴\vec{OI}$

۳. با فرض $\vec{V}=(a,b,c)$ و $\vec{W}=(x,y,z)$ و با توجه به نامساوی کشی شوارتز داریم:

$|\vec{V}.\vec{W}|\le|\vec{V}||\vec{W}|$

$|ax+by+cz|\le\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\times\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

$\Rightarrow(ax+by+cz)^۲\le(a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)$

۴. با توجه به مسئلهٔ ۳ داریم:

$(۲x-۳y+۶z)^۲\le(۴+۹+۳۶)(x^۲+y^۲+z^۲)$

$\Rightarrow(۱۴)^۲\le۴۹(x^۲+y^۲+z^۲)\Rightarrow۴\le x^۲+y^۲+z^۲$

$\Rightarrow \min(x^۲+y^۲+z^۲)=۴$

۵.

$\vec{AD}.(\vec{AB}\times\vec{AC})=۰$

$\Rightarrow(۱,۰,m+۴).[(۲,۰,۴)\times(۲,-۲,-۲)]=۰$

$\Rightarrow(۱,۰,m+۴).(۸,۱۲,-۴)=۰$

$\Rightarrow۸+۰-۴m-۱۶=۰\Rightarrow m=-۲$

۶.

$y^۲=۴x+۲y-۲۱\Rightarrow(y-۱)^۲=۴(x-۵)$

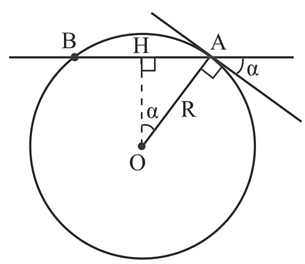
$\Rightarrow M(۵,۱), N(۶,۱)$

$y^۲=-۴x+۲y-۱۳\Rightarrow(y-۱)^۲=-۴(x+۳)$

$\Rightarrow M'(-۳,۱), N'(-۴,۱)$

$$\text{قطر بزرگ بیضی} = 2a = NN' = \sqrt{(-4-6)^2 + (1-1)^2} = 10$$
$$\Rightarrow a^2 = 25$$
$$\text{فاصلهٔ کانونی بیضی} = 2c = MM' = \sqrt{(-3-5)^2 + (1-1)^2} = 8$$
$$\Rightarrow c^2 = 16$$
$$\text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{9} = 6$$

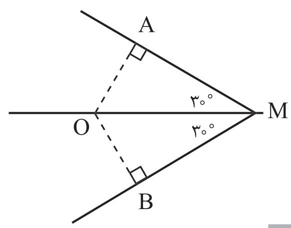
.۷



شکل ۷

$$\Delta OAH : \mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{AH}{R}$$
$$AB = 2AH = 2R\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

.۸

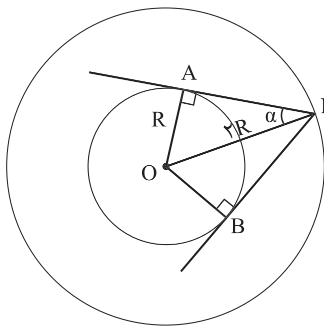


شکل ۸

فرض کنیم M نقطه‌ای است که از آن نقطه دو مماس رسم شده با هم زاویهٔ ۶۰° می‌سازند. پس:

$$\Delta OAM : \mathrm{Sin}\,30^\circ = \frac{OA}{OM} \Rightarrow OM = 2R$$

یعنی فاصلهٔ M از مرکز دایره برابر با ۲R است. حال فرض کنیم M نقطه‌ای باشد به فاصلهٔ ۲R از مرکز دایره داده شده و MA و MB دو مماس رسم شده از آن بر دایره. در این صورت داریم:



شکل ۹

$$\Delta OAM : \mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{OA = R}{OM = 2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$$

بنابراین مکان هندسی نقاطی که بتوان از آن نقاط دو مماس بر دایره مفروض C(O,R) چنان رسم کرد که با هم زاویهٔ ۶۰° بسازند، دایره‌ای است مانند C' که هم‌مرکز با C است و در آن: C'(O,۲R)

.۹

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\theta & \mathrm{Sin}\theta \\ -\mathrm{Sin}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\theta \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow R^{-1}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sin}^2\theta}$$
$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\theta & -\mathrm{Sin}\,\theta \\ \mathrm{Sin}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\theta \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1}(\theta)$$
$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}(-\theta) & \mathrm{Sin}(-\theta) \\ -\mathrm{Sin}(-\theta) & \mathrm{Cos}(-\theta) \end{bmatrix} = R(-\theta)$$

.۱۰

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5+2x & 6+2y \\ 15+4x & 18+4y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ x+3y & 2x+4y \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow x = 9\ ,\quad y = 14$$

تذکر: ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ دارای خاصیت جابه‌جایی است، هرگاه:

$$\frac{a-d}{m-q} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

اگر a=d باشد، آن‌گاه الزاماً باید: m=q و $\frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

اگر b=۰ باشد، الزاماً باید: n=۰ و $\frac{a-d}{m-q} = \frac{c}{p}$

اگر c=۰ باشد، الزاماً باید: p=۰ و $\frac{a-d}{m-q} = \frac{b}{n}$

مسابقهٔ عکاسی ریاضی

سلام به دوستان خوبم، بچه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم. در شمارهٔ قبل گفتیم که می‌خواهیم در مجله بخشی به نام «مسابقهٔ عکاسی» با مضمون مفاهیم ریاضی داشته باشیم. بعد قرار شد که شما دست به‌کار شوید و نگاهی دقیق‌تر به اطراف خود بیندازید. خیلی از مفاهیم ریاضی را می‌توانیم در اطرافمان ببینیم و با گرفتن عکس، آن‌ها را با دوستانمان به اشتراک بگذاریم.

عکس بالا مربوط به خانم آوین امیدوار، دانش‌آموز پایهٔ دهم از تهران است. توضیح ایشان دربارهٔ مسابقهٔ عکاسی و عکس‌های ارسالی‌شان را در ادامه ملاحظه بفرمایید:

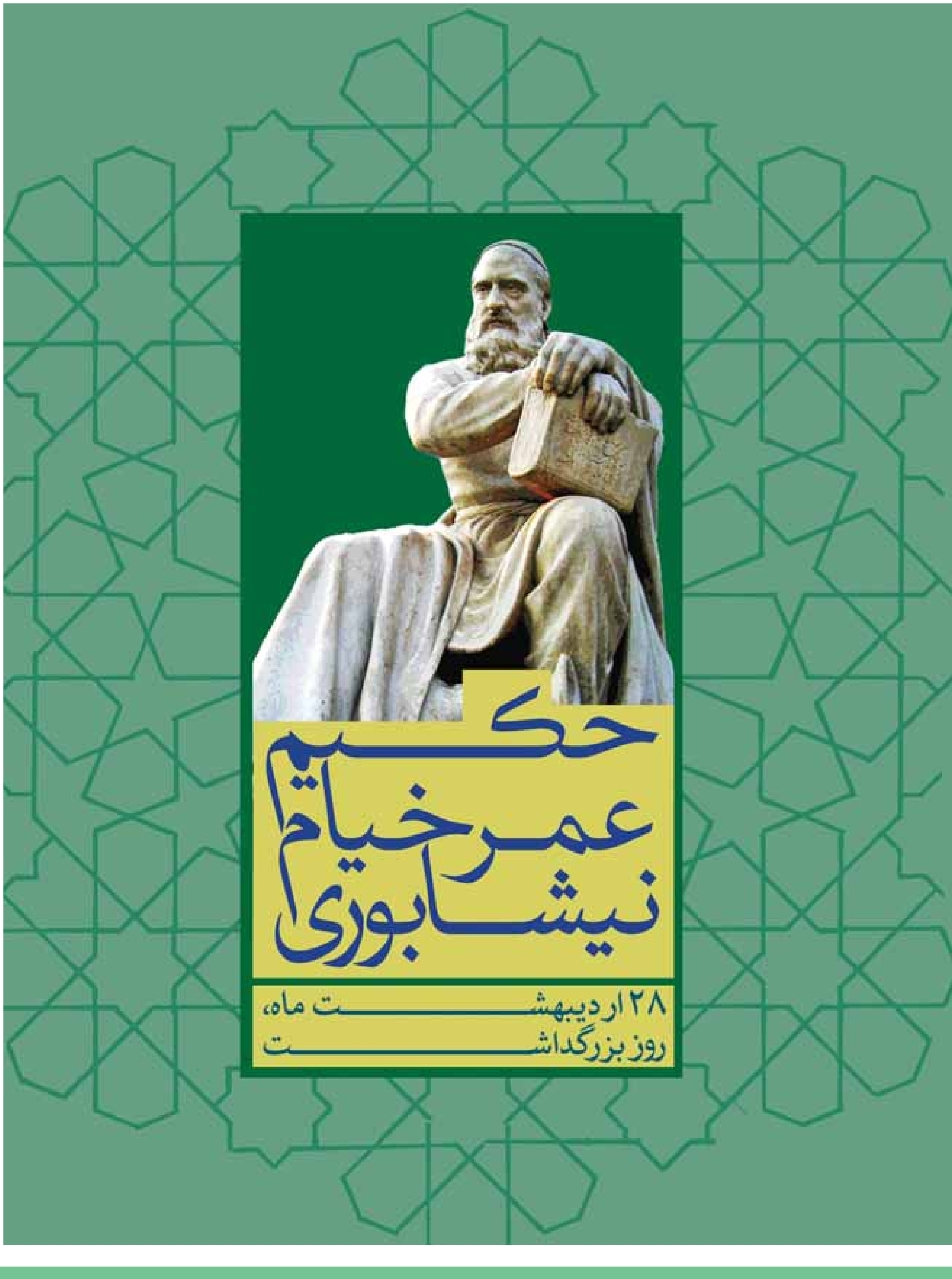
اول یک تشکر جانانه از مجلهٔ خوبتان دارم که من یکی از طرف‌داران پروپاقرصش هستم. این مجله باعث شد که علاقه‌ام به ریاضی به توان خود برسد.

عکسی که برایتان فرستاده‌ام، عکسی از یک راه‌پله است. این پله‌ها نزدیک خانهٔ ما هستند و من هر موقع از بالا به آن‌ها نگاه می‌کنم، شکلشان مرا به یاد «مارپیچ حلزونی عددهای گنگ» می‌اندازد:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ \dots$$

درست انگار از مثلث کوچک قائم‌الزاویه با اضلاع زاویهٔ قائمه به اندازه‌های ۱ شروع و پیوسته بزرگ‌تر می‌شود».

مکان عکس: خیابان پاسداران تهران


حکیم
عمر خیام
نیشابوری
۲۸ اردیبهشت ماه،
روز بزرگداشت