دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۷۰
مجله‌ی ریاضی
دورهٔ آموزش متوسطه

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دورهٔ بیستم/شمارهٔ ۴/تابستان ۱۳۹۰

سال جهاد اقتصادی گرامی باد

سرمقاله/۲
خیاط در کوزه / غلامرضا یاسی‌پور/۳
مسئله‌های بازکردن گاو صندوق / هوشنگ شرقی/۱۲
حل معادلهٔ $f(x) = 0$ / احمد قندهاری/۱۶
مسئله چیست؟ / محمد هاشم رستمی/۱۹
۱۹ روش برای حل معادلهٔ درجه دوم و کاربردهای آن‌ها / سید محمدرضا هاشمی موسوی/۲۶
اعمال بین مجموعه‌ها ـ جبر مجموعه‌ها / حمیدرضا امیری/۳۲
«صفر» از دنیای باستان تا امروز / احمد سعیدی/۳۸
تعداد توابع یک‌به‌یک و پوشا/ میرشهرام صدر/۴۳
حسابان/ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور/۴۸
بیست سال حرکت و تلاش / هیئت تحریریه/۵۲
محاسبهٔ $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ / احسان یارمحمدی/۶۳
نکاتی دربارهٔ محاسبهٔ حدود توابع جزء صحیح / سعید چتر آبنوس/۶۸
رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۳/ محمد هاشم رستمی/۷۱
آشنایی با بستهٔ نرم‌افزار مَتمتیکا (۳) / دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی/۷۷
قضیهٔ گودل / ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور/۸۱
روش تعیین عرض‌های اکسترمم‌های نسبی توابع بدون استفاده از مشتق / احمد قندهاری/۸۲
اثبات یک سری ریاضی / فرهاد جعفری یقین/۸۵
حل تشریحی مسائل شمارهٔ قبل / ۸۶
نمایهٔ مقاله‌های برهان متوسطه/ ۱۰۱

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**
● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**
● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور**
و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
● ویراستار ادبی: **مرتضی حاج‌علی‌فرد**
● **وبگاه:** www.roshdmag.ir
● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir
● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
● **شمارگان:** ۱۰۵۰۰ نسخه
● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح معماهای ریاضی
● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

● **رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.** ● مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
● مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

شاید وقتی برای اولین شمارهٔ مجلهٔ ریاضی برهان به‌دنبال یک اسم بامعنا می‌گشتیم به هفتادمین شماره و بیستمین سالگرد تولد این مجله فکر نمی‌کردیم. در آن زمان (سال ۱۳۶۹) فقط یک مجلهٔ ریاضی به همت استاد شهریاری چاپ می‌شد و در سرتاسر این کشور پهناور، مجلهٔ ریاضیِ برهان برای دانش‌آموزان منحصربه‌فرد بود.

هنگامی که چاپ یک مجلهٔ ریاضی را به آقای عبدالعظیم فریدون (مدیرعامل وقت انتشارات مدرسه) پیشنهاد دادم و ایشان پس از مشورت با مدیرکل وقت دفتر کمک‌آموزشی، جناب مهندس محسن چینی‌فروشان از اینجانب خواستند تا با آقای چینی‌فروشان نشستی داشته باشیم. مهندس چینی‌فروشان که تحصیلات دبیرستانی خود را در رشتهٔ ریاضی به پایان رسانده بودند و به ریاضیات علاقه داشتند، در کمال اطمینان و با دلگرمی فراوان قول مساعدت دادند و از اولین مشوقان من در تولید و انتشار این مجله بودند.

فرهیختگان و بزرگواران بسیاری از آغاز راه تاکنون در تولید، چاپ و انتشار این مجله نقش مؤثر داشته‌اند و دارند که ذکر نام آن عزیزان از حوصلهٔ این چند سطر خارج است و بنده به‌عنوان عضو کوچکی از مجموعهٔ دست‌اندرکاران مجله به نیابت از شما خوبان از یکایک ایشان قدردانی و تشکر می‌کنم. در این میان تلاش، ایثار، صداقت، عشق و علاقهٔ فراوان اعضای محترم هیئت تحریریهٔ مجله، بیش‌ترین تأثیر در رشد و تعالی مجله و دلگرمی من در ادامهٔ راه را به همراه داشته است.

بیستمین سالگرد تولد برهان، بهانه و فرصتی است مناسب تا از محبت‌ها، جدیت‌ها و زحمات ارزندهٔ ایشان و تمامی دست‌اندرکاران، مسئولان و مجموعهٔ عوامل مؤثر در تولید، چاپ و انتشار مجله در دفتر کمک‌آموزشی، به‌ویژه مدیرکل دفتر و مدیر مسئول مجلهٔ ریاضی رشد برهان، جناب آقای محمد ناصری تشکر و قدردانی کنم.

ان‌شاءالله شما دانش‌آموزان و دوستداران مجله برهان که در مدت این بیست سال با ارسال نامه‌ها، مقالات و پیشنهادهای خود ما را در ارتقای کیفی مقالات و نوشته‌ها یاری کرده‌اید، هم‌چنان با ما همراه باشید و همان‌گونه که بسیاری از همکاران فعلی، مؤلفان و اساتید محترم که با ما همراه هستند در گذشته جزء دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ برهان بوده‌اند، شما نیز در آینده گوشه‌ای از این رسالت آموزشی در توسعه، نشر و آموزش ریاضی را به دوش بکشید و همراه شوید.

سردبیر

خیاط در کوزه

تاریخچهٔ مجلهٔ ریاضی برهان
قسمت اول

غلامرضا یاسی‌پور

ای ایاز از عشق تو گشتم چو موی
ماندم از قصه تو قصهٔ من بگوی
بس فسانهٔ عشق تو خواندم به جان
تو مرا کافسانه گشتستم، بخوان

این بار موقتاً دست از مجلات ریاضی ایران برداشته‌ایم و به مناسبت بیست سالگی مجلهٔ ریاضی برهان، به مروری در شماره‌های بیست‌گانهٔ این مجله پرداخته‌ایم و اشاراتی مختصر به پاره‌هایی از مقالات آن داریم و به این ترتیب، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، خیاط در کوزه افتاده است.

اولین شمارهٔ این مجله در زمستان ۱۳۷۰ به بهای ۳۰۰ ریال به دست دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران ریاضی رسید.

اعضای هیئت تحریریهٔ مجله عبارت بودند از:

محمدهاشم رستمی، غلامرضا یاسی‌پور، سیدحسین سیدموسوی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، حمیدرضا امیری، با همکاری پرویز شهریاری و محمد عابدی به سردبیری **حمیدرضا امیری.**

مجله، بنا به گفتهٔ سردبیر در سرمقاله نام خود را از قرآن مجید گرفته که در آن هشت بار، کلمهٔ «برهان» با مشتقات آن آمده است.

از طرفی مجله به قول سردبیر، مجله‌ای دانش‌آموزی است و برای دانش‌آموزان انتشار یافته تا کمک حال و همدم ماه و سالشان باشد. اولین مقالهٔ آن **مبحث تقارن** از **محمد عابدی** است.

در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **پرویز شهریاری** چنین می‌خوانیم:

ریاضیات تکیه بر اندیشه و عقل آدمی دارد و سروکارش با استدلال منطقی است و هر انسانی، ولو با استعدادی نه چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه، عقل و استعداد خود به ریاضیات دست یابد و آن را فرابگیرد.

از مقالات **نظریهٔ اعداد و کامپیوتر** ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور** و **سیدحسین موسوی**، و **لگاریتم** نوشته **احمد قندهاری** که بگذریم، به **تاریخچهٔ مختصر پیدایش هندسه** نوشتهٔ **محمدهاشم رستمی** می‌رسیم و در آن، به این سخن **افلاطون** در کتاب **جمهوری** او برمی‌خوریم که می‌گوید: «مطالعهٔ ریاضیات دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر

است، زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

مقالـهٔ بعدی این شـماره، **منطق قدیم و ریاضیـات** از **غلامرضا یاسی‌پور** اسـت. در این مقاله از قول **خواجه نصیر طوسی** در کتاب **اساس الاقتباس**، با عنوان **ابتدای سخن در منطق** چنین آمده است:

و نـه هر که کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد. بلک بسیار کسان باشـند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و هم چنین باشـد حکم کسـانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند. پس علم منطق، شناختن معنی‌هایی است که از آن معانی رسـیدن به انواع علوم مکتسـب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

مقالهٔ بعدی این شـماره، عنوان **گروه، پیدایش و کاربرد نظریهٔ گروه‌ها** را دارد و نوشتهٔ سردبیر مجله، یعنی حمیدرضا امیری است که در آن چنین می‌خوانیم:

یکی از این مفاهیم که امروزه در علومی چون فیزیک، شـیمی، زیست‌شناسـی، نجـوم و... کاربردهای باارزشـی دارد، مفهوم گروه است. این مفهوم در عصر ما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر درآمده است. از پایه‌گذاران جبر مجرد و به‌ویژه نظریهٔ گروه‌ها شـخصی اسـت به نام **اواریست گالوا** که نظریهٔ خود را در ۱۹ سالگی به تقریر درآورد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها نوشـتهٔ **سـیدمحمدرضا هاشـمی موسـوی** مقالهٔ دیگری از این شـماره اسـت. این مقاله به مطالبی پرداخته که قابل اسـتفادهٔ دانش‌آموزان سـال سـوم ریاضی بوده است.

در این شـماره، مطالب متنوعی با عنوان **تفریح اندیشه** و **ادب ریاضی** آمده اسـت که در نوع خود خواندنی هستند. برای مثال در تفریح اندیشه این معما آمده است:

احمد، بهرام و کریم سـوار دوچرخه‌اند. هر یک سـوار دوچرخهٔ دوستش شده و کلاه دوست دیگرش را بر سر نهاده است.

آن‌کـه کلاه کریم را بر سـر دارد دوچرخهٔ بهرام را می‌راند. چه کسی بر دوچرخهٔ احمد سوار است؟

مسـئلهٔ مسـابقه‌ای این شـماره در مورد هندسـه و نوشـتهٔ **محمدهاشم رستمی** است.

پایان بخش مجله، **مسائل برای حل** است که برای دانش‌آموزان سال‌های اول تا چهارم دبیرستان قابل استفاده خواهد بود.

***

اکنون به سراغ شمارهٔ دوم این مجله می‌رویم.

در مقالـهٔ **شـما هـم می‌توانیـد در درس ریاضـی خـود موفق باشـید** از استاد **پرویز شـهریاری** دربارهٔ فواید خاطره‌نویسی چنین می‌خوانیم:

خاطره‌نویسـی، علاوه بر آن‌که ما را وامی‌دارد تا ذهنی کنجکاو و نکته‌سنج و چشـمی تیزبین و دقیق داشته باشیم، دربارهٔ معنای واقعـی هر واژه بیندیشـیم، توجه خود را نه به ظاهر پیشـامدها و پدیده‌هـای طبیعـی و اجتماعی، بلکه به رابطـهٔ متقابل آن‌ها و به ماهیت درونی آن‌ها معطوف کنیم و به ریشـهٔابی اسـتدلالی آن‌ها، به جای روایت سـاده و بی‌مضمون بپردازیم و...، می‌تواند وظیفه‌ای تاریخی، اجتماعی و میهنی هم به حساب آید.

و در مورد نخستین وظیفهٔ ریاضی‌دان، چنین آمده است که:

نخستین وظیفهٔ ریاضی‌دان، ساختن و تحویل‌دادن چیزی است که شـاید امروز کم‌تر کسی طالب آن باشد، یعنی «انسان»؛ انسانی که می‌اندیشد، انسـانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش شناخت و انتشار حقیقت بر خیلی چیزها و مثلاً بر یک تلویزیون دوبعدی برتری دارد؛ انسانی آزاد نه آدم‌واره‌ای آهنی.

در این شماره، مقاله‌ای به نام **تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران** آمده که نوشتهٔ **غلامرضا یاسی‌پور** است. در این مقاله، این جمله را در مزیت ریاضی و هندسه بر علوم دیگر می‌خوانیم:

چنان که پاسکال می‌گوید «ما بین افکار متساویه آن‌که استعداد هندسه دارد مطالب را بهتر درک می‌کند.» به همین جهت حکما و فلاسفهٔ قدیم همواره مردم را به آموختن هندسه تحریض و ترغیب می‌کرده‌اند، زیرا می‌دانسـتند اساس و بنیان هر علم وقتی محکم و محقق می‌شـود که مبتنی بر تعاریف و موضوع‌های منطقی باشـد و هندسـه تنها علمی بوده که در آن زمان به این عنوان شـناخته می‌شده است.

در مقالـهٔ **منطق جدید و ریاضیات** از **غلامرضا یاسـی‌پور**، نقل قول زیر از آلونزوچرچ، منطقی معاصر، آمده است:

به خاطر اجتناب از عدم کفایت‌های زبان‌های طبیعی در اهداف تحلیل منطقی، لازم اسـت زبـان طبیعی به نمادی دقیق‌تر ترجمه شود.

مقالـهٔ **اتحادهای مثلثاتی، نامسـاوی‌های مثلثاتی** از **حمیدرضا امیری**، به ذکر موارد مهم این دو مبحث مثلثاتی پرداخته است.

مطالب دیگر در این شـماره دربارهٔ مسائل برای دانش‌آموزان و حل آن‌هاست.

***

در شـمارهٔ سوم، در مقالهٔ **شـما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشـید** از **استاد پرویز شـهریاری**، دربارهٔ **روش استقرای منطقی** چنین آمده است:

آزمایش و روش اسـتقرایی در دانش‌های تجربی، نقش بزرگی برعهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس

و گمان باشد. برای این‌که به درستی حکمی قانع شویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اویلر و دیگران نشان داد که در ریاضیات، نمی‌توان روش استقرایی را به همان صورت عادی خود، مورد استفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشته باشد. ما امروزه، این روش را می‌شناسیم: روش استقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تلاش کردند، **بلز پاسکال** (۱۶۲۳-۱۶۶۲)، **رنه دکارت** (۱۵۹۶-۱۶۵۰) و **ژاکوب برنولی** (۱۶۵۴-۱۷۰۵) بودند.

در **ادب ریاضی** از قول **دکتر غلامحسین مصاحب** از زبان **م.ه. نیومن** به این مطلب مهم دربارهٔ ریاضیات اشاره شده است که: زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ‌یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگ‌های افلاطون یا طنزهای **آریستوفانس** را بدان تمامی و کمال که یک ریاضی‌دان هر معنا و مقصودی را در کارهای **ارشمیدس** می‌فهمد، درک کند.

مقالهٔ **هندسهٔ تحلیلی** این شماره از **محمد عابدی** است و مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** به **مجلهٔ ریاضیات دکتر مصاحب** پرداخته که به سال ۱۳۰۹ در تهران به چاپ رسیده است.

مقالهٔ **تصاعد هندسی** این شماره از **احمد قندهاری** است. در **ادب ریاضی** این شماره، تحت عنوان **از سرگذشت هابز** چنین می‌خوانیم:

پیش از آن‌که نگاهی به هندسه بیفکند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ساله بود. مقدمات اقلیدس بود و در کتابخانهٔ آقایان؛ و در صفحهٔ باز آن قضیه‌ای را خواند و گفت: قسم به خدا (گه‌گاه سوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبان می‌آورد) که غیرممکن است! و برهان آن را، که به قضیهٔ دیگری ارجاعش می‌داد و آن را هم خواند، دید. قضیهٔ دوم به قضیهٔ دیگر رجوعش داد، آن را هم خواند... تا سرانجام به برهان، حقیقت مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

در مقالهٔ **قواعد استنتاج** این شماره در باب **تصور و تصدیق** چنین آمده است که:

دو باب اصلی منطق یکی باب تصور است و دیگری باب تصدیق. تصور همان تعریف و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیه و قضیه همان قول جازم یا لفظ مرکب تام خبری، که در منطق ریاضی آن را گزاره می‌نامند و کل این دو را علم می‌گویند، چنان‌که گفته‌اند:

علم، در صورتی که اقرار به نسبت (بین دو چیز) باشد، تصدیق وگرنه تصور است.

و هر یک را به بدیهی و نظری تقسیم می‌کنند، چنان‌که فرموده‌اند:

و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می‌شود و نظری ملاحظهٔ معلوم برای حصول به مجهول است.

از مقالات دیگر این شماره، مقالهٔ **محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه** از سردبیر مجله است.

در این شماره به دو مقاله با عنوان **مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان** و **طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی** از **غلامرضا یاسی‌پور** برمی‌خوریم.

معرفی کتاب‌های ریاضی از مطالب تازه و ارزندهٔ این شماره است که در آن به معرفی کتاب‌های بسیار مفید زیر پرداخته است:

ورزیدگی در ریاضیات، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی؛

نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ اکبر حسنی؛

ریاضیات مقدماتی، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور؛

نابرابری‌های هندسی، ترجمهٔ محمد حسن بیژن‌زاده؛

همه‌چیز دربارهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم، ترجمهٔ پرویز شهریاری؛

ماشین امیل پست، ترجمهٔ پرویز شهریاری؛

مسائل مسابقه‌ای این شماره از **سید حسین سید موسوی** است که عبارت‌اند از:

ثابت کنید از میان هر ۵ عدد متوالی، عددی وجود دارد که نسبت به چهار عدد دیگر اول است.

ثابت کنید وارون هر ماتریس بالامثلثی (در صورت وجود) ماتریسی بالامثلثی است.

***

در شمارهٔ چهارم آقای **سیدحسین سید موسوی** به علت گرفتاری‌های شخصی از هیئت تحریریه جدا می‌شود و به جای ایشان، آقای **احمد قندهاری** به هیئت تحریریه می‌پیوندد.

در این شماره، در **ادب ریاضی** از قول **برتراند راسل**، منطقی معاصر، دربارهٔ **هندسهٔ اقلیدسی** این مطلب جذاب را می‌خوانیم: در سن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم... این یکی از مهم‌ترین حادثه‌های زندگی‌ام، به خیره‌کنندگی مهر نخستین بود. تصور نمی‌کردم که در دنیا چیزی این همه لذت‌بخش وجود داشته باشد.

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**، در بررسی مجلهٔ ریاضیات **دکتر مصاحب**، این سخن حکیمانه را از زبان سعدی شیرازی می‌شنویم:

زمانی درس علم و بحث تنزیل
که باشد نفس انسان را کمالی
زمانی شعر و شطرنج و حکایات

که خاطر را بود دفع ملالی

اتحادهای مهم جبری این شماره به قلم **احمد قندهاری** است که در آن به بررسی این مبحث مهم ریاضیات مقدماتی پرداخته است.

در این شماره مصاحبه‌ای داریم با مرحوم **موسی آذرنوش**، دبیر ارجمند ریاضی. در این مصاحبه از قول استاد آذرنوش چنین آمده است:

در تمام مدت ۴۴ سال تدریس به یاد ندارم یک دقیقه، با صراحت می‌گویم، یک دقیقه تأخیر ورود به کلاس داشته باشم و هیچ‌وقت شاگردان را در زنگ تفریح به دلیل کمبود وقت در کلاس نگه نمی‌داشتم. همواره مطالب را طوری شروع می‌کردم که در اواخر وقت کلاس مطالب درسی نیز پایان می‌یافت و این موضوع مورد تأیید همکاران من نیز بود. به محض این‌که زنگ کلاس نواخته می‌شد اولین نفری بودم که به کلاس می‌رفتم.

استاد، در پاسخ این سؤال که ریاضی‌دان غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد، می‌فرماید:

تصور می‌کنم یک ریاضی‌دان قبل از تبحر در ریاضیات قطعاً با منطق و فلسفه و ادبیات، خود را آمادهٔ درک مطالب ریاضی نموده است. برای یک ریاضی‌دان دانستن ادبیات برای بیان و تفهیم مطالب ریاضی حتماً ضروری است. مثلاً آقای دکتر مصاحب ریاضی‌دان بود، به دلیل این‌که در ادبیات نیز دستی قوی داشت بیان و قلمش خیلی نافذ بود و هم‌چنین آقای دکتر هشترودی نیز همین وضع را داشت.

در مقالهٔ **تابع و بررسی خاصیت یک به یکی در انواع توابع** از **حمیدرضا امیری** چنین می‌خوانیم:

صحبت از تابع است، مفهومی ریاضی که ریاضیات بدون آن هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال‌گیری از آن کتاب‌های ما را اشباع کرده و ریاضی‌دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است؛ مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیهٔ رشته‌های فنی نقش‌های مهم ایفا کند.

در مقالهٔ **مثال‌های هندسی برای تابع‌های گسسته** از **دکتر احمد شرف‌الدین** به این نکتهٔ مهم می‌رسیم که می‌گوید: مثال‌های هندسی در بعضی موارد احکام ریاضی را ملموس و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند.

در **ادب ریاضی** این شماره، در مقالهٔ **مدل‌سازی ریاضی چیست؟** این مطلب را می‌خوانیم:

مدل‌سازی ریاضی عبارت از کاربرد مهارت‌های ریاضی در به‌دست آوردن پاسخ‌های مفید به مسائل واقعی است.

یادگیری به کاربردن مهارت‌های ریاضی بسی مشکل‌تر از یادگیری خود ریاضیات است.

مدل‌ها در حوزهٔ بسیار وسیعی از کاربردها به کار می‌روند، به‌طوری که بعضی از آن‌ها در ابتدا نشان نمی‌دهند که طبیعتی ریاضی دارند.

مدل‌ها غالباً سنجش سریع و آسان موارد مختلف را میسر می‌کنند و به جواب‌های بهینه‌ای می‌انجامند که در غیر این صورت واضح نیستند.

در مورد مدل‌سازی ریاضی نه قواعد دقیق و نه پاسخ‌های صحیح، هیچ‌یک موجود نیست.

مدل‌سازی را تنها از راه انجام دادن می‌توان آموخت.

مقالهٔ **اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج از غلامرضا یاسی‌پور** دربارهٔ اثبات نادرستی چنین می‌گوید:

در صورتی که بتوانیم نشان دهیم که تخصیصی از ارزش‌های راستی چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات استدلالی راست و نتیجهٔ آن دروغ است، ثابت کرده‌ایم که استدلال مورد بحث نادرست است. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جدول ارزش انجام می‌دهیم، اما این طریق به‌خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرزحمت است. در این صورت، اولی چنان است که طریق زیر را، که بسیار ساده‌تر است اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در این طریق ابتدا از نتیجه آغاز می‌کنیم و به متغیرهای گزاره‌ای واقع در آن ارزش‌هایی را چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزش‌های قبلاً داده شده ارزش‌هایی به متغیرهای گزاره‌ای باقی‌مانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راست کنند. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد، استدلالمان نادرست است و در غیر این صورت، استدلالمان درست است.

در مقالهٔ **طرح و حل مسائل اساسی ریاضی** به دو مسئله، یکی فرعی و دیگری اصلی، برمی‌خوریم. مسئلهٔ فرعی این است: چند جواب درست و مثبت معادلهٔ:

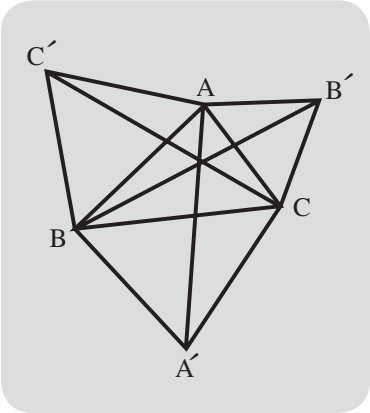
$x+y+z=n$

در نامساوی $x\leq y+z$، $y\leq x+z$ ، $z\leq x+y$ صدق می‌کنند؟

حل این قضیه و صورت مسئلهٔ اصلی و حل آن را در همین شماره بخوانید.

مسئلهٔ مسابقه‌ای این شماره از **محمد هاشم رستمی**، به قرار زیر است:

روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و رأس غیرمشترک هر یک از این مثلث‌ها را به رأس مقابل آن از مثلث ABC وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه خط حاصل متقارب‌اند.



این مطلب را نیز در **ادب ریاضی** این شماره، از قول **ژرژ پولیا** می‌خوانیم:

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده سمیناری برپا شده بود که من در آن درس می‌دادم و فون نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی مشکل باشد. فون نویمان چیزی نگفت، اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم پای تخته سیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به بعد من از فون نویمان می‌ترسیدم.

* * *

دومین سال انتشار مجلهٔ برهان با زمستان ۱۳۷۱ آغاز می‌شود.

در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **استاد پرویز شهریاری**، دربارهٔ فایدهٔ تاریخ ریاضیات، به این سخنان برمی‌خوریم:

تاریخ ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و بدون این‌که گذشتهٔ خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت و کارایی بیشتر پیش رفته است.

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

نکاتی دربارهٔ توابع متناوب یا توابع دوره‌ای: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور؛

در حاشیهٔ مجموعه‌ها: حمیدرضا امیری؛

قانون اثبات شرطی: غلامرضا یاسی‌پور؛

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران: غلامرضا یاسی‌پور؛

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان؛

در باغ تجربه‌ها: مصاحبه با یعقوب فرجامی، دانشجوی فوق‌لیسانس رشتهٔ ریاضی؛

یادی از استاد ضیاء هشترودی: دکتر احمد شرف‌الدین؛

بررسی تقارن محوری و مرکزی در تابع‌های sinx و cosx: علی حسن‌زاده ماکوئی؛

بسط دوجمله‌ای خیام ـ نیوتن و تعمیم آن: سید محمدرضا هاشمی‌موسوی؛

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی؛

مقالاتی از خوانندگان؛

معرفی کتاب‌های ریاضی.

در مقالهٔ **در باغ تجربه‌ها**، مصاحبه‌ای با آقای **یعقوب فرجامی** آمده است. بعضی از فرازهای این مصاحبه به‌عبارت زیر است:

من، یعقوب فرجامی، متولد ۱۳۴۸ شمسی، اهل یکی از روستاهای تبریزم. پدرم سواد قرآنی دارد و مادرم اصلاً سواد ندارد.

فرجامی در پاسخ به سؤال «**در چه زمانی به ریاضیات علاقه‌مند شدید؟**» می‌گوید:

نمی‌توانم بگویم از چه موقعی به ریاضیات علاقه‌مند شدم، ولی می‌توانم بگویم در سال اول و دوم نظری ریاضیاتم خیلی بد بود. از کسینوس فاکتور می‌گرفتم و اصلاً نمی‌دانستم «تعیین علامت» یعنی چه.

خصوصیات دبیر ریاضی

۱. آگاهی دبیر از موضوع تدریس باید بسیار بالا باشد.

۲. صبور و با صلاحیت باشد.

بقیهٔ این مصاحبهٔ جالب را می‌توانید در همین شمارهٔ برهان مطالعه کنید.

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**، که در این شماره به مجلهٔ **آشتی با ریاضیات** پرداخته، در مطلبی با عنوان **تعمیم ریاضی** چنین می‌خوانیم:

ریاضی‌دانان داستانی ساخته‌اند، دربارهٔ منطق علمی.

ریاضی‌دان می‌گوید: یک فیزیک‌دان یقین می‌کند ۶۰ بر تمامی عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ درست است. چند عدد دیگر مانند ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۳۰ را که تصادفی انتخاب کرده است، تجربه می‌کند. چون ۶۰ بر این اعداد هم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی کافی است تا فرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیک‌دان می‌گوید: پس دربارهٔ مهندسان چه می‌گویید؟ یک مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هستند. بعد نوبت ۹ می‌رسد که متأسفانه ۹ عدد اول نیست، ولی ۱۱ و ۱۳ که بعد می‌آیند باز عددهای اول‌اند. تصمیم می‌گیرد، دوباره به سراغ ۹ برود. کلنجار می‌رود و عاقبت به این نتیجه می‌رسد که ۹یک اشتباه آزمایشی است. مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یک پزشک

برای بیماری که مسمومیت خونی دارد و هیچ امیدی به نجاتش نیست شوربا تجویز می‌کند. بیمار تصادفی شوربا می‌خورد و معالجه می‌شود. پزشک می‌نشیند یک کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند شوربا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یک بیمار دیگر باز مسمومیت خونی دارد، پیشش می‌آید و پزشک ما باز شوربا تجویز می‌کند. بیمار شوربا می‌خورد و می‌میرد. آن‌وقت پزشک کتابش را تصحیح می‌کند و این‌طور می‌نویسد که شوربا فقط در ۵۰ درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشک می‌گوید: پس خود ریاضی‌دان چه‌طور؟ وقتی از او بپرسید: چه‌طور می‌شود یک شیر را در بیابان به دام انداخت؟ می‌گوید: «به دام انداختن یعنی چه؟ بنابر تعریف، اصولاً شیر باید پشت میله‌های قفس باشد. پس کافی است شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر در قفس بماند.»

* * *

در شمارهٔ ۶ مطلبی می‌خوانیم از **عین‌القضات همدانی** در باب وظیفهٔ انسان راستین که همان جست‌وجوی حقیقت است:

«... چندین هزار جنازه که به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را دردِ طلب بگیرد و یکی به راه راست نیفتد...»

باز در ادامهٔ این مقاله از این موضوع آگاه می‌شویم که:

اگر «شک» نبود، ریاضیات در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد و البته، نه‌تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند.

در مقالهٔ **برهان خلف** این شماره در تعریف این برهان، چنین آمده است:

روش اثبات غیرمستقیم که آن را برهان خلف نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسهٔ مقدماتی خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش، غالباً کار را با فرض مقابل چیزی که می‌خواهد آن را ثابت کند، آغاز می‌کند؛ در این صورت اگر فرض مزبور به کاذبی منجر شود، باید دروغ باشد و بنابراین نقیض آن، یعنی قضیهٔ مورد اثبات باید راست باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی استدلالی مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش، به‌عنوان مقدمه‌ای اضافی و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعهٔ فزودهٔ مقدمات مزبور، بنا می‌کند.

این شماره مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** را نیز دارد. در این مقاله، مطلبی دربارهٔ تقلید آمده است که خواندنی است:

بیرونی، تقلید را در مسائل علمی ابداً جایز نمی‌داند و از این‌که **ابن‌سینا** با وجود نبوغ ذاتی و هوش سرشاری که دارد، یکسره و دربست در اختیار ارسطو قرار گرفته است و کلمات او را [بلاتشبیه] به‌عنوان وحی منزل تلقی می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان بازمی‌دارد، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند. آن‌چه هست تثبیت می‌کند و برای وضع موجود حصار و قلعهٔ استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته در آن واقع می‌شود و عنکبوت‌آسا به دور خود می‌تند. لاجرم حقایق را آن‌طور که هست درنمی‌یابد.

در **ادب ریاضی** این شماره، قولی می‌خوانیم از **فلیکس بلوخ** دربارهٔ **هایزنبرگ**:

... یک روز داشتیم با هایزنبرگ قدم می‌زدیم که صحبت‌هایمان به مفهوم فضا کشیده شد. من که همان روزها تازه کتاب «فضا، زمان، ماده» اثر ویل را خوانده بودم بادی به غبغب انداختم و کاملاً تحت‌تأثیر این کتاب با تبختر گفتم: «فضا میدان عملگردهای خطی است.»

هایزنبرگ با خونسردی گفت: «چرند می‌گویی: فضا آبی است و پرندگان در آن پرواز می‌کنند.»

این شماره مقاله‌ای دارد از **سید حسین سید موسوی** دربارهٔ استفاده از تست‌های کنکور. قسمتی از این مقاله به‌صورت زیر است:

انبوه داوطلبان ورود به دانشگاه‌ها و از سوی دیگر اضطراب آن‌ها، گروه‌های مختلفی را وسوسه کرده که از این خوان گسترده بهره‌ای ببرند. ازجمله، کسانی تست‌های کنکور سال‌های پیش را با جواب در جزواتی تحت عناوین ۲۰ سال کنکور و نظایر آن با کیفیتی بسیار نازل و با چاپی از نوع پلی‌کپی در اختیار داوطلبان می‌گذاشتند که اغلب نه‌تنها پاسخ سؤالات، بلکه خود سؤالات نیز اشتباه بود، که جز گمراهی خوانندگان چیزی نصیب آن‌ها نمی‌کرد.

پاره‌ای از مقاله‌های دیگر این شماره چنین‌اند:

توابع پوشا: حمیدرضا امیری؛

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان: نغمهٔ شریک‌زاده؛

مسائل برای حل دانش‌آموزان: دکتر احمد شرف‌الدین؛

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی: غلامرضا یاسی‌پور؛

تناقض‌ها در ریاضیات و علوم: حسن نصیرنیا؛

مقالهٔ **معرفی کتاب** این شماره به معرفی فصل‌نامهٔ **مجموعه** پرداخته و درضمن معرفی آورده است که:

مجموعه، همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، مجموعه‌ای از مقالات و مسائل ریاضی است. در این شماره مقالات زیر را می‌خوانیم: **نظریهٔ بازی‌ها؛ ابن‌هیثم، ریاضی‌دان مسلمان؛ اثبات نامساوی‌ها، نیوتون و اندیشهٔ ریاضی زمان ما؛ توابع و نمودارهای آن‌ها؛ تکمیل**

مطالب کتاب‌های درسی؛ منطق و زبان؛ مثلثات؛ معرفی کتاب من ریاضی‌دانم (سرگذشت سیبرنتیک)؛ نظریهٔ گراف‌ها؛ مسائل؛ فرهنگ ریاضیات؛ هندسهٔ تصویری؛ هندسهٔ فضایی؛ مصاحبه با استاد پرویز شهریاری.

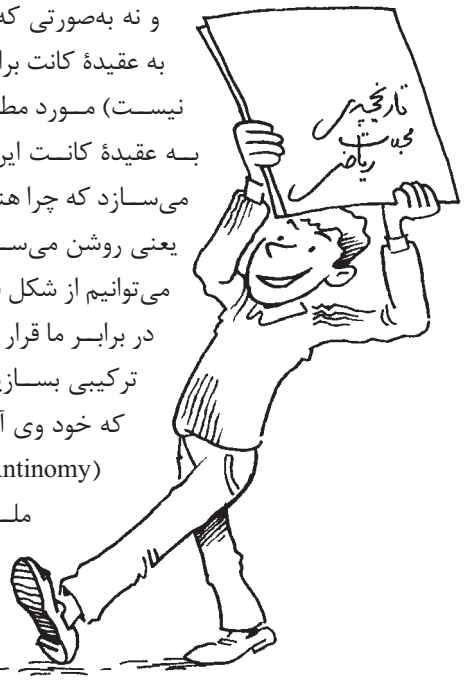
* * *

به شمارهٔ ۷مجله رسیده‌ایم. در این شماره نیز مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** هم‌چنان برقرار است. در این مقاله دربارهٔ شک و تردید چنین آمده است:

شک نسبت به درستی عمل و داوری خود، به این معنا است که وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم یا وقتی مسئله‌ای را حل می‌کنیم، دائماً از خود بپرسیم: «آیا عمل‌ها را درست انجام داده‌ایم؟»، «آیا با استدلالی منطقی و قانع‌کننده پیش رفته‌ایم؟»، «آیا تعریف، مفهوم یا قضیه‌ای که مورد استفاده قرار داده‌ایم، به‌واقع در این‌جا کاربرد دارد؟»، «آیا همهٔ فرض‌های مسئله را در نظر گرفته‌ایم؟»، «بر کدام قضیه‌ها یا فرمول‌ها تکیه کرده‌ایم، آیا اثبات ریاضی آن‌ها را می‌دانیم؟»، «آیا شکل، ما را فریب نداده است؟»؛ و در یک کلام، همهٔ عمل‌ها و داوری‌های خود را جزءبه‌جزء بشکافیم و دست‌کم، خودمان، نسبت به درستی آن‌ها و درستی مفهوم‌ها و قضیه‌های مورد استنادمان، قانع شویم.

در **ادب ریاضی** این شماره از قول **کانت**، فیلسوف آلمانی، به این نکتهٔ مهم اشاره شده است.

کانت می‌گوید که هیچ چیز درحقیقت فضایی نیست و ظاهر فضایی اشیاء فقط چیزی است که در مغز ما نمایان می‌شود. اما علم وظیفه دارد جهان را به صورتی که برای ما ظاهر می‌شود و نه به‌صورتی که حقیقت دارد (و به عقیدهٔ کانت برای ما شناختنی نیست) مورد مطالعه قرار دهد. به عقیدهٔ کانت این فرضیه روشن می‌سازد که چرا هندسه علم است، یعنی روشن می‌سازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بسازیم. برخی تضادها که خود وی آن‌ها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامد او را ملزم به قبول این نتایج می‌سازد.



مقالهٔ دیگر این شماره در مورد اثبات شرطی است. در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** این شماره، که دربارهٔ **مجلهٔ آشتی با ریاضیات** به سردبیری **استاد پرویز شهریاری** است، مطلبی می‌خوانیم در مورد تدریس ریاضیات و تلاش برای بهتر کردن آن:

معلم باید پیش از آغاز کلاس‌ها به محتوای درس فکر کند و آن را با مطالبی اضافی از کتاب‌های جنبی و مرجع و نکات تاریخی و کاربردهای جالب بیاراید.

باید در جلسهٔ اول عنوان و موضوع درس را اعلام و یادآوری کند که برای یاد گرفتن آن درس به چه آگاهی‌هایی نیاز است.

روی تختهٔ سیاه نام خود و ساعاتی را که در دفتر خواهد بود، بنویسد.

روش خود را در مورد تکلیف شب، امتحانات و نمره دادن توضیح دهد.

هدف‌های کلاس را تشریح کند و راجع به یادداشت برداشتن و اندازهٔ آن و زمان‌های مناسب آن توضیح دهد. جای شاگردان را بداند و تکلیف شب آن‌ها را شخصاً و یکی‌یکی به آن‌ها بازگرداند. هنگامی که مطلبی برای کلاس آماده می‌کند به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازد و کوشش داشته باشد که هر کلاس را با مطالبی شروع کند که دانشجویان با آن‌ها آشنایی دارند و یک‌مرتبه داخل مطالب تازه نشود.

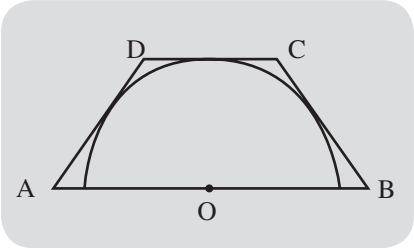
زیاد بپرسد و از دانشجویان مختلف بپرسد و حتی‌الامکان از سخنرانی‌های طولانی خودداری کند. به موقع سر کلاس بیاید، در کلاس به چشم دانشجویان نگاه کند و برای در و دیوار درس ندهد. روشن و شمرده و با صدای بلند صحبت کند. صدایش یکنواخت نباشد و درضمن صحبت مواظب تغییر چهرهٔ دانشجویان باشد. به دانشجو فرصت فکر کردن بدهد، به عبارت دیگر تمام وقت کلاس را با گفتن و شنیدن نگذراند. دانشجو را تشویق به پرسیدن کند. چون سؤالی مطرح شود ابتدا اطمینان حاصل کند که همه آن را شنیده‌اند و بعد به جواب آن بپردازد. حدس زدن را تشویق کند و سؤال‌های بد و جواب‌های نادرست را به مسخره نگیرد.

در این شماره، **راه‌حل مسئله مالفاتی** ارائه شده است. صورت این مسئله چنین است: رسم سه دایره در مثلثی معلوم، چنان‌که هریک از آن‌ها به دو دایرهٔ دیگر و دو ضلع مثلث مماس باشد.

مسائل مسابقه‌ای این شماره از آقای **محمدهاشم رستمی** است. صورت یکی از این مسائل به‌ترتیب زیر است:

مرکز دایره‌ای بر ضلع AB از چهارضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهار ضلعی بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید که:

$$AD+BC=AB$$



بعضی از مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

دیفرانسیل و انتگرال: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری؛

تعیین دامنه و برد توابع: سید محمدرضا هاشمی موسوی؛

مفهوم‌های اصلی و اصل موضوع‌ها در هندسهٔ فضایی: پرویز شهریاری؛

عمود مشترک دو خط متنافر: محمد ابراهیم گیتی‌زاده.

* * *

شمارهٔ ۸ این مجله مربوط به پاییز ۱۳۷۲ است. بهای این شماره ۱۰۰۰ ریال تعیین شده است.

در این شماره نیز مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** هم‌چنان حضور دارد. در این مقاله به نکات جالبی ازجمله نکتهٔ زیر اشاره شده است:

۱. حقیقت این است که همه‌چیز را نمی‌توان در کتاب درسی یا کتاب‌های دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسش‌های دانش‌آموزان یا بیان‌های درست و نادرستی که از زبان دانش‌آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲. هنوز عادت نشده است که معلمان و نویسندگان کتاب‌های درسی یا کمک‌درسی، سعی کنند همهٔ تجربه‌های دوران طولانی کار خود را روی کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

در مقالهٔ **در باغ تجربه‌های** این شماره مصاحبه‌ای آمده با **استاد بهنیا**، دبیر ریاضی برجستهٔ ایران.

در این مصاحبه آقای بهنیا می‌گوید:

زادگاهم «جوبُنه»، دهی است در ۱۵ کیلومتری شهر رشت. در یک روز سرد زمستان سال ۱۲۹۹ هجری شمسی که برف، ده را سفیدپوش کرده بود، در یک کلبهٔ روستایی به‌دنیا آمدم. مادرم، که گویا از قبل اندیشیده بود، در همان لحظه‌های اولیهٔ حیاتم، نامم را «غلامرضا» به‌معنای واقعی کلمه (غلامِ رضا) گذاشت تا امام هشتم مرا از جمیع بلایا حفظ کند. پدربزرگ (پدری‌ام) دهقان مرفه‌الحالی بود، به‌طوری که هر چند سال یک‌بار، پس از برداشت محصول به زیارت مشهد می‌رفت. مادربزرگم شیرزنی بود کاردان، که نه‌تنها بر جمیع کارهای خانه، بلکه به امور زراعتی هم نظارت می‌کرد. خودخواه و مستبد بود.

پدرم با کار زراعت به‌کلی بیگانه بود. کوره سوادی داشت، آن‌قدر که بتواند بخواند و بنویسد. با وساطت تنی چند از خویشاوندان متنفذ، به‌خصوص پدربزرگم، توانست در دایرهٔ «میاه» وابسته به دارایی سنگسر (یا دوشنبه‌بازار، بازار روز دهات اطراف) استخدام شود. کارش توزیع آب به شالیزارهای حوالی یکی از شاخه‌های سفیدرود (از امامزاده هاشم تا آستانهٔ اشرفیه) بود.

در آن سال‌هایی که آب سفیدرود نقصان پیدا کرده بود و شالیزارها با خطر کم‌آبی مواجه بودند، دهقانان بر سر تقسیم آب با داس و بیل به جان هم می‌افتادند و خون‌ها می‌ریختند. در یکی از این دعواها، پدرم از اسب سقوط کرد و استخوان پایش شکست. مدت‌ها قادر به حرکت نبود و خانه‌نشین شد. هر چند روز یک‌بار، برای پانسمان (خروج چرک) و مداوای جراحت، فتیله می‌گذاشتند. چون رفت و آمد شکسته‌بند از رشت به جوبنه مستلزم پرداخت مخارج گزافی بود، با تقاضای پدرم مبنی بر انتقال به رشت موافقت شد و ما به رشت کوچ کردیم.

مادر، دو خواهر دیگرم را به مکتب (ملاخانه)ای که در جوار خانهٔ ما بود فرستاد و خواهرانم، مرا هم با خود به ملاخانه می‌بردند. به این ترتیب از سن چهار سالگی پایم به مکتب‌خانه باز و گوشم با آیات قرآن آشنا شد. کلماتی را می‌شنیدم که بر اثر تکرار، ناخواسته در ذهنم نقش می‌بست. «ملا ربابه» مدیرهٔ مکتب، شخصاً عهده‌دار تدریس من شد و در اندک مدتی خواندن و نوشتن را به من آموخت.

در آن زمان، غرض از باسواد کردن فرزندان در درجهٔ اول، آشنایی آن‌ها با قرائت قرآن بود تا شب‌های جمعه برای آمرزش روح اموات، چند سوره‌ای بخوانند و فاتحه بدهند.

در مکتب، دیوان اشعار جودی، محزون و جوهری را که در رثای ائمه بود، می‌خواندیم و از روی آن می‌نوشتیم، ولی از حساب، حتی عددنویسی، مطلقاً خبری نبود.

اواسط بهار ۱۳۰۷ شمسی، پدرم دست مرا گرفت و به «مدرسهٔ مبارکهٔ اسلامی» برد مدیر مدرسه شخصاً از من امتحانی به‌عمل آورد و نامم را در کلاس اول دبستان ثبت کرد. یکی دو هفته بعد، امتحانات آخر سال فرارسید. با شاگردان کلاس امتحان دادم و به کلاس بالاتر رفتم.

به‌جز درس حساب، من در سایر دروسم موفق بودم. درحالی‌که بچه‌ها به سهولت اعداد را جمع و تفریق می‌کردند، من اعداد را نمی‌شناختم. بالاخره شد، آن‌چه انتظارش را می‌کشیدم و از آن وحشت داشتم. آموزگار کلاس در منتهای ناباوری وقتی یقین حاصل کرد که من قادر به نوشتن اعداد نیستم، با همان چوب

کذایی چنان ضربه‌ای به پشـــتم زد که بی‌هوش نقش زمین شدم و وقتی به اطلاع ایشـــان رسید که من شاگرد تازه‌واردم، از کردهٔ خود پشیمان شد و پس از استمالت و دلجویی، از من خواست که به پدر و مادرم چیزی نگویم. ضمناً به پرویز، هم‌کلاســـی‌ام، دستور داد که در ساعات تفریح عددنویسی و جمع و تفریق اعداد را به من بیاموزد و خود هر روز بر کار ما نظارت می‌کرد. این همکاری دو ســـه هفته ادامه یافت و من به کلاس رسیدم.

مابقـــی ایـــن مصاحبـــهٔ جالـــب را می‌توانید در همین شـــماره بخوانید.

این شـــماره نیـــز مقالهٔ **تاریخچـــهٔ مجلات ریاضـــی ایران** را دربردارد. یکی از مطالب جالب این مقاله، مطلبی اســـت که دربارهٔ الگوریتم آمده و قسمتی از آن به صورت زیر است:

الگوریتم، یکی از اساســـی‌ترین مفهوم‌های ریاضیات اســـت که با کمک مفهوم‌های ســـادهٔ‌تر از خودش تعریف رسمی ندارد. به‌طور کلـــی، الگوریتم به هر دســـتور دقیق و روشـــنی گفته می‌شـــود که یک روند محاســـبه‌ای را (که در این حالت، روند الگوریتمی نامیده می‌شـــود)، بر مبنای داده‌های اولیه، درپی داشته باشد (و البته این داده‌های اولیه، باید برای الگوریتم مورد نظر، ممکن باشد) و سپس ما را به نتیجهٔ کاملاً معینی برساند. در این مورد، محتوای هر دستور به‌جز دستورالعملی که برای مشخص کردن روند الگوریتمی به‌همراه دارد، باید دارای این ویژگی‌ها هم باشد: ۱) مجموعهٔ ممکن را برای داده‌های اولیه نشان دهد و ۲) شامل قانونی باشد که بنابر آن، روند کار به‌صورت به‌دست آوردن نتیجه به پایان برسد.

بـــاز، در **ادب ریاضـــی** ایـــن شـــماره از قـــول **نیوتـــن** از کتاب **ریاضی‌دانان نامی** چنین آمده است:

من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن اســـت در نظر جهانیان جلوه‌گر شـــوم، اما بـــه نظر خودم چنیـــن می‌آید که همچون کودک خردســـالی هستم که در ســـاحل زیبای دریا به بازی مشـــغولم و گاه‌وبی‌گاه ســـنگ‌ریزه‌ای صاف‌تر از ســـنگ‌های دیگر یا صدفی زیباتر از صدف‌های دیگر به دســـت می‌آورم، درحالی‌کـــه اقیانـــوس عظیم حقیقت در مقابل من گســـترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.

مســـائل مسابقه‌ای این شماره از **ســـید محمدرضا هاشمی موسوی** است. یکی از مسائل به‌صورت زیر است:

ثابت کنید اگر به حاصل‌ضرب هر چهار عدد که به‌صورت تصاعد حســـابی با قدر نســـبت d هســـتند مقدار d^4 را اضافه کنیم، حاصل همواره یک مربع کامل می‌شود.

بعضی مقالات دیگر این شماره عبارت است از:

فاصلهٔ یک نقطه از یک مجموعه نقاط: دکتر احمد شرف‌الدین؛

روش برهان خلف: غلامرضا یاسی‌پور؛

پارادوکس وصیت شگفت‌انگیز: حسن نصیرنیا؛

تحقیقی پیرامون عدد π: احسان رضایی.

* * *

در این شـــماره (شـــمارهٔ ۹) نیز مقالهٔ **شـــما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**، هم‌چنان در آغاز راه است و شما می‌توانید به خود آن مقاله مراجعه کنید.

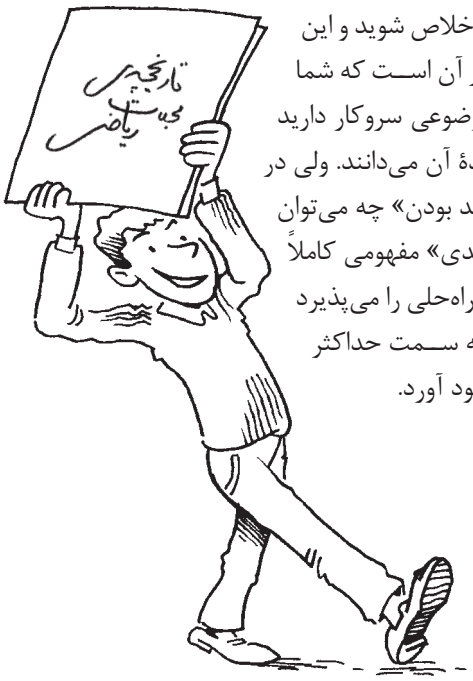
مقالهٔ **مکان هندسی محمدهاشم رستمی** نیز خواندنی است. در این مقاله در مورد اهمیت مکان هندسی چنین آمده است:

مکان‌های هندســـی علاوه بر آن‌که خود شـــامل قضایا و مسائل جالبی هســـتند، در دیگر بخش‌های هندسه نیز کاربردهای فراوانی دارنـــد؛ از جمله، مکان‌های هندســـی از ابزارهای مفید و مؤثر برای حل مسئله‌های ترسیم هندسی یا ساختمان‌های هندسی است.

عده‌ای ســـاختمان‌های هندسی یا ترسیم‌های هندسی را عنصر اصلـــی آمـــوزش ریاضی و وســـیله‌ای نیرومند و قوی بـــرای پرورش اســـتعدادها در زمینهٔ هندسه و به‌طور کلی ریاضی می‌دانند، که این مطلب خود، اهمیت مکان‌های هندسی را بیش‌تر نمایان می‌کند.

تاریخچـــهٔ مجلات ریاضی در ایران را در این شماره ملاحظه می‌کنیـــم. در این مقاله بـــه مقاله‌ای از مجلهٔ **آشـــتی با ریاضیات** اشـــاره شـــده که با عنـــوان **ریاضیـــات مرز ســـودمند بـــودن را مشـــخص می‌کند**، مطرح شده است. قسمتی از این مقاله را با هم می‌خوانیم:

هندسهٔ دبیرستان حتی از ساده‌ترین چیزها، مثل مثلث و دایره، چنان شـــبکهٔ به‌هم‌بافته‌ای از قضیه‌ها ایجاد می‌کند که به ســـختی می‌توانید از آن خلاص شوید و این بیش‌تر به خاطر آن اســـت که شما بدانید با چه موضوعی سروکار دارید و ایـــن را فایـــدهٔ آن می‌دانند. ولی در مورد «ســـودمند بودن» چه می‌توان گفت؟ «سودمندی» مفهومی کاملاً انتزاعی است و راه‌حلی را می‌پذیرد که کشـــش بـــه ســـمت حداکثر رضایت را به‌وجود آورد.



مسئله‌های باز کردن گاوصندوق

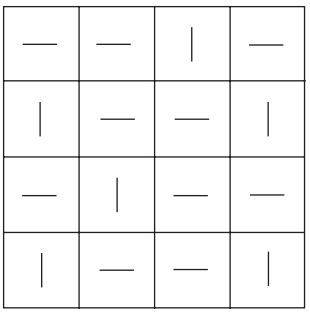
ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

برای آن‌که به‌طور کامل رعایت امانت‌داری را کرده باشم، ابتدا یادآور می‌شوم که منبع اصلی این مقاله، مسئله‌ای است که نخستین‌بار در مسابقهٔ ریاضی نیومکزیکو (دور نهایی سال ۲۰۰۲) برای دانش‌آموزان دبیرستان طرح شده بود. صورت این مسئلهٔ بسیار زیبا و شگفت‌انگیز چنین است:

یک گاوصندوق با یک قفل شامل یک جدول ۴×۴ از کلیدها داده شده است. هریک از این ۱۶ کلید می‌توانند در یکی از دو وضع (حالت) افقی یا قائم باشند. برای باز شدن گاوصندوق، همهٔ کلیدها باید در وضعیت قائم (عمودی) قرار بگیرند. وقتی شما یک کلید را می‌چرخانید، همهٔ کلیدهایی که در سطر یا ستون این کلید قرار داشته باشند، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و شما می‌توانید یک کلید را هر چند بار که بخواهید بچرخانید.

الف) اگر وضعیت شکل ۱ در زیر برای این کلیدها داده شده باشد، حداقل تعداد کلیدهایی که برای باز شدن گاوصندوق باید چرخانده شوند چندتاست؟ چه کلیدهایی باید بچرخند؟

ب) اگر شما مجاز به چرخاندن حداکثر ۲۰۰۲ بار کلید باشید، بزرگ‌ترین صفحه کلید ۲n×۲n یک گاوصندوق که همیشه می‌توانید آن را باز کنید، کدام است؟



شکل ۱

سعی کنید پیش از حل مسئله به شرایط گفته شده خوب فکر کنید و به‌ویژه به این موضوع توجه کنید که با چرخش هر کلید، شش کلید دیگر بدون این‌که به آن‌ها دست بزنید، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و هر کلید فقط در یکی از دو وضع عمودی یا افقی می‌تواند قرار بگیرد. به این صفحه کلید به مانند یک ماتریس مربعی ۴×۴ نگاه کنید. برای مثال اگر کلید واقع در سطر دوم و ستون سوم را بچرخانید و از حالت افقی، آن را به حالت عمودی تغییر حالت دهید، همهٔ سه کلید دیگر در سطر دوم و نیز کلیدهای ستون سوم، تغییر حالت می‌دهند و از افقی به قائم یا برعکس تغییر می‌کنند. پس با این توضیح می‌بینید که کار ما قدری مشکل می‌شود و عمودی کردن همهٔ کلیدها کاری آسان نیست. قدری فکر کنید.

* * *

برای شروع چه‌طور است پاسخ مسئله را بدهیم؟ (دیگر چه چیزی باقی می‌ماند؟!!ـ البته این را محض شوخی گفتم. حتماً می‌دانید که یک دانش‌پژوه و دانش‌دوست واقعی پیش از آن‌که به‌دنبال پاسخ مسئله یا حتی راه‌حل آن باشد، به‌دنبال ایدهٔ مسئله است تا اگر صورت مسئله تغییر کرد باز هم بتواند آن را حل کند و به پاسخ برسد. علاوه بر آن، قسمت «ب» مسئله هم هست و پاسخ به آن نیازمند کشف ایدهٔ کامل مسئله است. درواقع می‌خواهیم با دادن پاسخ مسئله وارد مسئله شویم

مطابق دیاگرام زیر کلیدها را نام‌گذاری می‌کنیم: a و b و c و... و p. جواب مسئله را می‌توانید در زیر ببینید. کافی است دو کلید b و k را به‌دنبال هم بچرخانیم.

مسلماً این راه‌حل همیشه جوابگو نیست و باید راه‌حلی کلی برای این مسئله پیدا کنیم. هدف از پاسخ‌گویی به این مسئلهٔ خاص، همان‌گونه که ذکر شد، ورود به مسئله است.

* * *

روشن است که اگر یک کلید را دو بار در جای خود بچرخانیم به وضع اولیهٔ خود بازمی‌گردد. بنابراین چرخاندن یک کلید به تعداد زوج بار معادل با نچرخاندن آن است و چرخاندن آن به تعداد فرد بار، معادل یک بار چرخاندن آن است. هم‌چنین بدیهی است که ترتیب چرخاندن کلیدها در یک رشته چرخش کلیدها به‌دنبال هم بی‌تأثیر است.

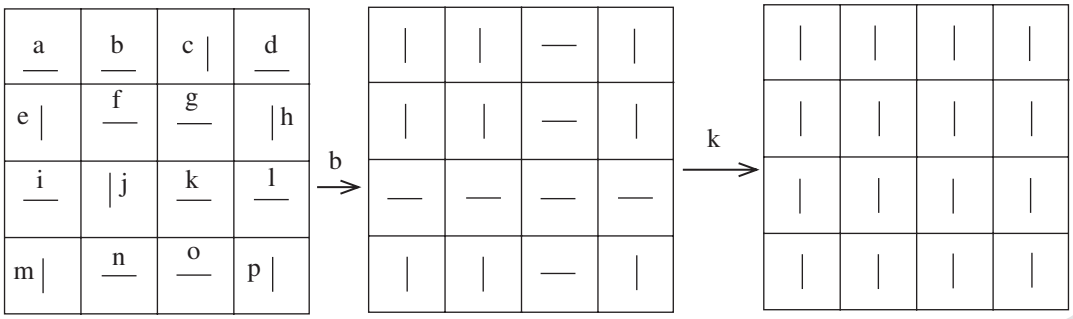
(یعنی برای مثال در این مورد، چرخش bk و چرخش kb یک نتیجه می‌دهند یا چرخش‌های abc و cba و bac و... یک نتیجه دارد).

حال به مسئلهٔ خودمان برگردیم. اگر می‌توانستیم یک کلید را بچرخانیم و این چرخش هیچ‌یک از کلیدهای دیگر سطر و ستون آن کلید را (به‌جز خودش) تغییر حالت ندهند، کار تمام بود، یعنی همهٔ کلیدهای افقی را عمودی می‌کردیم و کار تمام می‌شد!

اما مسئلهٔ ما همین است. چه مکانیزمی وجود دارد که براساس آن بتوان فقط یک کلید را تغییر حالت داد؟ راه‌حل مسئله این است که همهٔ کلیدهای موجود در آن ردیف و ستون را بچرخانیم. چرا چنین است؟ به همان صفحه کلید ۴×۴ خودمان نگاه کنیم. اگر کلیدهای مربوط به سطر و ستون a را بچرخانیم، کلید a هفت‌بار می‌چرخد (یک‌بار با لمس دست و شش بار دیگر به‌طور خودکار و هنگام چرخش شش کلید موجود در سطر و ستون آن). کلیدهای دیگر این رشته چه‌طور؟

روشن است که هریک از آن‌ها چهار بار می‌چرخند (یک‌بار با لمس دست و سه‌بار دیگر با چرخش سه کلید دیگر که در سطر یک ستون مربوط به آن‌ها می‌چرخند).

اما بقیهٔ ۹ کلید که در این رشته‌کلیدها (abcdeim) جای ندارند چه‌طور؟ هریک از آن‌ها در تقاطع یک سطر و یک ستون از کلیدهای این رشته قرار دارند. (برای مثال، کلید j در تقاطع سطر کلید i و ستون کلید ما است) پس با چرخش این دو کلید آن‌ها هم دو بار می‌چرخند، پس هریک از این ۹ کلید در این فرایند دو بار



شکل ۲

می‌چرخند. به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

شکل ۳

۷	۴	۴	۴
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲

شکل ۴

بنابراین، مطابق آن‌چه گفته شـد، همهٔ کلیدها (به‌غیر از a) که زوج‌بـار می‌چرخند به وضع اولیهٔ خـود برمی‌گردند و فقط کلید a تغییر حالت می‌دهد. اکنون یک راه‌حل ساده پیدا شده است. برای چرخاندن هر کلید بدون آن‌که کلیدهای دیگر بچرخند، کافی است همهٔ کلیدهای موجود در سـطر و سـتون آن کلید و خود آن کلید (یعنی هفت کلید) را به‌دنبال هم (به‌ترتیب دلخواه) چرخاند. نتیجهٔ نهایـی این فراینـد، چرخش همان یک کلیـد از حالت عمودی به افقی (یا برعکس) اسـت و سایر کلیدها تغییر وضع نمی‌دهند. پس کافی است همهٔ کلیدهای افقی را به این ترتیب تغییر حالت دهیم و کار تمام می‌شود. اما در این روش برای حل مسئلهٔ «الف»، نیاز به هفتاد بار چرخاندن کلیدها داریم! (برای تغییر حالت هر کلید افقی نیاز به چرخاندن هفت کلید داریم و چون ده کلید افقی داریم، پس به هفتاد بار چرخش کلید نیاز داریم).

ولی به‌هرحال مسـئلهٔ ما را حل می‌کنـد. اما چگونه می‌توانیم تعداد چرخش‌های کلیدها را تقلیل دهیم؟

بیاییم یک‌بار دیگر به مسـئلهٔ اصلی خودمان نگاه کنیم. دیدیم کـه برای تغییر حالـت ده کلید افقی، باید هفتاد بـار کلیدها را با لمس بچرخانیم. (توجه کنید که این غیر از چرخش‌های خودبه‌خود کلیدها در اثر چرخش کلیدهای دیگر است) رشتهٔ شامل ای هفتاد بار چرخش را در نظر بگیرید. مثلاً برای تغییر حالت کلید a، رشتهٔ abcdeim را بایـد بچرخانیم و... این دنبالهٔ هفتاد جمله‌ای شـامل چند حرف a است؟ چند حرف b؟ و...

آیا برای پاسخ به این سؤال باید همهٔ این هفتاد جمله را نوشت؟

البته نوشـتن آن کار دشواری نیسـت، ولی بدون آن هم می‌توانیم پاسخ این سؤال را بدهیم. کافی است توجه کنیم که مثلاً کلید a در سطر یا سـتون چند کلید افقی قرار دارد (و برای تغییر حالت آن‌ها باید چرخانده شـود). با کمی دقت درمی‌یابیم که برای تغییر حالت کلیدهـای افقـی a و b و d و i، باید کلید a چرخانده شـود، پس در رشتهٔ فوق کلید a، ۴ بار ظاهر می‌شود و به همین ترتیب کلید b، ۵ بار و کلید c ۶ بار و کلید d، ۴ بار و... به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

—	—	|	—
|	—	—	|
—	|	—	—
|	—	—	|

۴	۵	۶	۴
۴	۴	۴	۴
۴	۶	۵	۴
۴	۴	۴	۴

شکل ۵

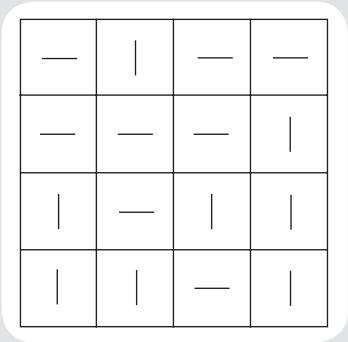
عددهای داخل هـر مربع جدول بالا معرف تعداد چرخش‌های هریک از کلیدها و مجموع این عددها مساوی ۷۰ است.

با توجه به عددهای فوق، بدیهی است که چرخش‌های زوج بی‌تأثیرند و چرخش‌های فرد نیز معادل یک‌بار چرخش‌اند. پس کلیدهای a، c، d، e، f، g، h، i، j، l، m، n، o و p هیچ نقشی در فرایند باز شدن گاوصندوق ندارند و لذا فقط کافی است کلیدهای b و k را بچرخانیم تا همین نتیجه عاید ما شود! (زیرا کلیدهای b و k هریک پنج‌بار چرخیده‌اند که معادل با یک‌بار چرخش آن‌هاست). پس با این فرایند همهٔ کلیدهای افقی به کلیدهای عمودی تغییر حالت می‌دهند و کار تمام است. بنابراین، ایدهٔ

کلی زیر می‌تواند به حل مسئله در حالت کلی بینجامد:

«برای هر کلید، عدد H، یعنی مجموع تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون آن کلید را (با احتساب خود آن) محاسبه می‌کنیم، اگر H فرد باشد، کلید را می‌چرخانیم و اگر H زوج باشد، بدون چرخش از آن کلید عبور می‌کنیم.» با نگاهی به شکل ۵ درمی‌یابیم که باید (و کافی است) کلیدهای b و k چرخانده شوند تا گاوصندوق باز شود.

حال به‌عنوان تمرین بگویید برای باز کردن گاوصندوقی که صفحه کلید آن به‌صورت زیر است، حداقل چند کلید (و کدام کلیدها) را باید چرخاند و سپس فرایند باز شدن گاوصندوق را نیز با رسم شکل نشان دهید:



* * *

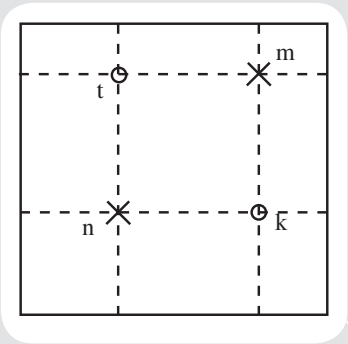
اکنون نوبت پاسخ‌گویی به قسمت دوم مسئله است. برای این منظور اندکی نظریه‌سازی لازم است. فرض کنید H تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون هر کلید باشد. دو اصل زیر را در نظر بگیرید:

۱. برای باز شدن گاوصندوق باید H برای هر کلید عمودی زوج باشد (و درنهایت به صفر برسد).

۲. تنها راه برای تغییر زوجیت H (یعنی زوج یا فرد بودن H) برای هر کلید، چرخاندن همان کلید است و چرخاندن کلیدهای دیگر هیچ تأثیری در زوجیت H کلید مزبور ندارد.

گمان می‌کنم درستی گزارهٔ اول را به آسانی می‌پذیرید، اما در مورد گزارهٔ دوم کمی توضیح می‌دهیم. مفهوم این گزاره آن است که چرخاندن هریک از کلیدها به غیر از کلید اصلی، زوج یا فرد بودن تعداد کلیدهای افقی و سطر و ستون آن کلید را تغییر نمی‌دهد. برای اثبات این موضوع دو حالت را در نظر می‌گیریم. یکی این‌که کلید چرخانده شده متعلق به سطر یا ستون همان کلید باشد و دیگر این‌که در این سطر و ستون نباشد. در حالت اول واضح است که اگر صفحه‌کلیدها ۲n×۲n باشد، چرخاندن این کلید وضع همهٔ کلیدهای موجود در سطر (یا ستون) کلید اصلی را عوض می‌کند، پس هر کلیدی را که افقی باشد، عمودی و هر کلید عمودی را افقی می‌کند. لذا اگر یک کلید افقی را کم کند، در مقابل یک کلید عمودی را نیز افقی می‌کند، پس زوجیت H را عوض نمی‌کند. اما اگر این کلید در هیچ سطر و هیچ ستون مربوط به کلید اصلی نباشد، یک سطر و یک ستون دیگر را عوض می‌کند. محل تقاطع این سطر و ستون را با سطر و ستون کلید اصلی در نظر بگیرید که دو کلید است (شکل ۶ را ببینید). هر دو این کلیدها تغییر حالت پیدا می‌کنند، پس یا دو کلید از سطر و ستون کلید اصلی افقی می‌شوند، یا هر دو عمودی خواهند شد یا این‌که یکی از افقی‌ها عمودی می‌شود و دیگری از عمودی به افقی تغییر حالت می‌دهد. پس در هر صورت، زوجیت H عوض نمی‌شود.

(با چرخاندن کلید k، کلیدهای m و n از سطر و ستون مربوط به کلید t تغییر حالت می‌دهند و بنابراین زوجیت H مربوط به کلید t عوض نمی‌شود).



شکل ۶

نتیجهٔ این بحث نسبتاً طولانی آن است که اگر یک صفحه کلید ۲n×۲n داشته باشیم، حداکثر چرخش‌های لازم برای تغییر حالت همهٔ کلیدها به حالت عمودی آن است که ناچار به تغییر حالت همهٔ کلیدها شویم (و این در صورتی است که H برای همهٔ کلیدها فرد باشد) و اگر ناچار به حداکثر ۲۰۰۲ بار چرخش کلیدها باشیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$۴n^۲ \leq ۲۰۰۲ \Rightarrow ۲n \leq ۴۴$$

یعنی بزرگ‌ترین صفحه کلید گاوصندوقی که همواره بازشدنی است، یک صفحه کلید ۴۴×۴۴ است.

تا این‌جا بحث تمام است، اما می‌خواهیم کمی دیگر حوصله کنید! و به دو سؤال دیگر من هم فکر کنید.

سؤال اول این‌که این بحث به کدام‌یک از شاخه‌های دانشی (ریاضی که تا به‌حال شناخته‌اید مربوط می‌شود؟ در حل آن به کدام‌یک از اصول و قضایای ریاضی که قبلاً دیده‌اید اتکا شده است؟)

و سؤال دوم که با خود بحث بیش‌تر ارتباط دارد، این است که در تمام این بحث فرض ما بر این بود که تعداد سطرها و ستون‌های این صفحه کلید عددی زوج است. آیا این نتایج وقتی که تعداد سطرها و ستون‌ها عددی فرد باشد، باز هم صادق‌اند؟ مثال بزنید و نتیجه‌گیری کنید. اگر این نتایج در آن‌جا برقرار نیستند، راه‌حل مسئله در آن حال چیست؟ اگر صفحه کلید مربعی نباشد، چه‌طور؟ به این موضوع فکر کنید و اگر نتایج قابل عرضه‌ای به‌دست آوردید ما را هم باخبر کنید. از همین حالا شروع کنید! مطمئن باشید تلاش بیهوده‌ای نیست.

حل معادلهٔ $f(x)=0$

احمد قندهاری

معادلــهٔ $f(x)=0$ در حالت کلی و بــرای هر عبارت از $f(x)$ قابل حل نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را حل کرد، ولی راه‌هایی وجود دارد که مقدار تقریبی ریشــه‌ها را مشخص می‌کند و معمولاً به ماشین‌حســاب نیاز داریم. قبل از ورود به این مبحث، قضیهٔ زیر را یادآور می‌شویم.

قضیهٔ بولتزانو

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوســته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=0$ در بازهٔ (a,b) یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حال به ادامهٔ بحث می‌پردازیم:

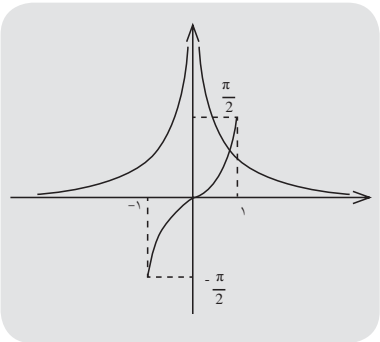
روش اول: تعیین تعداد ریشــه‌های معادلــهٔ $f(x)=0$ به کمک نمودار عبارت $f(x)$ را به صورت $f(x)=g(x)-h(x)$ می‌نویسیم، سپس نمودارهــای دو تابع g و h را رســم می‌کنیم. تعداد نقاط تقاطع دو منحنی g و h برابر تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است.

مثال ۱: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^2\operatorname{Arctan} x-1=0$ را بیابید.

حــل: فــرض می‌کنیــم $f(x)=x^2\operatorname{Arctan} x-1$. مســلماً در معادلــهٔ $x^2\operatorname{Arctan} x-1=0$، $x\neq 0$ دو طــرف تســاوی را بــر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$x^2\operatorname{Arctan} x-1=0 \Rightarrow \operatorname{Arctan} x-\frac{1}{x^2}=0$$

حال فرض می‌کنیم $g(x)=\operatorname{Arctan} x$ و $h(x)=\frac{1}{x^2}$ باشند. نمودارهای دو تابع g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طــوری که ملاحظه می‌شــود نمودارهــای دو تابع g و h در یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادلهٔ $x^2\operatorname{Arctan} x-1=0$ یک ریشــهٔ حقیقی دارد.

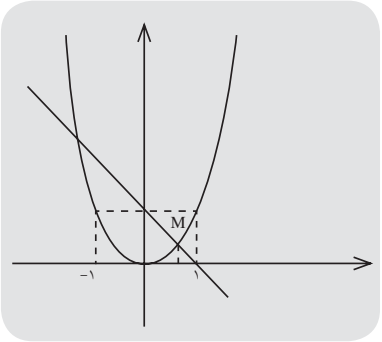
مثــال ۲: تعداد ریشــه‌های معادلــهٔ $x^6+x-1=0$ را بیابید و ریشهٔ مثبت آن را با تقریب محاسبه کنید.

حل:

$$f(x)=x^2+x-1=x^6-(1-x)=0$$

$f(x)=g(x)-h(x)$ پــس $h(x)=1-x$ و $g(x)=x^6$ حال

نمودارهای g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طوری که نمودار نشان می‌دهد، معادلهٔ $x^{۶}+x-۱=۰$ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه دارد.

به نظر می‌آید که ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=۰$ یعنی x_M حدود ۰/۶ باشد.

$$\begin{cases} f(۰/۶)=-۰/۱۸۴ \\ f(۰/۷)=۰/۰۴۳ \end{cases} \Rightarrow f(۰/۶).f(۰/۷)$$

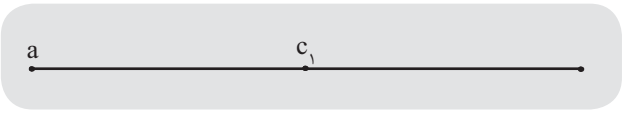
بنا به قضیهٔ بولتزانو معادلهٔ $f(x)=۰$ یک ریشه بین ۰/۶ و ۰/۷ دارد، یعنی $۰/۶<x_M<۰/۷$.

روش دوم. روش نصف کردن

فرض کنید می‌خواهیم ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x)=۰$ را که در بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد، بیابیم. با فرض این‌که f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد بنا به قضیهٔ بولتزانو داریم:

ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین a و b هست $\Rightarrow f(a).f(b)<۰$

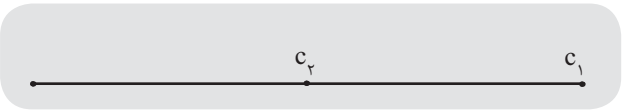
حال $\frac{a+b}{۲}$ را $c_۱$ فرض می‌کنیم



الف) اگر $f(a).f(c_۱)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۱$ است.

ب) اگر $f(c_۱).f(b)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و b است.

برای ادامهٔ کار فرض می‌کنیم حالت «الف» درست باشد، یعنی ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین $c_۱$ و a است. حال $\frac{a+c_۱}{۲}$ را $c_۲$ می‌نامیم.



ج) اگر $f(a).f(c_۲)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۲$ است.

د) اگر $f(c_۲).f(c_۱)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و $c_۲$ است.

و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به گرد کردن عدد، به ریشهٔ معادله نزدیک می‌شویم.

مثال: ریشهٔ معادله $x^{۳}+x-۱=۰$ را که بین (۰،۱) قرار دارد، بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $f(x)=x^{۳}+x-۱$

$$\begin{cases} f(۰)=-۱ \\ f(۱)=۱ \end{cases} \Rightarrow f(۰).f(۱)<۰ \Rightarrow ۰<x<۱$$

حال وسط بازهٔ (۰،۱) را در نظر می‌گیریم: $\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}-۱=۰/۳۷۵,\ f(۱)=۱$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲}).f(۱)<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<۱$$

حال وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

$$f(\frac{۳}{۴})=\frac{۲۷}{۶۴}+\frac{۳}{۴}-۱=۰/۱۷۲,\ f(\frac{۱}{۲})=-۰/۳۷۵$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲}).f(\frac{۳}{۴})<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۴}$$

اینک وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{۲}=\frac{۵}{۸}$

$$f(\frac{۵}{۸})=\frac{۱۲۵}{۵۱۲}+\frac{۵}{۸}-۱=-۰/۱۳,\ f(\frac{۳}{۴})=۰/۱۷$$

$$\Rightarrow f(\frac{۳}{۴}).f(\frac{۵}{۸})<۰ \Rightarrow \frac{۵}{۸}<x<\frac{۳}{۴}$$

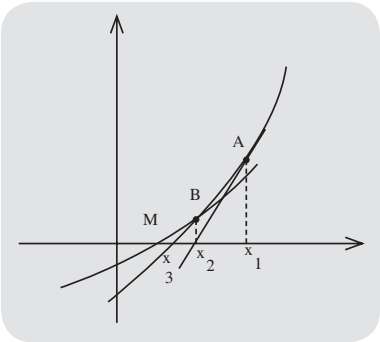
$$\Rightarrow ۰/۶۲<x<۰/۷۵ \xrightarrow{\text{با توجه به گرد کردن اعداد}} ۰/۶<x<۰۷$$

روش سوم: روش نیوتن

این دانشمند بزرگ حدود ۴۰۰ سال پیش، روش بسیار کارایی برای حل معادلهٔ $f(x)=۰$ ارائه داده است.

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. ابتدا تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم نمودار تابع f محور xها را در نقطهٔ M قطع کرده است. می‌خواهیم طول نقطهٔ M را بیابیم.

در نزدیکی‌های نقطهٔ M روی محور xها، $x_۱$ را در نظر می‌گیریم. به وسیلهٔ رابطه موازی محور yها به نقطهٔ A روی منحنی f می‌رسیم. در نقطهٔ A مماس بر منحنی f را رسم می‌کنیم.



معادلهٔ این خط مماس چنین است

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

حال طول نقطهٔ تقاطع این خط مماس بر محور xها را x_2 می‌نامیم:

$$y = 0 \Rightarrow 0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حال از x_2 رابطی موازی محور yها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f را در نقطهٔ B قطع کند. معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطهٔ B به طول x_2 می‌نویسیم. فرض می‌کنیم این خط مماس محور xها را در نقطه‌ای به طول x_3 قطع کند. این عمل را هر چند بار که لازم باشد می‌توان ادامه داد. ریشهٔ معادلهٔ f(x)=0 یعنی طول نقطهٔ M با تقریب بسیار قابل قبولی محاسبه می‌شود.

فرمول کلی روش نیوتن چنین است:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

مثال: می‌خواهیم ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 - 7 = 0$ را محاسبه کنیم (در واقع می‌خواهیم مقدار $\sqrt{7}$ را محاسبه کنیم).

حل: $f(x) = x^2 - 7$ و $f'(x) = 2x$

x_1 را ۲ فرض می‌کنیم؛ داریم: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_1 = 2\ ;\ x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-3}{4} = 2/75 = x_2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2/75 - \frac{f(2/75)}{f'(2/75)} = 2/75 - \frac{0/5625}{5/5} = 2/647 = x_3$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2/647 - \frac{f(2/647)}{f'(2/647)} = 2/64575$$

اگر با ماشین حساب $\sqrt{7}$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت: $\sqrt{7} = 2/645751311$ ملاحظه می‌کنید که روش نیوتن چه‌قدر به مقدار واقعی نزدیک است.

مسئله: نشان دهید که معادلهٔ $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$f(0) = 1,\ f(1) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(2) = -3,\ f(3) = 1$$

$$f(-1).f(0) < 0 \Rightarrow -1 < x_1 < 0$$

$$f(0).f(1) < 0 \Rightarrow 0 < x_2 < 1$$

$$f(2).f(3) < 0 \Rightarrow 2 < x_3 < 3$$

پس معادلهٔ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

تفریح اندیشه

گفت‌وگوی دو مسافر

در کشورهایی از خاورمیانه، دو نفر هر چند ناآشنا باشند و برای نخستین بار باشد که به هم رسیده‌اند، پرس‌وجو کردن آن‌ها از کار و بار یکدیگر و از تعداد فرزندانی که دارند و از کارهای آن‌ها، یک امر عادی است.

دو تن، که آن‌ها را الف و ب می‌نامیم، در یک مسافرت با اتوبوس کنار هم جای گرفته بودند. پس از احوالپرسی و خوش و بش کردن، الف از ب می‌پرسد که چند فرزند دارد. ب پاسخ می‌دهد که سه فرزند، به نام‌های رضا، احمد و حمید، که یکی از آن‌ها ۲۰ سال، دیگری بیشتر از ۲۰ سال و آن دیگری کمتر از ۲۰ سال دارد. ب می‌گوید: لابد رضا پسر بزرگتر و حمید پسر کوچکتر است؟

الف پاسخ می‌دهد:

ـ نه. اگر فرض کنید رضا ۲۰ ساله است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر بزرگتر است. اگر فرض کنید رضا پسر بزرگتر است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر کوچکتر است، اگر فرض کنید احمد ۲۰ ساله نیست، نتیجه‌اش آن خواهد شد که حمید پسر بزرگتر است. این سه فرض را که با هم بسنجید، می‌توانید دریابید از فرزندانم کدام پسر بزرگتر، کدام پسر کوچکتر و کدام ۲۰ ساله است!

پاسخ در صفحه ۳۷

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی/ ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی/ انتشارات مدرسه

مسئله چیست؟

و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟

محمد هاشم رستمی

انسان‌ها همواره با مسئله‌های مختلفی، سروکار داشته‌اند و برای حل آن‌ها پیوسته کوشیده‌اند. این راه‌حل‌ها در بسیاری از موارد متفاوت‌اند. به عنوان مثال برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس تاکنون حدود ۴۰۰ راه‌حل متفاوت ارائه شده است. نوع مسئله‌ها و آسانی، یا دشواری راه‌حل آن‌ها در زمان‌های مختلف متفاوت بوده‌اند. به مسئله‌هایی از پاپیروس رایند که حدود ۱۸۰۰ تا ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد یعنی تقریباً حدود ۴۰۰۰ سال پیش نوشته شده است توجه کنید:

مسئلهٔ ۱. هفت نفر هر کدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بگیرد. هر موش می‌تواند هفت خوشهٔ جو را بجود و هر خوشهٔ جو، هفت دانه جو دارد. بزرگ‌ترین عدد این ردیف و مجموع آن‌ها کدام است؟

مسئلهٔ ۲. مصری‌ها برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصل ضرب قاعدهٔ آن در یکی از ساق‌ها را به دست می‌آوردند. درصد اشتباه آن‌ها را برای حالتی که قاعدهٔ مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

و اینک، یک مسئله از پاپیروس مسکو که به سال ۱۸۵۰ قبل از میلاد یعنی حدود ۳۸۶۰ سال پیش نوشته شده است، توجه کنید.

مسئله. حجم هرم ناقصی را پیدا کنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعدهٔ پایین آن برابر ۴ و ضلع مربع قاعدهٔ بالای آن برابر ۲ باشد.

یک مسئله از بابلی‌ها (حدود ۳۰۰ سال پیش)

مسئله. زاویهٔ قائمه را به سه قسمت برابر تقسیم کنید.

یک مسئله از اقلیدس (سدهٔ سوم پیش از میلاد)

مسئله. متوازی‌الاضلاعی بسازید که زاویهٔ بین دو ضلع آن

معلـوم و مسـاحت آن برابـر مسـاحت یک مثلث مفروض باشد.

یک مسـئله از ارشـمیدس (۲۸۸-۲۱۲ قبل از میلاد)

مسـئله. مساحت قطاع کروی برابر است با مسـاحت دایـره‌ای که شـعاع آن برابر باشـد با پاره‌خطی که رأس قطاع را به یکی از نقطه‌های قاعدهٔ آن وصل می‌کند.

یک مسئله از بطلمیوس (سدهٔ دوم قبل از میلاد)

مسـئله. ثابت کنیـد در هر چهار ضلعـی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر اسـت با مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌روی ضلع‌های روبه‌رو.

یـک مسـئله از ابن‌سـینا، دانشـمند ایرانـی (۱۰۳۷-۹۸۰ میلادی).

مسـئله. اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقی‌ماندهٔ ۱ یا ۸ برسد، مجـذور آن عـدد در تقسـیم بـر ۹ باقی‌مانده‌ای برابـر ۱ خواهد داشت.

یک مسئله از کرجی (سدهٔ یازدهم میلادی)

مسئله. این دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

شـبیه این مسئله‌ها را که برخی از آن‌ها حتی به ده هزار سال قبل تعلق دارند، در آثار به جای مانده از تمدن‌های عهد باسـتان، ماننـد تمدن‌های ایرانی، بابلی، مصـری، هندی، چینی و... به وفور می‌توان یافت. از آن جمله اسـت آثار به دسـت آمده در لوحه‌های شـوش از ایـران، پاپیروس‌های مصـر، کتاب‌هـای مختلف یونان باستان، رساله‌های باهشالی و... هندی، رساله‌های «نه فصل از هنر محاسبه» و «ریاضیات در نه کتاب» چینی.

بنابراین مسـئله و حل مسـئله ریشه در تاریخ بشـر دارد. اما مسئله چیست و چگونه می‌توان آن را حل کرد؟

مسـئله، موضوع بغرنج و پیچیده‌ای نیست. ما در زندگی خود همواره با انواع مسـئله‌ها سـروکار داریم و بیش‌تر ما آن‌ها را حل می‌کنیم. پس نباید از مسـئله بترسـیم. و آن را غولی رام‌نشـدنی تصور کنیم.

ـ رفتن از خانه به مدرسه؛

ـ خریدن نان از نانوایی؛

ـ رفتن به مسافرت؛

ـ انجام تکالیف داده شده در مدرسه به دست یک دانش‌آموز؛

ـ چگونگی کاشت، داشت و برداشت یک محصول برای گرفتن بهترین بازده؛

ـ تعمیر یک ماشین که نقص فنی دارد؛

ـ باز کردن یک قفل بسته شده؛

ـ ...

و هزاران مورد مشابه دیگر، هر کدام یک مسئله‌اند.

پس مسئله را نباید تنها مسئله‌های مربوط به ریاضیات، فیزیک، شیمی و دیگر علوم بدانیم.

به نظر شـما در هر یک از مسـئله‌های بالا، چه عواملی دخالت دارند؟

در یک مسئلهٔ هندسه چه عواملی دخالت دارند؟ در یک مسئلهٔ فیزیک چه عواملی می‌توان یافت؟

همهٔ مسـئله‌ها از جمله مسـئله‌های بالا، عامل‌های مشـترکی دارند، یا به بیان دیگر؛ سـاختاری یکسـان دارند. بیایید مطلب را بیش‌تر بررسی کنیم.

در مسـئلهٔ رفتن دانش‌آموز از خانه به مدرسه، یک عامل مهم، خواسـتهٔ مسـئله، یعنی حرکت کردن دانش‌آموز از خانه و رسیدن او به مدرسه اسـت. اما ببینیم چه چیزهایی باید مشخص و معلوم باشد؛ از جمله:

۱) فاصلهٔ خانه تا مدرسه چه‌قدر است؟

۲) چند مسیر برای رسیدن از خانه به مدرسه وجود دارد؟

۳) چگونه این مسیر باید پیموده شود؟ با پای پیاده، با دوچرخه، با موتورسیکلت، با ماشین یا با وسیله‌ای دیگر؟

۴) سـرعت پیمایش مسـیر در هـر یک از موارد بـالا چه‌قدر است؟

۵) ...

بـا معلوم بودن این مـوارد، دانش‌آموز یا والدیـن او می‌توانند طوری برنامه‌ریزی کنند که در حداقل زمان ممکن و با اسـتفاده از ایمن‌ترین راه، دانش‌آموز به مدرسه برسد.

بنابرایـن معلومـات یـا داده‌هـای مسـئله یک عامـل مهم و تعیین‌کنندهٔ دیگر در مسئله و هم‌چنین، حل آن خواهند بود.

آیا فکر می‌کنید حل این مسـئله همواره امکان‌پذیر است؟ آیا شرط یا شرط‌هایی برای تحقق این مسئله وجود ندارد؟

پاسـخ مثبت اسـت. شـما خود برخی از آن‌ها را بیابید و برای ما بنویسـید. بـه جامع‌ترین و جالب‌ترین پاسـخ‌ها چنـد جلد از دایره‌المعارف هندسه اهدا خواهد شد.

به یک مسئلهٔ دیگر از موارد یاد شده می‌پردازیم.

مسئله. تلویزیون شما چند اشکال فنی پیدا کرده است و می‌خواهید آن را تعمیر کنید. مثلاً تصویر برفکی دارد، صدای آن قطع و وصل می‌شود، پس از چند دقیقه روشن بودن، ناگهان خاموش می‌شود و... همهٔ وسایل لازم برای تعمیر یک تلویزیون هم در اختیار شماست. آیا می‌توانید آن را تعمیر کنید؟ پاسختان چیست؟ فکر کنید. در ضمن شما تعمیرکار تلویزیون هم نیستید.

روشن است که شما دلیل به‌وجود آمدن نقص‌های ایجاد شده را نمی‌دانید. به عبارت دیگر مجهول‌های مسئله را نمی‌شناسید. به علاوه ساختار و روش استفاده از ابزاری را که برای تعمیر در اختیار شماست نمی‌شناسید. یعنی به معلومات و داده‌هایی که در اختیار شماست اشراف ندارید. بنابراین واضح است که قادر به حل مسئله یعنی برطرف کردن نقص فنی تلویزیون خود نخواهید بود. اما یک سرویس‌کار تلویزیون چه‌طور؟

سرویس‌کار تلویزیون، تمام ساختمان تلویزیون را می‌شناسد، می‌داند که وقتی تصویر برفکی است اشکال در کدام قطعه از تلویزیون مربوط است یا قطع و وصل شدن صدا به کدام قطعه مربوط است و...؛ یعنی مجهولات مسئله را می‌شناسد. به‌علاوه ساختمان تمام ابزار لازم برای تعمیر تلویزیون و چگونگی استفاده از آن‌ها را نیز کاملاً می‌شناسد. به بیان دیگر به معلومات مسئله کاملاً آگاه است. پس به‌راحتی تلویزیون شما را تعمیر می‌کند و نقص‌های آن را برطرف می‌سازد.

در این مسئله نیز دیدید که شناخت کامل از مجهولات مسئله و هم‌چنین شناخت کامل از معلومات یا داده‌های مسئله هم‌چنین شرط سرویس کاربودن شما برای حل مسئله الزامی است.

ساختار مسئله‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و... را نیز می‌شناسید. برای مثال، در مسئلهٔ زیر:

مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ ضلع‌های آن a، b و c باشند.

خواسته یا مجهول مسئله، رسم یک مثلث است.

داده‌های آن اندازهٔ سه ضلع آن، یعنی a، b و c است.

شرط آن امکان وجود مثلثی با ضلع‌های a، b و c یعنی $|b-c| < a < b+c$ است. به‌طور کلی با بررسی هر مسئله‌ای می‌بینید که:

مسئله، مجموعه‌ای از مجهول‌ها یا خواسته‌ها، معلوم‌ها یا داده‌ها و شرط یا شرط‌های امکان وجود مسئله است.

به بیان دیگر، هر مسئله سه بخش مهم به شرح زیر دارد:

۱) مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله؛

۲) معلومات یا داده‌های مسئله؛

۳) شرط یا شرط‌های ممکن بودن مسئله.

اما منظور از حل مسئله چیست؟

حل مسئله؛ یعنی پیداکردن مجهول‌ها یا رسیدن به خواسته‌های مسئله، با استفاده از معلوم‌ها (یا داده‌های مسئله) به شرط امکان وجود مسئله.

دربارهٔ شرط وجود مسئله تأکید زیادی داشتیم. با یک مثال عددی از رسم مثلثی با معلوم بودن طول سه ضلع آن، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۱۵، ۱۰ و ۲۰ باشند.

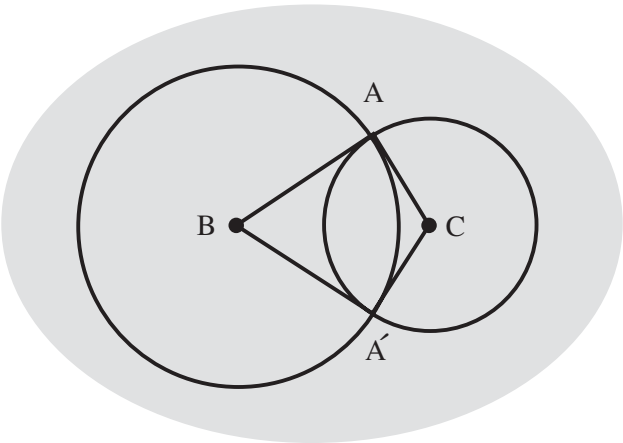
حل. چون اندازهٔ هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، یعنی

۱۵ <۲۰+۱۰ یا ۱۵<۳۰

۱۰ <۲۰+۱۵ یا ۱۰<۳۵

۲۰ <۱۵+۱۰ یا ۲۰<۲۵

پس مثلثی با طول ضلع‌های ۱۵، ۱۰ و ۲۰ وجود دارد. برای رسم این مثلث پاره‌خطی به طول یکی از ضلع‌ها، مثلاً پاره‌خط BC به طول ۲۰ رسم می‌کنیم، سپس به مرکز B و به شعاع ۱۵ یک دایره و به مرکز C و به شعاع ۱۰ دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این دو دایره، یعنی A و A′ رأس سوم مثلث‌های همنهشت ABC و A′BC هستند. اکنون به مسئلهٔ زیر توجه کنید.



مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۳، ۱۲ و ۷ باشد.

حل. شرط وجود مثلث را می‌نویسیم.

۳ <۱۲+۷ ⇒ ۳<۱۹ درست است برقرار است

۱۲ <۳+۷ ⇒ ۱۲<۱۰ درست نیست برقرار نیست

۷ <۳+۱۲ ⇒ ۷<۱۵ درست است برقرار است

به‌طوری که دیده می‌شود یکی از شرط‌ها برقرار نیست، زیرا ۱۲ از ۷+۳=۱۰ کوچک‌تر نیست، بنابراین مثلثی با طول ضلع‌های

۳، ۱۲ و ۷ وجود ندارد. به بیان دیگر، شرط وجود مثلث با عددهای داده شده برقرار نیست. بنابراین، چنین مثلثی وجود ندارد. پس حل آن هم منتفی است.

اکنون به بحث:

چگونه می‌توانیم مسئله را حل کنیم؟

می‌پردازیم.

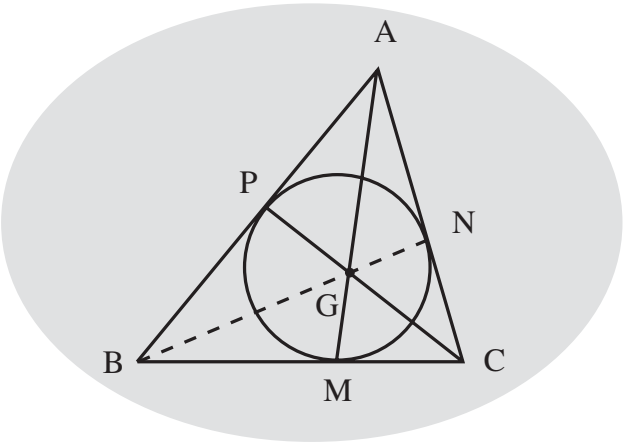
برای پاسخ‌دادن به این سؤال روش‌های مختلفی را می‌توان بیان کرد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها روش حل مسئلهٔ جورج پولیا (۱۸۹۰-۱۹۸۸)، آموزشگر بزرگ ریاضی، است که این روش را در کتاب «*چگونه مسئله را حل کنیم؟*» آورده است. در این‌جا کلیاتی از این روش را خواهیم دید. اما قبل از ارائهٔ روش حل مسئلهٔ پولیا، با بررسی مطالبی که تاکنون دربارهٔ ساختار مسئله و چگونگی حل آن بیان کردیم، یک نکتهٔ بسیار اساسی مشخص می‌شود و آن این است که:

ـ مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله، معلوم‌ها یا داده‌های مسئله و شرط یا شرط‌های مسئله را کاملاً بشناسیم (مفاهیم اولیهٔ مرتبط با هر کدام را بشناسیم، تعریف‌ها و ویژگی‌های هر یک از عوامل بالا را بدانیم، قضیه یا قضیه‌های مرتبط یا به‌طور کلی مفهوم‌های مرتبط با این عوامل را بدانیم و پیوندهای ارتباطی بین این مفاهیم را بشناسیم.

نداشتن شناخت کافی دربارهٔ هر یک از مفاهیم ارائه شده در هر یک از سه بخش مهم مسئله، یعنی ۱) مجهول‌ها، ۲) معلوم‌ها، ۳) شرط مسئله، موجب خواهد شد که برای حل کردن مسئله با دشواری روبه‌رو شویم.

با ذکر یک مثال، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

مثال. ثابت کنید خط‌هایی که رأس‌های یک مثلث را به نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلع روبه‌رو وصل می‌کنند، همرس‌اند (این مسئله به مسئلهٔ ژرگون، ریاضی‌دان فرانسوی، مشهور است و این نقطهٔ همرسی را نقطهٔ ژرگون مثلث می‌نامند).



در این مسئله، مجهول یا خواستهٔ مسئله، اثبات همرس‌بودن سه خط است. اگر تعریف همرس بودن خط‌ها را ندانیم، بدیهی است که قادر به حل مسئله نخواهیم بود، زیرا در این صورت نمی‌دانیم چه چیزی را می‌خواهیم ثابت کنیم، هم‌چنین داده‌های مسئله را باید کاملاً بشناسیم. مثلث چه‌گونه شکلی است؟ دایرهٔ محاطی مثلث چیست و چه ویژگی‌هایی دارد؟ آیا همواره مسئله امکان‌پذیر است؟ شرط همرس بودن چند خط چیست؟ با چه روش‌هایی می‌توان ثابت کرد که چند خط همرس‌اند؟ چه قضیه‌هایی دربارهٔ همرس بودن خط‌ها در مثلث وجود دارد؟ خط‌های همرس در مثلث کدام‌اند؟ آیا خط‌های داده شده در این مسئله جزء خط‌های مهم همرس در مثلث (ارتفاع‌های مثلث، میانه‌های مثلث، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث، نیمساز یک زاویهٔ درونی و دو نیمساز دو زاویهٔ برونی دیگر مثلث) هستند یا خیر؟ «قضیهٔ سوا» و «عکس قضیهٔ سوا» چیست؟ و چندین مورد دیگر.

جورج پولیا، آموزشگر ریاضی، مسئله‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند:

الف) مسئله‌های یافتنی؛

ب) مسئله‌های ثابت‌کردنی.

نمونه‌هایی از مسئله‌های یافتنی:

۱. مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن ۶، ۸ و ۹ سانتی‌متر باشند.

۲. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابتی برابر K^2 باشد.

۳. عددی بیابید که مجذور آن به علاوهٔ دو برابرش مساوی ۱۵ باشد.

۴. حجم هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ منتظمی را به دست آورید که طول ضلع قاعده‌اش برابر ۱۲ و سهم هرم مساوی ۱۰ باشد.

۵. با ۶ رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

نمونه‌هایی از مسئله‌های ثابت‌کردنی:

۱. ثابت کنید که ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

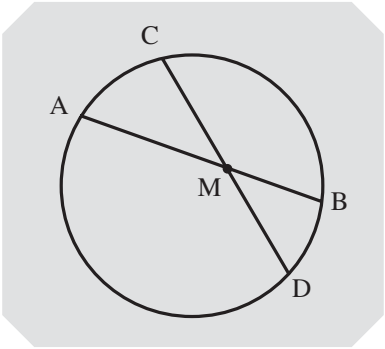
۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت $K>0$ باشد، یک دایره است که قطرش، آن پاره‌خط را به نسبت K تقسیم می‌کند.

۳. ثابت کنید هر خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کند (قضیهٔ تالس در صفحه).

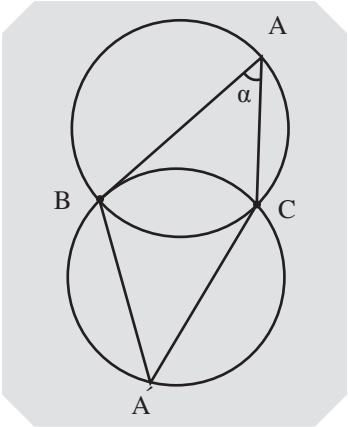
۴. ثابت کنید هرگاه سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع نظیرشان از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۵. حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ وتری که از یک نقطهٔ واقع در درون یک دایره رسم می‌شوند، با هم برابر است

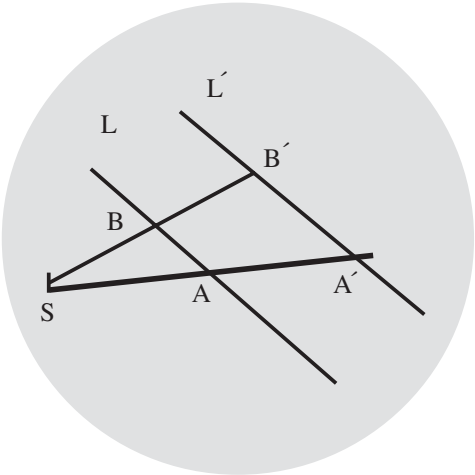
.(MA.MB=MC.MD)



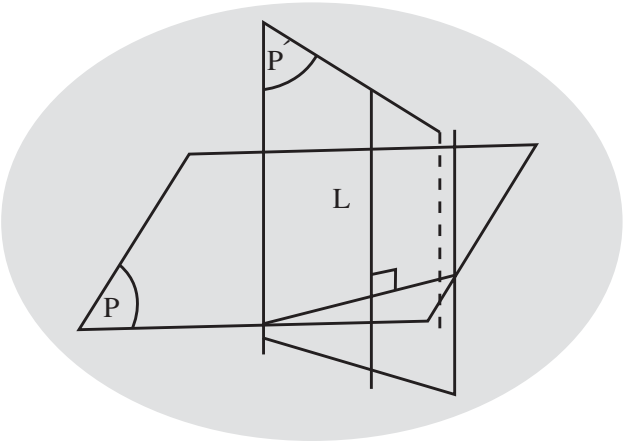
۶. مکان هندسی رأس زاویه‌ای مساوی α که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و در یک طرف خط AB قرار دارد، بخشی از دو دایره است که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر ۲α است.



۷. مجانس هر خط راست، یک خط راست است.



۸. هرگاه خطی بر یک صفحه عمود باشد، هر صفحه‌ای که بر آن خط بگذرد بر آن صفحه عمود است.



۹. ...

جورج پولیا برای حل هر دو نوع مسئلهٔ یافتنی و ثابت‌کردنی چهار مرحلهٔ زیر را پیشنهاد می‌کند.

مرحلهٔ اول: فهمیدن مسئله؛

مرحلهٔ دوم: طرح نقشه؛

مرحلهٔ سوم: اجرای نقشه؛

مرحلهٔ چهارم: نگاه به عقب یا بازنگری.

اینک به شرح بیش‌تر این چهار مرحله می‌پردازیم:

نکتهٔ مهم و در خور توجه آن است که احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، ریاضی‌دان ایرانی در قرن چهارم هجری، یعنی حدود هزار سال پیش در رساله‌ای به نام «رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» روش‌هایی را برای حل مسئله‌های هندسی بیان می‌کند که با روش حل مسئلهٔ پولیا مشابهت‌های بسیار دارد.

دکتر یان پ. هوخندایک استاد دانشگاه اورتریخت هلند، «رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» به زبان عربی را به انگلیسی ترجمه کرده و در سال ۱۳۷۵ آقای محمد باقری از انگلیسی به فارسی برگردانده و انتشارات فاطمی آن را چاپ و منتشر کرده است.

بررسی رسالهٔ سجزی نشان می‌دهد که یک ریاضی‌دان ایرانی حدود هزار سال پیش روش‌هایی را برای حل مسئله‌های ریاضی و ازجمله هندسه بیان کرده که مشابه آن‌ها را جورج پولیا در قرن بیستم ارائه داده است. برای آشنایی بیش‌تر با رسالهٔ سجزی بخشی از آن را که به معرفی سجزی و ارائهٔ روش‌های کلی حل مسائل هندسی و مقایسهٔ این روش‌ها با روش‌های حل مسئلهٔ جورج پولیا می‌پردازد، در زیر می‌آوریم.

پیشگفتار مترجم رسالهٔ سجزی به انگلیسی (دکتر یان پ. هوخندایک)

مقدمه

نوشتار حاضر حاوی ترجمه و شرح اثری از سجزی است به نام رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی. ویرایش بدون نقد متن عربی آن را سعیدان در سال ۱۹۸۳ میلادی به‌صورت پیوست ۳، در مجموعه‌ای که از آثار ابراهیم‌بن‌سنان (۲۹۶- ۳۳۵ هـ.ق) منتشر کرده، آورده است، ولی این متن تاکنون ویرایش همراه با نقد نشده و به هیچ زبان دیگری برگردانده نشده است. از این متن به‌ظاهر تنها یک نسخهٔ خطی عربی موجود است که در کتابخانهٔ خصوصی نبی‌خان در لاهور (پاکستان) نگه‌داری می‌شود.

تا آنجا که اطلاع داریم، این متن تنها رسالهٔ هندسه‌دانی از دورهٔ اسلامی در شیوه‌های حل مسئله به‌طور کلی است. رساله‌هایی از دیگر ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، مثل ابراهیم‌بن‌سنان دربارهٔ روش تحلیل یونانیان باستان وجود دارد. ولی سجزی به مراتب مطالب بیش‌تری عرضه می‌کند. بنابراین، رسالهٔ سجزی شباهت‌هایی با کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم جورج پولیا دارد، هر چند که این دو اثر در زمان‌های مختلف برای مخاطب‌های مختلف و با سبک‌های ریاضی مختلف نگاشته شده‌اند. در بخش ۲ از نوشتار حاضر، اطلاعات تازه‌ای دربارهٔ سجزی و زمان تقریبی رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی آورده شده است. در بخش ۳ دربارهٔ جمع‌بندی خود سجزی از این متن بحث کرده‌ام و به مقایسهٔ این متن با کتاب پولیا پرداخته‌ام.

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری بود. از زندگی او اطلاعات اندکی در دست است. اولین تاریخ ذکر شده از زندگی سجزی، ربیع‌الآخر ۳۵۲ هجری است که او نسخه‌ای از ترجمهٔ عربی مقدمه بر مکانیک پاپوس اسکندرانی را رونویسی کرده است. سجزی در آغاز محرم سال ۳۸۹ هجری هنوز فعال بود و در این سال انرژی به نام رساله فی شکل القطاع را نوشته است.

نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی در جنوب شرقی ایران است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. بیرونی در الآثار الباقیه نام ماه‌های تقویم سیستان را که سجزی به او گفته بود، نقل کرده است. سجزی در رسالهٔ المدخل فی علم الهندسه می‌گوید: «در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساخته‌ام؛ مدلی از کل عالم، متشکل از افلاک، جرم‌های آسمانی، مدارهای حرکت آن‌ها و اندازه‌هایشان، مقدار فاصله‌ها و حجم‌های آن‌ها و شکل زمین، جای‌ها، شهرها، کوه‌ها، دریاها و بیابان‌ها، درون کره‌ای توخالی و مشبک؛ آن را هیئت کل، نامیده‌ام.» سجزی در رصدهای نجومی که در انقلاب‌های زمستانی ۳۵۹ و ۳۶۰ هجری در شیراز انجام شد، حضور داشته است.

نسخهٔ خطی موجود در کتابخانهٔ ملی پاریس، مجموعهٔ دست‌نوشته‌های عربی، شمارهٔ ۲۴۵۷، از این لحاظ قابل توجه است، زیرا بسیاری از تاریخ‌نگاران برآن‌اند که این نسخه به‌دست سجزی در دورهٔ فوق نوشته شده است. نسخهٔ مذکور شامل حدود پنجاه رسالهٔ ریاضی و نجومی از مؤلفان مختلف ازجمله خود سجزی است و طبق آنچه در خاتمهٔ نسخه آمده، بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ هجری به‌وسیلهٔ «احمدبن محمدبن عبدالجلیل» یعنی خود سجزی نوشته شده است. اما برخی پژوهشگران معتقدند که نسخهٔ پاریس در قرن هفتم هجری از روی نسخه‌ای به خط سجزی رونویسی شده است. بنا به دو دلیلی که در این‌جا ذکر می‌کنم، به‌نظر من نسخهٔ پاریس نمی‌تواند به خط خود سجزی باشد. اولاً غلط‌های زیادی در متن و در شکل‌ها وجود دارد به‌طوری که نمی‌توان پذیرفت این نسخه را یک ریاضی‌دان در سطحی که سجزی بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ به آن رسیده بود، نوشته باشد. ثانیاً این نسخه شامل رساله‌ای است با عنوان کتاب احمدبن محمدبن عبدالجلیل در اندازه‌گیری کره‌ها با کره‌ها، که در پایان آن چنین آمده است: «این پایان چیزی است که او (تأکید از من است) از این کتاب نوشته است.»

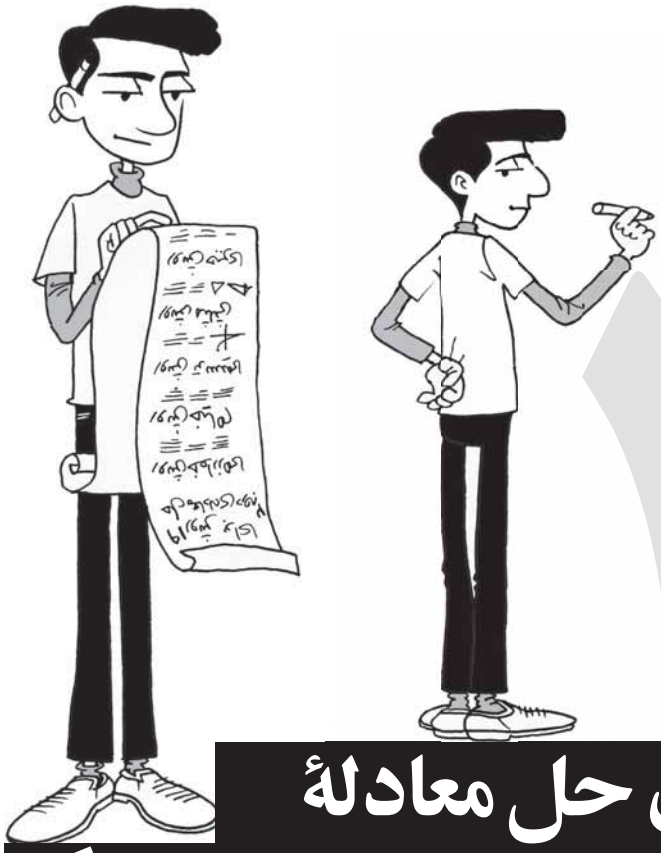
سجزی در سال ۳۴۰ یزدگردی (۳۶۰ هجری) رساله‌ای دربارهٔ گنبدهای سهموی و هذلولوی خطاب به پدرش ابوالحسین محمدبن عبدالجلیل نوشته است. سجزی هم‌چنین در اثری به نام دربارهٔ مسائل برگزیده‌ای که مورد بحث او و هندسه‌دانانی از شیراز و خراسان قرار گرفت و تعلیقات او از راه‌حل‌هایی که پدرش برای مسئله‌هایی مربوط به تقسیم مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها عرضه کرده است، صحبت می‌کند. پس پدر سجزی باید در هندسهٔ کاربردی فعال بوده باشد.

از سجزی حدود ۴۰ رسالهٔ هندسی موجود و شناخته شده است. سجزی در آثاری که از وی برجا مانده، دست‌کم به ۲۰ رسالهٔ دیگر اشاره می‌کند که تألیف کرده، ولی به دست ما نرسیده است. حدود ۲۰ رساله از سجزی در نجوم و احکام نجوم موجود است. تنها بخش اندکی از آثار سجزی تاکنون انتشار یافته است.

تاریخ تقریبی تدوین رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی را براساس آنچه درپی می‌آید می‌توان تعیین کرد. سجزی از این اثر در رساله‌ای دربارهٔ هذلولی و مجانب‌ها نام می‌برد (نگاه کنید به نقل‌قول ۳ در پیوست). این رساله در سال ۳۴۹ یزدگردی (۳۶۹ هجری) نوشته شده است. کم‌تر از دو سال قبل از آن، در ذی‌الحجه ۳۶۸ هجری، سجزی‌المدخل

فی علم‌الهندســه را (که هنوز انتشار نیافته) به پایان رسانده است. در این اثر، ســجزی بســیاری قضایا را که به‌طور مشروح در رسالهٔ در آسان کردن راه‌های به‌دســت آوردن شکل‌های هندسی آورده، ذکر می‌کند، اما از خود رســاله نامی نمی‌برد، هر چند که بسیاری آثار دیگر خود را ذکر می‌کند. پس احتمالاً رســالهٔ در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی را اندکی بعد از المدخل فی علم الهندســه نوشته است. پس تاریخ تألیف رسالهٔ آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شــکل‌های هندسی را می‌توان حدود ۳۷۰ هجری دانست. بر این اساس، رسالهٔ مذکور ثمرهٔ حداقل پانزده سال تجربهٔ شخصی سجزی در حل مسئله‌های هندسی است.

اول: باید مسئله را بفهمید.	فهمیدن مسئله مجهول چیســت؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیســت؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ یا حشو و زاید است؟ یا متناقض است؟ شکلی رسم کنید. علامت‌های مناسب را به‌کار ببرید. قسمت‌های مختلف شرط را از هم جدا کنید. آیا می‌توانید آن‌ها را روی کاغذ بیاورید؟
دوم: ارتبــاط میــان داده‌ها و مجهول را پیــدا کنید. ممکن اســت مجبور شــوید کــه در صــورت یافت نشــدن ارتباط مســتقیم میــان داده‌هــا و مجهول، مسئله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشــه برای حل مسئله طرح کنید.	طرح نقشه آیا آن را پیش‌تر دیده بودید؟ آیا همین مسئله را به صورت دیگر دیده‌اید؟ آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهید؟ به مجهول نگاه کنید و بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشد. در این‌جا مسئله‌ای وابسته به مسئلهٔ شما وجود دارد که پیش‌تر حل شده است. آیا می‌توانید آن را به‌کار برید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار برید؟ آیا باید یک عنصر کمکی را وارد کنید تا به‌کار بردن آن را ممکن سازد؟ آیا می‌توانید صورت مســئله را دوباره بیان کنید؟ آیــا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعریف‌ها رجوع کنید. اگر نمی‌توانید مســئلهٔ طرح شــده را حل کنید، نخســت به حل کردن مســئله‌ای وابســته به آن بپردازید. آیا می‌توانید مســئلهٔ وابسته‌ای را که بیش‌تر در دسترس باشــد تخیل کنید؟ یا یک مسئلهٔ کلی‌تر؟ یا یک مسئلهٔ خاص‌تر؟ یا یک مســئلهٔ مشــابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسئله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاه داریــد و باقــی آن را کنار بگذارید؛ در این صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شــود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما می‌رسد که بتواند برای به دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیک‌تر باشند؟ آیا همهٔ داده‌ها را به‌کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به‌کار بردید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسئله را به‌کار بردید؟
سوم: اجرای نقشه	اجرای نقشه در ضمن اجرای نقشــهٔ حل مسئله، هرگام را که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید. آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟
چهارم: امتحان کردن جواب به دست آمده.	به عقب نگاه کردن آیا می‌توانید نتیجه را وارسی کنید؟ آیا می‌توانید نتیجه را از راهی دیگر به دســت آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مســئله‌ای دیگر به‌کار برید؟



اشاره

از آن‌جا که هـر روش، در واقع یک یا چند ایدهٔ جدیـد را القا می‌کنـد، در این مختصر به ارائـهٔ روش‌های عمومی آزمـون و خطا، عددی (تکرار)، هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریسـی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی از چند روش) پرداخته‌ایم که هـر یک از روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیـت، کاربردهایی را نیز دربردارند که به آن‌ها اشـاره شـده و ممکن اسـت کاربردهای عملی یا نظری بسیار دیگری نیز داشته باشند کـه به تفضیل در شـماره‌های آینـده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها ۱

$$ax^2 + bx + c = 0$$

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

مسئلهٔ مسابقه‌ای

به مناسبت بیستمین سال مجله (شمارهٔ ۷۰)

مسابقهٔ ویژه ۷۰ (بیستمین سالگرد مجله)

* توجه: روش‌های ارائه شـده با ذکر منبع، به نام مؤلف مقاله در شماره‌های آتی به چاپ می‌رسد.

روش‌هـای دیگری را که به نظر شـما (غیر از ۲۹ روش دیگر که ارائه خواهد شد) برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان ارائه داد، برای ما ارسال کنید (به نفرات اول تا بیستم جوایزی نفیس اهدا خواهد شد).

مقدمه

در بسـیاری از آثار ریاضی قدیمی مسـائلی دیده می‌شـود که خواهان کشـف کمیتی مجهول‌انـد. گاهی این مجهـول، کمیتی هندسـی است که تحت شرایط مسئله به مقادیر معلوم ارتباط پیدا می‌کنـد. مثالی از این نـوع، قضیهٔ دوم مقالـهٔ دوم اصول اقلیدس راجع به تقسـیم قطعه خطی مفـروض مانند AB به دو قطعهٔ AG و GB اسـت به‌طوری که مساحت مستطیلی با اضلاع AB و GB با مساحت مربعی به ضلع AG برابر باشد:

در این‌جـا یک مقـدار معلوم (AB) و یـک قطعه خط مجهول (AG یـا GB) وجـود دارد، زیـرا: GB= AB-AG و بـا شـرط $AB.GB=AG^2$.

در واقع این کار، تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی است.

در این‌جـا اگر یک مجهول را به‌طور دلخواه بین دو رابطه حذف کنیم و برای سهولت مقدار AB را به a و مقدار مجهول را به x نشان دهیم: $AG=x\ ;\ x^2+ax=a^2$ و AB=a ملاحظه می‌شـود که مسـئلهٔ مربوط به تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی در واقع به یک معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شـود که این معادله را می‌توان سـاده‌ترین نوع

معادلهٔ درجهٔ دوم برای حل یک مسئلهٔ هندسی دانست.

البته ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، کاتبان بابلی قادر به حل مسائلی بودنـد که به معادله‌های درجهٔ دوم می‌انجامید و اگرچه بابلی‌ها به جای «$x^2+6x=27$» می‌گفتند «مسـاحت مربعم را به شـش برابر ضلع آن اضافه کرده‌ام و حاصل ۲۷ شده است»؛ ولی روشی را برای حل این مسـئله به کار می‌بردند که پایه و اساس آن، همان چیزی است که امروزه به کار می‌بندیم. البته در ترد بسیاری از نویسندگان یونانی، نحوهٔ پرداختن به مسـئلهٔ یافتن مجهولات، هندسـی بوده اسـت. برای مثال، اقلیدس در تقسـیم قطعه خط به بخش طلایی به صورت هندسـی با مسـئلهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دوم سروکار دارد، زیرا هرگاه با فرض $AB=a$ و $AG=x$ شرط $AB.GB=AG^2$ به $a(a-x)=x^2$ تبدیل شود، نتیجه می‌شـود که $a^2=ax+x^2$؛ و این مستلزم آن اسـت که با مفروض‌بودن قطعه خطی بـه طول a قطعه خطی به طول x بسـازیم به طوری کـه $x^2+ax=a^2$. اما اقلیدس به مفهوم عـددی «طول یک قطعه خط» نمی‌اندیشـد، بلکه به جای آن وی به $x^2+ax=x(x+a)$ به عنوان مسـتطیلی که دارای اضلاع x و x+a اسـت، می‌نگرد. او وقتـی قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم اصـول خود را به‌کار می‌برد، در عمل «مربع را کامل می‌کند»، به این معنا که اگر مربعی به ضلع $\frac{a}{2}$ به این مسـتطیل یعنی $x(x+a)$ اضافه کنیم، نتیجهٔ آن مسـاحت مربعی به ضلع $(x+\frac{a}{2})$ خواهد بود که در این صورت، x مساوی با ضلع این مربع منهای مقدار معلوم $\frac{a}{2}$ است:

$$x(x+a)+(\frac{a}{2})^2=\underbrace{x^2+ax}_{a^2}+\frac{a^2}{4}=(x+\frac{a}{2})^2=\frac{5a^2}{4};$$

$$x+\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2};x=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})a$$

نتیجهٔ تاریخی

بخش طلایی، تنها یکی از نمونه‌های مسـائل هندسـی اسـت که هندسـه‌دانان یونانی دوران کلاسیک چگونه توانستند به روابط درجهٔ دومی مانند $x^2+ax=a^2$ به عنوان احکامی دربارهٔ مسـاحت‌ها بنگرند. آن‌ها برای بررسـی این احکام، مجموعه‌ای از قضایا، مانند قضایـای مقالهٔ دوم اصول را در اختیار داشـتند که به آن‌ها اجازه می‌داد این مسـاحت‌ها را کامل و مربع‌های معلومی ایجاد کنند که اضلاع آن‌هـا قطعه خط‌های مطلوب را به دسـت دهند. به اعتقاد بسـیاری از محققان، دلیل تاریخی تأکید یونانیان بر هندسـه این اسـت که در حل معادله‌های درجهٔ دوم اعداد گنگی از قبیل $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ و... ناگزیر پیـش می‌آیند. چون یونانیان حتی تعریفی برای این اعداد نداشـتند و قادر هم نبودنـد به‌طور دقیق به آن‌ها بپردازند، در نتیجه هر موقع که طالب اسـتدلال‌های دقیق بودند، خود کمیت‌های هندسی را به‌کار می‌بردند.

چگونگی تلفیق رهیافت عددی و هندسی برای یک علم جدید

جبر خوارزمی

از درون ایـن میراث دوگانهٔ حل مسـائل، که خواسـتار یافتن مجهولات عددی و هندسـی بودند، تمدن اسـلامی علمی را ابداع کردنـد کـه نام جبر را بر آن نهاد. منشـأ خود ایـن کلمه در واقع کلمهٔ عربی «الجبر» اسـت که در عنوان بسـیاری از آثار عربی به عنـوان بخشـی از عبارت «الجبـر و المقابله» دیده می‌شـود. یک معنای «جبر»، «به جای خود برگرداندن» یا «جبران» است. برای مثال، قراردادن $7x+3=4$ به جای $4x+3=4-3x$ مثالی از جبر اسـت. «و» همان واو عطف است و جبر را به کلمهٔ «مقابله» الحاق می‌کند؛ «مقابله» خود، در این مضمون به معنای گذاشـتن تفاضل دو جملـهٔ هم‌جنس که در دو طرف معادله‌ای قرار دارند، در طرفی اسـت که مقدار بزرگ‌تـر در آن قرار دارد. برای مثـال، قرار دادن $3x=4$ بـه جای برابری $3x+1=5$ مثالی از «مقابله» اسـت. به وضوح، با این دو عمل، هر معادلهٔ جبری به معادله‌ای تبدیل خواهد شد که در آن مجموعی از جملات مثبت در یک طرف برابر است با صفـر یا مجموعی از جملات مثبت که متضمن توان‌های مختلف x اند. به‌ویژه، هر معادلهٔ درجهٔ دوم با یک ریشهٔ مثبت به یکی از سه صورت استاندهٔ زیر قابل تحویل است:

$$px^2+qx=r;\ px^2+r=qx;\ px^2=qx+r$$

که در این معادله‌ها p، q و r، هر سـه مثبت‌اند و این شـرطی اسـت که در سراسر ریاضیات اسـلامی دورهٔ میانی اعمال می‌شود. این شـرط را مجدداً در اثر «عمر خیام» هم می‌بینیم. این قاعده تا اوایل سدهٔ شانزدهم در ریاضیات غربی نیز حکم‌فرماست.

نتیجهٔ بحث

علم «جبر و مقابله» در آغاز خود، علم تبدیل معادلات متضمن یک یا چند مجهول به یکی از صورت‌های اسـتاندهٔ سه‌گانهٔ فوق و سـپس حل معادله در این صورت بود. البتـه ریاضی‌دانان دیگری مثل ثابت بـن قره، ابوکامل (ملقب به حاسـب مصری با گام‌هایی فراتـر از خوارزمی)، ابوبکر کرجی و غیره روی حل معادله‌ها به‌ویژه معادله‌های درجهٔ دوم کار کرده‌اند که باید تقدیر شوند.

انواع روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

می‌دانیم برای یک مسئله ممکن است روش‌های حل گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به تعدادی از آن‌ها دست یافت. البته برخی از مسائل را ممکن است با هر یک از روش‌های زیر حل کرد و حتی ممکن است برای هر نوع، چندین

طریق مختلف وجود داشته باشد که ما در این‌جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) آزمون و خطا، ۲) عددی (تکرار)، ۳) هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، ۴) جبری، ۵) آنالیزی، ۶) مثلثاتی، ۷) ماتریسی (بُرداری)، ۸) ترکیبی (تلفیقی از چند روش)

* **توجه:** روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توانیم به آن‌ها بپردازیم.

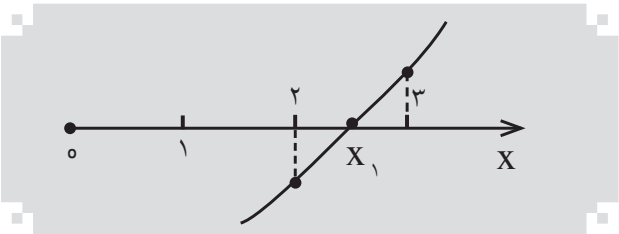
در این‌جا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) از هر یک از شیوه‌های بالا استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً متنوع و خلاق و همراه با نوآوری به ارائهٔ طریق می‌پردازیم.

۱) روش آزمون و خطا

این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های حل برای معادلهٔ درجهٔ دوم است که در واقع یک جواب تقریبی به دست می‌دهد. این روش را برای هر معادلهٔ پیچیده‌تر نیز می‌توان به‌کار برد. البته این روش عددی برای معادله‌هایی با ضریب‌های معلوم به‌کار می‌رود. برای مثال، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x+1=0$ را با این روش حل می‌کنیم. در این روش در مرحلهٔ اول جدول زیر را تکمیل می‌کنیم:

x	-1	0	1	2	3	...
x^2-3x+1	5	1	-1	-1	1	...

چون مقدار عبارت «$y=x^2-3x+1$» به ازای $x=0$ مثبت و به ازای $x=1$ منفی است (با توجه به نمودار منحنی $y=x^2-3x+1$ ثابت می‌شود) یک جواب معادله بین ۰ و ۱ و با همین استدلال جواب دیگر معادله بین ۲ و ۳ خواهد بود (با توجه به رسم نمودار منحنی



بدیهی است) با تکرار این عمل و در فاصله‌های کوچک‌تر به جواب‌های معادله با هر دقت و تقریب دلخواه می‌توان دست یافت.

کاربرد: این روش برای حل هر معادلهٔ جبری، مثلثاتی و... با ضرایب عددی قابل اجراست.

۲) روش عددی (تکرار)

این روش نیز مانند روش اول (آزمون و خطا) به سهولت برای حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم و هر معادلهٔ پیچیدهٔ دیگر که بتوان آن را به صورت $x=g(x)$ نشان داد، قابل اجراست. برای نشان دادن روش عمل، به حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+x-1=0$ می‌پردازیم.

ابتدا معادلهٔ مورد نظر را به صورت $x=\frac{1}{x+1}$ می‌نویسیم و برابری بازگشتی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$$

پس، می‌توان عمل تکرار را به صورت زیر انجام داد:

$$n=1:\ x_2=\frac{1}{x_1+1},\ x_1=0;\ x_2=\frac{1}{0+1}=1$$

$$n=2:\ x_3=\frac{1}{x_2+1},\ x_2=1;\ x_3=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0/5$$

$$n=3:\ x_4=\frac{1}{x_3+1},\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}\approx 0/\overline{6}$$

با تکرار این عمل به تعداد دلخواه به تقریب دلخواه خواهیم رسید. در این مثال، پس از تکرار پی‌درپی عمل، به یک ریشهٔ مثبت معادله دست می‌یابیم:

$(x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2})x\approx 0/6180$ (ریشهٔ واقعی معادله)

و از ۷ مرتبه تکرار:

$(n=7)\,x_8\approx 0/6180$ (ریشهٔ تقریبی معادله)

کاربرد: این روش برای حل معادله‌هایی است که ضرایب عددی دارند و آن‌ها را می‌توان به صورت $x=g(x)$ نوشت.

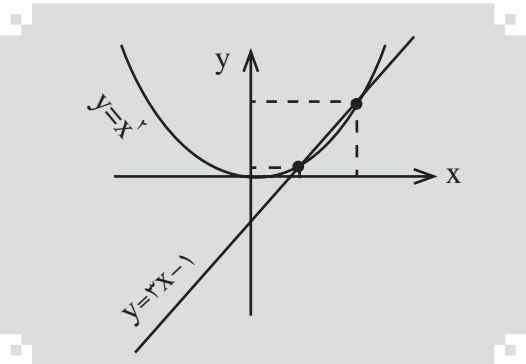
● روش‌های هندسی

۳) روش تحلیلی ـ ترسیمی

می‌خواهیم معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ را به روش تحلیلی‌ـ ترسیمی حل کنیم. برای حل این معادله ابتدا معادله را به دو ضابطهٔ تابع خطی و تابع منحنی (سهمی) به صورت زیر می‌نویسیم $(x^2=3x-1)$:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x-1 \end{cases}$$

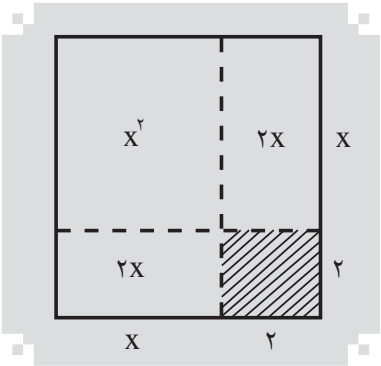
واضح است که محل تلاقی دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع به‌طور تقریبی جواب‌های معادلهٔ موردنظر هستند.



کاربرد: این روش برای حل بسیاری از معادله‌هایی که از چند نوع تابع جبری، مثلثاتی، لگاریتمی و... تشکیل یافته‌اند و هم‌چنین معادله‌هایی از درجه‌های بالاتر، به‌ویژه معادلهٔ درجهٔ دوم به کار می‌رود که خیام با این روش حل کرده است.

۴) روش خوارزمی (تعبیری)

خوارزمی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم، شش حالت خاص را مورد بررسی قرار می‌دهد. از میان این حالت‌ها به اختصار فقط یکی از آن‌ها را توضیح می‌دهیم. معادلهٔ $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را در نظر می‌گیریم. در روش خوارزمی، جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف برابری نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، معادله را به صورت $x^۲+۴x=۲۱$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم (در این‌جا عدد ۲ است). مساحت مربعی با ضلع x+۲ را می‌توان حساب کرد. در شکل ۳ مساحت مربع هاشورخورده برابر ۲×۲ است و بقیهٔ مربع، مساحتی برابر $x^۲+۲(۲x)=x^۲+۴x$ دارد که آن هم برابر ۲۱است.



بنابراین، مساحت کل مربع بزرگ برابر ۲۵=۴+۲۱ است. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $x+۲=\sqrt{۲۵}=۵$ و در نتیجه x=۳.

کاربرد: این روش برای تحلیل ریشه‌های معادله‌های درجهٔ زوج بسیار مناسب است. با تعمیم این روش برای حل هندسهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم می‌توان منحصر بودن جواب را در حالت $\Delta>۰$ (مبین معادلهٔ درجهٔ سوم) به اثبات رساند. (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ رشد آموزش ریاضی، مقالهٔ مؤلف با عنوان «حل هندسی معادلهٔ درجهٔ سوم»؛ مشابه روش خوارزمی مکعبی جدید با امتداد اضلاع مکعب روی مکعب اولیه به ضلع z بنا می‌شود).

۵) روش خیام

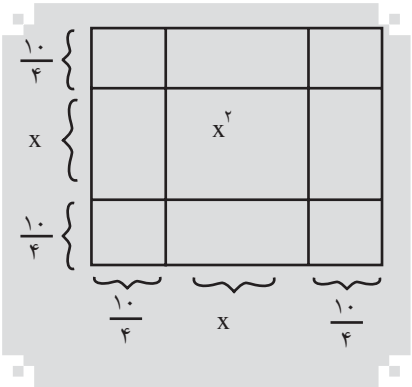
خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادلهٔ «مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به‌کار برده‌اند. این معادله به زبان امروزی چنین است:

$x^۲+۱۰x=۳۹$ (۱۰x = ده جذر، $x^۲$ = مالی)

خیام امتداد اضلاع مربع به ضلع x را از چهار گوشه مانند شکل زیر انجام می‌دهد:

$$S_T=\underbrace{x^۲+۴(\frac{۱۰}{۴}x)}_{۳۹}+۴(\frac{۱۰}{۴})^۲=(x+۵)^۲$$

$$(x+۵)^۲=۳۹+۲۵=۶۴;\ x+۵=۸;\ x=۳$$



کاربرد: کاربردی را که برای روش خوارزمی ذکر شد، برای این روش نیز می‌توان یادآور شد.

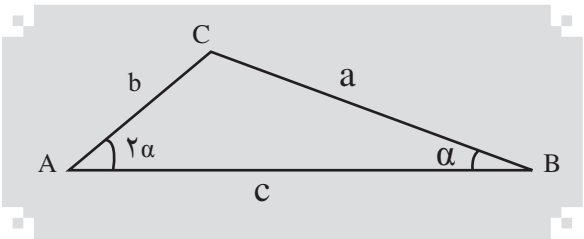
توجه: روش ششم که به نام روش مثلثی یا خط‌کش و نقاله نام‌گذاری شده، روش ابداعی مؤلف است.

۶) روش مثلثی (خط‌کش و نقاله)

برای القای ایدهٔ این روش، مسئلهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم:

هرگاه یک زاویه از مثلثی دو برابر زاویه‌ای دیگر در آن مثلث باشد، رابطهٔ مستقل بین اضلاع به صورت زیر است:

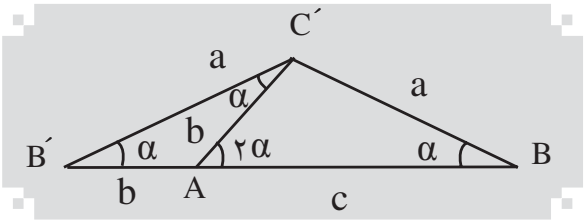
$a^۲-b^۲=bc$ (۱)



برای اثبات رابطهٔ (۱) کافی است در شکل زیر رابطهٔ تشابه را بنویسیم:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b+c}\quad (۲)$$

توضیح: ابتدا ضلع AB را (از سمت چپ) به اندازهٔ b امتداد می‌دهیم و با توجه به AB'=b، رأس C را به B' وصل می‌کنیم. از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{AB'C}$ و $\overset{\Delta}{BB'C}$ رابطهٔ (۲) یا (۱) نتیجه می‌شود.



اکنون اگر در رابطهٔ (۱)، مقدار b را به x، مقدار c را به p و مقدار a^2 را به q نشان دهیم، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر حاصل می‌شود:

$x^2 + px = q$ (۳)

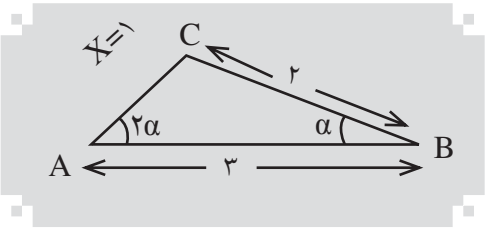
با توجه به برابری‌های c=p و $a = \sqrt{q}$، واضح است که ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۳) یعنی مقدار x، در واقع ضلع سوم مثلث ABC است.

برای مثال، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + 3x - 4 = 0$ را به روش مثلثی تعیین می‌کنیم.

در این مثال داریم $AB = c = p = 3$ و $BC = a = \sqrt{4} = 2$.

بنابراین، با رسم مثلث ABC ضلع AC ریشهٔ مثبت معادله است: $AC = x = 1$

(ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + 3x = 4$ برابر x=۱ است)



توجه: این روش حل با خط‌کش و نقاله انجام می‌شود.

کاربرد: با تعمیم این روش، یعنی مثلثی با زاویه‌های α و nα معادله‌های درجهٔ nام $(n = 3,4)$ نیز قابل حل‌اند.

توجه: روش هفتم به نام روش دایره‌ای یا خط‌کش و پرگار نام‌گذاری شده که با تحلیل کردن روابط بین ریشه‌ها و ضرایب، روش ابداعی مؤلف است.

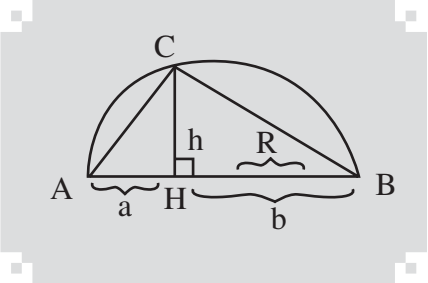
۷) روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار)

برای القای ایدهٔ این روش، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع R در نظر می‌گیریم:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت: $a.b = h^2$

پس:

$$\begin{cases} a + b = 2R \\ a.b = h^2 \end{cases}$$



اکنون اگر a و b را ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 2Rx - h^2 = 0$ در نظر بگیریم، از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی زیر:

$x^2 - px - q = 0$ (۱)

می‌توان نوشت:

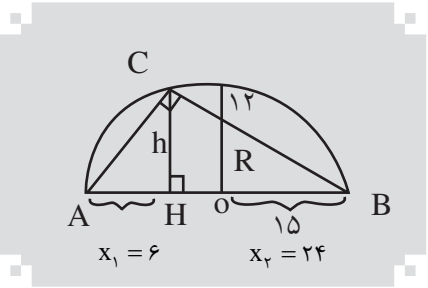
$$\begin{cases} -2R = -p \\ -h^2 = -q \end{cases} ; \begin{cases} R = \frac{p}{2} \\ h = \sqrt{q} \end{cases}$$

بنابراین، در عمل برای یافتن ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۱) کافی است در نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{p}{2}$ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ارتفاع وارد بر وتر AB به طول $\sqrt{q}$ محاط کنیم. برای مثال، ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۲) $x^2 - 30x - 144 = 0$ را به روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار) تعیین می‌کنیم.

در این مثال، داریم $R = \frac{p}{2} = \frac{30}{2} = 15$ و $h = \sqrt{q} = \sqrt{144} = 12$، پس کافی است مثلثی با ارتفاع وارد بر وتر به طول h=۱۲ را در نیم دایره‌ای به شعاع R=۱۵ محاط کرد.

در این صورت قطعات جدا شدهٔ روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC ریشه‌های معادلهٔ (۲) خواهند بود.

$$\begin{cases} AH = x_1 = 6 \\ BH = x_2 = 24 \end{cases}$$



توجه: این روش حل با خط‌کش و پرگار است. یعنی ریشه‌ها با اندازه‌گیری با خط‌کش تعیین می‌شوند.

کاربرد: این روش مخصوص حالتی از معادلهٔ درجهٔ دوم است که در معادلهٔ عمومی $x^2 + mx + n = 0$ مقادیر m و n اعدادی منفی باشند، زیرا در حالت m<۰ با روش‌های هندسی خوارزمی ـ خیام یا مثلثی قابل تعبیر نیست. با استفاده از این روش می‌توان به هر دو جواب مثبت معادله دست یافت (قطعات جدا شده روی وتر مثلث).

• روش‌های جبری

۸) روش مربع کامل

این روش در عمل همان روش خوارزمی است با این تفاوت که جبری است و نیازی به تعبیر هندسی ندارد و به همین دلیل در حالت عمومی می‌توان از آن استفاده کرد.

سعی بر این است که روش خوارزمی را به‌کار بریم. برای مثال معادلهٔ

$x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (1)$

را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$x^2 - 10x = -16 \quad (2)$

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم (تا طرف اول معادله مربع کامل شود)

$x^2 - 10x + (-5)^2 = -16 + (-5)^2 \quad (3)$

معادلهٔ (۳) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$(x-5)^2 = 9 \quad (4)$

از دو طرف معادلهٔ (۴) جذر می‌گیریم و مقدار x را بدون محدودیت‌های هندسی به دست می‌آوریم (پس از جذرگیری از دو طرف، علامت‌های ± را می‌گذاریم):

$x - 5 = \pm 3 \quad (5)$

از معادلهٔ (۵) جواب‌های معادلهٔ (۱) تعیین می‌شوند:

$x = 5 \pm 3;\ x_1 = 2,\ x_2 = 8$

کاربرد: این روش برای حل عمومی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌کار می‌رود. در این‌جا با این روش، معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) را حل می‌کنیم:

$ax^2 + b + c = 0 \quad (1)$

با فرض $a \neq 0$ معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت $\frac{c}{a}$ را با تعویض علامت به طرف دوم می‌بریم و برای مربع‌سازی طرف اول، عبارت $(\frac{b}{2a})^2$ (در واقع مربع نصف ضریب x) را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a};\ x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} \quad (2)$

معادلهٔ (۲) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (3)$

با فرض $\Delta \geq 0$ از دو طرف معادلهٔ (۳) جذر می‌گیریم (علامت‌های ± هر دو مورد قبول است):

ریشه‌های معادلهٔ (۱) $\Delta \geq 0:\ x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (مبین معادله)

۹) روش تجزیه

در برخی موارد، معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت ضرب دو چند جمله‌ای درجهٔ اول برابر صفر است. برای مثال:

$x^2 - 3x = 0\ ;\ x(x-3) = 0 \quad (1)$

و هم‌چنین:

$x^2 - 3x + 2 = 0\ ;\ (x-1)(x-2) = 0 \quad (2)$

با توجه به یکی از خاصیت‌های اساسی اعداد:

* برای این‌که ضرب دو عدد صفر شود لااقل یکی از آن دو عدد صفر است.

$a.b = 0\ ;\ a = 0$ یا $b = 0$

پس، معادلهٔ (۱) وقتی برقرار است که $x = 0$ یا $x - 3 = 0$ و هم‌چنین معادلهٔ (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$x - 1 = 0$ یا $x - 2 = 0 \quad (3)$

در واقع جواب‌های معادله‌های (۳) همان جواب‌های معادلهٔ زیر است:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

بنابراین، با استفاده از تجزیهٔ عبارت درجهٔ دوم (طرف اول) توانستیم به جواب‌های معادله دست یابیم: $x_1 = 1\ ;\ x_2 = 2$

کاربرد: در صورتی که بتوانیم چند جمله‌ای طرف اول معادله را تجزیه کنیم به‌راحتی می‌توانیم به جواب‌های معادلهٔ موردنظر دست یابیم.

۱۰) روش مربع‌سازی معادلهٔ عمومی

برای مربع‌سازی معادلهٔ عمومی $ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

کافی است معادله را در (۴a) ضرب و عبارت b^2 را به دو طرف اضافه کنیم:

$4a(ax^2 + bx + c) = 0\ ;\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac = \Delta;\ (2ax + b)^2 = \Delta$

با فرض $\Delta \geq 0$، پس از جذرگیری از دو طرف معادله:

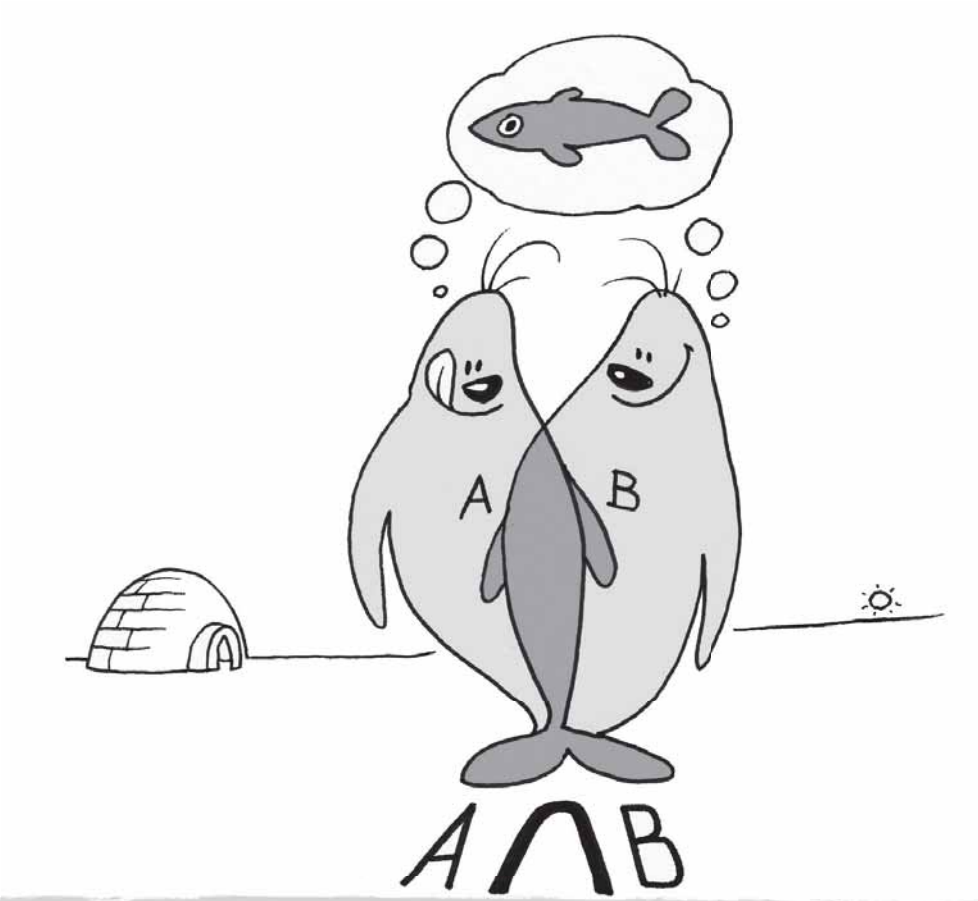
$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$

بنابراین داریم:

جواب‌های معادلهٔ (۱) $a \neq 0, \Delta \geq 0\ ;\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

کاربرد: این روش برای حل عمومی معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) بسیار مناسب و به سادگی و سهولت خاصی انجام می‌شود (به‌ویژه برای حل معادله‌های پارامتری مانند: $x^2 + 2mx + m + 1 = 0$ بسیار مناسب است و با سهولت انجام خواهد گرفت).

ادامه دارد...



اعمال بین مجموعه‌ها
جبرمجموعه‌ها

حمیدرضا امیری

در ایـن مقاله سـعی داریم بـه ارتباط بین اعمـال مجموعه‌ها بپردازیم و مسـائلی در مجموعه‌ها حل کنیم که در حل آن‌ها فقط از قوانین بین مجموعه‌ها، قضیه‌ها و تعاریف استفاده شود.

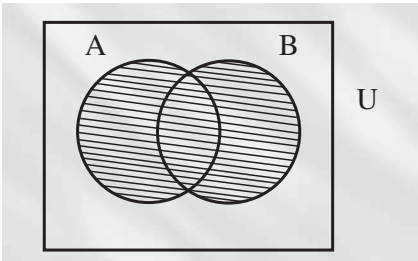
تعاریف و قضیه‌ها به گونه‌ای بیان می‌شوند که هر کدام پیش‌نیاز بعدی و درنهایت مسائل برای حل وابسته به این تعاریف و قضیه‌ها خواهند بود.

بیـن مجموعه‌ها ۴ عمـلِ اجتماع، اشـتراک، تفاضل و تفاضل متقارن تعریف می‌شـود که البته دو عملِ تفاضل و تفاضل متقارن اعمالِ مسـتقلی نیسـتند و بیان تعریف این دو عمل با استفاده از اعمالِ قبل از خود ممکن است.

۱. عمل اجتماع: $(A\cup B)$ مجموعه‌ای اسـت که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A\cup B)=\{x\in U \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

$$\begin{cases} x\in(A\cup B)\Leftrightarrow x\in A \text{ یا } x\in B \\ x\notin(A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A \text{ و } x\notin B \end{cases}$$



تذکـر: بلافاصله از تعریف اجتماع، این نتیجه‌های مهم به‌دست می‌آینـد کـه «هر مجموعـه زیرمجموعـهٔ اجتماع خـودش با هر مجموعهٔ دیگر است» و «اجتماع هر مجموعه با خودش، مساوی با خودش است».

$$\text{I)}\begin{cases} A\subseteq(A\cup B) \\ B\subseteq(A\cup B) \end{cases} \qquad \text{II)}\ A\cup A=A$$

قضیهٔ ۱: اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

اثبات: (قضیه‌های اولیه و مقدماتی را ناچاریم به روش عضوگیری

دلخواه ثابت کنیم).

[فرض کنیم $x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ یا $x \in C \overset{A \subseteq B}{\underset{C \subseteq D}{\Leftrightarrow}} x \in B$ یا $x \in D \Leftrightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow (A \cup C) = (B \cup D)$

نتیجه: از قضیهٔ ۱ نتیجهٔ زیر را می‌توان به‌دست آورد:

$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

اثبات:

$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq \underbrace{(C \cup C)}_{C} \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

قضیهٔ ۲: شرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن است که $(A \cup B) = B$. به عبارت دیگر:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $(A \cup B) = B$. (برای اثبات تساوی بین دو مجموعه باید ثابت کنیم هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری است).

(۱) $B \subseteq (A \cup B)$: طبق تعریف داریم

$\left.\begin{array}{l} \text{طبق فرض}: A \subseteq B \\ \text{می‌دانیم}: B \subseteq B \end{array}\right\} \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cup B) \subseteq B \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow (A \cup B) = B$

حال فرض می‌کنیم $(A \cup B) = B$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$.

$\left.\begin{array}{l} \text{می‌دانیم}: A \subseteq (A \cup B) \\ \text{طبق فرض}: (A \cup B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$

[به جای $(A \cup B)$ در رابطهٔ بالا طبق فرض قرار دادیم B].

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ ۲:

$I) \varnothing \subseteq A \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A \cup \varnothing = A$

$II) A \subseteq U \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A \cup U = U$

قضیهٔ ۳: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه A و B و C داریم (خاصیت شرکت‌پذیری):

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

اثبات:

می‌دانیم: $A \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$\overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} A \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۱)$

می‌دانیم: $B \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$\Rightarrow B \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۲)$

می‌دانیم: $C \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۳)$

نتیجهٔ قضیه ۱ و (۳) و (۲) $\Rightarrow (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۴)$

نتیجهٔ قضیه ۱ و (۴) و (۱) $\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

درنتیجه تساوی به اثبات می‌رسد و حکم به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم: (خاصیت جابه‌جایی)

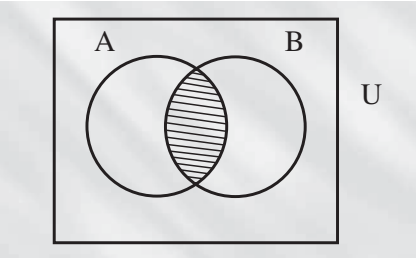
$(A \cup B) = (B \cup A)$

اثبات: می‌دانیم: $\begin{array}{l} B \subseteq (A \cup B) \\ A \subseteq (A \cup B) \end{array} \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (B \cup A) \subseteq (A \cup B) \quad (۱)$

$\begin{array}{l} A \subseteq (B \cup A) \\ B \subseteq (B \cup A) \end{array} \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cup B) \subseteq (B \cup A) \quad (۲)$

$(۱),(۲) \overset{\text{تعریف تساوی}}{\Rightarrow} (A \cup B) = (B \cup A)$

۲. عمل اشتراک: $(A \cap B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$(A \cap B) = \{x \in U | x \in A \text{ و } x \in B\}$

$\begin{cases} x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B \\ x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \notin B \end{cases}$

تذکر: با توجه به تعریف اشتراک واضح است که I) اشتراک دو مجموعه همواره زیرمجموعهٔ هریک از آن دو مجموعه است II) اشتراک هر مجموعه با خودش مساوی با خود آن مجموعه است.

$I) \begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \end{cases}, II) A \cap A = A$

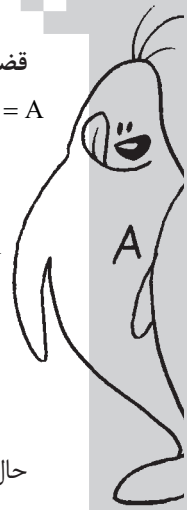
قضیهٔ ۱: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

اثبات: شبیه به اثبات قضیهٔ ۱ در عمل اجتماعی و با عضوگیری انجام می‌شود.

نتیجه: اگر $A \subseteq C$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $A \subseteq (B \cap C)$

اثبات:

$\begin{array}{l} A \subseteq C \\ A \subseteq B \end{array} \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} \underbrace{(A \cap A)}_{A} \subseteq (B \cap C) \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$



قضیهٔ ۲: شـرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن اسـت که $(A \cap B) = A$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$$

اثبـات: ابتدا فـرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابـت می‌کنیم $(A \cap B) = A$.

می‌دانیم: $(A \cap B) \subseteq A$ (۱)

$$\left.\begin{array}{l} \text{از طرفی طبق فرض}: A \subseteq B \\ \text{و می‌دانیم}: A \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (A \cap B) = A$$

حال فرض می‌کنیم $(A \cap B) = A$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{می‌دانیم}: (A \cap B) \subseteq B \\ \text{طبق فرض}: (A \cap B) = A \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

(به جای A در رابطهٔ بالایی طبق فرض قرار داده‌ایم A).

تذکر: دو خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی در اشتراک مشابه این خواص در اجتماع قابل اثبات است و داریم:

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & \text{شرکت‌پذیری} \\ (A \cap B) = (B \cap A) \end{cases}$$

دو نتیجهٔ مهم از قضیهٔ ۲:

$$I) \varnothing \subseteq A \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$II) A \subseteq U \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A \cap U = A$$

تذکـر: با توجه بـه تعاریف اجتماع و اشـتراک و مجموعه‌های مرجع، تهی و تعریف متمم یک مجموعه داریم:

$$\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \varnothing \end{cases}$$

نتیجهٔ مهم: اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A \cap B' = \varnothing$ و برعکس

اثبات: $\begin{cases} A \subseteq B \\ B' \subseteq B' \end{cases} \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cap B') \subseteq (B \cap B') \Rightarrow (A \cap B') \subseteq \varnothing$

چون همواره $\varnothing \subseteq (A \cap B')$ پس $A \cap B' = \varnothing$

اثبـات عکس مطلب بدیهی اسـت و به عنـوان تمرین برعهده شـما گذاشته می‌شود. یعنی با استفاده از $A \cap B' = \varnothing$ ثابت کنید $A \subseteq B$.

۳. عمـل تفاضـل: تفاضل B از A یعنـی $(A - B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A - B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B \\ x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \in B \end{cases}$$

تذکـر: بـا توجه بـه تعریف تفاضل، واضح اسـت کـه همواره $A \subseteq (A - B)$.

نتیجهٔ مهم: رابطهٔ بین تفاضل و اشتراک

با توجه به تعریف تفاضل و اشـتراک رابطهٔ زیر به‌سادگی نتیجه می‌شود و از این رابطه برای تبدیل تفاضل به اشتراک یا اشتراک به تفاضل استفاده می‌کنیم:

$$(A - B) = (A \cap B')$$

$$(A - B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ و } x \notin B\} \overset{\text{تعریف متمم}}{=} \{x \in U \mid x \in A \text{ و } x \in B'\} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{=} (A \cap B')$$

قضیهٔ ۱: شـرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن اسـت که $A - B = \varnothing$،

اثبات:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

فرض کنیم $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B') = \varnothing \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

چند تساوی مهم: (در اثبات تساوی‌های زیر کافی است تفاضل را به اشتراک تبدیل کنیم).

$$\boxed{\begin{array}{l} I) A - A = \varnothing, \quad II) A - \varnothing = A, \quad III) A - U = \varnothing \\ IV) U - A = A', \ V) A - A' = A, \ VI) \varnothing - A = \varnothing \end{array}}$$

قضیه: (قانون‌های دمورگان)

$$\boxed{\begin{cases} I) (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ II) (A \cap B)' = (A' \cap B') \end{cases}}$$

اثبات I) به روش عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

[فرض کنیم $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ و $x \notin$

$$\overset{\text{تعریف متمم}}{\Leftrightarrow} x \in A' \text{ و } x \in B' \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Leftrightarrow} x \in (A' \cap B')]$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

اثبات II) در اثبات (II) از (I) کمک می‌گیریم. توجه دارید که در (I) ثابت شد که می‌توانیم متمم اجتماع را حساب و به اشتراک تبدیل کنیم.

$$(A' \cup B')' = ((A')' \cap (B')') = (A \cap B)$$

$$\Rightarrow [(A' \cup B')'] = (A \cap B)' \Rightarrow (A' \cup B') = (A \cap B')$$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، داریم:

$$(A - B)' = (A' \cup B)$$

اثبات:

$$(A - B)' = (A \cap B')' = (A' \cup B)$$

تذکر: عمل تفاضل خاصیت جابه‌جایی ندارد.

مسئلهٔ ۱: ثابت کنید $(A - B) = (B' - A')$

حل:

$(A-B)=(A\cap B')=(B'\cap A)=(B'-A')$

مسئلهٔ ۲: ثابت کنید اگر $A-B=A$ آن‌گاه $(A\cap B)=\varnothing$ و برعکس:

حل:

$A-B=A\Rightarrow(A\cap B')=A\Leftrightarrow A\subseteq B'$

$\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing$

نتیجه: اگر $A-B=A$ آن‌گاه $B-A=B$ و برعکس:

اثبات:

$A-B=A\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing\Leftrightarrow(B\cap A)=\varnothing$

$\Leftrightarrow B-A=B$

تذکر مهم: قوانین توزیع‌پذیری یا پخشیِ اجتماع نسبت به اشتراک و اشتراک نسبت به اجتماع برقرارند، یعنی:

$I)A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$II)A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

(توجه دارید که برای رسیدنِ از سمت چپ هر یک از تساوی‌های فوق به سمت راست باید از $\cup A$ یا $\cap A$ فاکتور بگیریم).

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$(A\cup B)\cap(A\cup B')$

حل:

$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$

۴. عمل تفاضل متقارن: تفاضلِ متقارنِ دو مجموعه، مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$

تذکر: عمل Δ خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

چند تساوی مهم:

$I)\ A\Delta A=\varnothing$

$(A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

$II)A\Delta A'=U$

$(A\Delta A'=(A-A')\cup(A'-A)=A\cup A'=U)$

$III)U\Delta A=A'$

$(U\Delta A=(U-A)\cup(A-U)=A'\cup\varnothing=A')$

$IV)A\Delta\varnothing=A$

$(A\Delta\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A)$

قضیه: عمل تفاضل متقارن، خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی:

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)}$$

(اثبات این قضیه به عنوان تمرین برعهدهٔ شماست).

فرمول دیگری برای تفاضل متقارن

با اثبات مسئلهٔ زیر، یک فرمول دیگر برای تفاضل متقارن (برحسب اجتماع و اشتراک) به دست می‌آید.

مسئله: ثابت کنید:

$$\boxed{(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)}$$

اثبات:

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$

$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cup B)\cap(B'\cup B)]\cap[(A\cup A')\cap(B'\cup A')]$

$=[(A\cup B)\cap U]\cap[U\cap(B'\cup A')]=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$

متمم تفاضلِ متقارن

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، همواره داریم:

$$\boxed{(A\Delta B)'=(A'\Delta B)=(A\Delta B')}$$

برای اثبات تساویِ فوق از تعریف تفاضل متقارن و مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم:

$(A\Delta B)'=[(A-B)\cup(B-A)]'=[(A-B)'\cap(B-A)']$

$=(A\cap B')'\cap(B\cap A')'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)\quad(۱)$

$\overset{\text{مسئلهٔ قبل}}{=}(A'\cup B)-(A\cup B')'=(A'\cup B)-(A'\cap B)=(A'\Delta B)$

و به همین ترتیب با جابه‌جایی مجموعه‌ها در رابطهٔ (۱) تساوی دوم ثابت می‌شود:

$(A\Delta B)'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)=(B'\cup A)\cap(A'\cup B)$

$\overset{\text{مسئله قبل}}{=}(A\cup B')-(A'\cup B')=(A\cup B')-(A\cap B')=(A\Delta B')$

مسائل مهم

در حل کلیهٔ مسائل زیر فقط از جبر مجموعه‌ها شامل تعاریف، قضیه‌ها و مسائلِ حل شده، استفاده خواهد شد.

با استفاده از جبر مجموعه‌ها هر یک از تساوی‌های زیر یا درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$$\boxed{I)\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A\ \ (۱)\\ A\cap(A\cup B)=A\ \ (۲)\end{cases}\ \text{قوانین جذب}}$$

(اگر مجموعه‌ای با دو عمل $\cup$ و $\cap$ دوبار ظاهر شود، هر مجموعهٔ دیگری جذب آن می‌شود و حاصل خود آن مجموعه خواهد شد)

اثبات: روش اول

$$A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cap(U\cup B)$$
$$=A\cap U=A$$

روش دوم: (استفاده از قضیهٔ اجتماع و اشتراک)

$$(A\cap B)\subseteq A\Rightarrow A\cup(A\cap B)=A$$

تساویِ (۲) با استفاده از (۱) به راحتی نتیجه می‌شود:

اثبات (۲): $A\cap(A\cup B)\overset{\text{بخشی}}{=}(A\cap A)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)\overset{(1)}{=}A$

II) قانون حــذف برای هر یک از دو عملِ $\cup$ و $\cap$ به تنهایی برقرار نیست، یعنی برای مثال از $A\cup B=A\cup C$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که B=C، ولی داریم:

$$\begin{cases}A\cup B=A\cup C\\ A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$$

اثبات:

$$B\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}B\cap(A\cup C)\overset{\text{بخشی}}{=}(B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\overset{\text{فرض}}{=}(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$
$$\overset{\text{فرض}}{=}(A\cup C)\cap C\overset{\text{جذب}}{=}C$$

$$III)A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

اثبات:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\cup B)=B\Leftrightarrow(A\cup B)'=B'$$
$$\Leftrightarrow(A'\cap B')=B'\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

$$IV)A\subseteq B\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$$

اثبات:

$$\overbrace{(A\cup C)}^{E}\cap\overbrace{(B\cup C)}^{D}=(A\cap B)\cup C\overset{A\subseteq B}{=}\overbrace{(A\cup C)}^{E}$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اشتراک}}{\Rightarrow}\overbrace{(A\cup C)}^{E}\subseteq\overbrace{(B\cup C)}^{D}$$

(هرگاه ثابت شــود اشــتراک دو مجموعهٔ E و D یکی از آن دو مجموعه مثلاً E باشد، طبق قضیه باید $E\subseteq D$).

$$V)A\subseteq B\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

اثبات:

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C\overset{A\subseteq B}{=}(B\cap C)$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اجتماع}}{\Rightarrow}(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

$$VI)A=B\Leftrightarrow(A\cup B)=(A\cap B)$$

اثبات: فرض کنیم A=B در این صورت داریم:

$$(A\cup B)\overset{A=B}{=}(A\cup A)=A=(A\cap A)\overset{A=B}{=}(A\cap B)$$

حال فــرض می‌کنیــم $(A\cup B)=(A\cap B)$ و ثابت می‌کنیم A=B.

$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cap(A\cap B)=(A\cap B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cap}{\Rightarrow}A\subseteq B(1)$$
$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cup(A\cap B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cup(A\cup B)=(A\cup B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cup}{\Rightarrow}B\subseteq A(2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow A=B$$

$$VII)A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

اثبات: $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[B\cap(A\cap A')]\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$=(\underbrace{B\cap\varnothing}_{\varnothing})\cup[A\cap(B\cap C')]=A\cap(B-C)$$

(چون اشــتراک خاصیت جابه‌جایی دارد، لذا عمل اشتراک از راست نیز در تفاضل توزیع‌پذیر است).

$$IIX)\begin{cases}\text{الف)}\ A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\\ \text{ب)}\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\end{cases}$$

(در توزیع‌پذیریِ تفاضل در اجتماع و اشــتراک از ســمت چپ این دو عمل به یکدیگر تبدیل می‌شوند).

اثبات الف:

$$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$$
$$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[(\underbrace{A\cap A}_{A})\cap B']\cap C'=(A\cap B')\cap C'=A\cap(B'\cap C')$$
$$=A-(B'\cap C')'=A-(B\cup C)$$

اثبات ب:

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}$$
$$A\cap(B'\cup C')=A-(B'\cup C')'=A-(B\cap C)$$

$$IX)\begin{cases}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{cases}\Rightarrow B=U$$

اثبات:

$$A\subseteq B,A'\subseteq B\Rightarrow(A\cup A')\subseteq(B\cup B)\Rightarrow U\subseteq B$$

و چون همواره $B\subseteq U$ پس B=U

$$X)\begin{cases} A \subseteq B \\ A \subseteq B' \end{cases} \Rightarrow A = \varnothing$$

اثبات:

$$A \subseteq B, A \subseteq B' \Rightarrow (A \cap A) \subseteq (B \cap B')$$

$$\Rightarrow A \subseteq \varnothing$$

و چون همواره $\varnothing \subseteq A$ پس $A = \varnothing$.

$$XI)(A\Delta B) = (A'\Delta B')$$

اثبات:

$$(A\Delta B) = (A - B) \cup (B - A) = (B' - A')\Delta(A' - B')$$

$$= (B'\Delta A') \overset{\text{جابه‌جایی}}{=} (A'\Delta B')$$

(قبلاً ثابت کردیم که، $A - B = B' - A'$).

$$XII)A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

اثبات:

$$A \cap (B\Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)]$$

$$\overset{\text{پخشی}}{=} [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] =$$

$$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=} [\underbrace{(A \cap B)}_{D} - \underbrace{(A \cap C)}_{E}] \cup [\underbrace{(A \cap C)}_{E} - \underbrace{(A \cap B)}_{D}] = D\Delta E$$

$$= (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

$$XIII)A \subseteq B \Rightarrow (A' \cup B) = U$$

اثبات:

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow A' \cup (A \cap B) = (A' \cup A)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A' \cup A)}_{U} \cap (A' \cup B) = U \Rightarrow U \cap (A' \cup B) = U$$

$$\Rightarrow (A' \cup B) = U$$

IXV) عمل تفاضل از سمت راست روی هر چهار عمل اشتراک، اجتماع، تفاضل و تفاضل متقارن توزیع‌پذیر است:

الف) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ب) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ج) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

د) $(A\Delta B) - C = (A - C)\Delta(B - C)$

اثبات الف:

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C' \overset{\text{پخشی}}{=} (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

اثبات ب:

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') \overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}$$

$$(A \cap B) \cap (C' \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

اثبات ج:

$$(A - C) - (B - C) = (A \cap C') - (B \cap C')$$

$$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=} (A - B) \cap C' = (A - B) - C$$

اثبات د:

$$(A\Delta B) - C = [(A - B) \cup (B - A)] - C$$

$$\overset{\text{قسمت اول}}{=} [(A - B) - C] \cup [(B - A) - C]$$

$$\overset{\text{قسمت ج}}{=} [\underbrace{(A - C)}_{D} - \underbrace{(B - C)}_{E}] \cup [\underbrace{(B - C)}_{E} - \underbrace{(A - C)}_{D}] = (D\Delta E)$$

$$= (A - C)\Delta(B - C)$$

$$XV)A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

اثبات:

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

تفریح اندیشه

پاسخ گفت‌وگوی دو مسافر

اگر رضا ۲۰ سال داشته باشد، بنابر فرض (۱) بایستی احمد پسر بزرگتر باشد و ۲۰ ساله نباشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر است؛ اما احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض ۲۰ ساله بودن رضا نادرست است.

اگر رضا پسر بزرگتر باشد، بنابر فرض (۲) بایستی احمد پسر کوچکتر باشد و ۲۰ سال نداشته باشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر باشد. حمید و رضا هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض پسر بزرگتر بودن رضا نیز نادرست است.

رضا که نه ۲۰ ساله و نه پسر بزرگتر می‌تواند باشد، پسر کوچکتر است. احمد هم اگر پسر بزرگتر باشد، با فرض (۳) سازگار نیست، زیرا احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند. بنابراین، احمد ۲۰ ساله و حمید پسر بزرگتر است.

«صفر» از دنیای باستان تا امروز

احمد سعیدی
عضو هیئت علمی دانشگاه مفید

کلیدواژه‌ها: صفر، ارزش مکانی اعداد، تاریخ صفر، obol، ouden بطلمیوس، براهماگوپتا، باسکارا، قوانین صفر، صفر علامت‌دار.

این سؤالات که صفر چه معنی می‌دهد و چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ از معمول‌ترین سؤالات ما هستند. در «لغت‌نامهٔ دهخدا» دربارهٔ صفر چنین آمده است: «صفر: خالی، ترجمهٔ سانسکریت صونیا (Sunya) در ریاضی هندی و عربی. معادل زرو (Zero) در فرانسه و در عین حال، ریشهٔ کلمات غربی سیفرا (Cifra)، تزیفر (Ziffer) و مشتقات آن‌هاست. رجوع به سیفر (Cipher)، شیفر (Chiffre) و دایره‌المعارف اسلامی (صفر) شود.»

قدما علامت صفر یعنی نمایندهٔ «هیچ» نداشتند. این علامت را هندیان اختراع کردند، به نام «صوفیا»، یعنی تهی و ایرانیان که کتب ریاضی هندی را به عربی ترجمه و نقل کرده‌اند، آن را به صفر عربی که به معنی تهی است، ترجمه کردند و چون ترجمهٔ آنان به لاتینی برگشت، صفر عربی را در لاتینی تغییر دادند و از آن زرو (Zero) ساختند. علامت صفر «۰» است.

به‌دنبال جواب این سؤال نیستم که «چه کسی صفر را کشف یا ابداع کرد؟» به‌دنبال این نیستیم که بگوییم صفر در زمان خاصی و توسط شخص خاصی ابداع شد و دیگران از آن زمان به بعد از آن استفاده کردند.

اولین نکته‌ای که در مورد صفر گفته می شود، این است که دو کاربرد بی‌نهایت مهم اما تا حدی متفاوت دارد اولین کاربردش این است که به عنوان نمایندهٔ جای خالی در سیستم ارزش مکانی اعداد عمل می‌کند. به این دلیل، در عددی مانند ۳۵۰۷ صفر به کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، ما در این عدد، ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی. دومین کاربرد صفر این است که خودش به‌عنوان یک عدد به‌کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. هم‌چنین زوایای متفاوتی از صفر در این دو کاربرد یافت می‌شود. (همان‌طور که در لغت‌نامهٔ دهخدا آمده است، واژهٔ «Zero» از کلمهٔ «Cipher» «Sfir» صفر گرفته شده است.)

هیچ کدام از کاربردهای بالا، تاریخچهٔ توضیح داده شدهٔ

واضحی ندارند. این‌طور نبوده است که اختراع این مفاهیم ناگهانی رخ داده باشد و بعد از آن هم شروع کرده باشند با استفاده از آن‌ها. در گذشته، مسائل ریاضی بیشتر به عنوان مسائل واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسائل مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور، بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد (برعکس امروز). تفاوت ذهنی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به‌عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته مسئله‌ای را در مورد این که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به‌هیچ‌عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

ممکن است تصور شود که ابتدا یک سیستم ارزش مکانی اعداد پدید آمد و بعداً ۰ به عنوان نمایندهٔ جای خالی، ایده‌ای اجتناب‌ناپذیر محسوب شد. درحالی که بابلی‌ها از یک سیستم ارزش مکانی اعداد بدون این ویژگی (استفاده از ۰)، برای بیش از ۱۰۰۰ سال استفاده کردند.

هیچ مدرکی هم وجود ندارد که بابلی‌ها دربارهٔ ابهام موجود، مشکلی احساس کرده باشند.

از عصر ریاضیات بابلی‌ها متونی به جای مانده است که روی لوحه‌هایی از گل پخته نشده و با خط میخی[1] نوشته شده‌اند. لوحه‌های زیادی از حدود ۱۷۰۰ ق.م به‌جای مانده‌اند که قابل خواندن هستند. البته سیستم عددی آن‌ها با سیستمی که امروزه استفاده می‌کنیم، کاملاً فرق دارد[2]. اما با ترجمهٔ سیستم علامت گذاری آن‌ها به سیستم دهگانی، متوجه می‌شویم که آن‌ها نیز بین ۳۵۰۷ و ۳۵۷تفاوتی قائل نبوده‌اند و فقط از فحوای متن متوجه می‌شدند که واقعاً کدام یک مدنظر بوده است. تا سال ۴۰۰ ق.م، بابلی‌ها علامت را در مکانی که ما صفر قرار می‌دهیم قرار می‌دادند تا نشان دهند منظور ۳۵۷ است یا ۳۵۰۷. در واقع، آن‌ها ۳۵۰۷ را به‌صورت ۳۵"۷ می‌نوشتند.

علامت " تنها علامت مورد استفاده برای این منظور نبوده‌است. بر یک لوح پیدا شده در «کیش»[3]، نماد دیگری به کار برده شده است. در این لوح که تاریخ آن حدود سال ۷۰۰ ق.م تخمین زده شده، از سه قلاب برای مشخص کردن مکان خالی در سیستم ارزش مکانی استفاده شده است. در لوحه‌های دیگری که در حوالی همان زمان تاریخ‌گذاری شده‌اند نیز یک قلاب تنها برای جای خالی به‌کار رفته است.

یک جنبهٔ مشترک برای این موضوع، کاربرد علامت‌های متفاوت برای مشخص کردن موقعیت خالی است. درست است که جای خالی هرگز در پایان ارقام اتفاق نمی‌افتد، اما همیشه بین دو رقم وجود داشته است. بنابراین، ما با ۳۵"۷ روبه‌رو می‌شویم، اما هیچ‌گاه به "۳۵۷ برنمی‌خوریم و این را که کدام یک مدنظر بوده است، باید از متن متوجه شد.

ما امروز نیز از این قرائن برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم. اگر سوار یک اتوبوس بین‌شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن را به معنای ۶۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن را شش و پانصد بگویند، شما آن را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد. از این مثال می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیهٔ صفر برای مشخص کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به‌عنوان یک عدد نبوده، بلکه صرفاً به عنوان نوعی علامت‌گذاری بوده است؛ به‌این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

یونانیان باستان سهم خود را در ریاضیات حدوداً زمانی آغاز کردند که صفر به عنوان نشانگر مکان خالی در ریاضیات بابلی‌ها به‌کار برده می‌شد. به هر حال، یونانیان یک دستگاه ارزش مکانی را نپذیرفتند. سؤال خوبی مطرح است که این واقعیت دقیقاً به‌چه معناست؟ جواب حقیقی به این سؤال، از پاسخ ساده‌ای که ما می‌دهیم، دقیق‌تر است. اساساً دستاوردهای ریاضیات یونانی بر هندسه مبتنی بود. گرچه موضوع کتاب «اصول» اقلیدس «نظریهٔ اعداد» بود، ولی مبنای هندسی داشت. به عبارت دیگر، از آن‌جا که ریاضی‌دانان یونان با عدد به عنوان طول پاره خط‌ها کار می‌کردند، نیازی به نام‌گذاری اعداد نداشتند.

در آن‌چه بیان کردیم، استثنائاتی هست. استثنا، ریاضی‌دانانی بودند که در ثبت اطلاعات نجومی کار می‌کردند. اولین کاربرد علامتی که امروزه برای نمایش صفر درنظر می‌گیریم، در این حوزه مشاهده شد و برای منجمان یونانی، شروع استفاده از علامت o بود. البته نظریات زیادی در این باب وجود دارند که چرا از این علامت استفاده شد. برخی مورخان ذکر کرده‌اند که آن Omicron است؛ اولین حرف یونانی کلمه «هیچ» (ouden). نیوگبار[4] این بیان را رد می‌کند، زیرا یونانیان از Omicron به‌عنوان عدد استفاده می‌کردند.[5] بیان‌های دیگری هم مطرح شده‌اند. از جمله می‌گوید. این علامت «obol» را نمایش می‌دهد (سکه‌ای بدون ارزش) و زمانی به‌وجود می‌آمد که از شمارنده‌ها برای حساب روی تخته ای شنی استفاده می‌شد. در این‌جا وقتی شمارنده برای جاخالی گذاشتن یک ستون برداشته می‌شد، یک تورفتگی روی شن برجای می‌گذاشت که به شکل o به‌نظر می‌رسید.

بطلمیوس در «المجسطی»[6] که حدود ۱۳۰ م نوشته شده است، دستگاه شصتگانی بابلی‌ها را همراه با نگه‌دارندهٔ جای خالی به‌کار برده است. در این زمان، بطلمیوس این علامت را، هم بین اعداد و هم در پایان آن‌ها به‌کار برده است و این ایده تقویت می‌شود که صفر حداقل به عنوان نماینده‌ی مکان خالی به کار

می‌رفته است. این نظر، هم‌چنان دور از واقعیت است. فقط تعداد قلیلی منجم از این نماد استفاده کرده‌اند. (قطعاً بطلمیوس آن را به‌عنوان عدد نمی‌پنداشت، بلکه آن را علامت نقطه‌گذاری می دانست.) ایدهٔ جایگاه صفر بعداً خود را در ریاضیات هندی نشان داد.

اکنون صحنه به هندوستان منتقل می‌شود. جایی که سزاوار است گفته شود اعداد و دستگاه اعداد متولد شدند و به‌سوی موجودات بسیار پیشرفته‌ای که امروز می‌بینیم، رشد کردند. البته مراد این نیست که بگوییم دستگاه هندی به دستگاه‌های ماقبل خود چیزی مدیون نیست. مهم این است که حدود سال ۶۵۰ م، کاربرد صفر به‌عنوان یک عدد، در ریاضیات هند وارد شده است.

هندی‌ها هم‌چنین سیستم ارزش مکانی را به‌کار می‌بردند و صفر برای مشخص کردن یک مکان خالی به کار برده می‌شد. در واقع، شواهدی از یک جایگاه خالی در سیستم مکانی، از حدود ۲۰۰ م در هند وجود دارد، هرچند هنوز برای آن نمادی نبوده است.

در حدود سال ۵۰۰ م، آریاباتا[7] دستگاهی عددی به‌جا گذاشت که یک دستگاه ارزش مکانی بدون صفر بود. او واژه‌ی «Kha» را برای جایگاه به‌کار برد که می‌توانست بعداً به‌عنوان نماد صفر به کار برده شود.

شاهدی وجود دارد که نشان می‌دهد، از نقطه در نوشته‌های اولیهٔ هندی، به‌منظور نمایش مکان خالی در سیستم عددی استفاده شده است؛ جالب است که در اسناد مشابه، گاهی‌اوقات از نقطه برای مجهول استفاده شده است؛ همان x که امروزه به‌کار می‌بریم. سپس ریاضی‌دانان هندی در دستگاه ارزش مکانی نام‌هایی برای صفر گذاشتند، در حالی که هنوز علامتی برای آن نداشتند. اولین تاریخی که استفادهٔ هندیان از صفر ثبت شده است، ۸۷۶ م بوده است.

اکنون به بررسی اولین باری که صفر به عنوان عدد به‌کار برده‌شد، می‌پردازیم. از دیرباز، اعداد واژگانی بودند که به مجموعه‌ای از اشیا اشاره می‌کردند. قطعاً ایدهٔ اعداد به مرور مجردتر شده است. سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را که به‌عنوان ویژگی مجموعه‌ای از اشیا مطرح نیست، ممکن می‌سازد. البته مشکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به‌عنوان عدد مطرح شوند و این که آن‌ها نسبت به اعمال حسابی، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی، براهماگوپتا[8]، ماهاویرا[9] و باسکارا[10]، در سه کتاب مهم کوشیدند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم سعی می‌کند قوانینی برای حساب ارائه دهد که صفر و اعداد منفی را نیز دربرگیرد. او توضیح داد، اگر یک عدد را از خودش تفریق کنید، صفر به‌دست می‌آید. براهماگوپتا قانون زیر را برای جمع ارائه کرد که شامل صفر هم می‌شود: «حاصل جمع صفر و یک عدد منفی، یک عدد منفی است. حاصل جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است. صفر به‌علاوهٔ صفر، صفر می‌شود.»

در مورد تفریق کمی سخت‌تر است: «اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، عددی مثبت به‌دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفر کم کنیم، حاصل عددی منفی است. اگرصفر را از یک عدد منفی کم کنیم، جواب عدد مثبت است. اگر صفر را از صفر کم کنیم، حاصل صفر است.»

براهماگوپتا سپس بیان می‌کند که حاصل ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شود، اما هنگامی که به تقسیم می رسد، تقلا می کند: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود، کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، همان صفر است یا به‌طور خاص یک کسر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود.»

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشنهاد می‌دهد n تقسیم بر صفر برابر $\frac{n}{0}$ است، توجیه چندانی نمی‌آورد. او در این‌جا به وضوح در تقلاست. زمانی که می‌گوید صفر تقسیم بر صفر برابر صفر است، قطعاً اشتباه می‌کند. به هر حال، او به عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حساب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد، تلاش درخشانی کرد.

در سال ۸۳۰ م، حدود ۲۰۰ سال بعد از شاهکار براهماگوپتا، ماهاویرا کتاب «Ganita Sara Samgraha» را نوشت که به‌روزشدهٔ کتاب براهماگوپتا بود. او به درستی بیان می‌کند: «یک عدد ضرب در صفر، صفر می‌شود. هنگامی که صفر از یک عدد تفریق شود، آن عدد تغییری نمی‌کند.»

با این حال، تلاش‌های او برای بهبود اظهارات براهماگوپتا در تقسیم برصفر، به اشتباه انجامید. وی می‌نویسد: «هنگامی که عددی بر صفر تقسیم شود بدون تغییر باقی می‌ماند.»

باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقسیم بر صفر می‌کوشید. او می نویسد: «کمیتی که بر صفر تقسیم شود، کسری با مخرج صفر خواهد بود. این تقسیم، اصطلاحاً کمیتی بی‌نهایت است. در این کمیت، شامل آن چه در مخرج صفر دارد، تغییری وجود ندارد؛ گرچه ممکن است بسیاری درج یا اقتباس شده باشد. همان‌گونه که اگر جهان خلق یا خراب شود، هیچ تغییری در خدای بی‌نهایت و تغییرناپذیر رخ نمی‌دهد؛ گرچه نظم بسیاری از هستی، جذب یا منتشر شود.»

بنابراین، باسکارا کوشید مسئله را به وسیلهٔ نوشتن $\frac{n}{0}=\infty$

حل کند. در نگاه اول ممکن است وسوسه شویم و بیندیشیم گفتهٔ باسکارا درست است. اما قطعاً غلط است، زیرا در این صورت ... $=۲=۱=n=۰\times\infty$ یعنی $۰\times\infty$ با هر عددی برابر است. بنابراین، همهٔ اعداد باهم مساوی خواهند بود!! ریاضی‌دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک برصفر تقسیم‌پذیر نیست. باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را درست بیان کرد: مانند $۰ = ۰^۲$ و $\sqrt{۰}$.

کار درخشان ریاضی‌دانان هندی، به ریاضی‌دانان مسلمان بیش از غربی‌ها منتقل شد. این فرصتی برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبهٔ هندوها» را بنویسد و سیستم ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ تا ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این کار در ایران امروزی اولین کار برای استفاده از صفر به‌عنوان جانگه‌دار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی، سه مقاله بر اعداد نوشت که سبب توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های اعشاری (دهدهی ـ دهگانی) شد. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست را توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار صفر را به‌کار می‌برد و آن را گالگال[۱۱] (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد. اندکی بعد در قرن ۱۲ میلادی، السماول چنین می‌نویسد: «اگر از صفر یک عدد مثبت را کم کنیم، همان عدد به صورت منفی باقی می‌ماند. اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، همان عدد به صورت مثبت باقی می‌ماند.»

ایده‌های هندوها همان‌طور که در شرق تا چین گسترش یافت، در غرب هم تا کشورهای اسلامی گسترش پیدا کرد. در سال ۱۲۴۷م، ریاضی‌دان چینی، چین‌چیوشاو[۱۲] مقالهٔ «ریاضی در نه بخش» را نوشت که علامت o را برای صفر به کاربرد. اندکی بعد در سال ۱۳۰۳م، ژوشی‌جی «بازتاب بی‌معنی از چهار عنصر» را نوشت و مجدداً از علامت o برای صفر استفاده کرد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید سیستم اعداد را به اروپا وارد کرد. آن‌گونه که ایفرا[۱۳] می‌نویسد: «یک رابط مهم بین دستگاه عددی هندو ـ عربی و ریاضیات اروپا، ریاضی‌دان ایتالیایی، فیبوناچی است.»

وی در «لیبرآباسی»[۱۴] در حدود سال ۱۲۰۰م، ۹ نماد هندی را به همراه علامت برای اروپاییان توضیح می‌دهد. اما تا مدت‌ها بعد از او استفادهٔ چندانی از صفر نشد.مشخص است که فیبوناچی آن‌قدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد رفتار می‌کرد. زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به‌عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا اهمیت زیادی داشت، ولی در رفتار با صفر، وی نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا رسید و نه به مسلمانانی چون السماوال.

ممکن است گمان شود که پیشرفت دستگاه‌های اعداد و به‌خصوص صفر، به‌طور مستمر از این زمان به بعد بوده است؛ گرچه این دور از بحث است. کاردان[۱۶] معادلات درجهٔ ۳ و درجهٔ ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در سال ۱۵۰۰م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را دراختیار داشته باشد، انجام داد. در سال ۱۶۰۰ م صفر کاربرد گستردهٔ خود را آغاز کرد؛ البته بعد از مواجهه با مقاومت‌های زیاد اما هنوز نشانه‌هایی از مشکلاتی که مسبب آن‌ها صفر بود، وجود داشت.

اخیراً بیشتر مردم جهان، هزارهٔ جدید را در اول ژانویه ۲۰۰۰ جشن گرفتند. البته از آن‌جا که در تقویم تنظیم شده، سال صفر به هیچ زمانی اختصاص داده نشده است، آن‌ها فقط گذر ۱۹۹۹ سال را جشن گرفتند.

هرچند آن خطای اصولی را می‌توان بخشید، ولی کمی شگفت‌آور است که به‌نظر می‌رسد، بیشتر مردم قادر به درک این نیستند که چرا هزارهٔ سوم و قرن بیست‌ویکم، در اول ژانویهٔ ۲۰۰۱ شروع می‌شود!

قوانین صفر در جبر

بارها هنگام تدریس دروس ریاضی با کمال تعجب دیده‌ام، برخی دانشجویان گمان می‌کنند $\frac{n}{۰}$ برابر است با ∞. در حالی که این نظر به وضوح غلط است و عبارات و نظراتی از این دست نگران کننده‌اند. شاید لازم باشد در این‌جا، خلاصه‌ای از ویژگی‌ها و قوانین مربوط به‌صفر را بیاوریم:

۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است[۱۷]. صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست، ولی زوج است.[۱۸]

۲) جمع $x + ۰ = ۰ + x = ۰$ صفر نسبت به جمع خنثاست

۳) تفریق $x - ۰ = x \,,\, ۰ - x = -x$

۴) ضرب $x \,.\, ۰ = ۰ \,.\, x = ۰$

۵) تقسیم $\frac{۰}{x} = ۰$ برای x ناصفر

برای x ناصفر، $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{x}{۰}$ تعریف نشده است.

برهان: عبارت $\frac{x}{۰}$ تعریف نشده است، زیرا وارون ضربی[۱۹] ندارد. از آن‌جا که طبق قانون ضرب $x \,.\, ۰ = ۰$، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود. درواقع هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر هم‌گرا شود (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، داریم:

$$x > 0: \lim_{y \to 0^+} \frac{x}{y} = +\infty$$

$$x < 0: \lim_{y \to 0^-} \frac{x}{y} = -\infty$$

به استثنای حالتی که x=0 باشد. $x^0 = \frac{x}{x} = 1$ توان (۶

تذکر: هم‌چنین $0^x = 0$ برای هر x (طبق قانون ضرب، عدد هر چند بار در خودش ضرب شود، برابر صفر می‌شود.)

هم‌چنین 0^0 تعریف نشده است. اما اگر به صورت حدی باشد (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، جزء حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

۷) مجموع ۰ عدد صفر برابر است.

۸) حاصل ضرب ۰ عدد برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر x عدد حقیقی باشد: $0.x=0$.

اثبات: $0.x+0.x=(0+0).x=0.x$ بنابراین طبق قانون حذف می‌توان نوشت: $0.x=0$.

۹) هرگاه $x\neq 0$ و $y\neq 0$، آن‌گاه: $xy\neq 0$.

اثبات: فرض کنیم $x\neq 0$ و $y\neq 0$، ولی $xy\neq 0$. در این صورت بند (۸) نتیجه می‌دهد.

$$1 = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})xy = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})0 = 0$$

که یک تناقض است. پس (۹) برقرار است.

۱۰) صفر فاکتوریل برابر ۱ است؛ $0! = 1$.

۱۱) تعریف صفر تابع f: نقطه‌ای مانند x را صفر تابع f گویند اگر $f(x)=0$. مثلاً $x = 2$ صفر تابع $f(x)=x^2-3x+2$ است، زیرا: $f(2)=2^2-3\times 2+2=0$.

تذکر: در ریاضیات داریم: $0 = +0 = -0$ به عبارت دیگر، -0 و $+0$ باهم برابرند.

اما صفر علامت‌دار[20] چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور[21] اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این که برابر صفر نیستند، ولی هنگام نمایش با رایانه صفر محسوب می‌شوند. به‌عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که: $0<x<\varepsilon$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن را $+0$ نمایش می‌دهد.

همین‌طور است در مورد صفر منفی: اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که $\varepsilon<x<0$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون منفی است، آن را -0 نمایش می‌دهد.

امروزه در علم آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر، بلکه مجموعه‌ای از اعداد صفر محسوب می‌شود. به‌عبارت دیگر، صفر منحصر به‌فرد نیست. همهٔ اعداد بین ε ، ε - صفر محسوب می‌شوند.

این تعریف جدید از صفر قوانین خاص خود را دارد که به صورت زیر است:

$$\frac{1}{-0} = -\infty, \frac{1}{+0} = +\infty$$

و در این شرایط فقط $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ تعریف نشده است.

مفهوم صفر منفی هم‌چنین کاربردهایی در مکانیک آماری و سایر حوزه‌ها دارد.

پی‌نوشت

۱. علائم روی لوحه‌های گل رس با لبه‌ی شیب‌دار قلمی فولادی حک شده‌اند. هم‌چنین، ظاهری گوه شکل داشته‌اند. به همین دلیل، این خط خط میخی نامیده شده است.

۲. بر مبنای سیستم شصتگانی (sexadecimal) می‌نوشته‌اند و ما بر مبنای سیستم دهگانی (decimal).

۳. شهری در بین‌النهرین قدیم، واقع در شرق بابل که جنوب مرکزی عراق امروزی است.

4. Neugebauer

۵. Omicron ۷۰ را نمایش می‌دهد. دستگاه اعداد یونانیان بر مبنای حروف آن‌هاست.

6. Almajest

7. Aryabhata

8. Brahmagupta

9. Mahavira

10. Bhaskara

11. galgal

12. Ch>in Ciu-Shao

13. Zhu Shijie

14. Ifrah

15. Liber Abaci

16. Cardan

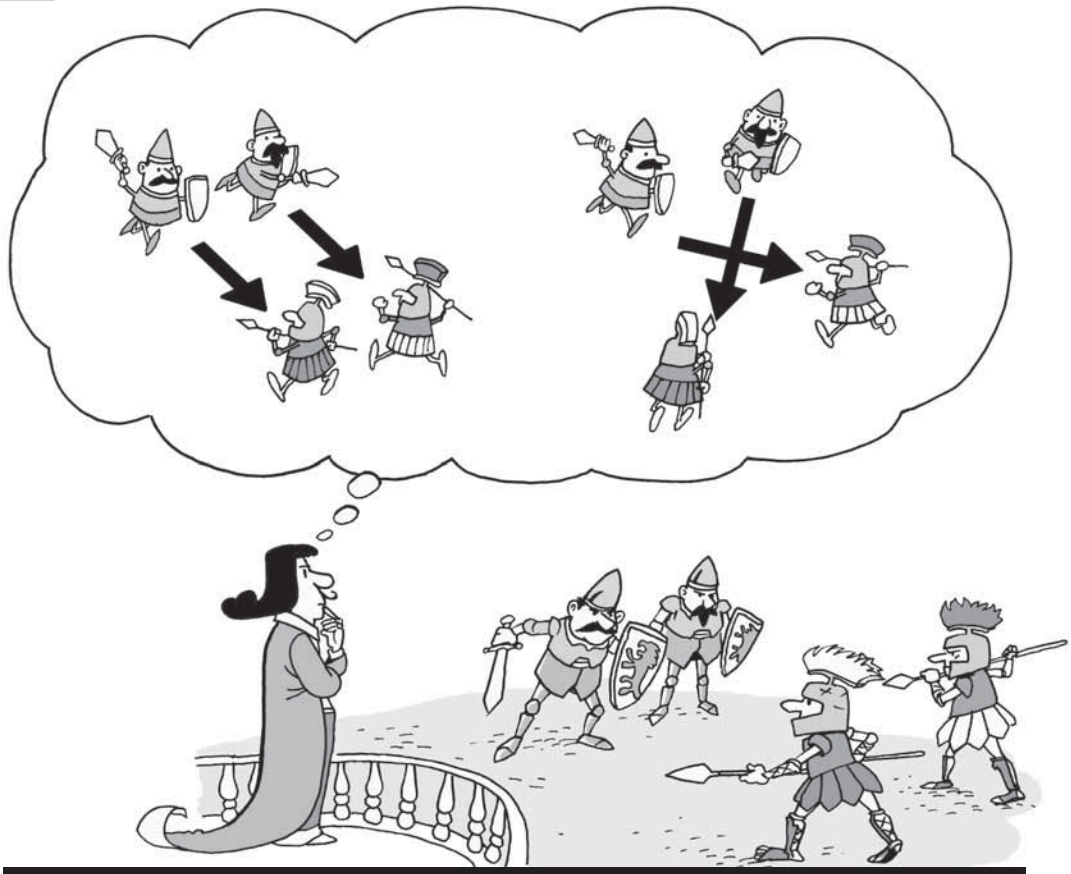
۱۷. عدد جبری عددی است که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

۱۸. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد. از آن‌جا که $2\times 0=0$، بنابراین ۰ عددی زوج است.

۱۹. گوییم عنصر a وارون ضربی دارد. اگر $a \times \frac{1}{a} = 1$، در این‌صورت $\frac{1}{a}=a^{-1}$ وارون ضربی a نام دارد.

20. Signed Zero

21. Floating point



تعداد توابع یک به یک و پوشا

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

میرشهرام صدر

اشاره

در کتاب حسابان جدید (سال تحصیلی ۹۰-۸۹)

تعریف تابع $f: A \to B$ چنین آمده است[1]:

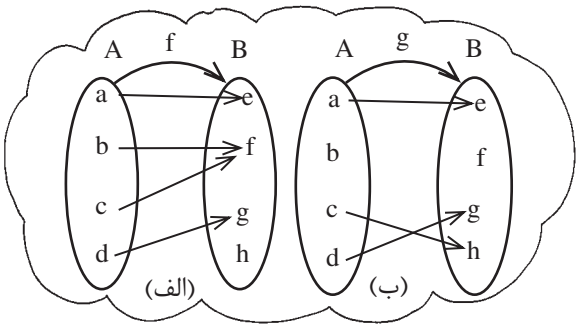
«تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد.»

از این تعریف نتیجه می‌شود که در نمایش تابع f با نمودار ون خواهیم داشت:

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود و ممکن است به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

برای مثال در زیر دو رابطه از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,g,h\}$ تعریف شده است:

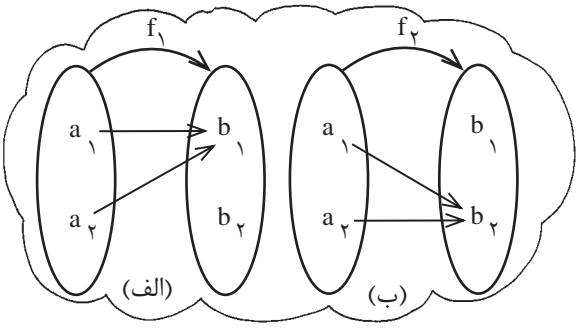


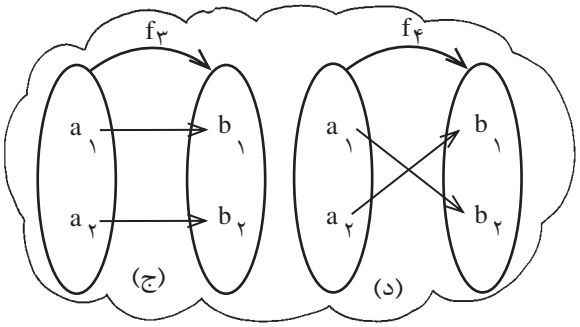
الف) $f(a)=e,\ f(b)=f,\ f(c)=f,\ f(d)=g$

ب) $g(a)=e,\ g(c)=h,\ g(d)=g,\ g(b)=?$

با توجه به تعریف تابع، بدیهی است که $f: A \to B$ تابع است، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. اما $g: A \to B$ تابع نیست، زیرا از عضو $b \in A$ پیکانی خارج نشده است، یعنی رابطهٔ g روی همهٔ عضوهای A اثر نکرده است.

اگر فرض کنیم $A=\{a_1,a_2\}$ و $B=\{b_1,b_2\}$ در این صورت چهار تابع مختلف از A به B به صورت زیر وجود دارد.





اکنون با توجه به تعریف تابع واصل ضرب[۲] می‌خواهیم تعداد توابع از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B را محاسبه کنیم. برای این منظور فرض کنیم که:

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$; $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که f از A به B یک تابع باشد، در این صورت تابع f باید روی همهٔ عضوهای A اثر کند. برای مثال وقتی f روی a_1 اثر می‌کند، $f(a_1)$ می‌تواند برابر با b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_1)$، تعداد m انتخاب داریم که عبارتند از:

$f(a_1)=b_1$ یا $f(a_1)=b_2$ یا ... یا $f(a_1)=b_m$

به همین ترتیب برای $f(a_2)$، $f(a_3)$، ...، $f(a_n)$. هر کدام m انتخاب داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{\overset{f(a_1)}{\boxed{m}}\quad \overset{f(a_2)}{\boxed{m}}\quad \overset{\dots}{}\quad \overset{f(a_n)}{\boxed{m}}}_{\text{n مرتبه}}$$

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد توابع f از A به B} = \underbrace{m\times m\times\dots\times m}_{\text{n مرتبه}} = m^n$$

مثال. تعداد توابعی که از یک مجموعهٔ سه عضوی به یک مجموعهٔ چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم f یک تابع از $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ به $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ باشد، در این صورت برای هر یک از مقادیر $f(a_1)$، $f(a_2)$ و $f(a_3)$، چهار انتخاب داریم. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

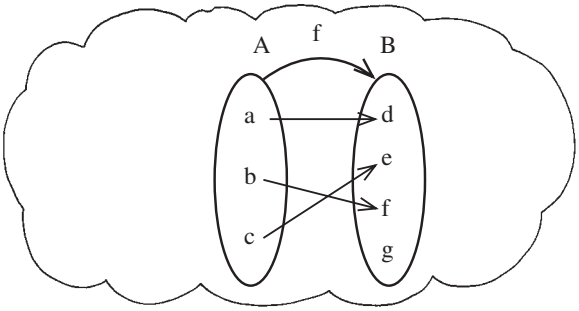
$$\overset{f(a_1)}{\boxed{۴}}\quad \overset{f(a_2)}{\boxed{۴}}\quad \overset{f(a_3)}{\boxed{۴}}$$

تعداد توابع f از A به B $=۴\times۴\times۴=۴^۳=۶۴$

در ادامهٔ مقاله،تعداد توابع یک‌به‌یک و سپس تعداد توابع پوشای f از A به B را محاسبه خواهیم کرد.

تعداد توابع یک‌به‌یک

تابع زیر را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{d,e,f,h\}$ در نظر بگیرید.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f: A\to B$ تابعی یک‌به‌یک است، یعنی اگر تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن با یکدیگر متمایزند.

$f=\{(a,d), (b,f), (c,e)\}$

تذکر. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد و $n>m$، در این صورت از A به B تابع یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این‌که از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B بتوان تابع یک‌به‌یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n\le m$.

فرض کنید $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,...b_m\}$ و $n\le m$، می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک $f: A\to B$ را محاسبه کنیم، برای این منظور ابتدا تابع f را روی a_1 اثر می‌دهیم. $f(a_1)$ می‌تواند برابر b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_1)$، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_1)=b_j$ که $1\le j\le m$. در مرحلهٔ بعد f را روی a_2 اثر می‌دهیم، برای این‌که تابع f یک‌به‌یک باشد، باید $f(a_2)\neq bj$، یعنی برای $f(a_2)$، $(m-1)$ انتخاب داریم. به همین ترتیب برای $f(a_3)$، $(m-2)$ انتخاب و... و برای $f(a_n)$، $(m-n+1)$ انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\overset{f(a_1)}{\boxed{m}}\quad \overset{f(a_2)}{\boxed{m-۱}}\quad \overset{f(a_3)}{\boxed{m-۲}}\quad \dots\quad \overset{f(a_n)}{\boxed{m-n+۱}}$$

$$\text{تعداد توابع یک‌به‌یک از A به B} = m(m-۱)(m-۲)\dots(m-n+۱)$$

$$= P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعهٔ دو عضوی A به مجموعهٔ هفت عضوی B چند تابع یک‌به‌یک می‌توان تعریف کرد؟

حل.

$$P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!}$$

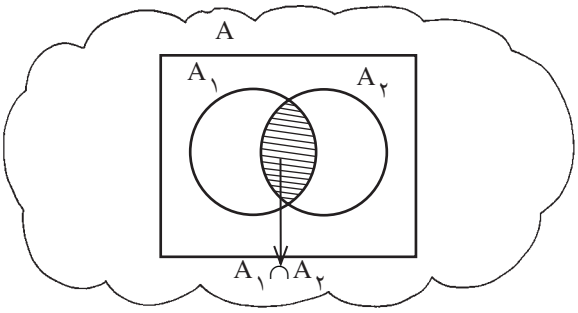
$$= \frac{۷!}{۵!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۴۲$$

برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا، نیاز به استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم، برای این منظور، این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A_1 و A_2 دو مجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی A باشند، تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از این دومجموعه تعلق دارند، را با نماد $|A_1 \cup A_2|$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را از رابطهٔ زیر معروف به اصل شمول و عدم شمول محاسبه می‌کنیم.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



تعمیم اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A یک مجموعهٔ متناهی و A_1، A_2، A_3، ...، A_n زیرمجموعه‌هایی از A باشند، در این صورت داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|$$

تعداد توابع پوشا

فرض کنیم A و B مجموعه‌های دوعضوی باشند. می‌خواهیم تعداد توابع پوشا از A به B را به دست آوریم، برای این منظور، فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to B$ باشد. ابتدا تعداد کل توابع از A به B را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد، آن‌گاه تعداد کل توابع $f: A \to B$ برابر با m^n است؛ بنابراین داریم:

$$|S| = 2^2 = 4$$

سپس با فرض این‌که $A=\{a_1,a_2\}$ و $B=\{b_1,b_2\}$، دو مجموعهٔ A_1 و A_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

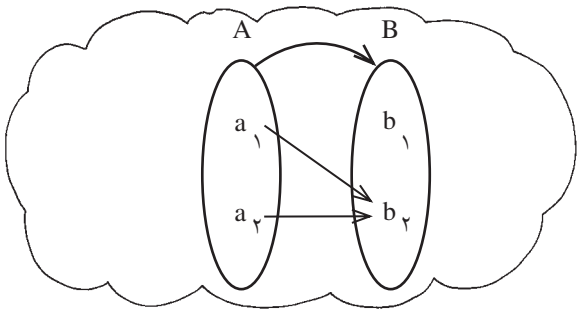
$$A_1 = \{f \in S : f(x) \neq b_1\};\ A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_2\}$$

برای محاسبهٔ $|A_1|$، چون برای هر $x \in A$ داریم: $f(x) \neq b_1$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_1)=b_2,\ f(a_2)=b_2$$

در نتیجه طبق اصل داریم:

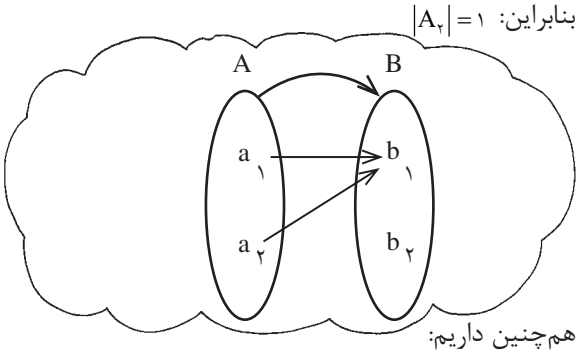
$$\underset{f(a_1)}{\boxed{1}}\ \underset{f(a_2)}{\boxed{1}};\ |A_1| = |1 \times 1| = 1$$



از طرفی برای محاسبهٔ $|A_2|$، چون برای هر $x \in A$ داریم: $f(x) \neq b_2$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_1)=b_1,\ f(a_2)=b_1$$

بنابراین: $|A_2| = 1$



هم‌چنین داریم:

$$A_1 \cap A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_1, b_2\} = \varnothing \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

اکنون $|A_1 \cup A_2|$ تعداد کل توابع غیرپوشا از A به B را نشان می‌دهد که اگر این مقدار را از $|S|$ کم کنیم، تعداد توابع پوشا از A به B به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2}\right| = |S| - |A_1 \cup A_2|$$
$$= |S| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) = 4 - (1 + 1 - 0) = 2$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ به مجموعهٔ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ چندتاست؟

حل. هرگاه S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to B$ باشد، آن‌گاه $|S| = 3^4 = 81$.

اکنون تعداد توابع غیرپوشای $f: A \to B$ را محاسبه می‌کنیم، سپس با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{f \in S : f(x) \neq b_1\};\ A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_2\};$$
$$A_3 = \{f \in S : f(x) \neq b_3\}$$

برای محاسبهٔ $|A_1|$؛ چون برای هر $x \in A$ داریم $f(x) \neq b_1$، بنابراین $f(x)$ می‌تواند b_2 یا b_3 باشد، یعنی برای $f(x)$ دو حالت وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{f(a_1)}{\boxed{2}}\ \underset{f(a_2)}{\boxed{2}}\ \underset{f(a_3)}{\boxed{2}}\ \underset{f(a_4)}{\boxed{2}};|A_1|=2^4=16$$

به همین ترتیب $|A_2|=|A_3|=16$.

چون $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$ و $|A_2\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ داریم:

$$A_1\cap A_2=\{f\in S: f(x)\neq b_1,b_2\}$$

برای محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_1,b_2$، پس $f(x)=b_3$، یعنی تابع ثابت داریم. بنابراین برای $f(x)$ همواره یک حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{f(a_1)}{\boxed{1}}\ \underset{f(a_2)}{\boxed{1}}\ \underset{f(a_3)}{\boxed{1}}\ \underset{f(a_4)}{\boxed{1}};|A_1\cap A_2|=1^4=1$$

به همین ترتیب $|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=1$.

$$A_1\cap A_2\cap A_3=\{f\in S: f(x)\neq b_1,b_2,b_3\}=\varnothing$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

مقدار $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=81-(16+16+16-1-1-1+0)=36$$

قضیه. فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی با شرط $n\geq m$ باشند. ثابت کنید تعداد توابع پوشای $f:A\to B$ برابر است با:

$$m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n-\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

برهان. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ در صورتی که S مجموعهٔ همهٔ توابع $f:A\to B$ باشند، آن‌گاه $|S|=m^n$.

در صورتی که تعداد توابع غیرپوشای $f:A\to B$ را محاسبه کنیم، با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A_i=\{f\in S|f(x)\neq b_i\};1\leq i\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_1|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_i$ بنابراین $f(x)$ می‌تواند b_1 یا b_2 یا ... یا b_{i-1} یا b_{i+1} یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(x)$، $(m-1)$ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{f(a_1)}{\boxed{(m-1)}}\ \underset{f(a_2)}{\boxed{(m-1)}}\ \underset{f(a_3)}{\boxed{(m-1)}}\ \underset{f(a_4)}{\boxed{(m-1)}}\ \cdots\ \underset{f(a_n)}{\boxed{(m-1)}}$$

$$|A_1|=(m-1)^n$$

از طرفی تعداد مجموعه‌هایی به شکل A_i برابر با $\binom{m}{1}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌های به شکل A_i برابر با تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|=\binom{m}{1}(m-1)^n$$

چون $(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$ و $|A_i\cap A_j\cap A_k|$ برای $1\leq i<j<k\leq m$ و ... و $|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|$ برای $1\leq i<j<\cdots<l\leq m$ و $\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|$ داریم:

$$A_i\cap A_j=\{f\in S: f(x)\neq b_i,b_j\};1\leq i<j\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$، چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_i,b_j$، بنابراین برای $f(x)$ همواره $(m-2)$ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{f(a_1)}{\boxed{(m-2)}}\ \underset{f(a_2)}{\boxed{(m-2)}}\ \underset{f(a_3)}{\boxed{(m-2)}}\ \cdots\ \underset{f(a_n)}{\boxed{(m-2)}}$$

$$|A_i\cap A_j|=(m-2)^n$$

تعداد مجموعه‌هایی به شکل $A_i\cap A_j$ برای $1\leq i<j\leq m$ برابر با $\binom{m}{2}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌هایی به این شکل برابر با تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|=\binom{m}{2}(m-2)^n$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$\vdots$$
$$\sum_{\underbrace{1\leq i<j<\cdots<l\leq m}_{(m-1)\text{اندیس}}}|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|=\binom{m}{m-1}(m-(m-1))^n$$
$$=\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

و بالاخره داریم:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|=0$$

مقدار $|\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}|$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$|\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}|=|S|-|(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)|$$
$$=m^n-(\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$-\cdots+(-1)^m \sum_{\underbrace{1\le i<j<\cdots<l\le m}_{(m-1)\ \text{اندیس}}} \left|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l\right| + (-1)^{m-1}\left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|)$$

$$(\overline{\bigcup_{i=1}^{m} A_i}) = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ پنج‌عضوی A به مجموعهٔ چهارعضوی B چندتاست؟

حل.

$|A| = n = 5, |B| = m = 4$

با توجه به فرمول تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B با شرط $(n \le m)$ داریم:

$$(\overline{\bigcup_{i=1}^{4} A_i}) = 4^5 - \binom{4}{1}(4-1)^5 + \binom{4}{2}(4-2)^5 - \binom{4}{3}(4-3)^5$$
$$=1024-972+192-4=240$$

یک مسئلهٔ کاربردی از تعداد توابع پوشا

مسئله. گروه ریاضی یک انتشاراتی، شش طرح مختلف مربوط به تألیف کتاب‌های کمک‌آموزشی دارد که پنج گروه تألیف، متقاضی اجرای قسمت‌های مختلف هر طرح هستند. برای تقویت بنیهٔ علمی کتاب‌ها، بهتر است هر پنج گروه روی قسمت‌های مختلف هر طرح کار کنند. به چند راه می‌توان با این پنج گروه قرارداد منعقد کرد به‌طوری که برای انجام هر طرح، هر گروه قرارداد جداگانه‌ای داشته باشد.

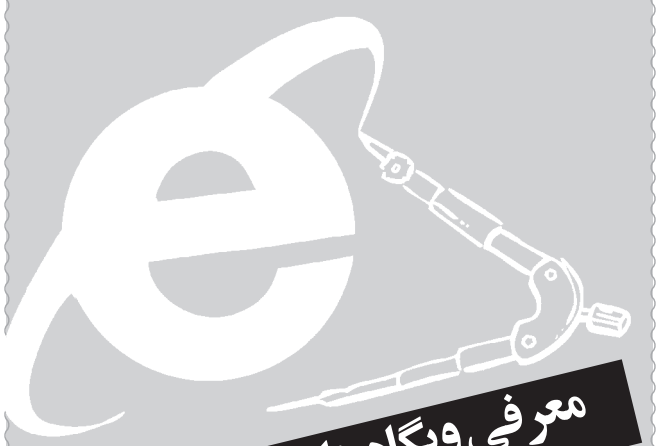
حل. تعداد قراردادهایی که می‌توان با این پنج گروه طبق شرایط مسئله منعقد کرد برابر با تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ شش‌عضوی A به مجموعهٔ پنج‌عضوی B است. بنابراین با فرض این‌که $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$، تعداد توابع پوشا از A به B را پیدا می‌کنیم:

$$(\overline{\bigcup_{i=1}^{5} A_i}) = 5^6 - \binom{5}{1}(5-1)^6 + \binom{5}{2}(5-2)^6 - \binom{5}{3}(5-3)^6$$
$$+\binom{5}{4}(5-4)^6 = 15625 - 20480 + 7290 - 640 + 5 = 1800$$

پی‌نوشت‌ها

۱. این تعریف از تابع در کتاب ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی تحت عنوان «نگاشت» آمده است.

۲. **اصل ضرب:** فرض کنیم عملی در k مرحلهٔ متوالی انجام می‌گیرد به‌طوری که در مرحلهٔ اول با r_1 راه مختلف، در مرحلهٔ دوم با r_2 راه مختلف و... و در مرحلهٔ kام با r_k راه مختلف انجام پذیرد. در این صورت این عمل می‌تواند به‌طور کلی با $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_k$ راه مختلف انجام گیرد.



معرفی وبگاه‌های ریاضی جهان

اسم وبگاه: Calculus Applet

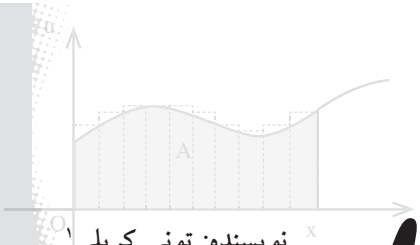
نشانی وبگاه: http://www.calculusapplet.com

احسان یارمحمدی

صفحهٔ اصلی سایت Calculus Applet شامل عنوان‌های گوناگون زیر است که هریک از این عناوین حاوی مطالب ارزنده و مفیدی دربارهٔ موضوعات ریاضی است.

- پیوستگی و حدود (Continuity and Limits)
- نمای غیررسمی و نموداری از پیوستگی (An Informal, Graphical View of Continuity)
- قضیهٔ مقدار میانی (Intermediate Value Theorem)
- نمای غیررسمی از حدود (Informal View of Limits)
- حدود یک‌طرفه و دوطرفه و مواردی که حدود وجود ندارد (One-and Two-Sided Limits and When Limits Fail to Exist)
- حد در بی‌نهایت (Limits and Infinity)
- نمای جدولی از حدود (Table View of Limits)
- تعریف رسمی از حدود (Formal Definition of Limits)
- تعریف پیوستگی با استفاده از حدود (Definition of Continuity Using Limits)
- مقدمه‌ای بر مشتق (Introduction to the Derivative)
- میان‌برهای مشتق‌گیری (Differentiation Short Cuts)
- کاربردهای مشتق (Applications of Differentiation)
- ساخت پادمشتق (Constructing Anti-derivatives)

بقیه در صفحهٔ ۶۷



حسابان

نویسنده: تونی کریلی[1]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

حساب یا حسابان[2] روشی در محاسبه است. ریاضی‌دان‌ها گاهی دربارهٔ «حساب منطق»[3]، «حساب احتمال»[4] و غیره سخن می‌گویند. اما همه توافق دارند که درواقع یک حسابان محض و ساده، وجود دارد، که لاتین آن با حرف بزرگ C[5] املا می‌شود.

حسابان، محور اصلی ریاضیات است. کم پیش می‌آید که امروزه، دانشمندان، مهندسان یا اقتصاددانانی که با کمیت‌ها سروکار دارند، با حسابان، با آن همه کاربردهای وسیعش، روبه‌رو نشده باشند. از لحاظ تاریخی این دانش با ایزاک نیوتن[6] و گاتفرید لایب‌نیتس[7] وابسته است که راه‌گشای آن در قرن هفدهم بودند؛ دانشمندانی که نظریه‌های مشابهشان به نزاعی حق تقدمی در این مورد کشیده شد که کدامشان کاشف حسابان بوده است. درواقع، هر دو آن‌ها مستقلاً به محاسباتشان رسیده بودند، گرچه روش‌های آنان کاملاً متفاوت بود.

از آن زمان به بعد، حسابان به موضوعی گسترده بدل شد. هر نسل به پر و پای روش‌هایی می‌پیچید که به تصور او باید نسل جوان‌تر آن را بیاموزد. این روزها کتاب‌های درسی که بالغ بر هزار صفحه شده، شامل مطالب فوق‌العادهٔ بسیاری دراین‌باره هستند. اما در مورد این اضافه‌شده‌ها، آن‌چه مطلقاً اساسی است دیفرانسیل‌گیری[8] و انتگرال‌گیری[9] دوقلوهای واقع در رأس حسابان، مطابق با تقریر نیوتن و لایب‌نیتس‌اند. این کلمات از differentialis (تفاضل گرفتن یا جدا کردن) و integralis (مجموع اجزا یا به‌هم آوردن) لایب‌نیتس گرفته شده‌اند.

در اصطلاح فنی، دیفرانسیل‌گیری با اندازه‌گیری تغییر[10] و انتگرال‌گیری با اندازه‌گیری سطح[11] سروکار دارد، اما درخشش پرشکوه این دو گوهرِ واقع در تاج حسابان، از این‌روست که دو روی یک سکه‌اند، یعنی دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری عکس یکدیگرند. درواقع، حسابان یک موضوع و آن، نیاز به دانستن هر دو طرف آن است. تعجب‌آور نیست که «نمونهٔ واقعی سرلشکر مدرنِ» گیلبرت[12] و سولیوان[13] در دزدان دریایی پن‌زانس[14] با غرور، هر دو آن‌ها را اعلام می‌کند:

با توجه به حقایق شاد بسیاری در مورد مربع وتر، من در حسابان انتگرال و دیفرانسیل مسلطام.

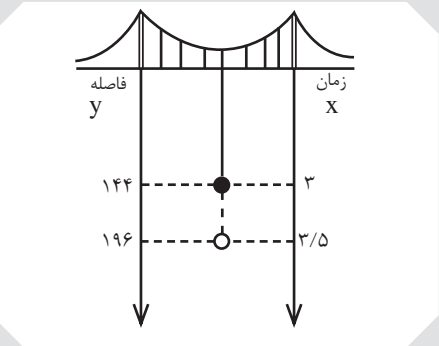
دیفرانسیل‌گیری

دانشمندان، شیفتهٔ مطرح کردن «آزمایش‌های ذهنی»اند، به‌ویژه اینشتین آن‌ها را دوست داشت. فرض کنید روی پلی بالای درهٔ تنگی ایستاده‌ایم و می‌خواهیم سنگی را بیندازیم. در این صورت، چه اتفاقی می‌افتد؟ امتیاز آزمایش ذهنی در این است که لازم نیست عملاً در آن‌جا باشیم. در این مورد، می‌توانیم کارهای غیرممکنی، مانند متوقف کردن سنگ در هوا یا ملاحظهٔ حرکت آهستهٔ آن در فاصلهٔ کوتاهی از زمان را نیز انجام دهیم.

طبق نظریهٔ جاذبه[15]ی نیوتن، سنگ می‌افتد و هیچ واقعهٔ تعجب‌آوری در این کار نیست. سنگ به‌طرف زمین می‌آید و در حالی که دستهٔ کرونومترمان به جلو می‌رود، سریع‌تر و سریع‌تر

می‌افتد. امتیاز دیگر آزمایش ذهنی در این است که در آن می‌توان از عوامل پیچیده‌ای مانند مقاومت هوا صرف‌نظر کرد.

اکنون، سرعت سنگمان در لحظه‌ای مفروض از زمان، مثلاً هنگامی که کرونومتر دقیقاً سه ثانیه بعد از زمان رها شدنش را می‌خواند، چه‌قدر است؟ چگونه می‌توان این مقدار را به دست آورد؟ محققاً می‌توان سرعت متوسط[۱۶] را اندازه بگیریم، اما مسئلهٔ ما اندازه‌گیری سرعت لحظه‌ای[۱۷] است. از آن‌جا که این آزمایش، آزمایشی ذهنی است، چرا سنگمان را در هوا متوقف نکنیم، و سپس اجازه دهیم با در نظر گرفتن کسری از ثانیه، فاصلهٔ کوتاه دیگری به طرف پایین حرکت کند؟ در این صورت، اگر این فاصلهٔ اضافی را بر زمان اضافی‌مان تقسیم کنیم، سرعت متوسط را در فاصلهٔ زمانی کوتاهی خواهیم داشت. بنابراین، با در نظر گرفتن فاصله‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تر، سرعت متوسط در مکانی که در آن سنگ را متوقف کرده‌ایم، نزدیک‌تر و نزدیک‌تر به سرعت لحظه‌ای می‌شود. فرایند حدی مزبور، ایدهٔ مبنایی نهفته در پس پردهٔ حسابان است.



ممکن است وسوسه شویم زمان اضافی کوتاهی برابر با صفر را در نظر بگیریم. اما در آزمایش ذهنی‌مان، سنگ اصلاً حرکت نکرده است. سنگ فاصله‌ای را نپیموده و زمانی برای انجام آن نگرفته است! این کار سرعت متوسط را به ما می‌دهد که اسقف بِرکلی[۱۸]، فیلسوف ایرلندی، آن را به‌عنوان «ارواح کمیت‌های مرحوم» مشهور کرده است. این عبارت را نمی‌توان معین کرد، زیرا در عمل بی‌معنا[۱۹] به نظر می‌رسد، زیرا با در پیش گرفتن این مسیر به ورطه‌ای عددی رهنمون می‌شویم.

برای پیشرفت بیش‌تر به نمادهای بیش‌تری نیازمندیم. فرمول دقیق پیونددهندهٔ y، فاصلهٔ سقوط و x، زمان رسیدن به آن‌جا را گالیله استخراج کرده است:

$y=16\times x^2$

عامل «۱۶» به این علت ظاهر شده است که واحدهای اندازه‌گیری انتخاب‌شده فوت و ثانیه‌اند. اگر مثلاً بخواهیم بدانیم سنگ در ۳ ثانیه تا چه فاصله‌ای سقوط کرده است، خیلی ساده، $x=3$ را در فرمول فوق قرار می‌دهیم و پاسخ را محاسبه می‌کنیم.

$y=16\times 3^2=144$ فوت

اما چگونه می‌توانیم سرعت سنگ را در زمان $x=3$ محاسبه کنیم. اجازه دهید ۰/۵ ثانیهٔ دیگر را در نظر بگیریم و ملاحظه کنیم سنگ مورد نظر بین ۳ و ۳/۵ ثانیه چه‌قدر حرکت کرده است. سنگ در ۳/۵ ثانیه به اندازهٔ

$y=16\times 3/5^2=196$ فوت

حرکت می‌کند، بنابراین بین ۳ و ۳/۵ ثانیه، x «۱۹۶-۱۴۴»، یعنی ۵۲ فوت سقوط کرده است. از آن‌جا که سرعت برابر تقسیم فاصله بر زمان است، سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی عبارت است از:

$52/0.5=104$ متر بر ثانیه

این مقدار نزدیک به سرعت ثانیه‌ای در $x=3$ است، اما می‌توان گفت ۰/۵ ثانیه اندازه‌ای به‌قدر کافی کوچک نیست. این استدلال را با فاصلهٔ زمانی کوچک‌تری، مثلاً ۰/۰۵ ثانیه، تکرار و ملاحظه می‌کنیم که فاصلهٔ سقوط عبارت است از:

$148/84-144=4/84$ متر

که سرعت متوسط زیر را به دست می‌دهد:

$4/84/0.05=96/8$ متر بر ثانیه

درواقع، این مقدار به سرعت لحظه‌ای سنگ در ۳ ثانیه (هنگامی که $x=3$) نزدیک‌تر است.

اکنون باید خطر کنیم و مسئلهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط سنگ را بین x ثانیه و کمی بعد در x+h ثانیه اندازه بگیریم. در این صورت، پس از اندکی کلنجار رفتن با نماد، درمی‌یابیم که این مقدار عبارت است از:

$16\times(2x)+16\times h$

هنگامی که h را کوچک‌تر و کوچک‌تر کنیم، مثل زمانی که در رفتن از ۰/۵ به ۰/۰۵ کردیم، ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ اول عبارت، بی‌تغییر باقی می‌ماند (زیرا شامل h نیست) و جملهٔ دوم آن کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$v=16\times(2x)$

که در آن v سرعت لحظه‌ای[۲۰] سنگ در زمان x است. برای مثال، سرعت لحظه‌ای سنگ پس از ۱ ثانیه (زمانی که $x=1$) برابر است با:

$16\times(2\times1)=32$ فوت بر ثانیه

و پس از ۳ ثانیه عبارت است از $16\times(2\times3)$ که ۹۶ فوت بر ثانیه را به‌دست می‌دهد.

در صورتی که فرمول فاصلهٔ گالیله، یعنی $y=16\times x^2$ را با فرمول سرعت، یعنی $v=16\times(2x)$ مقایسه کنیم، تفاوت اساسی، تغییر x^2 به $2x$ است. این تغییر، تأثیر دیفرانسیل‌گیری، یعنی گذشتن از

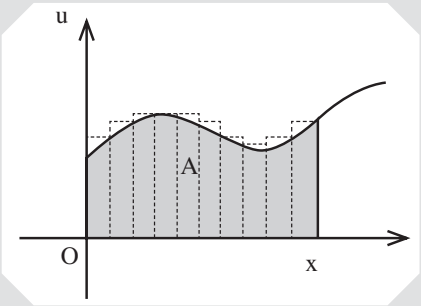
$u=x^2$ به مشتق[21] $\dot{u} = 2x$ است. نیوتن $\dot{u} = 2x$ را جریان[22] و متغیر x را جاری[23] می‌نامید، زیرا برحسب کمیت‌های جاری‌شونده می‌اندیشید. امروزه، اغلب $u=x^2$ و مشتق آن را به صورت $\frac{du}{dx} = 2x$ می‌نویسیم. تداوم کاربرد این نمادنویسی، که ابتدا لایب‌نیتس آن را معرفی کرد، موفقیت «d» گرایی لایب‌نیتس را بر کُهلی‌گرایی[24] نیوتن نشان می‌دهد.

u	du/dx
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
...	...
x^n	nx^{n-1}

سنگ سقوط‌کننده یک مثال بود، اما در صورتی که عبارات دیگری داشته باشیم که u به‌جای آن‌ها قرار گیرد، می‌توانیم هم‌چنان مشتق آن‌ها را محاسبه کنیم، کاری که می‌تواند در سایر زمینه‌ها سودمند باشد. در این مورد الگویی موجود است: مشتق یک جمله از ضرب توان آن در آن جمله با توان یک واحد کم‌تر به‌دست می‌آید.

انتگرال‌گیری

اولین کاربرد انتگرال‌گیری در اندازه‌گیری سطح بود. اندازه‌گیری سطح زیر یک خم، با تقسیم آن به نوارهای مستطیل شکل تقریبی، هریک با پهنای dx، انجام می‌گیرد. در این صورت، با اندازه‌گیری سطح هر یک از آن‌ها و جمعشان با هم، «مجموع» و درنتیجه، سطح کل را به‌دست می‌آوریم. لایب‌نیتس نماد S، را که به جای مجموع قرار می‌گیرد، به‌صورت بزرگ‌شدهٔ $\int$ معرفی کرده است. سطح هریک از نوارهای مستطیل‌شکل برابر udx است، بنابراین A، سطح زیر خم، از ۰ تا x، برابر است با $A = \int_0^x u\,dx$.



در صورتی که خم ما عبارت از $u=x^2$ باشد، سطح مورد نظر با ترسیم نوارهای مستطیل‌شکل باریک در زیر خم، جمع آن‌ها برای محاسبهٔ سطح تقریبی و به‌کار بردن فرایند حدی در مورد پهنای آن‌ها برای به‌دست آوردن سطح دقیق، یافت می‌شود. این پاسخ، سطح زیر را به دست می‌دهد:

$$A = \frac{x^3}{3}$$

u	$\int_0^x u\,dx$
x^2	$x^3/3$
x^3	$x^4/4$
x^4	$x^5/5$
x^5	$x^6/6$
...	...
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$

در مورد خم‌های متفاوت (و بنابراین عبارات دیگر برای u) هم‌چنان می‌توان انتگرال را محاسبه کرد. مشابه مشتق، برای انتگرال توان‌های x نیز الگویی منظم وجود دارد. انتگرال مورد بحث از تقسیم بر «توان پیشین به‌اضافهٔ ۱» و افزودن ۱ برای به‌دست آوردن توان جدید حاصل می‌شود.

دستاورد درخشان

در صورتی که از انتگرال $A = \frac{x^3}{3}$ دیفرانسیل‌گیری کنیم $u=x^2$ اولیه را به دست می‌آوریم و در صورت انتگرال‌گیری از مشتق $\frac{du}{dx} = 2x$ نیز به $u=x^2$ اولیه می‌رسیم. یعنی دیفرانسیل‌گیری عکس انتگرال‌گیری است؛ موضوعی که به‌عنوان قضیهٔ اساسی حسابان شناخته می‌شود و یکی از مهم‌ترین قضایای سراسر ریاضیات است.

بدون حسابان، هیچ ماهواره‌ای در مدار قرار نمی‌گرفت و هیچ نظریه‌ای در اقتصاد به سامان نمی‌رسید. هم‌چنین آمار به‌صورت بسیار متفاوتی مطرح می‌شد، زیرا هرجا که با تغییر سروکار داریم، حسابان را خواهیم یافت.

پی‌نوشت

1. Tony Crilly
2. calculus
3. calculus of logic
4. caluculus of probability
5. Calculus
6. Isaac Newton

7. Gottfried Leibnitz
8. differentiation
9. integration
10. change
11. area
12. Gilbert
13. Sullivan
14. The Pirates of Penzance
15. theory of gravity
16. average speed
17. instantaneous speed
18. Bishop Berkeley
19. meaningless
20. instantaneous velocity
21. derivative
22. fluxion
23. fluent
24. dotage
25. Zeno
26. Cauchy
27. Riemann
28. Lebesque

چند تاریخچه

حدود ۴۵۰ قبل از میلاد: زنون[۲۵] با پارادوکسی، بی‌نهایت کوچک‌ها را دست می‌اندازد.

دهۀ ۱۸۲۰ میلادی: کوشی[۲۶] نظریۀ مورد بحث را به‌گونه‌ای دقیق تنظیم می‌کند.

دهۀ ۱۶۶۰- دهۀ ۱۶۷۰ میلادی: نیوتن و لایب‌نیتس، اولین قدم‌ها را به سوی حسابان برمی‌دارند.

۱۸۵۴ میلادی: ریمان[۲۷] انتگرال ریمان را معرفی می‌کند.

۱۷۳۴ میلادی: بِرکلی به ضعف‌های اساسی توجه می‌دهد.

۱۹۰۲ میلادی: لُبک[۲۸] نظریۀ انتگرال لُبک را پایه‌گذاری می‌کند.

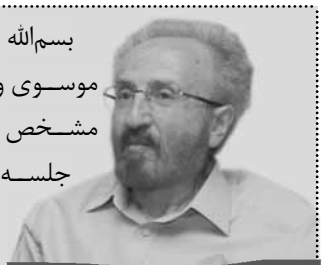
بیست سال حرکت و تلاش

میزگرد بیستمین سالگرد مجله برهان

اشاره

بیست سال گذشت، زمانی طولانی، به روایتی ثلث عمر آدمی. ایامی از مهمترین دوران زندگی ما، ما چند نفر که بیست سال پیش دور هم نشستیم و مجلهٔ برهان را پایه‌گذاری کردیم. مجله‌ای که مقالاتش، برهان بیست سال از بهترین دوران زندگی ماست.

در این نشست، به درد دل با خوانندگان مجله پرداخته‌ایم. آن‌چه گفته‌ایم صمیمانه ادا کرده‌ایم. خواستیم از استاد پرویز شهریاری تجلیل به عمل آوریم. به آقای امیری بگوییم قدر زحماتتان را می‌دانیم، به آقای صدر خاطرنشان کنیم دوستشان داریم. از آقای رستمی قدردانی کنیم، به آقای قندهاری دست‌مریزاد بگوییم، آقایان هاشمی و شرقی را تحسین کنیم، از آن‌ها که با ما بودند و اکنون نیستند یادی کنیم، از خاطراتمان بگوییم، و خلاصه هرچه دل تنگمان می‌خواهد به زبان آوریم و بالاخره، شکر خداوندرا، به خاطر این توفیق که نصیب‌مان کرده به‌جا آوریم، و اینک این شما و این حاصل نشست صمیمانهٔ ما.


دکترغلامرضا یاسی‌پور

بسم‌الله الرحمن الرحیم و به نستعین. نزدیک بیست سال پیش، آقای امیری، سردبیر مجله برهان با آقای سید موسوی و بنده و آقای رستمی جلسه‌ای گذاشتند تا مجله‌ای به نام مجله ریاضی (زیرا آن زمان هنوز اسمش مشخص نبود) را منتشر کنند. آقای امیری پیشنهاد کردند که از آقای استاد شهریاری هم دعوت به‌عمل بیاید. جلسه بعد ایشان تشریف آوردند و به پیشنهاد آقای استاد شهریاری، کلمه برهان را برای نام مجله انتخاب کردند. البته متوجه شدیم که این کلمه در قرآن هم آمده است. «قُل هاتُوا بُرْهانَکُم»، یعنی اگر این‌جا حرفی دارید با استدلال وارد شوید. افراد دیگری در جلسات بعد اضافه شدند، ازجمله آقای قندهاری و آقای هاشمی موسوی، آقای قمصری و آقای عابدی هم با مجله همکاری داشتند. بعد هم آقای صدر و سپس آقای شرقی آمدند. همکاران جدید یکی از یکی بهتر بودند، یعنی باعث خوشحالی بودند.

بنده اگر بخواهم یک خاطره از مجله برهان بگویم، یک خاطره‌ای می‌گویم که مربوط به همه است، یعنی همه ما آن را یک خاطره خوب می‌دانیم. از زبان همه صحبت می‌کنم. یک خاطره همکاری مداوم استاد شهریاری است که در هر موقعیتی ارتباطش را با مجله برهان و جلسات ما قطع نکردند و برای همه ما افتخار بزرگی است. خاطره دیگر، ادب و محبت آقای امیری سردبیر مجله است که این جمع را تا به حال در کنار هم نگه داشته است؛ جمعی که از حدود بیست سال پیش تاکنون دور هم جمع می‌شوند و برای مقالات مجله تصمیم می‌گیرند و به کار مشغول‌اند. با این مقدمه، رشته سخن را به خود آقای امیری می‌دهم.

حمیدرضا امیری

من دلم می‌خواست آخرین نفری باشم که صحبت می‌کنم و بیش‌تر از صحبت‌های اساتید محترم استفاده ببرم. خاطرم هست وقتی که با حاج‌آقا برادری (معاونت انتشارات مدرسه) راجع‌به اعضای هیئت‌تحریریه صحبت کردیم، به این نتیجه رسیدیم از کسانی استفاده کنیم که بیایند و به جمع ما، به این مجله و به ناشر این مجله اعتبار بدهند، نه اینکه خدای نکرده بیایند و اعتباری بگیرند. اولین گزینه‌ای که به ذهنمان رسید استاد شهریاری بودند. وقتی اولین‌بار با ایشان صحبت کردم (که همیشه در ذهنم باقی‌مانده و باقی خواهد ماند) که تلفنی هم صحبت کردم، به ایشان گفتم مجله‌ای ریاضی مانند یکان می‌خواهیم منتشر کنیم. ایشان گفتند یعنی یک چیزی شبیه یکان؟ گفتم: بله. گفتند: خیلی خوب است، من هم موافقم. اگر خاطرتان باشد، جلسه‌ای با ایشان گذاشتیم که فکر می‌کنم آقای رستمی هم در آن جلسه تشریف داشتند، شما هم تشریف داشتید، آقای سید موسوی هم بودند. بهتر است، آقای شهریاری خودشان بگویند که آن‌موقع چه فکر می‌کردند؟ آیا فکر می‌کردند بیست سال بعد این‌طور بشود؟ یا انگیزه‌شان از ورود به این عرصه و جمع ما (جمعی که نمی‌شناختند) چه بود، زیرا بیش‌تر افراد این جمع را نمی‌شناختند.

چیزی که برای من اهمیت داشت این بود که بعد از چاپ پنج یا شش شماره از مجله استاد مجله خودشان به نام آشنایی با ریاضیات (البته اول آشتی با ریاضیات بود، بعد تبدیل به آشنایی با ریاضیات شد) را به حالت تعطیل درآوردند. وقتی من علت را از ایشان سؤال کردم، گفتند که من هرچه توان دارم در برهان صرف می‌کنم و بهتر است در این‌جا متمرکزتر باشیم. یعنی یک‌چیزی بالاتر از همکاری مستمر ایشان با مجله؛ چون به خاطر همکاری و ارزشی که برای این مجله قائل بودند، مجله خودشان را به دلایلی که گفتند (شاید موازی کاری یا تمرکز بیش‌تر روی برهان) تعطیل کردند. به هر صورت، استاد، از همان روزهای اول که شما وارد جمع ما شدید، همیشه برای آن لحظاتی که می‌خواستیم در هیئت تحریریه با شما بنشینیم لحظه‌شماری می‌کردیم و منتظر بودیم آن تاریخ و آن ساعت و آن روز برسد و بعد هم دلمان نمی‌خواست آن ساعت‌ها تمام شود، مثل الآن که دلمان نمی‌خواهد این ساعتی که این‌جا هستیم تمام شود. حالا من دلم می‌خواهد اگر شما هم چیزی در ذهنتان هست یا خاطراتی دارید، نقل کنید؟

استاد شهریاری: شما قسمتی از آن را فرمودید دیگر احتیاجی به من نیست. به نظر من اگر دیگران صحبت کنند، کافی است.

آقای امیری: شما همه شماره‌های مجله آشنایی با ریاضیات را دارید؟ یادتان هست که تعطیل شد؟

آقای شهریاری: یادم نیست. همه شماره‌ها را به‌صورت یک دوره صحافی شده دارم.

آقای امیری: از کسانی که آن دوره با شما همکاری می‌کردند و مقاله می‌دادند، هنوز هم کسانی هستند که با شما ارتباط داشته باشند؟ البته مثل اینکه بیش‌تر مقالات را خود شما می‌نوشتید....

آقای یاسی‌پور: فکر راه‌اندازی مجله برهان از چه کسی بود؟

آقای امیری: مال خودم بود، من اول به آقای فریدون[1] پیشنهاد

استاد دکتر پرویز شهریاری

من بیش‌تر می‌نوشتم و دیگران هم بودند. منتهـا با هر دو نام «آشـتی با ریاضیات» و «آشـنایی با ریاضیات» روی هم هفتاد شماره چاپ شد.

کردم، آقای فریدون مخالفت کردند. بعد گفتم حالا اگر می‌شـود با آقای چینی‌فروشان[۲] مطرح کنید. من روحیات ایشان را نمی‌شناختم، ولی چون فکر می‌کردم آخرین تیر اسـت، دیگر گفتم شـما مطرح کنید، ایشان هم فکر نمی‌کرد آقای چینی‌فروشان بپذیرند یا این‌طور مُصر باشند. در جلسه‌ای گفت، فلانی هم پیشنهاد چاپ مجله دارد. ایشـان گفتند چه مجله‌ای؟ گفتم مجله ریاضی در مایه‌های یکان. آقای چینی‌فروشـان هم که به دلیل تحصیل در رشـته ریاضی در دبیرستان و مهندسی در دانشگاه از خواننده‌های مجله یکان بودند، بلافاصله مرا به دفترشـان صدا کردند و گفتند: من هرجور بخواهی پشـتیبانی‌ات می‌کنم، اصلاً نترس و مجله را راه بینداز و به حاج‌آقا فریدون هم گفتم که مقدمات کار را برایت فراهم کند.

من برای شروع کار به‌دنبال اعضای هیئت‌تحریریه بودم. آن‌زمان در آموزشگاه علامه تدریس می‌کردم و در زمان دانش‌آموزی‌ام کتاب جبر و آنالیز آقای قندهاری را خوانده بودم، بعد فهمیدم ایشان آن‌جا درس می‌دهند و در یک روز با هم درس می‌دادیم. رفتم پیش آقای قندهاری و از ایشـان خواهش کردم که به جمع ما بپیوندند. ایشان گفت: روی این قضیه فکر می‌کنم، تلفنشان را دادند و من زنگ زدم و بعد گفتند باشد.

آقای رستمی یک کتابی را برای چاپ به انتشارات مدرسه آورده بـود؛ «کتاب جبر پایه». چون من آن‌جا مسـئول گروه ریاضی بودم، به من ارجاع شـد که من نظر بدهم و الحق والانصاف کتاب بسـیار با ارزش و خیلی پرمحتوایی بود و در آن دوره نظیر نداشـت. بعد از آن از ایشان خواسـتم که در این زمینه به من کمک کنند. آن‌موقع فکر نمی‌کردم تخصص ایشان در هندسه بیش‌تر از جبر باشد، ولی با همان یک کتاب متوجه شدم که قلم و کارشان با دیگران فرق دارد.

با آقای سـید موسوی در مدرسه تیزهوشـان ارتباط داشتم، و با هم در مدرسـه علامه حلـی درس می‌دادیم. آن موقع ما خدمت اسـتاد یاسـی‌پور درس منطق ریاضی را فرا می‌گرفتیم. من بودم و آقای سـید موسـوی و آقای نوذری. ما آن‌جا به آقای سید موسوی گفتیم، شما هم بیا، قرار است آقای شهریاری هم بیایند.

در اولین جلسـه هیـأت تحریریه گفتیم که اسـم مجله را چه بگذاریم. اگر خاطرتان باشد خودم کلمه «مبین» را پیشنهاد کردم. آقای شـهریاری پیشـنهاد کردند اسـم مجله را بگذاریم «برهان». وقتـی کلمه برهـان به‌کار رفت و از دهان ایشـان بیرون آمد، همه نام‌هـای پیشنهادی‌شـان را فراموش کردند و گفتند بهترین اسـم ممکن همین اسـت. اسم باید یک کمی هم ژورنالیستی باشد، مثل یکان که در ذهن بماند. قرار شـد نـام مجله را برهان بگذاریم. من آن‌موقع از یکی دو نفر از دوسـتان دفتـر تألیف هم خواهش کردم به جمع مـا بپیوندند تا از آن‌ها مقاله بگیریم، که مقاله‌ای ندادند و شاید که کمی محافظه‌کارانه عمل کردند. شاید فکر نمی‌کردند که

مجله به این سرعت و به این خوبی پا بگیرد. آقای سید موسوی بعد از دو سه جلسه از جمع ما گریخت، چون خیلی روحیه کار جمعی نداشت و عذرخواهی کرد و از جمع ما رفت و آقای هاشمی به جمع ما اضافه شدند. ایشان هم به بهانه دادن یک کتاب یا یک جزوه (شاید در مورد دترمینان) به دفتر آمده بودند. با ایشان هم صحبت کردیم، دیدیم که خیلی علاقه‌مند به ریاضیات‌اند و از طرفی روحیاتشان هم با روحیات ما می‌خواند.

فکر می‌کنم پس از چاپ چهارده یا پانزده مجله بود که احساس کردیم مجله باید یک سازمان مستقل پیدا کند و فکر می‌کنم از آغاز ورود آقای صدر، دیگر وضعیت مجله ما دگرگون شد. ایشان مجله ما را به یک مجله خیلی وزین تبدیل کردند. خیلی کارها که برای من سخت بود ایشان انجام می‌دادند.

آقای یاسی‌پور: آقای شرقی کی تشریف آوردند؟

آقای امیری: زمان ورود ایشان کمی بعد از آقای صدر بود. آقای شرقی به‌واسطه المپیادها وارد مجله شد.

آقای شرقی: ما از خیلی پیش‌تر از آن هم ارتباط داشتیم. سال ۷۴ بود و شما یک کتابی را به من دادید و فرمودید آقای رستمی نوشته‌اند. فکر می‌کنم از شماره ۲۵ به‌طور رسمی وارد جلسات شما شدم.

آقای صدر: من فکر می‌کنم از شماره ۲۰ بود که به جمع هیئت تحریریه پیوستم. قبل از آن آقای هاشمی موسوی یک سال مدیر داخلی مجله بود.

آقای امیری: آقای شهریاری، مطلبی که من فکر می‌کنم دوستان راجع به آن صحبت کنند، تأثیراتی است که این مجله در جامعه داشته و دارد.

آقای شهریاری: به هر حال این را شما باید بگویید که بیش‌تر ارتباطات دارید؛ شما یا آقای صدر.

آقای امیری: در طی این سال‌ها، خیلی‌وقت‌ها کتاب درسی عوض می‌شد و ما می‌دیدیم که یک مقاله یا یک موضوع در آن است که حالا به‌دلیل محدودیت‌هایی که در تألیف کتاب‌های درسی وجود دارد، باید خیلی بیش‌تر باز شود و مجله در این‌گونه موارد نقش خودش را خیلی خوب بازی می‌کرد. ما کسانی را داشتیم که به ما مقاله می‌دادند، مثل همین آقای صدر که برای من یک مقاله نوشت و همان مقاله آغاز آشنایی ایشان با ما بود. مقاله ایشان درباره شکل‌های توپولوژیکی بود که در فضای متریک معمولی یک شکل دارد و در فضای دیگر، این معادله به شکل دیگری ظاهر می‌شود و بحث‌های توپولوژی دیگر، من دیدم که این مقاله برای بچه‌های دبیرستانی کمی سنگین است. با ایشان ارتباط برقرار کردم و گفتم این مقاله کمی سنگین است، شما قلمت خوب است و کاری که می‌کنی باارزش است، به این کارت ادامه بده و یک مقاله دیگر در این زمینه‌ها برایمان بنویس. بعد ایشان یک مقاله دیگر به نام «هم‌ارزی مجموعه‌ها» برایمان نوشت. آن مقاله اشکالاتی داشت و این‌گونه مقالات در هیئت تحریریه مطرح می‌شد. بعد مقاله را به ایشان برگرداندیم و گفتیم چکش‌کاری کند. خلاصه چهار، پنج دفعه ما ایشان را بردیم و آوردیم تا بالاخره مقالهٔ ایشان در شماره ۱۵ که خودم هم یک ستون به آن اضافه کردم و چاپ شد. خوب ایشان از یک مقاله شروع کرد که یک ستونش را هم من نوشتم، ولی الآن از خود بنده خیلی بهتر می‌نویسد، یعنی این مجله باعث و بانی این امر شد. مثال ایشان افراد زیادی بودند. الآن در چندتا از شماره‌های مجله، افراد ثابتی مثل آقای عنایت‌الله راستی، یا خانم اکبری‌زاده مقاله دارند که دبیران ریاضی خیلی خوبی هستند. آقای احسان یارمحمدی از اراک با یک مقاله شروع کرد و الآن چندین مقاله‌اش در برهان چاپ شده و بچه‌ها از آن استفاده می‌کنند. به هر حال تأثیرات این مجله در جامعه خیلی خوب بوده است.

حالا در خدمت استاد رستمی هم هستیم. خوشحال می‌شویم از صحبت‌های شیرینشان استفاده کنیم. می‌توانیم بگوییم، ایشان از پایه‌گذاران اصلی مجله هستند. همیشه زحمت بخش هندسه مجله، با ایشان بوده است. من و همه دوستان از رهنمودهای ایشان خیلی استفاده کردیم، و همکاری ایشان باعث افتخار همه ماست. من در یک جمع دیگری هم که از بزرگان و دست‌اندرکاران ریاضی بودند، عرض کردم که در زمینه هندسه در عصر معاصر، زحمتی که ایشان در دایرةالمعارف هندسه کشیدند واقعاً کم‌نظیر بلکه بی‌نظیر است.

محمدهاشم رستمی

بسیاری از مطالب را آقای امیری، سردبیر محترم مجله رشد ریاضی برهان، فرمودند. من تشکر می‌کنم. بنده همیشه شاگردی بودم در جمع دوستان. واقعیت این است که از نظر تک‌تک دوستانی که در این جمع بودند، استفاده بردم، به‌خصوص استاد شهریاری که از قبل، چه زمان تحصیل و چه زمان دبیری‌ام از کتاب‌های ایشان استفاده می‌کردم که راهنمای ما بود و بعد هم، از شروع مجله برهان که در خدمت ایشان بودیم فیض بردن ما از نظرات و راهنمایی‌های ایشان به‌مراتب بیشتر شد و هنوز هم ادامه دارد.

من موقعی که معلم بودم با مجله یکان آشنایی داشتم و از کسانی بودم که مجله یکان را هم مشترک بودم و هم به شاگردانم توصیه می‌کردم که حتماً بگیرند. با خود استاد مصحفی هم ملاقات‌هایی داشتم. دفتری داشتند در خیابان لاله‌زارنو تهران، که چندبار من در آن‌جا پیش ایشان رفتم. هم مقاله می‌دادیم

برای چاپ در مجله و هم از مقالات ارزشمند یکان استفاده می‌کردیم. در آن زمان همکارهای مجله یکان اساتید بزرگی بودند، ازجمله استاد شهریاری، دکتر هشترودی و دیگر دوستان که همکاری می‌کردند. بعدها متأسفانه این مجله تعطیل شد و جای خالی آن احساس می‌شد.

زمانی که جناب امیری پیشنهاد تأسیس یک مجله ریاضی را دادند، من بسیار خوشحال شدم، زیرا این خلأ را کاملاً حس می‌کردم. به همین علت در حد بضاعتی که داشتم، گفتم در خدمت شما هستم. در اوایل تعداد افراد کمتر بود. یادم هست که مسئولیت جبر رشته ریاضی، مثلثات رشته‌های تجربی و ریاضی و هندسه و جبر رشته تجربی و تهیه مقالاتش با من بود؛ تا بعد که دیگر دوستان مثل آقای قندهاری آمدند و بخش جبر به ایشان داده شد. بعد با آمدن دوستان دیگر ازجمله جناب صدر و جناب شرقی و جناب هاشمی، مسئولیت بنده محدود به هندسه شد. برنامه‌ریزی آقای امیری برای مجله برهان از ابتدا با هدف رفع کمبودهای کتاب درسی و تکامل و دانش‌افزایی دانش‌آموزان، جایگاه خاصی داشت که باید بگویم هم برنامه‌ریزی‌ای که ابداع‌کننده‌اش جناب امیری بود و هم برنامه‌ریزی در هیئت‌تحریریه این مجله باعث شد الحمدلله تاکنون مجله نقشش ادامه پیدا کند و همیشه هم سعی بر این بوده است که در جهت تکامل و بهبود و پیشرفت قدم برداشته شود.

من در آخرین قسمت از صحبتم می‌خواهم باز تشکر کنم به‌ویژه از جمع حاضر در این جلسه در درجه اول از استاد شهریاری که مایه افتخار این کشور و از چهره‌های ماندگار هستند و واقعاً نهایت محبت و لطف را داشتند. خود من هم همیشه از راهنمایی‌های ایشان استفاده کردم. بعد هم از مدیریت خوب مجله، برادر عزیزمان جناب آقای امیری و آقای صدر تشکر می‌کنم که با ایجاد جو صمیمی در هیئت تحریریه مجله برهان آن را به شکل یک خانواده درآوردند. هم‌چنین از استاد یاسی‌پور که ایشان هم همیشه از ابتدا آن‌چه در توان داشتند دریغ نکردند و همیشه محبت داشتند و بنده خودم از راهنمایی‌های ایشان خیلی استفاده کردم. همین‌طور از آقای هاشمی موسوی، آقای شرقی و آقای قندهاری و دوستانی که به‌طور مقطعی کار کردند. امیدوارم همیشه در زندگی‌شان موفق باشند و دانش‌آموزان این مملکت و به‌طور کلی اهل فرهنگ بتوانند بهره بیش‌تری از وجود این عزیزان ببرند.

آقای امیری: حالا که استاد فرمودند، یادم افتاد نقش آقای شهریاری در جمع ما همیشه یک نقش محوری بوده است، یعنی همیشه ایشان شمعی بودند که ما به دور ایشان می‌چرخیدیم و میاندار ما بودند. یک خاطره‌ای دارم که چند جا نقل کرده‌ام و الآن هم نقل می‌کنم. هیچ‌وقت فراموش نمی‌کنم که ایشان یک‌بار از کانادا تشریف آورده بودند، فکر می‌کنم ۹ یا ۱۰ سال پیش بود. طبق معمول ایشان به جلسه هیئت تحریریه می‌آمدند که در دفتر مجله تشکیل می‌شد.

ایشان گفتند که دانشگاه شهر ونکوور از ایشان خواسته بودند که تدریس تاریخ ریاضی یا قسمتی از ریاضی را برعهده بگیرند، با حقوق خیلی خوب و قول اینکه مترجم در اختیارشان بگذارند. ایشان سنگ انداخته بودند که من کتاب‌هایم همراهم نیست. بعد من از ایشان پرسیدم که استاد چرا نماندید، آنجا که شغل خوب، حقوق خوب، همه امکانات، اعضای خانواده‌تان هم که آن‌طرف‌اند و تنها نیستید، چرا قبول نکردید؟ ایشان خیلی بزرگوارانه فرمودند، اگر من آن‌جا مانده بودم الآن این جمع هیئت‌تحریریه را نداشتم. این حرف برای من خیلی ارزش داشت و مرا بر آن داشت تا با تلاش هرچه بیش‌تر سعی کنم این جمع را حفظ کنم. وقتی شخصیتی مثل آقای شهریاری آن همه امکانات رفاهی را رها می‌کند و می‌گوید دوست دارم در این جمع باشم، این برای من خیلی ارزشمند است.

آقای یاسی‌پور: هوشنگ ابتهاج یک قطعه شعری دارد که البته آن را برای شهریار شاعر گفته، ولی با این داستان که شما تعریف کردید، من یاد آن بیت افتادم که می‌گوید:

شهریارا تو بمان بر سر این خیل یتیم
پدرا! یارا! اندوه‌گسارا! تو بمان

آقای رستمی: حال تا وقت است من خاطره‌ای از آقای شهریاری بگویم. مطلبی یادم افتاد در مورد کتاب مکان هندسی. من قبل از اینکه بخواهم کتاب مکان هندسی را به‌صورت مستقل بنویسم، در مجله یک‌سری مقاله در مورد مکان هندسی می‌نوشتم.

بعد به این فکر افتادیم که بیاییم آن‌ها را به‌صورت یک مجموعه دربیاوریم. دسته‌بندی مکان‌های هندسی کار مشکلی است و تا آن‌جا که من اطلاع دارم در زمینه مکان هندسی به‌صورت مستقل کتابی نوشته نشده است. من در این مسئله ماندم که ما چگونه این مکان‌ها را تقسیم‌بندی کنیم؟

یکی از بخش‌های چالش‌آفرین در هندسه، هم برای دانش‌آموزان و هم برای دبیران، مکان هندسی است. به همین دلیل با ایشان مطرح کردیم که اگر بخواهیم چنین چیزی تنظیم کنیم چه‌کار باید کنیم؟ بعد آمدیم مکان‌ها را با آن عوامل ثابتی که در آن‌ها وجود دارد تقسیم‌بندی کردیم. در یکی از جلسات هیئت تحریریه بود که وقت استاد شهریاری را گرفتیم و از ایشان نظر خواستیم که ایشان لطف کردند و در ابتدای کتاب، یک تقسیم‌بندی برای مکان‌ها نوشته شد که حاصل راهنمایی‌های استاد شهریاری است.

آقای یاسی‌پور: به این قسمتی که آقای رستمی گفتند، می‌خواستم یک

چیزی در مورد آقای امیری و آقای صدر اضافه کنم. آقای امیری که خودش خیلی آدم خوبی است، یک آدم خوب دیگر هم مثل خودش پیدا کرده و این خیلی جالب است. من یاد این مصراع حافظ افتادم که می‌گوید:

ادب و شرم تو را خسرو مه‌رویان کرد

یعنی واقعاً این‌طور است. هر دو زحمت می‌کشند، محبت دارند و ادب به خرج می‌دهند. آقای صدر هم مثل آقای امیری است. این زوجی که عهده‌دار کارهای اصلی مجله‌اند، به‌عنوان سردبیر و مدیر داخلی، هر دو خیلی باهم جور شده‌اند. از هر دو تشکر می‌کنم.

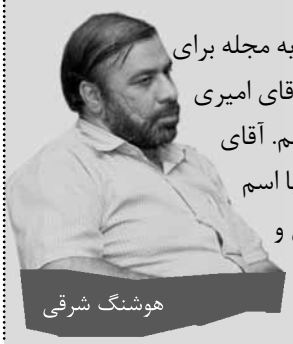
هاشمی موسوی

ابتدا از هیئت تحریریه به‌ویژه آقای امیری و آقای صدر، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور، آقای شرقی و استاد بزرگمان آقای شهریاری و بالاخره آقای قندهاری تشکر می‌کنم. قبل از اینکه به چند نکته اشاره کنم به محتوای خود مجله یک‌مقدار اشاره می‌کنم و یک توصیه‌هایی برای شماره‌های بعدی دارم که ان‌شاءالله بتوانیم آن‌ها را عملی کنیم.

در مورد خود مجله بگویم که بسیار جای خرسندی و تشکر است که این جمع تا به حال ماندنی شده و همه زحمت می‌کشند، مقاله می‌دهند و خوشحال‌اند که برای شماره بعدی یک مقاله جدید بدهند. من بسیاری از مجلات مثل آشنایی با ریاضیات، آشتی با ریاضیات را که ۱۰ تا ۱۵ مقاله خودم در آن چاپ شده بود، مطالعه می‌کردم. وقتی که آشنایی با ریاضیات چاپ نشد، خیلی ناراحت شدم، اما یکی دیگر به نام برهان ریاضی جانشینش شد و باعث خوشحالی بود. اما تعداد کم مجلات ریاضی در ایران نگران‌کننده است. یعنی اگر ده مجله دیگر در کنار برهان با اهداف دیگر و به‌صورت‌های دیگر چاپ شود بسیار عالی است. وقتی اینترنت را جست‌وجو می‌کنیم، به هشتاد مجله ریاضی آمریکایی با عناوین مختلف برمی‌خوریم. یک‌سری از آن‌ها حذف شده و چندتای دیگر فعال است. مجلات دیگری از انگلیس مانند اکسپکتروم که خود من الآن ارتباط دارم و به آن‌ها مقاله داده‌ام، ولی اعتنا نمی‌کنند، یعنی آن‌ها به صورت فردی نگاه می‌کنند و وقتی می‌بینند ایرانی است، با نگاه دیگری به آن می‌نگرند. از یک مقاله فقط یک مسئله درمی‌آورند و جوابش را می‌زنند و این بسیار جای نگرانی است. الآن بدتر شده و روزبه‌روز بدتر می‌شود، یعنی وقتی شما یک مقاله می‌فرستید، می‌گویند اگر شما می‌خواهید به‌صورت یک مسئله چاپ می‌کنیم. همین چند وقت پیش من یک مقاله کامل به آمریکن مونتلی با یک نفر دیگر به صورت مشترک دادم، بعد گفتند این را به صورت problem solution بفرستید به بخش problem solution . ما فرستادیم آن‌جا. این‌ها چیزهایی است که نگرانی‌های ما را بیش‌تر می‌کند. این درحالی‌است که در این‌جا دایره باز است. مجله رشد برهان انصافاً باز برخورد می‌کند و کسی مقاله‌اش خوب باشد چاپ می‌شود. من در هیچ‌جا ندیدم، من با ۱۰ تا ۱۵ مجله با خارج در ارتباطم، می‌بینم این مجله چه‌قدر باز است و چه جای خرسندی است برای خودمان که این مجله جایگاه بسیار خوبی دارد.

توصیه می‌کنم که ما این مجله را با یک ترفندهایی میان بچه‌ها ببریم. می‌توان با تعیین جایزه این کار را کرد. اگر یک دانش‌آموزی در یک مقطع تحصیلی صورت‌مسئله‌اش در مجله بیاید، شوق پیدا می‌کند. پس یک مجله می‌تواند چه‌قدر راهگشا باشد و کل جامعه را تکان بدهد؛ دبیران را، دانش‌آموزان را، همه را؛ و به جایی برساند که همه آن‌ها مقاله بدهند. چرا همیشه چند نفر انگشت‌شمار باید مقاله دهند. همین، ما را نگران می‌کند. همین باعث می‌شود که کارهایی بکنیم، مجله را به درون دبیرستان‌ها ببریم حالا یا به‌صورت مسابقه یا مقاله یا با راهکارهای دیگر و در همین حد نمانیم.

پیشنهاد دیگرم این است که در هر جلسه یک معلم از یک منطقه بیاید و با استفاده از بحث‌های همکاران، مجله را به دانش‌آموزان منطقه خود بشناساند. من معتقدم باید دعوتی از یک یا دو معلم به عمل آورد که خیلی با سابقه هستند، بیایند این‌جا تا هم ما معرفی کنیم، هم آن‌ها بشناسند و این کار در روند همه‌چیز مجله تحول ایجاد کند.


هوشنگ شرقی

من می‌خواهم خاطراتم و احساسات شخصی‌ام را بگویم. همیشه خیلی قبل از ورود به هیئت تحریریه مجله برای من افتخار بزرگی بوده است در کنار اشخاصی چون آقای قندهاری، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور و آقای امیری باشم. این‌ها اسم‌های خیلی بزرگی برای من بودند و فکر نمی‌کردم که روزی در کنار آن‌ها همکاری کنم. آقای شهریاری هم که حسابش از همه جداست و برای من یک اسم ماندگار است. من خودم اولین باری که با اسم آقای شهریاری آشنا شدم فکر می‌کنم کلاس پنجم ابتدایی بود که عضو کتابخانه کانون فکری کودکان و نوجوانان بودم. من در آن‌جا یک سری کتاب‌ها را به صورت دوره‌ای می‌خواندم و می‌رفتم جلو، یک خانم کتابداری آن‌جا بود، به من گفت: چرا کتاب‌های بهتر نمی‌خوانی؟ گفتم مثل چه کتابی؟ گفت خوب

مثل این؛ و رفت یک کتابی را از قفسه آورد بیرون، «یک روز زندگی پسرک قبطی». من این کتاب را بردم و خواندم و خیلی لذت بردم و گفتم مترجم این کتاب آقای پرویز شهریاری باید استاد تاریخ باشد که کتابی در ارتباط با مصر نوشته است.

چند سالی از این قضیه گذشت و من کلاس سوم ریاضی دبیرستان در یک مدرسه عادی منطقه ۱۰ بودم. کتاب جبر سوم ریاضی را که می‌خواندیم مسئله‌هایی درباره مشتق و مسئله‌های ترکیبی درباره مشتق اول و دوم داشت. دبیر ما که این مسئله‌ها را حل می‌کرد. من پیش خود می‌گفتم معلم چطوری فهمیده شکل این تابع را باید این‌طوری عوض کند و بعد مشتق بگیرد؟ ما هر چه فکر کردیم به ذهنمان نرسید؟! در کتابخانه همان مدرسه من کتاب روش‌های جبر را دیدم. همان مسئله‌ها را در این کتاب دیدم و راه‌حلش هم به همین شکل آمده بود. ... بعد با خود گفتم این پرویز شهریاری همان پرویز شهریاری است؟ یعنی با خود گفتم نباید او باشد، باید دو نفر باشند. بعد چند سالی گذشت. آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات را دیدم. آن روش‌های جبر هم در تمام دوران دانشجویی‌ام به دردم خورد و مسئله‌هایش را حل می‌کردم تا سال ۷۰-۷۱ یک کتاب خاطرات سیاسی خواندم. آن‌جا از یک آقایی که اسم معروفی هم دارد پرسیده بودند، نظر شما راجع به پرویز شهریاری چیست و ایشان گفته بود «پرویز شهریاری یکی از تمیزترین (اصطلاحی که آن شخص به‌کار برده بود) آدم‌هایی است که در عمرم دیدم. من آن جا با خودم گفتم این باید همان پرویز شهریاری باشد و بعد گفتم حتماً باید ایشان را بشناسم و ببینم. بعد رفتم یک تحقیق مفصل درباره استاد کردم و اشتیاقم برای دیدن ایشان بیش‌تر شد. وقتی برهان را دیدم متوجه شدم که آقای امیری و آقای شهریاری هم در این مجله هستند. گفتم این فرصت خوبی است و حتماً از این‌جا به پرویز شهریاری می‌رسم!

آقای امیری: آقای مهدی قمصری یک مدت در جمع ما بودند، ایشان معلم جبر و آنالیز سال چهارم خودم بودند. آقای عابدی هم از اولین شماره به ما مقاله می‌دادند. ایشان هم سال چهارم معلم ریاضیات جدید ما بودند. الآن یادم افتاد که از این دو بزرگوار هم یادی کنیم، به‌ویژه آقای عابدی که بعدها هم خیلی با ما همکاری داشت. دو تا از کتاب‌های کوچک ریاضی از ایشان است. الآن هم مثل اینکه مریض هستند. همین‌جا پیشنهاد می‌کنم یک جلسه خدمت ایشان برسیم.

آقای یاسی‌پور: یک نکته‌ای را در ادامه صحبت آقای شرقی عرض کنم. ما در سال ۱۳۳۹ یعنی ۵۰ سال پیش‌تر، شاگرد آقای شهریاری بودیم. ایشان در یک مدرسه دولتی در خیابان نادری (به نظرم اسم مدرسه‌اش تمدن بود) مثلثات درس می‌دادند. جا هم نداشتیم، ما متفرقه بودیم و شبانه می‌رفتیم، جا هم نبود و ایشان در آبدارخانه روزانه برای چند نفر بزرگسال کلاس گذاشته بودند. فقط من بودم که سنم کمتر از بقیه بود. آن‌ها همه عاشق آقای شهریاری بودند. با صحبت آقای شرقی من به یاد عشق آن‌ها افتادم، واقعاً عاشق بودند.

آقای امیری: این رابطه دانش‌آموز و استاد را که شما می‌فرمایید من یک جای دیگری در سال ۷۱-۷۲ به چشم دیدم. اگر آقای شهریاری یادشان باشد، به من لطف کردند و فرمودند که در مدرسه «فیروز بهرام» احتیاج به همکار دارند. من هم به دیده منت پذیرفتم و ایشان آن‌جا جبر سوم ریاضی را می‌گفتند. من پرسیدم شما خودتان آن‌جا درس می‌دهید؟ گفتند بلی، من آن‌جا جبر سوم ریاضی می‌گویم و من پرسیدم چرا سوم، چرا چهارم را نمی‌گویید؟ ایشان گفتند: «سال چهارمی‌ها از دست رفته‌اند، نمی‌شود با آن‌ها ارتباط برقرار کرد. ما می‌خواهیم چهار کلام حرف حسابی بزنیم، یک تاریخ ریاضی بگوییم، آن‌وقت دانش‌آموزان چپ چپ نگاهمان می‌کنند و می‌گویند آقا به درد کنکور می‌خورد؟ چه بگوییم؟ من فقط سوم درس می‌دهم.» که آن‌جا ما یک کلاس مشترک داشتیم، جبر سوم را استاد می‌گفت، ریاضیات جدید سوم را من می‌گفتم، ریاضیات جدید چهارمشان را هم من می‌گفتم. روزهایی که ایشان کلاس داشتند، یک جلسه کلاس من بعد از کلاس ایشان و خیلی سخت بود. باور کنید بعد از کلاس ایشان، رفتن سر آن کلاسی که ایشان در آن درس داده بود و می‌خواستیم ریاضیات جدید بگوییم بسیار کار مشکلی بود. بچه‌ها هنوز تا نیم ساعت اول کلاس هنوز محو صحبت‌های ایشان بودند و فکر می‌کردند من آقای شهریاری هستم که آن‌جا درس می‌دهم. آن‌جا این رابطه بین بچه‌ها و استاد را به خوبی درک کردم. فکر می‌کنم آن سال‌ها، سال‌های آخر تدریس ایشان بود و دیگر بعد از آن در مدرسه‌ای درس ندادند.

آقای یاسی‌پور: بله این‌که فرمودید سال سوم درس می‌گفتند، در یک مدرسه‌ای که من خدمت خود آقای شهریاری بودم و مثلثات می‌گفتم، ایشان می‌گفتند که من پنجم ریاضی را می‌گویم، شما برو مثلثات ششم ریاضی را بگو. من به ایشان گفتم آخر من چه‌طور در مقابل شما بروم ششم؟ گفتند نه من با پنجم باید کار کنم. همین حرفی که شما گفتید.

از این‌که هر جلسه می‌توانم در جمع هیئت تحریریه قرار بگیرم احساس خیلی خوبی دارم، چون همیشه تجربه کسب می‌کنم و خوشبختانه در انتقال این تجربه به دیگران هم کوتاهی نکرده‌ام. یعنی هرچه در هر جلسه یاد می‌گیرم سعی می‌کنم به دوستان مختلفی که گوشه و کنار با ایشان برخورد دارم، یاد بدهم. اگر هم فکر می‌کنید که بنده در مقام شاگردی شما درس پس می‌دهم، از شما یاد گرفتم، ادب و احترام و... را از تک‌تک شما بزرگان یاد گرفته‌ام. من امسال در مدرسه‌ای مشغول تدریس شدم و بنا به دلایلی پس از ۱۵ سال مدرسه‌ام را عوض کرده‌ام. بعد از یک ماه که در این مدرسه جدید می‌روم هنوز معلم‌ها مرا به گرمی پذیرا نیستند ولی شما بزرگان از همان روز اول مرا تحویل گرفتید.

میرشهرام صدر

یادم می‌آید در سن ۲۶ سالگی به جمع هیأت تحریریه مجله برهان دعوت شدم. تازه معلم شده بودم، البته در زمان تحصیل در دانشگاه، درس هم می‌دادم. به نوشتن علاقه داشتم و روی برد دانشگاه مقالاتی با عنوان «آیا می‌دانید که؟» می‌نوشتم. یک روز که سال آخر دانشگاه بودم، یعنی سال ۷۲-۱۳۷۱، آمدم انتشارات مدرسه یک سری از کتاب‌های انتشارات مدرسه را بگیرم، دیدم یک مجله‌ای به نام برهان درآمده و چه مطالب قابل توجه‌ای در آن است. چون از قبل هم علاقه به نوشتن مقاله و تحقیق داشتم، گفتم مطالبی بدهم که بشود در مجله هم چاپ کرد. با آقای امیری ارتباط برقرار کردیم و مقاله دادیم و ایشان جریان را تعریف کردند. این داستان گذشت و روزی آقای امیری به من پیشنهاد کرد که برنامه‌ات چیست؟ کجا کار می‌کنی؟ وقت داری یا نداری؟... اگر می‌شود با ما همکاری کن. (این بماند که تا چاپ مقاله در مجله، چهار مرتبه مقاله را بردم و نوشتم و آوردم و بردم و...) خیلی احساساتی شدم. یادم هست که وقتی آقای امیری این پیشنهاد را به من دادند، در مسیری که داشتم به خانه می‌رفتم تا به پدر و مادرم بگویم چنین اتفاقی افتاده، انگار روی زمین راه نمی‌رفتم. یعنی فکر می‌کردم دارم پرواز می کنم. دو جا این احساس به من دست داد: یکی هنگام طواف دور خانه خدا در مکه مکرمه و یک‌بار هم وقتی که به عنوان عضو کوچکی در هیئت تحریریه دعوت شدم و بزرگان این جمع با سعه صدر با من برخورد کردند. همان جلسه آقای امیری مرا معرفی کردند و گفتند ایشان در مورد برهان یک سری نظرات دارند و همه نشستند و حرف‌های مرا گوش کردند، البته من چند کلمه‌ای بیشتر صحبت نکردم، زیرا در جلسه اصلاً جای صحبت کردن من نبود، من کوچک‌تر از آن بودم که بخواهم حرفی بزنم. در ابتدا که آمدم، استاد یاسی‌پور چند جلسه‌ای نبودند، بعد از آن آمدند و ما در خدمتشان بودیم. ایشان خیلی صمیمی و گرم با من برخورد کرد که احساس کردم در یک جمع صمیمی خانوادگی قرار دارم.

من گاهی برای گرفتن متون از آقای شهریاری خدمت ایشان می‌رسیدم و گاهی خودم کاری را خدمت ایشان می‌آوردم. یادم هست یک روز که در مورد یک مقاله ریاضی تحقیق می‌کردم، خدمت ایشان رسیدم و بعد از آن که جواب سؤالاتم را گرفتم، کمی خدمت استاد درد دل کردم. آن موقع داشتم به انتشارات مدرسه منتقل می‌شدم، و این مسئله خیلی طولانی شده بود؛ به استاد شهریاری گفتم، استاد موضوع این است و من کار مجله را دوست دارم، ولی کارهایم زیاد شده است و می‌خواهم یک‌جا متمرکز باشم، چه کار کنم؟ گفتند «**از میدان در نرو.**» دوباره از ایشان سؤال کردم، یعنی چه کار کنم؟ ایشان در جمله‌ای کوتاه فرمودند: «من نمی‌دانم، فقط از میدان در نرو.» این جمله در نظر من شامل دریایی از معرفت بود و برای من مایه دلگرمی بود. من هم از میدان درنرفتم و ماندم.

همین چند وقت پیش، وقتی ایشان را از منزل آقای قندهاری به منزل خودشان می‌بردم، گفتم: آقای شهریاری، من از میدان درنرفتم و در دفتر مجله انجام وظیفه می‌کنم، شما استاد ما هستید، تجربه دارید، یک نصیحتی به ما کنید که چه کنیم که در کارمان موفق‌تر باشیم؟ ایشان فرمودند: «**بی‌سروصدا داری کارت را انجام می‌دهی.**»

در این‌جا از همه اساتید خودم تشکر می‌کنم که مرا به جمع خودتان پذیرفتید. من همیشه خود را شاگرد کوچکی در جمع شما می‌دانم.

آقای امیری: ما هم تشکر می کنیم که شما وقت گذاشتید، انرژی گذاشتید، جوانی‌تان را گذاشتید و دارید می‌گذارید و به واقع بیش‌تر زحمت‌های مجله بر گردن شماست. من خدا را شاکرم که همکار و برادر خوبی مثل شما دارم.

دکتر ریحانی: ارتباط من با مجله در سال‌های اول معلمی من بود و دانشجو بودم. مجموعه اولیه آن را که سال ۷۰ چاپ شد هنوز دارم. به‌جز در مقطع دکترا، هم در تهران درس خوانده و هم درس داده‌ام، البته به‌صورت حق‌التدریسی. من از همان موقع دنبال مجله بودم و کتاب آقای یاسی‌پور «مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی» را آمدم از انتشارات مدرسه خریدم. جلوی دانشگاه می‌رفتم ببینم چه کتابی آمده که بتوان استفاده کرد و من قبل از آن یادم نمی‌آید، فقط می‌دانم که مجله یکان بود. ولی مجله برهان که آمد من خوشحال شدم که منبعی

برای معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد و آن موقع همه شماره‌هایش را هم معرفی می‌کردم و هم می‌خریدم. تا ۴ یا ۵ سال پیش هم خیلی مرتب می‌خریدم، ولی الآن اگر بتوانم تهیه می‌کنم.

به هر حال این استمرار و پشتکار خیلی مهم است که شما این کار را ۲۰ سال توانسته‌اید انجام دهید. در نبود منبعی به این صورت، خودش خیلی ارزش دارد. مخاطبان خیلی مناسبی داشته است، و با این حال خیلی بهتر از این هم می‌توانست باشد. یعنی اگر معلمان بتوانند ارتباط بیش‌تری با مجله برقرار کنند خیلی مؤثرتر خواهند بود و اگر بشود هر ۳ یا ۴ سال یک بار یک بازسازی، نوسازی، بهینه‌سازی و به‌روز آوری شود خیلی فرق می‌کند. اگر مجله با سبک کارهای جدید و مجلات جدید دنیا هماهنگ باشد و متناسب با نیازها، تغییرات آموزشی و برنامه‌های درسی و همگام با آن‌ها حرکت کند، مخاطبان بیش‌تری خواهد داشت.

به نظر می‌رسد که کار ارزیابی هم باید انجام شود، یعنی شما ارزیابی‌هایی را تهیه کنید تا یک برآوردی از بیست سال کار خود داشته باشید. شاید مناسب باشد که یک پرسشنامه یا طرحی تهیه کنید و ببینید که در بین مخاطبان چه جایگاهی دارید، الآن چه جایگاهی دارد، مشکلاتش چیست، چه جاهایی مورد استقبال است، که با این دیدگاه هم بتوانید آن را ارتقا دهید. در هر حال کار بسیار خوب و پسندیده‌ای بوده است. من حتی برهان راهنمایی را هم تهیه می‌کردم. امیدوارم بتوانید کارتان را توسعه دهید.

آقای امیری: آقای دکتر شرف‌الدین که از مفاخر ایران هستند و تاکنون دو نسل از مقالات ایشان استفاده کرده‌اند. وقتی که ایشان دبیر و دانشجو بودند و تدریس می‌کردند، کتاب‌هایی داشتند که آن کتاب‌ها خیلی معروف بود و تا حالا چند تا کتاب ارزشمند و تحقیقی از ایشان در انتشارات مدرسه چاپ شده است. مقالاتشان در مجله برهان همیشه جزو مقالات بی‌نظیر بوده‌اند که جایی تکرار نمی‌شوند. همیشه یک حرف نو در مقالات ایشان هست. من چندجا صحبت کرده‌ام و گفته‌ام کتاب‌هایی که ایشان دارند شاید جزو معدود کتاب‌هایی هستند که می‌شود اسم تألیف رویش گذاشت، یعنی گردآوری و جمع‌آوری و تدوین نیست و واقعاً تألیف شده است. این است که افتخار داریم در خدمت ایشان باشیم.

دکتر شرف‌الدین: اولین شماره‌ای که درآمد به خاطرم نیست، ولی وقتی این مجله به دستم رسید خیلی خوشحال شدم، چون مجله یکان دیگر چاپ نمی‌شد. واقعاً انسان متأثر می‌شود که یک مجله که سال‌ها چاپ می‌شده است، به یک‌باره دیگر چاپ نشود. وقتی کنار نویسندگان برهان هستم خیلی خوش‌حال می‌شوم، وقتی هم که کنارشان نیستم باز هم حس می‌کنم در کنارشان هستم، چون مجله را می‌خوانم، لذت می‌برم و احساس می‌کنم که هم قلبی و هم فکری در کنارشان هستم. من معتقدم که باید برای این مجله از بالا امکاناتی بدهند. خوب اگر امکاناتی باشد من از خدا می‌خواهم مقاله بدهم. برای مثال مقالات از مجلات خارجی که اگر از بالا امکاناتی فراهم شود بهتر می‌شود. من وقت زیادی می‌گذارم و یک مقاله می‌دهم بعد یکی می‌آید آن را ویراستاری می‌کند و تمام مقاله مرا با خط قرمز مخدوش می‌کند و نمی‌شود آن‌را درست خواند!

آقای یاسی‌پور: اصلاً در متون دوگانگی ایجاد شده است، چون بعضی را عوض می‌کنند و بعضی را عوض نمی‌کنند (طبق عادت)، بعد می‌بینید که دوگانگی و حتی سه‌گانگی ایجاد شده است. خوب نوشته هرکس شناسنامه آن شخص است. نوشته را نباید تغییر داد، به هیچ‌وجه من الوجوه نباید در آن دست برد، دلیلی ندارد که نوشته را تغییر بدهند. مثل این‌که شعر حافظ را شما تغییر دهید، خوب حافظ دلش خواسته این‌جوری بگوید. البته به زبان امروزی می‌شود عوض کرد و بگوییم این به زبان امروز نزدیک‌تر است، ولی نمی‌شود اصل مطلب را تغییر داد!

دکتر شرف‌الدین: من یک بار مقاله‌ای دادم که خیلی بعد رنجیده شدم، چون اسم مقاله را که داستان معروفی هم بود عوض کرده بودند. داستانی بود از کتاب ادبیاتمان که آن کتاب را ملک‌الشعرای بهار، بهمنیار، بدیع‌الزمان نوشته بودند. یکی از داستان‌هایش را، که ذکر آن در این‌جا مناسبتی ندارد، من به برهان داده بودم و آن‌جا اسم داستان را عوض کرده بودند. من خیلی ناراحت شدم.

آقای یاسی‌پور: اگر اسم این داستان را عوض کنید خراب می‌شود، مگر این‌که کل داستان را اصلاً نمی‌نوشتید. چون این ارزش و اهمیتش فقط در آن عنوانش است. چون ما در ادبیات، اصطلاحی به نام «براعت استهلال» داریم که در **علم بدیع** مطرح می‌شود، یعنی وقتی داستانی را می‌خواهی تعریف کنی حتی نام فیلم‌ها و تیتراژشان نشان می‌دهد که این فیلم راجع به چه چیزی صحبت می‌کند و هر داستانی در ادبیات وقتی کسی شعر یا ادبیاتی می‌خواهد بگوید باید طوری تنظیم کند که همان بیت‌های اول مشخص کند که چه می‌خواهد بگوید. مثلاً در شاهنامه فردوسی وقتی می‌خواهد راجع به جنگ رستم و سهراب صحبت کند، براعت استهلالش این‌طور است:

کنون رزم سهراب و رستم شنو
دگرها شنیدستی این هم شنو
یکی داستانی است پر آب چشم
دل نازک از رستم آید به خشم

از این‌جا مشخص می‌شود یک داستان تراژدی گریه‌آور است که رستم یک خطای بزرگی مرتکب شده که طرف را عصبانی می‌کند. بعد داستان را تعریف می‌کند. من منظورم این است که عنوان آن

مطلب بسیار مهم اســت. یک ظرافت‌هایی هم در این ماجرا هست که باید رعایت شود.

آقای امیری: آقای دکتر شرف‌الدین، قبل از این‌که شما همکاری‌تان را با مجله ما شروع کنید با کدام مجلات دیگر همکاری داشتید؟

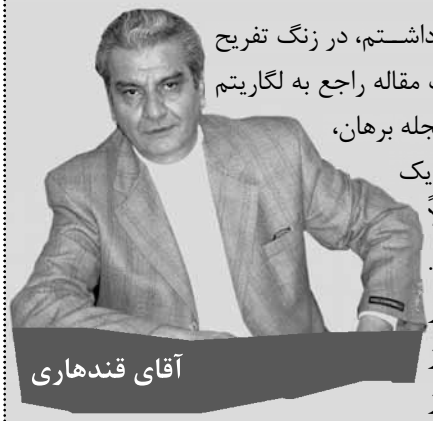
دکتر شــرف‌الدین: من در مجله یکان، مجله مدرســه عالی اراک، مجله وزارت علوم و فرهنگ و بینش مقاله می‌دادم و همکاری داشتم.

دکتر شرف‌الدین: خاطراتی از آقای شهریاری بگویم. یکی این‌که میلیون‌ها ایرانی کتاب‌های آقای شــهریاری را خوانده‌اند، خود این برای ما بهترین خاطره اســت. من یک کتابی نوشته‌ام که اگر کتاب آقای شهریاری را نمی‌خواندم نمی‌توانستم آن را بنویسم.

آقای یاســی‌پور: یکی از ریاضی‌دانان ایرانی و اسلامی بوزجانی اســت. بوزجانی در کتاب اعمال هندسه‌اش اول قضایای هندسی را مطرح کرده و از راه هندســه آن‌ها را حل کرده اســت. بعد می‌بیند راه‌حل‌هایــش به درد صنعتگــر نمی‌خورد. آن وقــت راه عملی‌اش را هم یاد داده و در دو قســمت آورده اســت. یک قســمت هندسه محض آورده و یک قســمت هندســه عملی که چگونه انجام دهیم. ما بین ریاضی‌دانان ایرانی اســلامی خودمــان بوزجانی را داریم که چنین کاری را مفصل کرده انجام داده اســت؛ هم در حســاب، هم در هندســه: کتاب اعمال هندسی و اعمال حسابی. در حساب، ابتدا قضایای حســاب را گفته، بعد گفته حســابدار اگر بخواهد کار کند، باید این کار را انجام دهد.

دکتر شرف‌الدین: بله من از استاد شهریاری خاطرات خیلی خوبی دارم. ایشان خیلی عاقل و مدبر است و با بزرگواری اظهارنظر می‌کند.

آقای یاســی‌پور: دربــاره بزرگواری آقای شــهریاری می‌خواهم نکتــه‌ای بگوییم که ما هر موقع از آقای شــهریاری برای برنامه‌ای تقاضا کردیم تشریف بیاورند، بلافاصله قبول کردند. ما دو تا برنامه داشــتیم، یکی در رادیو فرهنــگ بود به نــام «در جهان ریاضی» و یــک برنامه دیگر داشــتیم در تلویزیون به نــام «جهان ریاضی» به مناســبت ســال جهانی ریاضیات. در هر جلســه‌ای که از ایشان دعــوت می‌کردیم ایشــان بــرای میزگرد یــا صحبــت می‌آمد. با مشــکلات هم مبــارزه می‌کرد و کنار می‌آمد. مثلاً ایشــان یک بار خودشــان خاطره‌ای تعریف کردند و گفتند: «من یک مرتبه آمدم صدا و ســیما، نزدیک محمودیه»، خوب قبلاً باید آفیش شــود که وقتی شــخص می‌آید او را راه دهند. ما هم قبلاً گفته بودیم آقای شــهریاری می‌آیند. بعد ایشــان آمده بودند، ولی جلوی ایشــان را گرفتــه بودند و گفته بودنــد کجا می‌روی. «گفتم من شــهریاری هستم و برای رادیو برنامه دارم.» گفتند: «اسم شما این‌جا نیست.» گفتم: «نمی‌شود آخر، مرا آفیش کرده‌اند اسم من باید این‌جا باشد. گفتم بگذار خودم لیســت را ببینم اسمم هست یا نه؛ و دیدم اسم مرا به صورت پرویز شــهریاری آن‌جا نوشــته بودند. گفتم این مگر اســم من نیست؟» او گفت: «این «پرویز شهریاری» است!» خوب، ایشــان با این دردســرها کنار می‌آمدند.


آقای قندهاری

درباره آشــنایی با مجله برهان باید بگویم یک روز که من در آموزشــگاه علامه درس داشــتم، در زنگ تفریح بود که جناب امیری را برای اولین‌بار ملاقات کردم و ایشــان گفتند: آقای قندهاری ما یک مقاله راجع به لگاریتم می‌خواهیــم. گفتم برای چه؟ گفتند: ما می‌خواهیم مجله‌ای ریاضی منتشــر کنیم به نام مجله برهان، بــرای عضــو هیئت تحریریه گرفتــن تقریباً یک حالت خاصی دارد، ما بــه چند نفر گفتیم یک مقاله لگاریتم برایمان بنویسند. این‌ها را بررسی کنیم، بعداً انتخاب می‌کنیم. من هم معمولاً نوشــتنم عین تدریس ســر کلاس بود. یعنی هر چه سر کلاس می‌گویم همان را می‌نویسم. خیلی آرام درس می‌دهم، خیلی تمیز می‌نویســم، با بچه‌ها شــوخی می‌کنم، یعنی این‌طور نیســت که خشــک و خالی درس بدهم، مقالات را هم همان‌طور با ملایمت نوشتم و پس از یک ماه دیدم که آقای امیری تلفن کردند که شــما بیایید و عضو هیئت تحریریه شوید و از آن تاریخ، افتخارم این است که در خدمت این جامعه هیئت‌تحریریه هستم.

اســتاد شــهریاری روی من اثر خاصی داشت به این علت که شما از اســتاد شهریاری اگر چیزی بپرسید، زود جدول‌ضربی جوابتان را نمی‌دهد، فکر می‌کند جواب می‌دهد، و این واقعاً مهم اســت که وقتی شــما از ایشــان پرسشــی می‌کنید ایشان با تفکر و با متانت جواب می‌دهند و این خیلی اهمیت دارد، بخصوص ما که ریاضی خوانده‌ایم خیلی باید در گفتار، در تعاریف و در بیان مطالب دقت کنیم. به هر جهت از آن تاریخ من جزو افتخارات زندگی‌ام است که در خدمت این مجله بودم و صمیمیتی که بین اعضا برقرار بود واقعاً زبانزد است.

یکی از نویسندگان که در سوئیس زندگی می‌کند می‌گوید: سه نفر ایرانی که دور هم جمع می‌شوند چهار تا عقیده مختلف دارند. ما واقعاً در مجله برهان اصلاً چنین حالتی نداشــتیم. من مثلاً اولین کتابی که برای انتشــارات مدرسه نوشتم از آقای امیری خواهش کردم ویراســتارش بشــود. یعنی رابطه حالا بین من و آقای امیری رابطه پدر و فرزندی برقرار اســت ولی واقعاً رابطه‌ها صمیمی است. من یادم

است یک وقتی آقای صدر یک مقاله فرستاد، مقاله‌های مربوط به جبر را آقای امیری لطف می‌کردند و برای کارشناسی به من می‌دادند، در کار هم بحث تعارف نبود دیگر بحث مقاله علمی بود، خیلی با دقت این را تصحیح کردم و ایراد گرفتم و خیلی پرخاش کردم که شما اگر می‌خواهی این را بنویسی باید این خصوصیات را داشته باشد، تعاریفت باید جامع و مانع باشد، کامل باشد، برای هر تعریفی که می‌آورید باید مثال بیاورید، گرچه آن زمان آقای صدر ظاهراً ناراحت شد ولی مثل این‌که بعداً راضی شد. من واقعاً از جلسات برهان بهره بردم، از وجود آقای شهریاری، از وجود جناب آقای یاسی‌پور و از بقیه دوستان. از استاد رستمی بگویم، ایشان کاری که در هندسه کرده واقعاً کارستونه. ایشان واقعاً از افتخارات ماست. جوان‌ترها بعداً به ما اضافه شدند، آقای شرقی، آقای هاشمی موسوی و آقای صدر که خیلی هم ظرفیتش بالاست، آقای امیری که جای خود دارد که من واقعاً به ایشان علاقمندم. بعضی از آدمها ظرفیت خاصی دارند، مثل یک ظرف چهار لیتری می‌مانند، شما دو میلیون لیتر در او آب بریز، آخر سر همان چهار لیتر را می‌گیرید ولی آقای امیری این‌طور نبود و ظرفیتش بالا بود، هرچه می‌گفتم، قبول می‌کرد و می‌پذیرفت.

درباره استاد شهریاری باید بگویم که من هفته‌ای یک‌بار خدمتشان می‌رسیدم. چون خانه‌شان نزدیک ما بود، وقت می‌گرفتم و خدمتشان می‌رفتم مقالاتی را که برای مجله‌های چیستا یا مجله دانش و مردم، نوشته بودم برایشان می‌خواندم. چون یک مقدار خواندن برایشان مشکل بود و من برایشان می‌خواندم. تقریباً هرچه که می‌خواندم می‌گفتند بده برای چاپ، من واقعاً از استاد شهریاری خیلی بهره گرفتم. بخصوص در رفتار ایشان منطق موج می‌زند. ایشان خیلی متین، موقر و با دقت صحبت می‌کند و انسان واقعاً لذت می‌برد. الان خواندن برایشان سخت است، با عینک و با ذره‌بین می‌خوانند، نوشتن هم برایشان سخت است، معذالک همین الان هم کتاب ترجمه می‌کنند.

آقای امیری: اولین مقاله شما چه بود که در برهان چاپ شد؟

آقای قندهاری: اولین مقاله‌ام لگاریتم بود که چاپ شد و واقعاً هم خوشحال شدم. فکر می‌کنم که سال ۶۱ بود، اولین کتابم چاپ شد و انتشاراتی دو جلد از آن را برای من فرستاد. ما رفتیم سر کلاس کنکور، هر مسئله‌ای که نوشتم، غلط حل کردم؛ بچه‌ها گفتند چه شده؟ گفتم هیچی! امروز کمی حواسم پرت است و واقعاً خوشحال‌کننده بود. خداوند به این گروهی که دست‌اندرکار نوشتن هستیم نعمتی داده.

آقای امیری: به لطف خدا یک برکت خاصی به این گروه داده شده، یعنی وقتی شما می‌نویسید و انگیزه مادی ندارید و بیست هزار نفر این مقالات را می‌خوانند، این باعث شده که خداوند به این جمع‌شدن‌ها و نشست‌ها برکت بدهد.

آقای قندهاری: این توفیق تک‌تک‌مان بود، و توفیق گروه بود. بدون این‌که بخواهیم، این گروه را حفظ کردیم. هیچ‌وقت هم صحبت تندی هم بین ما پیش نیامد و خداوند این توفیق را به من داد که در این راه بیافتم. خوب می‌توانستم به خیلی‌جاها کشیده شوم و بیش از ظرفیتم خدا به من لطف کرده است.

آقای امیری: ما از زحمات بیست ساله شما قدردانی می‌کنیم هرچند که باید بگویم زبان ما قاصر است.

آقای یاسی‌پور: با آرزوی توفیق برای همهٔ خوانندگان مجلهٔ برهان، آنان را به خداوند متعال می‌سپاریم.

پی‌نوشت

۱. مدیرعامل وقت انتشارات مدرسه

۲. مدیرکل وقت دفتر انتشارات کمک‌آموزشیِ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

سه چهرهٔ دوده‌آلود

تفریح اندیشه

آنان که مدتی را در انگلستان گذرانده باشند، می‌دانند که مردم این کشور به هنگام سفر با قطار دوست دارند پنجره‌ها را باز بگذارند تا از هوای آزاد برخوردار شوند. روزگارانی که قطارهای انگلستان هنوز برقی نشده بود و لکوموتیوهای آن‌ها با زغال‌سنگ کار می‌کردند، در کوپه‌ای از یک قطار، سه انگلیسی مبادی آداب همسفر شده بودند. هر کدام، بدون توجه به وجود دیگران، راست و محکم در جای خود نشسته و به خواندن کتاب مشغول بودند. گذشتن قطار از یک تونل و پیش‌آمدن یک تاریکی زودگذر سه همسفر را بر آن داشت تا لحظه‌ای سر از روی کتاب بردارند و نگاهی به یکدیگر اندازند. ناگهان هر سه نفر متانت خود را از دست داده، با صدای بلند خنده سر دادند؛ زیرا هر کدام با چهرهٔ دوده‌آلود و مضحک دو نفر دیگر روبه‌رو شده بود، اما این وضع زیاد طول نکشید، پس از لحظه‌ای هر سه نفر سکوت کردند، سر را به زیر انداختند، دستمال‌های خود را بیرون آورده و چهره‌های خود را پاک کردند. چه شد که هر کدام از آنان، بدون آن که چهرهٔ خود را ببیند، با استنتاجی منطقی دریافت که چهرهٔ خودش نیز دودآلود است.

پاسخ در صفحه ۷۰

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی / ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی / انتشارات مدرسه

محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

احسان یارمحمدی

تقریباً ده سال پیش بود که برای ملاقات و گفت‌وگو پیرامون تألیف و چاپ کتابی درباره دنباله‌ها[1] و سری‌ها[2] با آقای امیری به دفتر گروه ریاضی انتشارات مدرسه مراجعه کردم. هنگام ورود به اتاق گروه ریاضی متوجه شدم آقای امیری حضور ندارند. بعد از عرض سلام و ادب به فرد حاضر در اتاق و معرفی خویش، جویای آقای امیری شدم، که وی در پاسخ گفت: آقای امیری به سفر حج رفته‌اند و تا چند هفته دیگر نمی‌آیند. من صدر هستم و در خدمت شما، اگر فرمایشی دارید بفرمایید. من هم موضوع را با ایشان مطرح کردم و به این ترتیب وارد گفت‌وگو شدیم. مشغول گفت‌وگو بودیم که تلفن زنگ زد. آقای صدر تلفن را پاسخ داد. در آن سوی خط یک دبیر ریاضی از استان لرستان برای راهنمایی گرفتن درباره حل یک حد شبیه یکی از موارد $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$ یا $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x})^{\tan x}$ از آقای قندهاری سراغ گرفت. آقای صدر به او گفت که آقای قندهاری امروز تشریف ندارند و ایشان فقط سه‌شنبه‌ها در دفتر گروه حضور دارند. شما می‌توانید برای گرفتن پاسخ یا راهنمایی درباره سؤال مورد نظرتان در آن روز تماس بگیرید. در همین هنگام به آقای صدر گفتم به آن دبیر ریاضی بگویند که جواب این حد، فلان عدد است. آقای صدر هنگامی که این حرف را از من شنید، رو به من کرد و گفت شما اطمینان دارید که پاسخ سؤال، فلان عدد است. من هم جواب دادم: بله. سپس آقای صدر به آن دبیر گفتند که شما ده دقیقه دیگر تماس بگیرید و جواب سؤال خود را دریافت کنید. بعد هم آقای صدر رو به من کرد و گفت ده دقیقه دیگر ایشان تماس می‌گیرند و شما جواب را به همراه راه‌حل به ایشان بدهید. من توانستم پاسخ و راه‌حل مناسبی را برای سؤال آن دبیر ارائه کنم. در پایان صحبت‌ها و گفت‌وگوها، آقای صدر یک جلد از مجله برهان دوره متوسطه، شماره ۳۶ را به من هدیه داد و گفت، شما می‌توانید در صورت تمایل برای مجله برهان مقاله بفرستید. این ملاقات، آغاز همکاری من با مجله برهان از آن تاریخ تاکنون است.

چندی پیش در ملاقاتی، آقای صدر از انتشار ویژه‌نامه‌ای به مناسبت بیستمین سال تولد مجله برهان و اعلام فراخوان برای ارائه مطلب با عنوان یاد و خاطره از مجله برهان از سوی دبیران، مدرسان، دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به مجله و همکاران و مرتبطان با مجله در طی این سال‌ها خبر دادند. من هم به همین بهانه یاد آموزشی خود را با ارائه مقاله‌ای پیرامون محاسبه حد توابع نمایی

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$
$$\lim (\sin x \tan^2 x$$

کـه سـرآغاز آن در همـان
ملاقات نخسـت من با آقای صدر در پی
تماس تلفنی آن دبیر اهل اسـتان لرستان درباره محاسبه
$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ رقم خورد، ارائه می‌کنم.

فرض کنید که شما مباحث حد۳ و پیوستگی۴ دروس حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال۵ را به‌خوبی فراگرفته‌اید و دبیر شما به‌عنوان کار در منزل، تمرین زیر را به شما می‌دهد و اعلام می‌کند که هر دانش‌آموز کلاس که بتواند پاسـخ و راه‌حل صحیح برای این تمریـن مزبور ارائه کند، دو نمره از نمره آخـر ترم خود را دریافت خواهد کرد.

● حاصل هریک از حدود زیر را به‌دست آورید.[۶]

۱) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ ۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ۴) $\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

با بررسـی حدود بـالا و مواردی نظیـر آن‌هـا درمی‌یابیم که هنـگام برخـورد با این‌گونه حـدود، حالت‌هـای ابهام‌آمیز 1^∞، 0^0 و ∞^0 به‌وجـود می‌آید که شـما ریاضی‌آموز گرامـی باید برای رفع ابهـام هریـک از این حدود، آشـنایی لازم و کافـی را با روش‌های محاسـبه و رفـع ابهـام حدود اعـم از رفع ابهـام از حالت‌های $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$ و... و اسـتفاده از قاعده هوپیتال، هم‌ارزی‌های مثلثاتی، اتحادهای مثلثاتی۷، محاسبه مشتق توابع و... داشته باشید.

برای ورود به این مقاله، قضیه‌ای را بدون ارائه برهان۸ آن برای درک بهتر مقاله بیان می‌کنیم.

● اگـر p، q و x اعـدادی حقیقـی باشـند، داریـم: (e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵)

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{qx} = e^{pq}$

پ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

اکنـون بـا توجـه بـه قضیه بـالا به بررسـی و محاسـبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ می‌پردازیم.

حالت اول:

فـرض کنیـد بـرای محاسـبه حـد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ بـه حالـت ابهام‌آمیـز 1^∞ برمی‌خوریـم. بنابرایـن $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}(1+(1+f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}\times(f(x)-1)g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\times(f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

و بنابر پیوستگی تابع نمایی۹ داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

مثال ۱. حاصل حد $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = (\cos 0)^{\frac{1}{\sin^2 0}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1) = 0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۲. حاصل حد $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)=0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan^2 x)-1}{3x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

حالت دوم:

فرض کنید برای محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ به حالت ابهام‌آمیز 1^∞ یا ∞^0 یا 0^0 برمی‌خوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{cases} \text{یا} \begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases} \text{یا} \begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=0^+\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases}$$

پس هر یک از موارد بالا را می‌توانیم با کمک ویژگی‌های لگاریتم به حالت ابهام‌آمیز $0\times\infty$ تبدیل کنیم و سپس این حالت مبهم را به حالت‌های ابهام‌آمیز $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تغییر دهیم.

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ بنابراین:

$$\ln P=\ln f(x)^{g(x)}\Rightarrow \ln P=g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow \ln P=\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}=\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

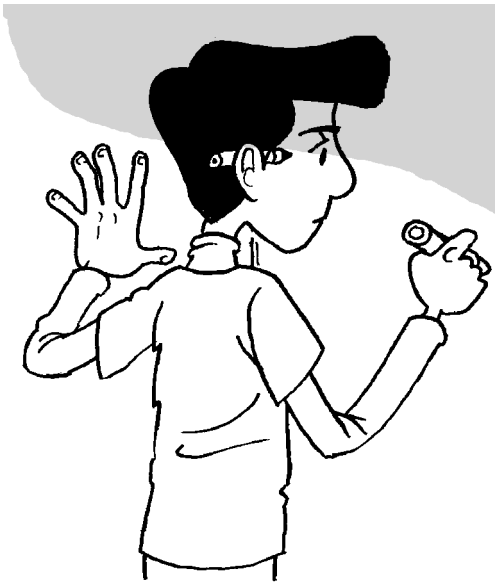
یا

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ داریم:

$$P=f(x)^{g(x)}\Rightarrow P=e^{\ln f(x)^{g(x)}}\Rightarrow P=e^{g(x)\ln f(x)}$$

بنابراین، بنا بر پیوستگی تابع نمایی خواهیم داشت:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}}$$



مثال ۳. حاصل حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=\infty^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}{-\sin x\tan x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^0=1$$

مثال ۴. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=\infty^0\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\frac{1}{x^3}) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\frac{1}{x^3}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\frac{3x^2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2\sin^2 x}{\cos x} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^3})^{\sin x} = e^0 = 1$$

مثال ۵. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}}{-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\cot^2 x)\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}\times\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}\times\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

مثال ۶. حاصل حد $\lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x}) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}}{1}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۷. حاصل حد $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x+1})^{\csc x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x+1})^{\csc x} = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (\frac{1}{x+1})^{\csc x} = \lim_{x\to 0} e^{\csc x \ln(\frac{1}{x+1})} = e^{\lim_{x\to 0} \csc x \ln(\frac{1}{x+1})}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0} \csc x \ln(\frac{1}{x+1})$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0} \csc x \ln(\frac{1}{x+1}) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \csc x \ln(\frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\frac{1}{\csc x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}}}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{\cos x}{x+1}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)\cos x} = -1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

● **تمرین:** حاصل هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

۲) $\lim_{x\to 0^+} (x^2 \tan x)^{x \sin^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^x$

۴) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

۵) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

۶) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

۷) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

۸) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x \sin x}\right)^{\sqrt{x}}$

پی‌نوشت

1. Sequences
2. Series
3. Limit
4. Continuity
5. Calculus

۶. شما مخاطبان گرامی نیز می‌توانید تمرین بالا را انجام دهید.

7. Trigonometric Identities
8. Proof
9. Exponential Function

منابع

۱. حسابان (رشته ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. ریاضیات ۲ (رشته علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

ادامهٔ مطلب صفحهٔ ۴۷

- روش‌های انتگرال‌گیری (Integration Techniques)
- جانشینی (Substitution)
- نقطهٔ میانی و مجموع ریمان ذوزنقه‌ای (Midpoint and Trapezoid Riemann Sums)
- انتگرال‌های ناسره (Improper Integrals)
- کاربردهای انتگرال (Applications of Integration)
- مساحت به وسیلهٔ افراز کردن (Areas by Slicing)
- حجم‌های دورانی (Volumes of Revolution)
- حجم سطوح متقاطع مشهور (Volumes of Known Cross Section)
- طول قوس (Arc Lenght)
- مساحت منحنی قطبی (Area of Polar Curve)
- معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
- دنباله‌ها و سری‌ها (Sequences and Series)
- دنباله‌ها (Sequences)
- سری‌ها (Series)
- آزمون انتگرال (Integral Test)
- آزمون مقایسه (Comparison Test)
- آزمون مقایسهٔ حدی (Limit Comparison Test)
- آزمون نسبت (Ratio Test)
- سری‌های متناوب و همگرایی مطلق (Alternating Series and Absolute Convergence)
- سری‌های توانی و فاصلهٔ همگرایی (Power Series & Interval of Convergence)
- سری تیلور و چندجمله‌ای‌ها (Taylor Series & Polynomials)
- باقی‌ماندهٔ لاگرانژ (Lagrange Remainder)
- مقدمه‌ای بر انتگرال معین (Introduction to the Definite Integral)

نکاتی دربارهٔ محاسبهٔ حدود توابع جزء صحیح

سعید چترآبنوس

اشاره

یک نمونه از توابعی که در محاسبهٔ حد آن‌ها باید دقت و توجه لازم را داشته باشیم، توابع جزء صحیح هستند که از اهمیت قابل‌توجهی برخوردارند. در این مقاله به بیان نکاتی دربارهٔ محاسبهٔ حدود این توابع همراه با حل مسائلی در این زمینه می‌پردازیم.

تعریف حد

اگر تابع $y=f(x)$ در یک بازهٔ باز شامل نقطهٔ $x=a$ تعریف شده باشد (در یک همسایگی محذوف از نقطهٔ a تعریف شده باشد) و با نزدیک شدن مقدار x به عدد a، مقدار y هم به عدد L نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر با L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، برای این‌که بتوانیم حد یک تابع را در نقطه‌ای مثل $x=a$ حساب کنیم اولین شرط این است که تابع در اطراف آن نقطه تعریف شده باشد و لزومی ندارد که تابع در خود نقطهٔ $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی کافی است که تابع در یک همسایگی محذوف از عدد a تعریف شده باشد. پس در محاسبهٔ حد یک تابع در یک نقطه، ابتدا باید به دامنهٔ تابع توجه داشته باشیم.

هم‌چنین اگر در یک تابع مثل f مقدار x از عدد a بیش‌تر باشد و با مقادیر بیش‌تر از a به عدد a نزدیک شود و مقدار y به عددی مثل L_1 نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع f در نقطهٔ a برابر با L_1 است و اگر مقدار x از a کم‌تر باشد و به a نزدیک شود و مقدار y هم به عدد L_2 نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ a برابر با L_2 است و شرط وجود حد تابع در نقطهٔ a این است که حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ a با هم برابر باشند.

وجود صفر در مخرج کسر

در محاسبهٔ حد یک تابع کسری اگر با نزدیک شدن مقدار x به عدد a مخرج کسر کاملاً صفر شود، یعنی صفر مطلق شود، حد تابع در نقطهٔ $x=a$ تعریف نمی‌شود و می‌گوییم حد تابع در نقطهٔ a وجود ندارد، زیرا به عبارت «$\frac{0}{0}$» می‌رسیم که تعریف نشده است، ولی اگر مخرج کسر کاملاً صفر نشود ولی به صفر نزدیک شود، یعنی مخرج کسر صفر حدی باشد و صورت کسر به عدد غیر صفر نزدیک شود، جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ است.

مثال ۱: حد داشتن تابع $f(x)=\frac{x-2}{[x]-2}$ را در نقطهٔ $x=2$ بررسی کنید.

حل: اگر $x\to 2^+$ آن‌گاه $x>2$ پس $[x]=2$ و $[x]-2=0$، یعنی مخرج کسر کاملاً صفر می‌شود (مخرج کسر صفر مطلق می‌شود). پس حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ وجود ندارد، یعنی:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{[x]-2}=\frac{0^+}{0_{\text{مطلق}}}\Rightarrow \quad \text{حد وجود ندارد}$$

اگر $x\to 2^-$ آن‌گاه:

$$1<x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{[x]-2}=\frac{0}{1-2}=\frac{0}{-1}=0$$

یعنی حد چپ تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر با صفر است.

مثال ۲: مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 3^+}\frac{[x^2]-9}{x^2-9}$.

حل: با توجه به این‌که $x\to 3^+$، داریم:

$$3<x\Rightarrow 9<x^2\Rightarrow [x^2]=9\Rightarrow [x^2]-9=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{[x^2]-9}{x^2-9}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0^+}=0$$

محاسبهٔ حدود توابع جزء صحیح

در محاسبهٔ حد توابع جزء صحیح، وقتی که $x \to a$ اگر عبارت داخل جزء صحیح به عدد غیر صحیح نزدیک شود، حاصل حد تابع برابر با جزء صحیح آن عدد غیر صحیح است. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم عدد a را در تابع جای‌گذاری کنیم و حاصل را به‌دست آوریم، ولی اگر عبارت داخل جزء صحیح به عددی صحیح نزدیک شود، دیگر نمی‌توانیم این‌کار را انجام دهیم و باید مشخص کنیم که عبارت داخل جزء صحیح از طرف راست یا از طرف چپ به عدد صحیح نزدیک می‌شود. برای این‌کار می‌توانیم با توجه به حدود x، عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم یا از صعودی یا نزولی‌بودن تابع داخل جزء صحیح در اطراف نقطهٔ a استفاده کنیم.

مثال ۱: مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to -2^+}([-3x]+[2x^2])$.

حل: (روش اول) با توجه به این‌که $x \to -2^+$، عبارات $-3x$ و

$2x^2$ را به‌وجود می‌آوریم:

$$x \to -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow 2x^2 < 8 \Rightarrow [2x^2] = 7$$

$$x \to -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow -3x < 6 \Rightarrow 5 < -3x < 6 \Rightarrow [-3x] = 5$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to -2^+}([-3x]+[2x^2]) = 5+7 = 12$$

(روش دوم) تابع $y=-3x$، یک تابع اکیداً نزولی است که وقتی $x \to -2^+$، داریم:

$$x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow -3x < 6 \Rightarrow [-3x] = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^+}[-3x] = 5$$

و تابع $f(x)=2x^2$ در همسایگی نقطهٔ $x=-2$ اکیداً نزولی است، پس داریم:

$$-2 < x \Rightarrow f(-2) > f(x) \Rightarrow 8 > 2x^2 \Rightarrow [2x^2] = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^+}([-3x]+[2x^2]) = 12$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(5x^2-3x+2)[x]}{x-1}$.

حل: چون $x \to 1^-$ پس $0<x<1$. بنابراین $[x]=0$ و داریم:

$$\lim \frac{(5x^2-3x+2)[x]}{x-1} = \frac{4\times(\text{مطلق } 0)}{0^-} = \frac{\text{مطلق } 0}{0^-} = 0$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبهٔ حدهای زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to -1^-}[x^3-3x]$ ب) $\lim\limits_{x\to 3^+}[x^3-3x]$

حل: وقتی که $x \to -1^-$ عبارت $f(x)=x^3-3x$ به عدد $f(-1)=2$ نزدیک می‌شود. حال باید مشخص کنیم که عبارت $f(x)$ از طرف راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این‌کار صعودی یا نزولی بودن تابع f را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$

x		-۱		۱	
f′(x)	+	۰	−	۰	+
f(x)	↗	۲	↘	-۲	↗

حال با توجه به جدول داریم:

$$x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 2$$

$$\Rightarrow [f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \to -1^-} \left[x^3 - 3x\right] = 1$$

و برای جواب قسمت «ب» داریم:

$$x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(3) \Rightarrow x^3 - 3x > 18$$

$$\Rightarrow \left[x^3 - 3x\right] = 18 \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \left[x^3 - 3x\right] = 18$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x \to 3} \left[\frac{2x+1}{x-2}\right]$.

حل: داریم: $\lim_{x \to 3} \frac{2x+1}{x-2} = 7$. حال باید بررسی کنیم که عبارت $\frac{2x+1}{x-2}$ از طرف راست به ۷ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این‌کار صعودی یا نزولی‌بودن تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم:

تابع در بازه‌های $(2,+\infty)$ و $(-\infty,2)$ اکیداً نزولی است $\Rightarrow f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0$.

حال اگر $x \to 3^+$، داریم:

$$x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} < 7 \Rightarrow \left[\frac{2x+1}{x-2}\right] = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \left[\frac{2x+1}{x-2}\right] = 6$$

و اگر $x \to 3^-$، داریم:

$$x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} > 7 \Rightarrow \left[\frac{2x+1}{x-2}\right] = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} \left[\frac{2x+1}{x-2}\right] = 7$$

پس حد وجود ندارد.

مثال ۵: حاصل $\lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: با نزدیک شدن x به عدد صفر، عبارت $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ به عدد ۱- نزدیک می‌شود. اکنون با مشتق‌گیری از تابع و تعیین علامت مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0	
y′	−	0	+
y	↘	−1	↗

بنابراین با توجه به جدول معلوم می‌شود که:

اگر $x \to 0^+$، داریم:

$$x > 0 \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} > -1 \Rightarrow \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right] = -1$$

و اگر $x \to 0^-$، داریم:

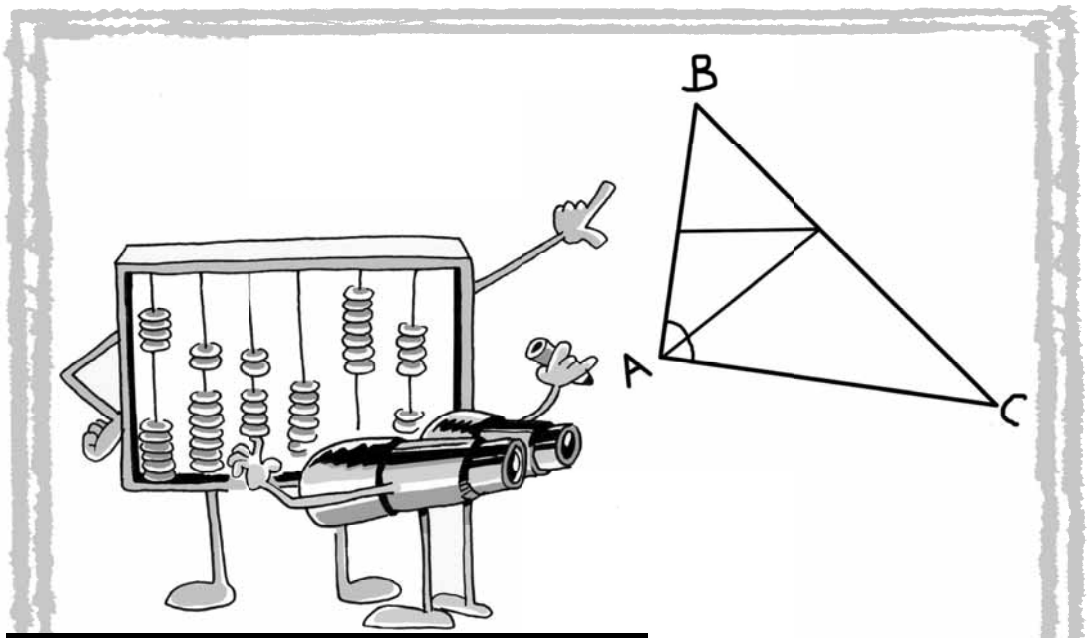
$$x < 0 \underset{\text{نزولی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} > -1 \Rightarrow \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right] = -1$$

تفریح اندیشه

پاسخ سه چهرهٔ دودآلود

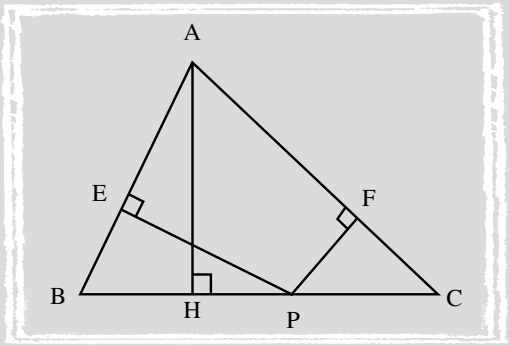
هر یک از سه همسفر با خود چنین استدلال می‌کند: «اگر چهرهٔ من پاک بود، هر یک از دو نفر دیگر ــ که هر یک از آن‌ها نیز چهرهٔ خود را پاک تصور می‌نمود ــ، از خندهٔ دیگری دچار تعجب می‌شد؛ زیرا برای این شخص که دو چهرهٔ پاک را می‌دید، دلیلی برای خنده وجود نداشت؛ اما هیچ‌کدام از آن دو نفر از خندهٔ دیگری اظهار تعجب نکرد؛ پس چهرهٔ من نیز دوده‌آلود است.»



رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

محمد هاشم رستمی

مسئله: مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از آن در نظر می‌گیریم، تصویر نقطهٔ P روی ضلع‌های AB و AC را به‌ترتیب E و F، و پای ارتفاع نظیر رأس A را H می‌نامیم. ثابت کنید که پنج نقطهٔ A، E، H، P و F روی یک دایره قرار دارند.



بـه بیان دیگر، نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC وجود دارد که از پنج نقطهٔ A، E، H، P و F به یک فاصله است.

بـه بیان دیگر، ثابت کنیـد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند.

الف) حل به روش هندسی

روش اول: پاره‌خط EH را وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که پنج‌ضلعی AEHPF محاطی اسـت، یعنی رأس‌های آن روی یک دایـره قرار دارند. از A به P نیز وصـل می‌کنیم. چهارضلعی AEPF محاطی است، زیرا مجموع دو زاویهٔ روبه‌روی آن ۱۸۰° است و داریم:

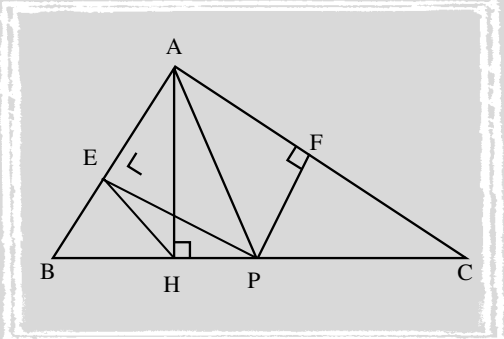
$$\hat{E}=۹۰^\circ, \hat{F}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ$$

بنابرایـن، چهار نقطـهٔ A، E، P و F روی یک دایره قرار دارند که آن را دایرهٔ (C) می‌نامیم. هم‌چنین چهارضلعی AEHP محاطی است، زیرا $A\hat{E}P = A\hat{H}P = ۹۰^\circ$ است، یعنی دایرهٔ به‌قطر AP از دو نقطهٔ E و H می‌گذرد. بنابراین، چهار نقطهٔ A، E، H و P نیز روی یک دایره قرار دارند که آن را دایرهٔ (C′) می‌نامیم. دو دایرهٔ (C) و (G) برهم منطبق‌اند، زیرا هر دو دایره شامل سه نقطهٔ غیرهم‌خط A، E و P هستند و بر سه نقطهٔ غیر هم‌خط تنها یک دایره می‌گذرد. بنابراین دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A، E و P می‌گذرد یکتاست و این دایره از نقطه‌های F و H نیز می‌گذرد؛ پس پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است.

محاطـی بـودن پنج‌ضلعـی AEHPF به معنای آن اسـت که نقطـه‌ای مانند M در صفحهٔ این پنج‌ضلعـی وجود دارد که از پنج نقطـهٔ A، E، H، P و F بـه یک فاصله اسـت. اگر ایـن نقطه را M بنامیم، داریم:

MA=ME=MH=MP=MF

موجود بودن نقطهٔ M به قسمتی که MA=ME=MH=MP=MF باشد، بدان معناست که عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

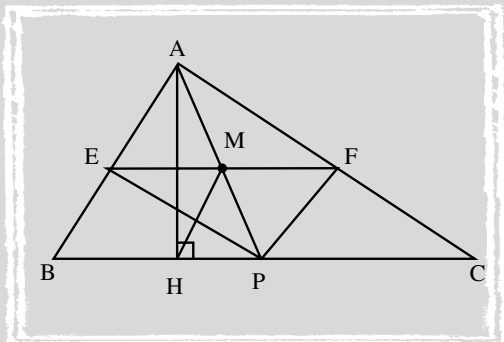


روش دوم- از A به P وصل می‌کنیم و وسط پاره‌خط AP را M می‌نامیم. از M به E، H و F نیز وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEP، EM میانهٔ وارد بر وتر است، پس مساوی نصف وتر این مثلث خواهد بود، یعنی (۱) $ME = \frac{AP}{۲} = AM = MP$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFP، FM میانهٔ نظیر وتر AP است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۲) $MF = \frac{AP}{۲} = MA = MB$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFP، FM میانهٔ نظیر وتر AP است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۲) $MH = \frac{AP}{۲} = MA = MB$.

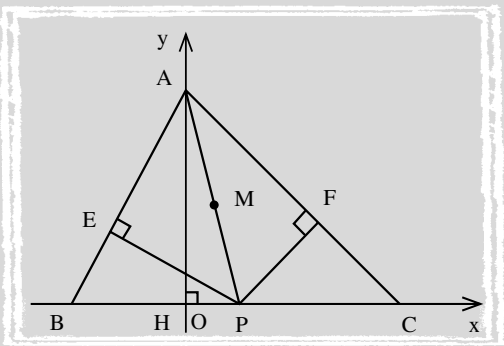
از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

ME=MF=MH=MA=MB



یعنی نقطهٔ M از پنج نقطهٔ A، E، H، P و F به یک فاصله است. پس پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است و این بدان معناست که عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

ب) حل به روش جبری- مختصاتی



دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محورxها روی BC و محور yها روی ارتفاع AH باشد. O مبدأ مختصات بر نقطهٔ H پای ارتفاع AH منطبق است. مختصات نقطه‌های A، B، C و P را به‌صورت $A = (۰, y_۱)$، $B = (x_۲, ۰)$، $C = (x_۳, ۰)$ و $P = (x_۴, ۰)$ اختیار می‌کنیم و مختصات نقطه‌های E و F را برحسب مختصات چهار نقطهٔ A، B، C و P به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه با استفاده از معادلهٔ دایره ثابت می‌کنیم که پنج نقطهٔ A، E، H، P و F روی یک دایره قرار دارند. برای این کار معادلهٔ گذرنده بر سه نقطه از این پنج نقطه را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که دو نقطهٔ دیگر نیز روی این دایره قرار دارند، یعنی مختصاتشان در معادلهٔ این دایره صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$A = (۰, y_۱), B = (x_۲, ۰), C = (x_۳, ۰), P = (x_۴, ۰)$$

$$AB: \frac{x}{x_۲} + \frac{y}{y_۱} = ۱, AC: \frac{x}{x_۳} + \frac{y}{y_۱} = ۱$$

$$m_{AB} = \frac{-\frac{۱}{x_۲}}{\frac{۱}{y_۱}} = -\frac{y_۱}{x_۲} \Rightarrow m_{PE} = \frac{x_۲}{y_۱}, P = (x_۴, ۰)$$

معادلهٔ PE $y - ۰ = \frac{x_۲}{y_۱}(x - x_۴) \Rightarrow PE: y = \frac{x_۲}{y_۱}x - \frac{x_۲x_۴}{y_۱}$

$$\begin{matrix} AB: \\ PE \end{matrix} \begin{cases} \frac{x}{x_۲} + \frac{y}{y_۱} = ۱ \\ y = \frac{x_۲}{y_۱}x - \frac{x_۲x_۴}{y_۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x_۲} + \frac{۱}{y_۱}(\frac{x_۲}{y_۱}x - \frac{x_۲x_۴}{y_۱}) = ۱$$

$$x(\frac{۱}{x_۲} + \frac{x_۲}{y_۱^۲}) = \frac{x_۲x_۴}{y_۱} + ۱ \Rightarrow x = \frac{\frac{x_۲x_۴ + y_۱^۲}{y_۱^۲}}{\frac{y_۱^۲ + x_۲^۲}{x_۲y_۱^۲}}$$

$$\Rightarrow x_E = \frac{x_۲^۲x_۴ + x_۲y_۱^۲}{y_۱^۲ + x_۲^۲} \Rightarrow y_E = \frac{x_۲}{y_۱}(\frac{x_۲^۲x_۴ + x_۲y_۱^۲}{y_۱^۲ + x_۲^۲}) - \frac{x_۲x_۴}{y_۱}$$

$$\Rightarrow y_E = \frac{x_۲^۳x_۴ + x_۲^۲y_۱^۲}{y_۱(y_۱^۲ + x_۲^۲)}) - \frac{x_۲x_۴}{y_۱}$$

$$= \frac{x_۲^۳x_۴ + x_۲^۲y_۱^۲ - y_۱^۲x_۲x_۴ - x_۲^۳x_۴}{y_۱(y_۱^۲ + x_۲^۲)}$$

$$\Rightarrow y_E = \frac{y_۱^۲(x_۲^۲ - x_۲x_۴)}{y_۱(y_۱^۲ + x_۲^۲)} = \frac{y_۱x_۲(x_۲ - x_۴)}{y_۱^۲ + x_۲^۲}$$

$$\Rightarrow E = (\frac{x_۲^۲x_۴ + x_۲y_۱^۲}{y_۱^۲ + x_۲^۲}, \frac{x_۱x_۲(x_۲ - x_۴)}{y_۱^۲ + x_۲^۲})$$

$$m_{AC} = \frac{-\frac{۱}{x_۳}}{\frac{۱}{y_۱}} = -\frac{y_۱}{x_۳}, PF \perp AC \Rightarrow m_{PF} = \frac{x_۳}{y_۱}, P = (x_۴, ۰)$$

$$\Rightarrow PF: y-0=\frac{x_3}{y_1}(x-x_4) \Rightarrow PF: y=\frac{x_3}{y_1}x-\frac{x_3x_4}{y_1}$$

$$\begin{matrix} AC: \\ PF \end{matrix}\begin{cases} \frac{x}{x_3}+\frac{y}{y_1}=1 \\ y=\frac{x_3}{y_1}x-\frac{x_3x_4}{y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x_3}+\frac{1}{y_1}(\frac{x_3}{y_1}x-\frac{x_3x_4}{y_1})=1$$

$$\Rightarrow x(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3}{y_1^2})=\frac{x_3x_4}{y_1}+1 \Rightarrow x=\frac{\frac{x_3x_4+y_1^2}{y_1^2}}{\frac{y_1^2+x_3^2}{x_3y_1^2}}$$

$$\Rightarrow x_F=\frac{x_3^2x_4+x_3y_1^2}{y_1^2+x_3^2} \Rightarrow y_F=\frac{x_3}{y_1}\times\frac{x_3(x_3x_4+y_1^2)}{y_1^2+x_3^2}-\frac{x_3x_4}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_F=\frac{x_3^3x_4+x_3^2y_1^2-x_3x_4y_1^2-x_3^3x_4}{y_1(y_1^2+x_3^2)}=\frac{x_3y_1(x_3-x_4)}{y_1^2+x_3^2}$$

$$\Rightarrow F=(\frac{x_3^2x_4+x_3y_1^2}{y_1^2+x_3^2},\frac{x_3y_1(x_3-x_4)}{y_1^2+x_4^2})$$

دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A، E و P دایره‌ای به قطر پاره‌خط AP است، زیرا زاویهٔ $A\hat{E}P=90^\circ$ است. این دایره از نقطهٔ F نیز می‌گذرد. مرکز این دایره را M می‌نامیم. مختصات M و شعاع دایره را به دست می‌آوریم و معادلهٔ آن را می‌نویسیم. داریم:

$$\text{وسط پاره‌خط AP } M \left| \begin{array}{l} x_M=\frac{x_A+x_P}{2}=\frac{0+x_4}{2}=\frac{x_4}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_P}{2}=\frac{y_1+0}{2}=\frac{y_1}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{شعاع دایره } R=AM=\sqrt{(\frac{x_4}{2}-0)^2+(\frac{y_1}{2}-y_1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_1^2}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}: (x-\frac{x_4}{2})^2+(y-\frac{y_1}{2})^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

مختصات نقطهٔ H را در این معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$H=O=(0,0)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(0-\frac{x_4}{2})^2+(0-\frac{y_1}{2})^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4} \Rightarrow \text{نقطهٔ H روی این دایره است}$$

بنابراین دایرهٔ به‌دست آمده بر پنج نقطهٔ A، E، H، P و F می‌گذرد، یعنی پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است. پس حکم مسئله درست است.

نکتهٔ ۱: اگر مختصات نقطه‌های P، E و F را نیز در معادلهٔ دایرهٔ به‌دست آمده قرار دهیم، در این معادله صدق می‌کنند، یعنی بدون استفاده از ویژگی هندسی آن می‌توان ثابت کرد که این نقطه‌ها نیز روی این دایره‌اند. توجه کنید:

$$P=(x_4,0)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(x_4-\frac{x_4}{2})^2+(0-\frac{y_1}{2})^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4} \Rightarrow \text{نقطهٔ P روی دایره است}$$

$$E=(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2},\frac{y_1x_2(x_2-x_4)}{y_1^2+x_2^2})\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}$$

$$(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2}-\frac{x_4}{2})^2+(\frac{y_1x_2^2-y_1x_2x_4}{y_1^2+x_2^2}-\frac{y_1}{2})^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

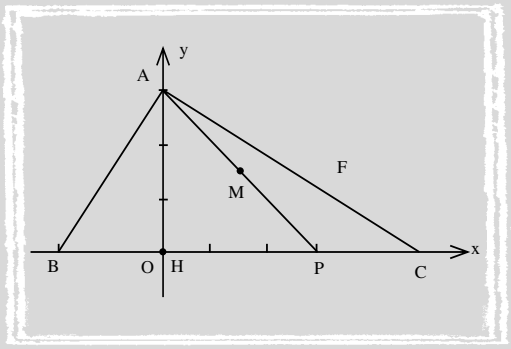
$$(\frac{2x_2^2x_4+2x_2y_1^2-x_4y_1^2-x_4x_2^2}{2(y_1^2+x_2^2)})^2$$

$$+(\frac{2y_1x_2^2-2y_1x_2x_4-y_1^3-y_1x_2^2}{2})^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x_2^2x_4+2x_2y_1^2-x_4y_1^2)^2+(y_1x_2^2-2y_1x_2x_4-y_1^3)^2}{4(y_1^2+x_2^2)^2}$$

$$=\frac{x_4^2+y_1^2}{4} \Rightarrow \cdots+\cdots \Rightarrow \frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

نکتهٔ ۲: در مثال عددی، محاسبه‌ها بسیار ساده‌تر خواهد بود. فرض کنید $A=(0,4)$، $B=(-2,0)$، $C=(5,0)$ و $P=(3,0)$ باشد. تصاویر نقطهٔ P روی AB و AC را به‌ترتیب E و F می‌نامیم و مختصات این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم.



داریم:

$$AB: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow y-2x=4$$

$$m_{AB}=2 \Rightarrow m_{PE}=-\frac{1}{2}, P=(3,0)$$

$$\Rightarrow PE: y-0=-\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\begin{matrix} AB: \\ PE: \end{matrix}\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x+4=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow E=(-1,2)$$

$$AC: \frac{x}{y}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 4x+5y=20,\ m_{AB}=-\frac{4}{5} \Rightarrow m_{PF}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow PF: y-0=\frac{5}{4}(x-3) \Rightarrow PF: y=\frac{5}{4}x-\frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} 4x+5y=20 \\ y=\frac{5}{4}x-\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow F=C$$

M وسط پاره‌خط AP

معادلهٔ دایره

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$$

$$H=(0,0) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} (0-\frac{3}{2})^2+(0-2)^2=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}+4=\frac{25}{4} \Rightarrow \frac{25}{4}=\frac{25}{4} \Rightarrow$$ H روی دایره است

$$E=(-1,2) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} (-1-\frac{2}{2})^2+(2-2)^2=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}=\frac{25}{4} \Rightarrow$$ E روی دایره است

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که F نیز روی این دایره است و درنتیجه پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است.

یک سؤال و بحث دربارهٔ آن

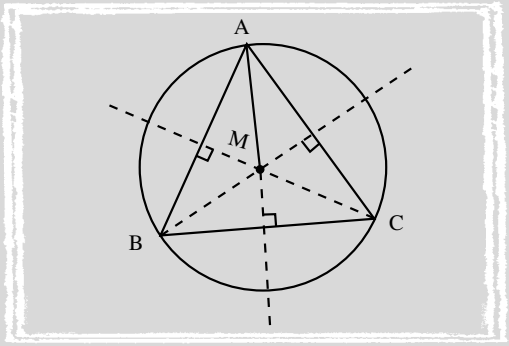
کدام چندضلعی محاطی است؟

به بیان دیگر:

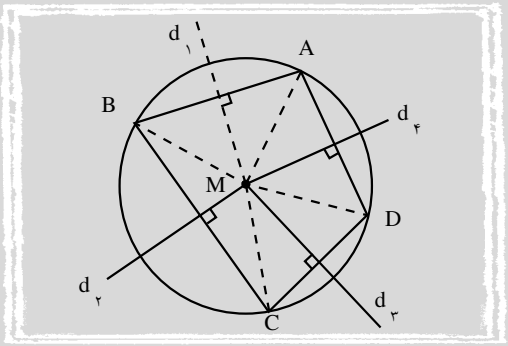
در صفحهٔ کدام چندضلعی نقطه‌ای یافت می‌شود که از رأس‌های آن به یک فاصله باشد؟

و به بیانی دیگر:

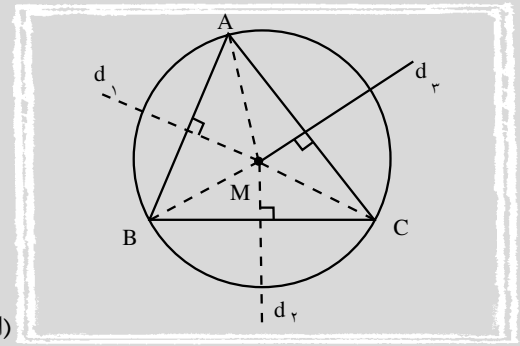
کدام چندضلعی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک نقطه می‌گذرند؟



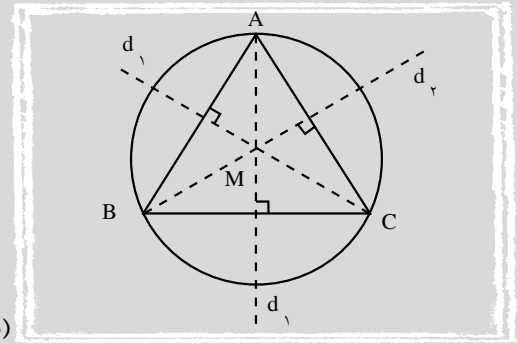
همان‌طور که قبلاً دیدیم سه سؤال بالا هم‌ارز هستند، یعنی موجود بودن هرکدام از آن‌ها موجب موجود بودن دو تای دیگر است؛ یعنی اگر یک چندضلعی محاطی باشد، در صفحهٔ آن نقطه‌ای وجود دارد که از رأس‌های آن به یک فاصله است و این بدان معناست که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن همرس‌اند.



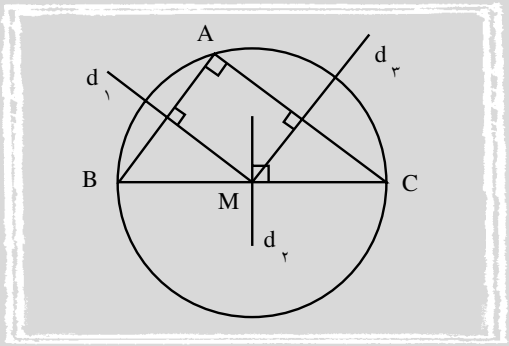
۱) از سه ضلعی یا مثلث شروع می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم هر مثلثی قابل محاط‌شدن در یک دایره است، زیرا به روش‌های هندسی و جبری- مختصاتی ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن همرس‌اند. با توجه به این نکته، عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث غیرمشخص، هر مثلث متساوی‌الاضلاع، هر مثلث متساوی‌الساقین، هر مثلث قائم‌الزاویه همرس خواهند بود. در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محاطی روی وتر مثلث است، در مثلث با زاویه‌های حاده این نقطه درون مثلث است و در مثلث با زاویهٔ منفرجه این نقطه بیرون مثلث قرار دارد. شکل‌ها را ببینید.



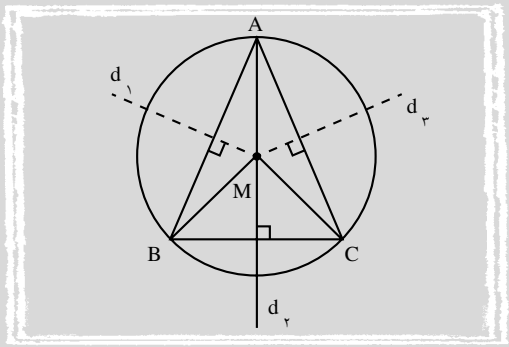
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

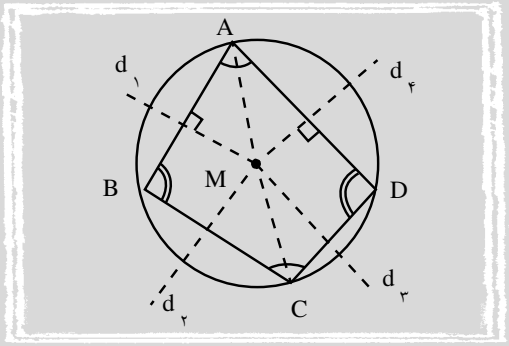
(الف) مثلث غیرمشخص

(ب) مثلث متساوی‌الاضلاع

(پ) مثلث قائم‌الزاویه

(ت) مثلث متساوی‌الساقین

و اینک چهارضلعی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



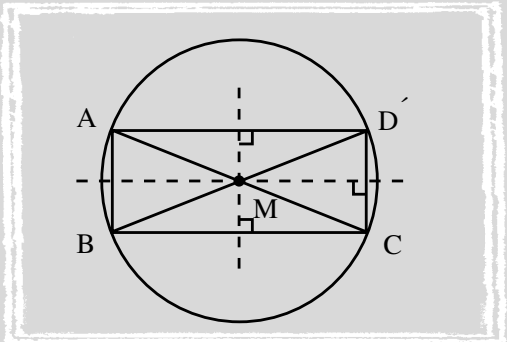
همان‌طور که دیدیم یک چهارضلعی در صورتی محاطی است که مجموع هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مساوی°۱۸۰ باشد. به بیان دیگر:

شـرط لازم و کافی برای محاطی‌بودن یک چهارضلعی آن است که هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

اثبـات ایـن مطلـب را به روش هندسـی و بـه روش جبری-مختصاتی مورد بررسـی قرار دادیم. با توجه به این مطلب می‌توان گفت که:

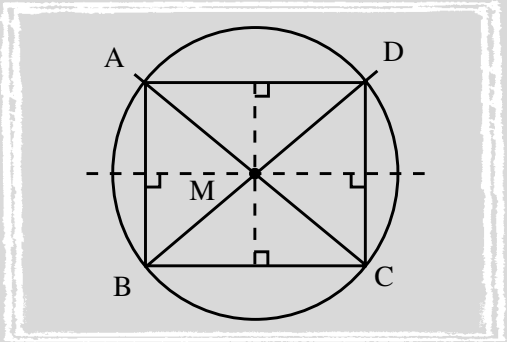
۱) هر مسـتطیل قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند.

$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ$



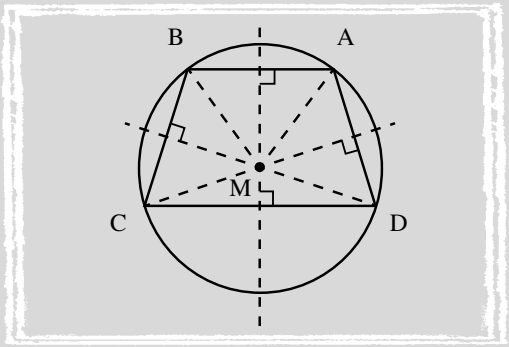
۲) هر مربع قابل محاط شـدن در یک دایره است، زیرا مجموع هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن°۱۸۰ است.

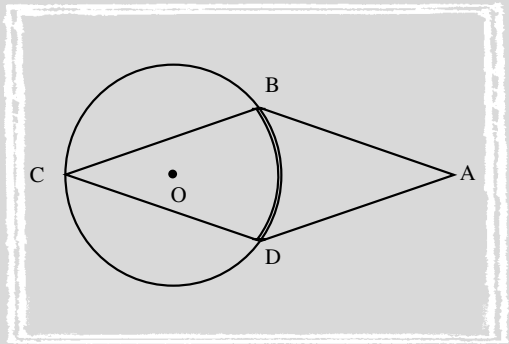
$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=۹۰^\circ$



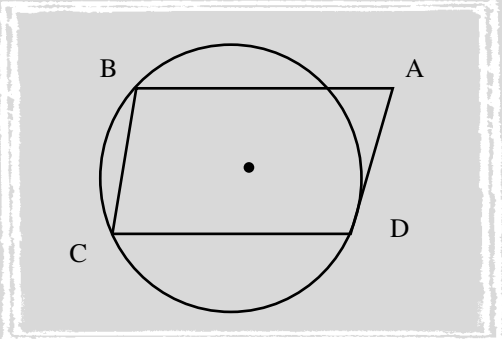
۳) هـر ذوزنقـهٔ متساوی‌السـاقین قابـل محاط‌شـدن در یک دایره اسـت، زیرا در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD(AB || CD و AD=BC) داریم:

$\widehat{A}=\widehat{B},\widehat{C}=\widehat{D},\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$





۴) متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهارضلعی‌های خاص هستند که قابل محاط‌شدن در یک دایره نیستند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد.

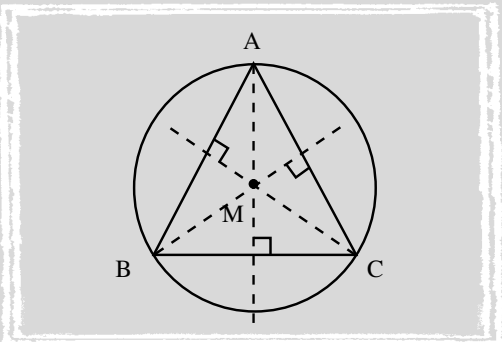


و اینک به پنج‌ضلعی‌ها می‌پردازیم: یک پنج‌ضلعی در صورتی محاطی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک نقطه بگذرند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که:

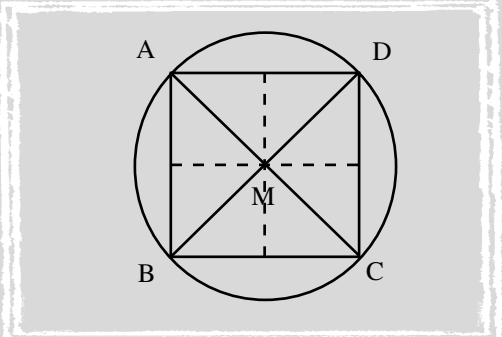
هر پنج‌ضلعی دلخواهی محاطی نیست، اما پنج‌ضلعی منتظم محاطی است. یعنی دایره‌ای وجود دارد که بر رأس‌های یک پنج‌ضلعی منتظم می‌گذرد.

به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد که هر n ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است.

اثبات کنید این مطلب دربارهٔ سه‌ضلعی منتظم یا مثلث متساوی‌الاضلاع را دیدیم (شکل).



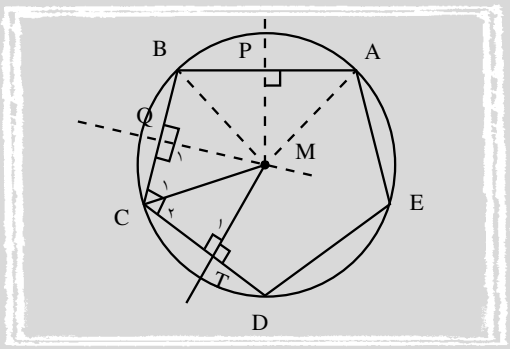
هر چهارضلعی منتظم یا مربع نیز قابل محاط‌شدن در یک دایره است (شکل).



بنابراین کافی است اثبات مطلب را برای پنج‌ضلعی منتظم ببینیم، یعنی قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

قضیه: هر پنج‌ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است؛ یعنی بر پنج رأس آن یک دایره می‌گذرد.

نکته: چندضلعی را منتظم گوییم که همهٔ ضلع‌های آن با هم مساوی و تمام زاویه‌های آن نیز با هم مساوی باشند. برای اثبات به روش هندسی، پنج‌ضلعی منتظم ABCDE را در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های ضلع‌های AB، BC، CD، DE و EA را رسم می‌کنیم و به‌ترتیب آن‌ها را d_1، d_2، d_3، d_4 و d_5 می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که این عمودمنصف‌ها از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC یعنی نقطهٔ تقاطع d_1 و d_2 را M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که عمودمنصف ضلع CD یعنی خط d_3 هم از همین نقطهٔ M می‌گذرد. برای اثبات از M عمود MT را بر CD رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که MT عمودمنصف CD است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MQC و MCT هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ, MC = MC$$

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{T}_1 = 90^\circ$$

درنتیجه: CT=CQ؛ اما $CQ = \frac{BC}{2}$ و BC=CD است، پس

$$CT = \frac{CD}{2}$$

یعنی نقطهٔ T وسط ضلع CD است. بنابراین MT عمودمنصف ضلع CD، یعنی همان خط d_3 است، پس عمودمنصف ضلع CD نیز از M می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های DE و EA نیز از نقطهٔ M می‌گذرند. پس نقطهٔ M نقطهٔ همرسی خط‌های d_1، d_2، d_3، d_4 و d_5 است. بنابراین از پنج نقطهٔ A، B، C، D و E به یک فاصله است، یعنی MA=MB=MC=MD=ME و درنتیجه پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاطی است.

سؤال ۱: چرا $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ است؟ از این‌که M محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC است چه استفاده‌ای می‌توان کرد؟

سؤال ۲: چگونه می‌توان ثابت کرد که هر n ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است؟

تمرین. قضیه را به روش جبری- مختصاتی ثابت کنید.

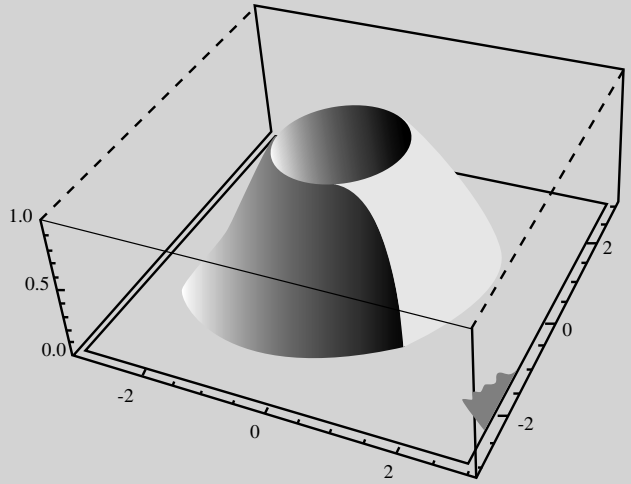
آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا (۴)

Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

اشاره

در کتاب ریاضیات ۲ دورهٔ دبیرستان، مباحثی دربارهٔ ماتریس‌ها و مثلثات مطرح شده است. در فصل ماتریس‌ها روی اعمال در ماتریس‌ها بحث می‌شود و در فصل مثلثات به معرفی نسبت‌های مثلثاتی و فرمول‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازند. با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا می‌توان اعمال ماتریسی و محاسبات مثلثاتی را به راحتی انجام داد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های مربوط به ماتریس‌ها و نسبت‌های مثلثاتی می‌پردازیم:



الف) ایجاد یک ماتریس در متمتیکا

برای معرفی یک ماتریس در صفحهٔ اصلی متمتیکا روی گزینهٔ Insert کلیک می‌کنیم و سپس در پنجرهٔ حاصل روی گزینهٔ Table/Matrix قرار می‌گیریم و با بازشدن پنجرهٔ بعدی گزینهٔ New را برمی‌گزینیم. با این کار پنجره‌ای برای ایجاد یک ماتریس باز می‌شود. در این پنجره گزینهٔ Matrix را انتخاب می‌کنیم و تعداد سطرها[1] و تعداد ستون‌ها[2] را پر می‌کنیم. برای مثال اگر بخواهیم یک ماتریس ۳×۳ ایجاد کنیم، جلوی هر دو آن‌ها عدد ۳ را تایپ می‌کنیم و اگر بخواهیم ماتریسی ۵×۳ بسازیم به ترتیب ۳ را در خانهٔ تعداد سطرها و ۵ را در خانهٔ تعداد ستون‌ها تایپ می‌کنیم. در نهایت، روی OK کلیک می‌کنیم تا ماتریس موردنظر روی صفحه نمایش داده شود. در حالتی که ماتریس ۳×۳ موردنظر باشد، جدول زیر در صفحهٔ نمایش نمایان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

حال باید درایه‌های ماتریس را در خانه‌های خالی تایپ کنیم. با کلیک کردن روی هر خانه، می‌توان عدد یا حرف موردنظر را در آن تایپ کرد. با استفاده از دکمهٔ Tab هم می‌توان به خانهٔ بعدی رفت و آن را پر کرد. در صورتی که خانه‌ای را به اشتباه پر کرده باشیم، می‌توانیم روی همان خانه قرار بگیریم و با دکمه روی ماوس، آن خانه را انتخاب کنیم و کلید Delete را فشار دهیم و دوباره در خانهٔ خالی مربوطه درایهٔ صحیح را تایپ کنیم. در متمتیکا از دو راه می‌توان یک ماتریس را نمایش داد: یکی به شکل جدول مرسوم با m سطر و n ستون؛ و دیگری به شکل مجموعه‌ای که درایه‌های هر سطر ماتریس در مجموعه‌هایی جدا از هم، اعضای این مجموعه را تشکیل می‌دهند.

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۱۰ \\ -۵ & ۶ & -۱ \end{bmatrix}$$

{{۱,۰,−۲},{٤,۸,۱۰},{−٥,٦,−۱}}

اگر بخواهیم دوباره ماتریسی با همان ابعاد ماتریس قبلی را در صفحه نمایش ایجاد کنیم می‌توانیم سلول موردنظر را که حاوی ماتریس قبلی است کپی کنیم و در صفحهٔ نمایش قرار دهیم. برای این کار با استفاده از ماوس روی کروشهٔ سلول موردنظر راست کلیک می‌کنیم و گزینهٔ Copy را برمی‌گزینیم و سپس در محل موردنظر در صفحهٔ نمایش، آن سلول را Paste می‌کنیم.

برای نمایش یک ماتریس یا یک جدول، دو دستور MatrixForm و TableForm نیز استفاده می‌شود. در حالت اول، ماتریس به صورت یک نمایش مستطیلی نمایان می‌شود که درایه‌ها داخل پرانتز قرار دارند و در حالت دوم نیز همان نمایش بدون پرانتزی که درایه‌ها را دربرگرفته باشد، نمایان می‌شود. برای استفاده از این دو دستور، ابتدا با استفاده از دستورالعمل List سطرهای ماتریس را به‌طور مجزا در مجموعه‌هایی جداگانه معرفی و پس از تایپ، در انتهای List از این دستورها استفاده می‌کنیم. دستور List//MatrixForm نیز همان عمل ایجاد ماتریس به شکل جدول مستطیلی را انجام می‌دهد.

مثال:

List = {{۱,۲,۳,٤},{٥,٦,۷,۸},{۹,۱۰,۱۱,۱۲}}

MatrixForm[List]

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

List//MatrixForm

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

TableForm[List]

۱	۲	۳	٤
٥	٦	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲

ب) دو ماتریس خاص

a) ماتریس واحد: برای نمایش یک ماتریس واحد n×n از دستور زیر استفاده می‌شود:

IdentityMatrix[n]

با به‌کارگیری این دستور، ماتریسی با درایه‌های قطری یک و درایه‌های غیرقطری صفر نمایان می‌شود.

IdentityMatrix[3]

{{۱,۰,۰},{۰,۱,۰},{۰,۰,۱}}

MatrixForm[IdentityMatrix[3]]

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

b) ماتریس قطری: برای نمایش یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری مفروض از دستور زیر استفاده می‌شود:

DiagonalMatrix[List]

که در آن List فهرست درایه‌های قطری ماتریس است.

مثال:

MatrixForm[DiagonalMatrix [{-۱, ٥, ۸, -۶}]]

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -٦ \end{bmatrix}$$

ج) اعمال روی ماتریس‌ها

اعمـــال جمع، تفریـــق و ضرب در ماتریس‌ها بـــه راحتی پس از معرفـــی آن‌ها و اختصاص نامی برای هر ماتریس انجام می‌شـــود. در مثال زیر دو ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & -۳ \\ -۴ & ۹ & ۰ \\ -۱ & ۷ & ۴ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۴ \\ -۶ & ۳ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

معرفـــی و اعمـــال ۳A، A+B، A−B و A.B روی آن‌هـــا اجـــرا و نتایج مشـــخص شـــده‌اند. توجه شـــود که بـــرای نام‌گذاری یـــک ماتریـــس، ابتدا نام موردنظـــر مثلاً A را تایـــپ و پس از تایپ علامت تســـاوی از طریق گزینـــهٔ Insert به همان صورتی که در بالا توضیح داده شـــد، ماتریـــس را ایجاد و درایه‌هـــا را داخل خانه‌های خالـــی وارد می‌کنیـــم. بـــرای عمل ضـــرب دو ماتریـــس از علامت . استفاده می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & -۳ \\ -۴ & ۹ & ۰ \\ -۱ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$\{\{۲,٦,-۳\},\{-٤,۹,۰\},\{-۱,۷,٤\}\}$

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۴ \\ -۶ & ۳ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$\{\{۱,۸,٤\},\{-٦,۳,-۲\},\{-۱,۰,۱۰\}\}$

MatrixForm[3A]

$$\begin{bmatrix} ٦ & ۱۸ & -۹ \\ -۱۲ & ۲۷ & ۰ \\ -۳ & ۲۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A+B]

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱٤ & ۱ \\ -۱۰ & ۱۲ & -۲ \\ -۲ & ۷ & ۱٤ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A-B]

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۷ \\ ۲ & ٦ & ۲ \\ ۰ & ۷ & -٦ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A.B]

$$\begin{bmatrix} -۳۱ & ۳٤ & -۳٤ \\ -٥۸ & -٥ & -۳٤ \\ -٤۷ & ۱۳ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

توجه شـــود اگر دو ماتریس قابل ضرب در یکدیگر نباشند، پس از اجرای دســـتور ضرب، پیغام خطا در صفحه نمایان می‌شـــود. در زیر حاصل‌ضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ مشـــخص شده است.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۹ \end{bmatrix}$$

$\{\{۳,-۴,۱\},\{۰,۲,-۹\}\}$

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ ۹ & ۱۱ \\ -۸ & ۳ \end{bmatrix}$$

$\{\{۰,-۴\},\{۹,۱۱\},\{-۸,۳\}\}$

MatrixForm[A.B]

$$\begin{bmatrix} -۴۴ & -٥۳ \\ ۹۰ & -٥ \end{bmatrix}$$

د) اعمال مثلثاتی

هریک از نســـبت‌های مثلثاتی ســـینوس، کســـینوس، تانژانت و کتانژانت در متمتیکا به‌راحتی قابل محاســـبه هستند. در مثال زیر، چند محاسبه با هریک از نسبت‌های مثلثاتی انجام شده است. توجه داشته باشید که اگر داخل کروشه فقط کمان مورد نظر تایپ شود، آن کمان با واحد رادیان در نظر گرفته می‌شـــود و اگر حالت درجه مورد نظر باشد واژهٔ Degree بعد از کمان باید تایپ شود.

مثال: ۱) در زیر حاصل $\text{Sin}\frac{\pi}{۳}$، $\text{Sin}۴٥^\circ$، $\text{Cos}\frac{۳\pi}{۴}$، $\tan ۲۴۰^\circ$ و $\text{Cos}\frac{\pi}{۱۲}$ به‌دســـت آمده‌اند. توجه داشته باشید که حرف اول هریک از نسبت‌های مثلثاتی باید بزرگ تایپ شود.

Sin[pi/۳]

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

Sin [۴٥ Degree]

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\mathbf{Cos}\left[\frac{۳\pi}{۴}\right]$$

$$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

Tan [۲۴۰ Degree]

$\sqrt{۳}$

Cot [pi/۱۲]

$۲+\sqrt{۳}$

۲) در زیر، حاصل $\frac{Sin۱۲۰^\circ Cos(-۳۰^\circ)-Cos۱۲۰^\circ}{Sin۱۳۵^\circ Cos(-۴۵^\circ)}$ مشخص شده است. یادآوری می‌شود که برای ورود این کسر می‌توان در پنجرهٔ Basic Math Input گزینهٔ $\frac{\blacksquare}{\square}$ را انتخاب و صورت و مخرج را در خانه‌های خالی تایپ و با فشار هم‌زمان Shift-Enter، سلول حاصل را اجرا کرد.

$$\frac{Sin[۱۲۰Degree]Cos[-۳۰Degree]-Cos[۱۲۰Degree]}{Sin[۱۳۵Degree]Cos[-۴۵Degree]}$$

$\frac{۵}{۲}$

۳) در زیر، حاصل $Sin(x-\frac{\pi}{۶})+Cos(x+\frac{\pi}{۳})$ به‌دست آمده است.

$$Sin\left[x-\frac{\pi}{۶}\right]+Cos\left[x+\frac{\pi}{۳}\right]$$

۰

با استفاده از دستور Simplify می‌توان یک عبارت مثلثاتی را تا حد امکان ساده کرد. در مثال‌های زیر، هریک از عبارت‌های مثلثاتی $\frac{۱+Cos۲a}{۱-Cos۲a}$، Cos(a-b)+Cos(a+b) و $tan(a-۵\pi)Cot(a+۷\pi)-Cos(۶\pi-a)Cos(a-۶\pi)$ ساده شده‌اند. نتایج به‌ترتیب عبارت‌اند از: $Cot^۲a$، ۲CosaCosb و $Sin^۲a$.

$$Simplify\left[\frac{۱+Cos[۲a]}{۱-Cos[۲a]}\right]$$

$Cot[a]^۲$

Simplify [Cos[a-b]+Cos[a+b]]

۲ Cos[a] Cos[b]

$$Simplify[Tan[a-۵Pi]Cot[a+۷\pi]-Cos[۶\pi-a]Cos[a-۶Pi]]$$

$Sin[a]^۲$

هـ) حل معادلات مثلثاتی

با استفاده از دستور Reduce می‌توان یک معادلهٔ مثلثاتی را حل و جواب‌های عمومی آن را مشخص کرد. صورت کلی این دستور عبارت است از:

Reduce [متغیر، معادله]

مثال: در این مثال، معادلهٔ مثلثاتی tanx=۱ حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله به‌صورت $x=K\pi+\frac{\pi}{۴}$ است که $K\in Z$. در متمتیکا این جواب به‌صورت $x=\frac{\pi}{۴}+\pi c(l)$ نمایان می‌شود که نماد c(l) به معنای یک مقدار صحیح است.

$$Reduce[Tan[x]=۱,x]$$

$$c[l]\in Integers\ \&\&\ x=\frac{\pi}{۴}+\pi c[l]$$

مثال: در این مثال، معادلهٔ مثلثاتی $۲Sin^۲x-۳Sinx+۱=۰$ حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله عبارت‌اند از: $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$، $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ که در آن‌ها k عددی صحیح است. در صفحهٔ نمایش متمتیکا به جای k نماد c(l) نمایان می‌شود.

$$Reduce[۲Sin[x]^۲-۳Sin[x]+۱=۰,x]$$

$$c[l]\in Integers\ \&\&\left(x=\frac{\pi}{۲}+۲\pi c[l]\|x=\frac{\pi}{۶}+۲\pi c[l]\|x=\frac{۵\pi}{۶}+۲\pi c[l]\right)$$

و) محاسبهٔ معکوس نسبت‌های مثلثاتی

در متمتیکا با به‌کارگیری دستورهای ArcSin، ArcCos، ArcTan و ArcCot می‌توان معکوس هریک از نسبت‌های مثلثاتی را محاسبه کرد.

مثال: در مثال‌های زیر، حاصل ArcTan1، $ArcSin\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $ArcCos(\frac{-۱}{۲})$ به‌دست آمده‌اند.

ArcTan[۱]

$\frac{\pi}{۴}$

$$ArcSin\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$$

$\frac{\pi}{۴}$

$$ArcCos\left[-\frac{۱}{۲}\right]$$

$\frac{۲\pi}{۳}$

مثال: در مثال زیر، حاصل عبارت $ArcTan(\sqrt{۳})+ArcCot(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ به‌دست آمده است.

$$ArcTan\left[\sqrt{۳}\right]+ArcCot\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right]$$

$\frac{۲\pi}{۳}$

پی‌نوشت

1. Number of rows
2. Number of columns

منابع

۱. کتاب درسی ریاضیات ۲، سال دوم آموزش متوسطه، ۱۳۸۹.

2. Mathematica, Second edition, Eugene Don, Schaums outlines series, Mc Graw Hill, 2009.

قضیهٔ گودل[1]

نویسنده: دکتر رابرت سالمون[3]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

قضیه‌ای در حساب موجود است که به کمک اصول موضوعهٔ حساب نمی‌توان آن را اثبات کرد.

حساب ناکامل است، یعنی هر چند اصولی داشته باشد، همواره قضیه‌ای در آن موجود است که از آن اصول موضوعه استنتاج نمی‌شود.

راسل و وایتهد بر آن بودند تا نشان دهند که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است، بدین معنا که هر قضیهٔ ریاضیات، نتیجهٔ صرفاً منطقی اصول موضوعهٔ دستگاه آن است. به سال ۱۹۳۱، گودل، با به دست دادن قضیه‌ای از حساب که اثبات آن با استفاده از اصول موضوعهٔ حساب ممکن نبود، به گونه‌ای شگفت‌انگیز به اثبات رساند که در اشتباه بوده‌اند و به این ترتیب نشان داد که حساب (و بخش‌های دیگر ریاضیات) چیزی بیش از شاخه‌ای از منطق‌اند.

گودل این کار را با تخصیص اعداد رمزی به جمیع نمادها و گزاره‌های حساب انجام داد و به این ترتیب، گزاره‌ای به دست آورد که بیان می‌کند:

گزارهٔ با عدد رمزی g نمی‌تواند اثبات شود.

عدد رمزی این گزاره، خود g است.

بنابراین، این گزاره ارجاع به خود دارد.

فرض می‌کنیم این گزاره دروغ باشد. در این صورت گزارهٔ با عدد رمزی g را می‌توان اثبات کرد و در نتیجه راست است. اما این گزاره، گزاره‌ای با عدد رمزی g است! یعنی، گزاره راست است، اما با وجود این، اثبات‌نشدنی است.

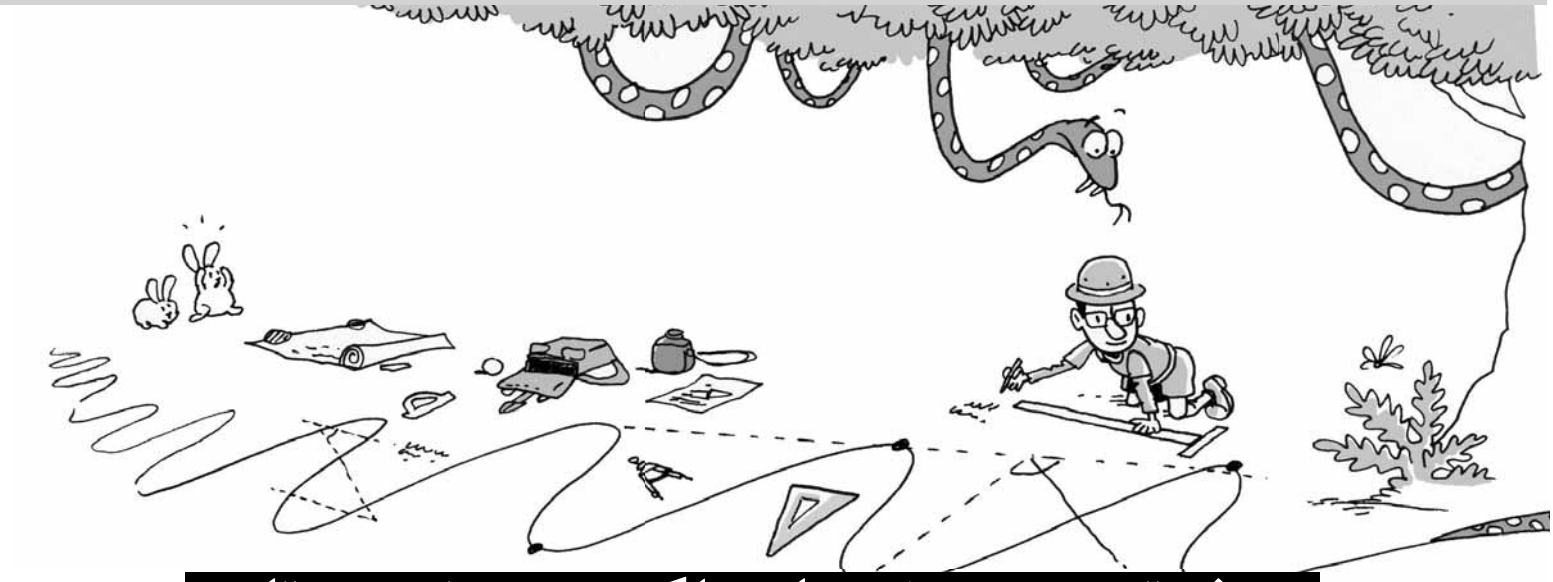
با این کار، گودل؛ نه تنها منطق‌گرایی راسل و وایتهد را نابود کرد، بلکه پیش‌بینی لایبنیتس را نیز، در مورد امکان انجام هر استدلال با استفاده از یک محاسبه مکانیکی، از بین برد.

چنین نیست که قضایای بسیاری در بهبود حیات اثر داشته باشند، اما این قضیه یکی از آن‌هاست. این قضیه نشان می‌دهد که شخص نمی‌تواند رایانه‌ای را چنان برنامه‌ریزی کند که جمیع گزاره‌های راست ممکن را بیرون دهد. یعنی در این مورد همواره به هوش بشری نیاز است.

کورت گودل[2] (۱۹۰۶-۱۹۷۸)
آلمان، ۱۹۳۱

پی‌نوشت

1. Gödel's Theorem
2. Kurt Gödel
3. Dr. Robert Solomon



روش تعیین عرض‌های اکسترمم نسبی تابع بدون استفاده از مشتق

احمد قندهاری

تابع با ضابطـهٔ $y=x^2-2x-3$ را در نظـر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض مینیمم نسـبی این تابـع را بیابیم. می‌دانیـم طول مینیمم نسبی هر تابع ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $y'_x=0$ است.

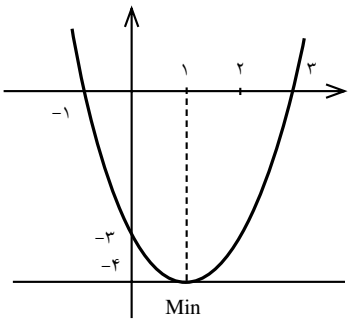
روش اول

عـرض مینیمم نسـبی این تابع را به کمک مشـتق محاسـبه می‌کنیم.

طول مینیمم نسبی $y'_x=2x-2=0\Rightarrow x=1$

عرض مینیمم نسبی تابع $x=1\Rightarrow y=1-2-3=-4$

نمودار تابع چنین است.



خط $y=-4$ بر نمودار تابع مماس است.

روش دوم

خط بـه معادلهٔ $y=k$ را با معادلهٔ منحنـی تقاطع می‌دهیم (yها حذف)؛ سپس شرط برقراری ریشهٔ مضاعف را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-3=k \Rightarrow x^2-2x-(k+3)=0$$

$\Delta'=b'^2-ac=0\Rightarrow 1+k+3=0\Rightarrow k=-4$ عرض مینیمم نسبی تابع

تذکـر: بـه جای خط به معادلـهٔ $y=k$، خط بـه معادلهٔ $y=y$ را بـا معادلهٔ منحنـی تقاطع می‌دهیم. درواقع همـان معادلهٔ منحنی را برحسـب x مرتب می‌کنیم و شـرط برقراری ریشـهٔ مضاعف را می‌نویسیم، یعنی:

$$y=x^2-2x-3\Rightarrow x^2-2x-(y+3)=0$$

$\Delta'=1+y+3=0\Rightarrow y=-4$ عرض اکسترمم نسبی تابع

مثال ۱: عرض‌های اکسـترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{4x}{x^2+1}$ را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$y=\frac{4x}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=4x$$

$$yx^2-4x+y=0\Rightarrow \Delta'=4-y^2=0\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm 2$$

چـون نمودار تابع فـوق مجانب قائم نـدارد، y بزرگ‌تر عرض ماکزیمم نسـبی و y کوچک‌تر عرض مینیمم نسـبی اسـت، پس داریم:

$y_{Min}=-2$ و $y_{Max}=2$

مثال ۲: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+5}{x}$ را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم

$$y=\frac{x^2+5}{x}\Rightarrow x^2+5=yx\Rightarrow x^2-yx+5=0$$

$$\Rightarrow \Delta=y^2-20\Rightarrow y^2=20\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{5}$$

چون نمودار این تابع مجانب قائم دارد، y بزرگ‌تر عرض مینیمم نسبی و y کوچک‌تر عرض ماکزیمم نسبی است، پس داریم:

$y_{Min}=2\sqrt{5}$ و $y_{Max}=-2\sqrt{5}$

مثال ۳: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{x^2-5x+4}$ را بدون استفاده از مشتق بیابید.

حل:

$$y=\frac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow yx^2-5yx+4y=x$$

$$\Rightarrow yx^2-(5y+1)x+4y=0,\Delta=(5y+1)^2-16y^2=0$$

$$\Rightarrow (5y+1)^2=16y$$

$$5y+1=\pm 4y\Rightarrow\begin{cases}5y+1=4y\Rightarrow y=-1\\ 5y+1=-4y\Rightarrow y=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

چون نمودار تابع مجانب قائم دارد، پس داریم: $y_{Min}=-\frac{1}{9}$ و $y_{Max}=-1$

توجه: تابع با ضابطهٔ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (حداقل a یا a′ مخالف صفر است) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض‌های اکسترمم تابع را بیابیم.

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\Rightarrow ax^2+bx+c=a'yx^2+b'yx+c'y$$

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+(c-c'y)=0$$

$$\Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)=0$$

$$\Rightarrow (b'^2-4a'c')y^2+2(2ac'+2a'c-bb')y+(b^2-4ac)=0$$

ریشه‌های این معادله، عرض‌های اکسترمم نسبی تابع فوق است.

$$y_1.y_2=\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}$$

$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$

مثال ۴: در تابع با ضابطهٔ زیر، مجموع عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر (۴-) است. m را بیابید.

$$y=\frac{x^2-4x+m}{x-\frac{m}{4}}$$

حل:

$$y_1+y_2=\frac{-2(2ac'-2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}\Rightarrow -4=\frac{-2(-\frac{m}{2}+0+4)}{1}$$

$$\Rightarrow 2=-\frac{m}{2}+4\Rightarrow\frac{m}{2}=2\Rightarrow m=4$$

مثال ۵: در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x-1}{x^2+mx}$، اگر حاصل‌ضرب عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر $\frac{1}{4}$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل:

$$y_1.y_2=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{m^2}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

مثال ۶: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است. ثابت کنید به‌ازای جمیع مقادیر a، یکی از مقادیر اکسترمم نسبی تابع مقدار ثابتی است. هم‌چنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکسترمم نسبی تابع برابر $(-\frac{1}{4})$ باشد.

حل:

$$y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}\Rightarrow yx^2-ayx-3y=x^2+4ax+12$$

$$(y-1)x^2-a(y+4)x-3(y+4)=0$$

$$\Delta=a^2(y+4)^2+12(y-1)(y+4)=0$$

$$(y+4)\left[a^2(y+4)+12(y-1)\right]=0,y+4=0\Rightarrow y=-4$$

y=-۴ یکی از مقادیر اکسترمم نسبی است که مقدارش به a بستگی ندارد.

$a^2(y+4)+12(y-1)=0$ و $y=-\frac{1}{4}$

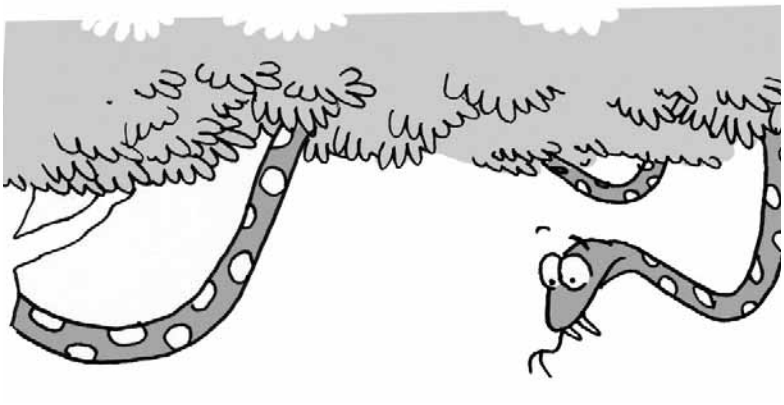
$$a^2(-\frac{1}{4}+4)+12(-\frac{1}{4}-1)=0\Rightarrow\frac{15a^2}{4}=12(\frac{5}{4})\Rightarrow 15a^2=12(5)$$

$$3a^2=12\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

مثال ۷: تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است. m را چنان بیابید تا عرض مینیمم نسبی تابع (۹) برابر عرض ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل:

$$y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}\Rightarrow yx^2-myx-2y=x+2m$$



$$yx^2-(my+1)x-(2y+2m)=0$$

$$\Delta=(my+1)^2+4y(2y+2m)=0$$

$$m^2y^2+2my+1+8y^2+8my=0\Rightarrow(m^2+8)y^2+10my+1=0$$

تذکر: اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ یک ریشه (k) برابر ریشهٔ دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

پس خواهیم داشت:

$$\underbrace{(m^2+8)}_{a}y^2+\underbrace{10m}_{b}y+\underbrace{1}_{c}=0$$

$$y_1=9y_2\Rightarrow\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}\Rightarrow\frac{100m^2}{m^2+8}=\frac{(9+1)^2}{9}$$

$$\frac{100m^2}{m^2+8}=\frac{100}{9}\Rightarrow 9m^2=m^2+8\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$$

مثال ۸: در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x-2a}{x^2-a}$ $(a\neq0)$، نشان دهید که حاصل جمع اکسترمم نسبی تابع برابر مقدار ثابت ۲ است.

حل:

$$y=\frac{x-2a}{x^2-a}$$

$$yx^2-ay=x-2a\Rightarrow yx^2-x+a(2-y)=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4ay(2-y)=0\Rightarrow1-8ay+4ay^2=0$$

$$4ay^2-8ay+1=0$$

$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-8a}{4a}=2\Rightarrow y_1+y_2=2$$

مثال ۹: مقادیر m را چنان بیابید که نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-1)(x^2+2x+m)$ بر محور xها مماس باشد.

حل: باید معادلهٔ $(x-1)(x^2+2x+m)=0$، دو ریشهٔ مساوی داشته باشد.

الف) $x^2+2x+m=0\Rightarrow\Delta'=b'^2-ac=0\Rightarrow1-m=0\Rightarrow m=1$

ب) $x-1=0\Rightarrow x=1,$

$$x=1\xrightarrow{\text{در پرانتز دوم}}1+2+m=0\Rightarrow m=-3$$

مقدمه

در ریاضیات، سری اغلب به‌عنوان مجموع یک دنباله از گزاره‌ها معرفی می شود. یک‌سری می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. سری‌های متناهی را می‌توان با جبر مقدماتی بررسی کرد. اما سری‌های نامتناهی ممکن است نیازمند استفاده از آنالیز ریاضی باشند. سری‌ها به دلیل اهمیت در ریاضیات انواع مختلفی دارند که عبارت‌اند از: سری‌های حسابی، هندسی، توانی و غیره. سری‌ها در پیشرفت علوم دیگر به‌ویژه علوم مهندسی تأثیرات ویژه‌ای داشته‌اند. برای نمونه، سری فوریه که برگرفته از نظریهٔ سری‌های مثلثاتی است و به نام فوریه نام‌گذاری شده، تأثیرات فراوانی در علوم دیگر داشته است. برای مثال، سری فوریه برای بررسی حرکات تناوبی در آکوستیک یا صوت‌شناسی، الکترودینامیک، اپتیک یا نورشناسی، ترمودینامیک و... به‌کار رفته است. در مهندسی برق و الکترونیک، مسائلی چون رفتار بسامدی و انتقال ضربه‌ها را می‌توان به کمک سری فوریه حل کرد. پس با توضیحات بالا در مورد سری‌ها ملاحظه می‌کنیم که سری‌ها کاربردهای فراوانی دارند. موضوع مقاله‌ای که در زیر به آن اشاره خواهم کرد نیز دربارهٔ سری خواهد بود.

سری ریاضی

$$\sum_{k=0}^{n}(a+k)^3=(a)^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots+(a+n)^3$$

$$=((a+n)(a+n+1)-\frac{(n+1)}{2}(2a+n))\frac{(n+1)}{2}(2a+n);(a\in\mathbb{N})$$

اثبات به روش استدلال استقرایی

توضیح ۱: ابتدا، برای جملهٔ اول با n=0 استقرا را به کار خواهیم برد، زیرا طبق رابطهٔ زیر:

«n=(جملهٔ اول- جملهٔ آخر)»

(که در توضیح ۳ به شرح این رابطه خواهیم پرداخت) خواهیم داشت:

$$n=a-a=0\rightarrow n=0$$

$$n=0\rightarrow p(n)=p(0)=((a)(a+1)-\frac{1}{2}(2a))\frac{1}{2}(2a)=(a^2+\cancel{a}-\cancel{a})(a)$$

$$=a^3=a^3$$

$$n=k\rightarrow p(n)=p(k)=(a)^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots+(a+k)^3$$

اثبات یک سری ریاضی

فرهاد جعفری یقین
دانش‌آموز دورهٔ پیش‌دانشگاهی شهرستان مهاباد

$$= ((a+k)(a+k+1) - \frac{(k+1)}{2}(2a+k))\frac{(k+1)}{2}(2a+k)$$

$$= (a^2 + ak + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2})(a + ak + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}) = a^3 + a^2k + \frac{ak}{2} + \frac{ak^2}{2}$$

$$+a^3k + a^2k^2 + \frac{ak^2}{2} + \frac{ak^3}{2} + \frac{a^2k}{2} + \frac{ak^2}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{4} + \frac{a^2k^2}{2}$$

$$+\frac{ak^3}{2} + \frac{k^3}{4} + \frac{k^4}{4} = a^3 + a^3k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^3$$

$$+\frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4}$$

$$n = k+1 \to p(n) = p(k+1) = (a)^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \cdots$$

$$+(a+k)^3 + (a+k+1)^3$$

$$= ((a+k+1)(a+k+2) - \frac{(k+2)}{2}(2a+k+1))\frac{(k+2)}{2}(2a+k+1)$$

۱. طرف چپ سری:

$$a^3 + a^3k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^3 + \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4}$$

$$+(a+k+1)^3 = a^3 + a^3k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^3$$

$$+\frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4} + a^3 + 3a^2k + 3a^2 + 3ak^2 + 6ak + 3a + k^3$$

$$+3k^2 + 3k + 1 = 2a^3 + a^3k + 3a^2 + \frac{9}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + 3a + \frac{13}{2}ak$$

$$+\frac{9}{2}ak^2 + ak^3 + 3k + \frac{13}{4}k^2 + \frac{3}{2}k^3 + \frac{k^4}{4} + 1$$

۲. طرف راست سری:

$$(a^2 + ak + 2a + ak + k^2 + 2k + a + k + 2 - ak - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - 2a - k - 1)$$

$$\times(ak + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 2a + k + 1)$$

$$= (a^2 + a + ak + \frac{3}{2}k + \frac{k^2}{2} + 1)(2a + ak + k + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2} + 1)$$

$$= 2a^3 + a^3k + 3a^2 + \frac{9}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + 3a + \frac{13}{2}ak + \frac{9}{2}ak^2$$

$$+ak^3 + 3k + \frac{13}{4}k^2 + \frac{3}{2}k^3 + \frac{k^4}{4} + 1$$

توضیح ۲: برای سهولت و تسریع در به‌دست آوردن جواب سری می‌توانیم به‌جای قرار دادن مقدار a و n در عبارت‌های $((a+n)(a+n+1))$، جملهٔ nاُم سری را بدون در نظر گرفتن توان ۳ (که در سری به‌صورت (a+n) مشخص شده است) در جملهٔ (n+۱)اُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳ ضرب کنیم، یعنی:

A = جملهٔ nاُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳

B = جملهٔ (n+۱)اُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳

$$(A)(B) - \frac{(n+1)}{2}(2a+n) \times \frac{(n+1)}{2}(2a+n)$$

توضیح ۳: با توجه به توضیح ۲، مشخص کردن n برای عبارت‌های $((a+n)$ و $(a+n+1))$ ضرورتی ندارد، ولی در عبارت $(\frac{(n+1)}{2}(2a+n))$ برای تعیین n از رابطهٔ زیر استفاده خواهیم کرد:

n=۳ جملهٔ اول بدون در نظر گرفتن توان ۳ - جملهٔ آخر بدون در نظر گرفتن توان

اثبات: خواهیم داشت (جملهٔ آخر =a+n) و (جملهٔ اول =a) پس طبق رابطهٔ بالا داریم:

$$\cancel{a} + n - \cancel{a} = n \to n = n$$

مثال‌ها

۱) $3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$; n = جملهٔ آخر - جملهٔ اول

$$= 6 - 3 = 3 \to n = 3$$

$$((6)(7) - \frac{4}{2}(9))\frac{4}{2}(9) = 432$$

۲) $17^3 + 18^3 + 19^3 + 20^3 + 21^3$;

n = جملهٔ آخر - جملهٔ اول $= 21 - 17 = 4 \to n = 4$

$$((21)(22) - \frac{5}{2}(34+4))\frac{5}{2}(34+4) = 34865$$

۳) $(44)^3 + (45)^3 + (46)^3 + (47)^3 + (48)^3 + (49)^3$;

n = جملهٔ آخر - جملهٔ اول $\to n = 49 - 44 = 5 \to n = 5$

$$((49)(50) - (\frac{6}{2})(88+5))(\frac{6}{2})(88+5) = 605709$$

۴) $(60)^3 + (61)^3$; n = جملهٔ آخر - جملهٔ اول

$$= 61 - 60 = 1 \to n = 1$$

$$((61)(62) - \frac{2}{2}(120+1))\frac{2}{2}(120+1) = 442981$$

۵) $(100)^3$; n = جملهٔ آخر - جملهٔ اول

$$= 100 - 100 = 0 \to n = 0$$

$$((100)(101) - \frac{1}{2}(200)\frac{1}{2}(200) = 1000000$$

حلّ تشریحی مسائل شمارهٔ قبل

پاسخ سؤالات ریاضی سال اول

فرخ فرشیان

۱. صورت کسر را مساوی A قرار می‌دهیم و دو طرف تساوی را در 3^2 ضرب می‌کنیم.

$$A = 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}$$

$$3^2 A = 3^2(3^5 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19})$$

$$9A = 3^7 + 3^9 + \dots + 3^{19} + 3^{21}$$

باید کاری کنیم که در طرف راست تساوی مقدار A به وجود آید. پس 3^5 را در طرف راست تساوی اضافه و کم می‌کنیم.

$$9A = \underbrace{3^5 + 3^7 + 3^9 + \dots + 3^{19}}_{A} + 3^{21} - 3^5$$

بنابراین $9A = A + 3^{21} - 3^5$ و از آن‌جا $9A - A = 3^{21} - 3^5$ و در نتیجه داریم:

$$8A = 3^{21} - 3^5 \Rightarrow A = \frac{3^{21} - 3^5}{8}$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$\frac{3^5 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}}{3^{21} - 3^5} = \frac{\frac{3^{21} - 3^5}{8}}{3^{21} - 3^5} = \frac{3^{21} - 3^5}{8} \div 3^{21} - 3^5$$

$$= \frac{3^{21} - 3^5}{8} \times \frac{1}{3^{21} - 3^5} = \frac{1}{8}$$

۲. از سمت چپ شروع می‌کنیم تا به سمت راست برسیم. در جملهٔ اول c و در جملهٔ دوم b و در جملهٔ سوم a را ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}} + \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{abc}{c^3}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{b^3}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{c^3}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{b^3}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{abc}}{c} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{b} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a}$$

$$= \sqrt[3]{abc}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \xRightarrow[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1]{\text{طبق فرض}}$$

$$\sqrt[3]{abc}(1) = \sqrt[3]{abc}$$

۳. ابتدا در هر پرانتز بزرگ‌ترین درجه را به همراه جمله‌اش می‌نویسیم و سپس در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(x)(x + x^2)(2x^2 + 2x^3)\cdots(100x^{100} + 100x^{101})$$

$$x \times x^2 \times x^3 \times \dots \times x^{101}$$

$$= x^{1+2+3+\dots+101}$$

می‌دانیم: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ است، بنابراین

$$1 + 2 + \dots + 101 = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$$

پس: $x^{1+2+\dots+101} = x^{5151}$

بنابراین، درجهٔ عبارت برابر با ۵۱۵۱ است.

۴.

الف)

$$(\sqrt{7} + \sqrt{2})(7 + 2 - \sqrt{14})(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$$

دو پرانتز اول را با استفاده از اتحاد

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

به صورت

$$(\sqrt{7} + \sqrt{2})(7 + 2 - \sqrt{14}) = (\sqrt{7})^3 + (\sqrt{2})^3$$

می‌نویسیم. بنابراین داریم:

$$[(\sqrt{7}^3) + (\sqrt{2}^3)](7\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{7^2 \times 7} + \sqrt{2^2 \times 2})(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$$

$$= (7\sqrt{7} + 2\sqrt{2})(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \xRightarrow[\text{مزدوج}]{\text{به کمک اتحاد}}$$

$$(7\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 343 - 8 = 335$$

ب) $x^n(x^{\frac{5n}{2}} - x^{\frac{n}{2}})(x^{4n} + x^{2n} + 1)$

$$(x^{\frac{15n}{2}} + x^{\frac{3n}{2}})$$

ابتدا x^n را در $x^{4n} + x^{2n} + 1$ ضرب می‌کنیم:

$$(x^{\frac{5n}{2}} - x^{\frac{n}{2}})(x^{5n} + x^{3n} + x^n)$$

$$(x^{\frac{15n}{2}} + x^{\frac{3n}{2}})$$

دو پرانتز اول را به کمک اتحاد

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

به صورت

$$(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{5n}+x^{3n}+x^{n})$$
$$=(x^{\frac{5n}{2}})^{3}-(x^{\frac{n}{2}})^{3}$$

می‌نویسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$[(x^{\frac{5n}{2}})^{3}-(x^{\frac{n}{2}})^{3}](x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})=$$
$$(x^{\frac{15n}{2}}-x^{\frac{3n}{2}})(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})$$
$$\xRightarrow[\text{مزدوج}]{\text{به کمک اتحاد}}$$
$$(x^{\frac{15n}{2}})^{2}-(x^{\frac{3n}{2}})^{2}=x^{15n}-x^{3n}$$

۵.

الف) $x^{6}-14x^{4}+49x^{2}-36$

$$=(x^{3}-7x)^{2}-36=(x^{3}-7x-6)$$
$$(x^{3}-7x+6)$$
$$=(\underbrace{x^{3}-x}-\underbrace{6x-6})(x^{3}-x-6x+6)$$
$$=[x(x^{2}-1)-6(x+1)][x(x^{2}-1)-6(x-1)]$$
$$=[x(x-1)(x+1)-6(x+1)]$$
$$[x(x-1)(x+1)-6(x-1)]$$
$$=(x+1)(x^{2}-x-6)(x-1)(x^{2}+x-6)$$
$$=(x+1)(x-3)(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$$

ب)

$$(x+a)(x+b)-(y+a)(y+b)$$
$$\xRightarrow[\text{یک جملهٔ مشترک}]{\text{به کمک اتحاد}} x^{2}+(a+b)x+ab$$
$$-[y^{2}+(a+b)y+ab]$$
$$=x^{2}+(a+b)x+ab-y^{2}-(a+b)y-ab$$
$$=x^{2}-y^{2}+(a+b)x-(a+b)y$$
$$=(x-y)(x+y)+(a+b)(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y+a+b)$$

۶. اگر مختصات A را (α,β) در نظر بگیریم، چون مثلث متساوی الساقین است، داریم:

$$AB=AC=\sqrt{5}$$

بنابراین طول AB و AC را به دست می‌آوریم و مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$B=(0,1)\quad C=(-1,0)$$
$$AB=\sqrt{(\alpha-0)^{2}+(\beta-1)^{2}}$$
$$AC=\sqrt{(\alpha+1)^{2}+(\beta-0)^{2}}$$
$$\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}-2\beta+1}=\sqrt{\alpha^{2}+2\alpha+1+\beta^{2}}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-2\beta+1=\alpha^{2}+2\alpha+1+\beta^{2}$$

بنابراین $-2\beta=2\alpha$ پس $\beta=-\alpha$ است. بنابراین مختصات نقطهٔ A به صورت $A=(\alpha,-\alpha)$ به دست می‌آید که قرار می‌دهیم $AB=\sqrt{5}$

$$AB=\sqrt{(\alpha-0)^{2}+(-\alpha-1)^{2}}=\sqrt{5}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\alpha^{2}+\alpha^{2}+2\alpha+1=5$$ پس

$2\alpha^{2}+2\alpha-4=0$ که طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم پس

$$\alpha^{2}+\alpha-2=0\Rightarrow(\alpha-1)(\alpha+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1=0\\ \alpha+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=-2\end{cases}$$

در نتیجه $A(1,-1)$ و $A'(-2,2)$ به‌دست می‌آید و مسئله دو جواب دارد.

۷. الف) اگر x تعداد روزهای گذشته و y پس‌انداز علی باشد، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰	۱	۲	x
y	۵۰۰	۵۰۰+۲۰۰	۵۰۰+۲×۲۰۰	۵۰۰+۲۰۰x

پس $y=200x+500$

ب) اگر x تعداد روزهای گذشته و z پولی باشد که حسن خرج می‌کند، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۰	۱	۲	x
z	۲۰۰۰	۲۰۰۰−۲۰۰	۲۰۰۰−۲×۲۰۰	۲۰۰۰−۲۰۰x

پس خواهیم داشت:

$$z=-200x+2000$$

۸. طبق فرض مسئله $AA_1=1000$ و $BB_1=1300$ است.

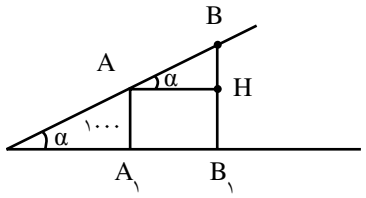
از A به BB_1 عمود می‌کنیم تا H به‌دست آید.

اندازهٔ BH برابر است با:

$$BH=BB_1-HB_1$$

پس $BH=1300-1000=300$.

می‌دانیم شیب خط برابر $\tan\alpha$ در جهت مثبت محور طول‌هاست. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:



$$m=\tan\alpha=\frac{BH}{AH}$$

که اندازهٔ AH را از رابطهٔ فیثاغورث به‌دست می‌آوریم:

$$AH^{2}=AB^{2}-BH^{2}$$
$$AH^{2}=(500)^{2}-(300)^{2}$$

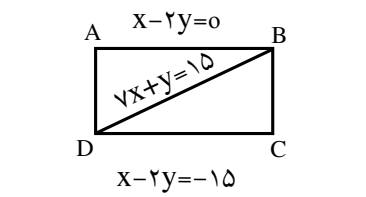
پس:

$$AH^{2}=250000-90000=160000$$

و $AH=400$ خواهد شد. بنابراین شیب خط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m=\tan\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{300}{400}=\frac{3}{4}$$

۹. از آن‌جا که شیب دو خط $x-2y=0$ و $x-2y=-15$ با یکدیگر برابر است $(m=\frac{1}{2})$ پس این دو خط با یکدیگر موازی هستند و مطابق شکل با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AB و DB مختصات نقطهٔ B به‌دست می‌آید.



$$\begin{matrix}AB:\\ DB:2\times\end{matrix}\begin{cases}x-2y=0\\ 7x+y=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=0\\ 14x+2y=30\end{cases}$$
$$15x=30$$
$$\Rightarrow x=2$$
$$x-2y=0,\ x=2\Rightarrow 2-2y=0$$
$$\Rightarrow -2y=-2\Rightarrow y=1$$

پس مختصات نقطهٔ $B=(۲,۱)$ خواهد بود و با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول DC و DB مختصات رأس D به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{l} DC: \\ DB: ۲\times \end{array}\begin{cases} x-۲y=-۱۵ \\ ۷x+y=۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲y=-۱۵ \\ ۱۴x+۲y=۳۰ \end{cases}$$

$$۱۵x=۱۵$$

$$\Rightarrow x=۱$$

از طرفی $x-۲y=-۱۵$ است که با جای‌گذاری $x=۱$ نتیجه می‌شود:

$$۱-۲y=-۱۵ \Rightarrow -۲y=-۱۶ \Rightarrow y=۸$$

پس مختصات رأس D، (۸ و ۱) خواهد بود. برای به‌دست آوردن مختصات رأس C باید معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آوریم. چون ضلع AB عمود بر BC است، پس شیب خط BC به‌دست می‌آید.

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times m_{BC}=-۱$$

$$\Rightarrow m_{BC}=-۲$$

و با داشتن مختصات نقطهٔ $B(۲,۱)$ معادلهٔ ضلع BC به‌دست می‌آید.

$$y-۱=-۲(x-۲) \Rightarrow y-۱=-۲x+۴$$

$$\Rightarrow y=-۲x+۵ \quad \text{معادلهٔ ضلع BC}$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول BC و DC مختصات رأس C نیز به دست می‌آید.

$$\begin{array}{l} BC: \\ DC: ۲\times \end{array}\begin{cases} -۲x-y=-۵ \\ x-۲y=-۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x-y=-۵ \\ ۲x-۴y=-۳۰ \end{cases}$$

$$-۵y=-۳۵$$

$$\Rightarrow y=۷$$

از $x-۲y=-۱۵$ و با جای‌گذاری $y=۷$ مقدار x به‌دست می‌آید.

$$x-۲(۷)=-۱۵ \Rightarrow x=-۱۵+۱۴ \Rightarrow x=۱$$

مختصات رأس $C=(-۱,۷)$.

مانند کاری که برای پیدا کردن مختصات رأس C کردیم برای A نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم و معادلهٔ خط AD را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{AD}=-۲, D(۱,۸) \Rightarrow y-۸=-۲(x-۱)$$

$$\Rightarrow y-۸=-۲x+۲$$

$$\Rightarrow y=-۲x+۱۰ \quad \text{معادلهٔ ضلع AD}$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AD و AB داریم:

$$\begin{array}{l} AD: \\ AB: ۲ \end{array}\begin{cases} -۲x-y=-۱۰ \\ x-۲y=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x-y=-۱۰ \\ ۲x-۴y=۰ \end{cases}$$

$$-۵y=-۱۰$$

$$\Rightarrow y=۲$$

از $x-۲y=۰$ و با جای‌گذاری $y=۲$ داریم:

$$x-۲(۲)=۰ \rightarrow x-۴=۰ \Rightarrow x=۴$$

مختصات رأس A، (۲ و ۴) خواهد بود.

۱۰. اگر دو زاویه متمم باشند، سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است. هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است، بنابراین: $\sin ۷۰=\cos ۲۰$ و $\cos ۶۴=\sin ۲۶$ و $\cos ۶۲=\sin ۲۸$ و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin^۲ ۲۰+\cos^۲ ۲۰}{\sin ۲۶+\frac{\sin ۲۸}{\sin ۲۸}}+\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲-۱}$$

می‌دانیم که: $\sin^۲ O+\cos^۲ O=۱$

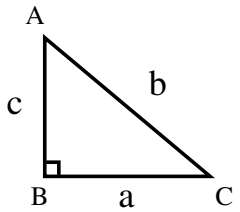
درنتیجه: $\sin^۲ ۲۰+\cos^۲ ۲۰=۱$

$$\frac{۱}{۱+۱}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}-۱}=\frac{۱}{۲}+\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{-۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۱۱.

$$\tan C=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{\sqrt{۳}}=\frac{c}{a} \Rightarrow c=\frac{۳a}{\sqrt{۳}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$b^۲=a^۲+c^۲ \Rightarrow ۴^۲=a^۲+(\frac{۳a}{\sqrt{۳}})^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶=a^۲+\frac{۹a^۲}{۳} \Rightarrow ۱۶=a^۲+۳a^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶=۴a^۲ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=۲$$

پس:

$$c=\frac{۳a}{\sqrt{۳}} \overset{a=۲}{\Rightarrow} c=\frac{۶}{\sqrt{۳}}$$

۱۲.

الف)

$$\left[\frac{x+۳}{۳(x-۳)}-\frac{x-۳}{۳(x+۳)}-\frac{۱۲}{(x-۳)(x+۳)}\right]\div(\frac{۲x+۳-x-۳}{x+۳})$$

$$=\left[\frac{(x+۳)^۲-(x-۳)^۲-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\right]\div(\frac{x}{x+۳})$$

$$=\frac{x^۲+۶x+۹-(x^۲-۶x+۹)-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{x^۲+۶x+۹-x^۲+۶x-۹-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{۱۲x-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{۱۲(x-۳)}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}=\frac{۴}{x}$$

ب)

$$\frac{۱}{۱+\frac{x^a}{x^b}+\frac{x^a}{x^c}}+\frac{۱}{۱+\frac{x^b}{x^c}+\frac{x^b}{x^a}}+\frac{۱}{۱+\frac{x^c}{x^a}+\frac{x^c}{x^b}}$$

$$=\frac{۱}{\frac{x^bx^c+x^ax^c+x^ax^b}{x^b\times x^c}}+\frac{۱}{\frac{x^cx^a+x^bx^a+x^bx^c}{x^c\times x^a}}$$

$$+\frac{۱}{\frac{x^ax^b+x^cx^b+x^ax^c}{x^a\times x^b}}=\frac{x^{b+c}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}$$

$$+\frac{x^{a+c}}{x^{a+c}+x^{a+b}+x^{b+c}}+\frac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{a+c}}$$

$$=\frac{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}=۱$$

۱۳.

$$x^۴+ax^۲+bx+c \,\underline{|\, x^۳+۳x^۲-۴x+۱}$$

$$x=۳$$

$$\underline{\pm x^۴\pm ۳x^۳\mp ۴x^۲\pm x}$$

$$-۳x^۳+(a+۴)x^۲+(b-۱)x+c$$

$\pm 3x^3 \mp 9x^2 \pm 12x \mp 3$

باقی‌مانده $=(a+13)x^2+(b-13)x+c+3$

$=3x^2-4x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+13=3 \\ b-13=-4 \\ c+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=9 \\ c=-4 \end{cases}$$

۱۴.

$$\frac{8\sqrt{21}}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})+\sqrt{19}} \times \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-\sqrt{19}}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-\sqrt{19}}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})^2-(\sqrt{19})^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{(2\sqrt{3})^2+2(2\sqrt{3})(\sqrt{7})+(\sqrt{7})^2-(\sqrt{19})^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{12+4\sqrt{21}+7-19}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{4\sqrt{21}}$$

$$=2(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})$$

۱۵. از آن‌جا که خط $y=ax+b$ و سهمی $y=x^2$ همدیگر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۲- قطع کردند، پس طول‌های آن در معادلهٔ $x^2=ax+b$ صدق می‌کنند و داریم:

$$x=1 \Rightarrow 1^2=a(1)+b$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2=a(-2)+b$$

$$\Rightarrow 2\times\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=2 \\ -2a+b=4 \end{cases}$$

$$3b=6 \Rightarrow b=2$$

اگر $b=2$ را در $a+b=1$ قرار دهیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۱۶.

الف)

$$x^2-(3\sqrt{2}+1)x+4+\sqrt{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-(3\sqrt{2}+1) \\ c=4+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta=b^2-4ac=\left[-(3\sqrt{2}+1)\right]^2-4(1)$$

$$\times(4+\sqrt{2})=(3\sqrt{2})^2+2(3\sqrt{2})(1)$$

$$+1^2-16-4\sqrt{2}$$

$$\Delta=18+6\sqrt{2}+1-16-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \Delta=3+2\sqrt{2}=2+1+2(1)(\sqrt{2})$$

$$=(\sqrt{2}+1)^2$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}+1+\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{2(1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1}{2}=\frac{4\sqrt{2}+2}{2}=\frac{2(2\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$=2\sqrt{2}+1$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}+1-\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{2(1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

پس ریشه‌های معادله $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}+1$ است.

ب) $x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}=-6$

به کمک اتحاد فرعی

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

عبارت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را به‌صورت

$$(x+\frac{1}{x})^2-2(x)(\frac{1}{x})$$

یا

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

می‌نویسیم. بنابراین:

$$(x+\frac{1}{x})^2-2-4(x+\frac{1}{x})=-6$$

$$x+\frac{1}{x}=A \Rightarrow A^2-4A+4=$$

$$\Rightarrow (A-2)^2=0 \Rightarrow A-2=0$$

$$\Rightarrow A=2$$

اگر $x+\frac{1}{x}=2$ قرار دهیم، داریم:

$$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=2 \Rightarrow x^2+1=2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow x=1$$

۱۷. اگر $\overline{xy}$ را آن عدد در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ x=y^2-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2-2+y=10$$

$$\Rightarrow y^2+y-12=0$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y-3=0 \\ y+4=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y=3 \\ y=-4<0 \end{array} \quad \underset{\Rightarrow}{x=y^2-2} \quad x=9-2=7$$

۱۸.

$$\frac{x+8}{16}+a>\frac{4-x}{8} \quad \underset{\text{می‌کنیم}}{\overset{\text{در ۱۶ ضرب}}{\Rightarrow}}$$

$$x+8+16a>2(4-x)$$

$$\Rightarrow x+8+16a>8-2x$$

$$\Rightarrow 3x>-16a \Rightarrow x>\frac{-16}{3}$$

که اگر با مجموعه جواب داده‌شده مسئله $x>\frac{-16}{3}$ مقایسه کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} x>\frac{-16a}{3} \\ x>\frac{-16}{3} \end{array} \Rightarrow \frac{-16a}{3}=\frac{-16}{3} \Rightarrow a=1$$

حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم α و β و γ زوایای یک مثلث باشند، با این شرط که:

$\alpha<\beta<\gamma$

چنان این سه عدد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، طبق تعریف قدرنسبت داریم:

$$\beta-\alpha=\gamma-\beta$$

$$\Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$$

از طرفی داریم $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$؛ بنابراین:

$$\begin{cases} 2\beta=\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=180 \end{cases} \Rightarrow 2\beta+\beta=180$$

$$\Rightarrow \beta=60^\circ$$

۲. فرض کنیم a، aq، aq^2 ($a>0$ و $q>1$) سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه باشند،

از آن‌جا که وتر از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است، بنابراین aq^2 اندازهٔ وتر و a و aq اندازهٔ ضلع‌های قائمه هستند. با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2 \Rightarrow a^2q^4 = a^2 + a^2q^2$$

با تقسیم رابطهٔ اخیر بر $a^2 \neq 0$ داریم:

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون $q^2 > 0$ بنابراین:

$$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overset{q>1}{\Rightarrow} q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۳. تابع در صورتی بر محور xها مماس است که در نقطهٔ $A(x,0)$ بر محور xها مماس باشد و این در شرایطی است که معادلهٔ $x^2 - 3x + k = 0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(1)(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

۴. $1 > 0 \Rightarrow f(1) = -(1)^2 = -1$

$$f(f(1)) = f(-1)$$

$$-1 < 0 \Rightarrow f(-1) = -2(-1)^3 = 2$$

$$\Rightarrow f(f(1)) = 2$$

$$f(f(f(1))) = f(2)$$

$$2 > 0 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 = -4$$

$$\Rightarrow f(f(f(1))) = -4$$

۵. چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $x^2 \geq 0$؛ بنابراین:

$$S(x^2) = \begin{cases} 1 & x^2 > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-1 & x > 0 \\ 0-1 & x = 0 \\ 1-(-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

۶. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{f(x)}$ از حل نامعادلهٔ $f(x) \geq 0$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(1-x) - (x+1)(2-x)}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر عبارت $P = \frac{-2x}{(x+1)(1-x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(x+1)(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-2x$		+		+	0	−		−	
$(x+1)(1-x)$		−	0	+		+	0	−	
P		−	تعریف نشده	+	0	−	تعریف نشده	+	

$$D_f = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$$

۷. الف) برای اثبات این حکم، سعی می‌کنیم با عملیات جبری و خواص نابرابری‌ها حکم را ساده کنیم تا به یک نابرابری همیشه درست برسیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2$$

$$\overset{a>0}{\Rightarrow} a \times \left(\frac{a^2+1}{a}\right) \geq a \times 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر همواره درست است، پس با برگشت عملیات انجام شده، درستی حکم ثابت می‌شود.

ب) با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر $x > 0$ داریم:

$$A = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{1+x^2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

چون طبق قسمت الف مسأله برای $x > 0$ داریم:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq \frac{1}{2}$$

چون $A \leq \frac{1}{2}$، پس بیش‌ترین مقدار A برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۸. برای این که عبارت درجه دوم $ax^2+bx+cx$ همواره منفی باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} I)\Delta < 0 \\ II)a < 0 \end{cases}$$

با اعمال دو شرط بالا، حدود m را می‌یابیم:

$$I)\Delta < 0 \Rightarrow (2(m-1))^2 - 4(m^2+m-2)(-2) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 + 8m^2 + 8m - 16 < 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 12 < 0 \Rightarrow m^2 < 1$$

$$\Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

$$II)a < 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < 1$$

با اشتراک جواب‌های نامعادله‌های I و II داریم:

$$m \in (-2, -1)$$

۹. $2^{3x-y} = 32 \Rightarrow 3x - y = \log_2^{32}$

$$\Rightarrow 3x - y = \log_2^{2^5} = 5\log_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - y = 5}$$

$$3^{x+2y} = 3 \Rightarrow x + 2y = \log_3^3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y = 1}$$

$$-3 \times \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -3x - 6y = -3 \end{cases}$$

$$-7y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{7}$$

$$x+2y=1 \Rightarrow x=1-2y=1-2(\frac{-2}{7})=\frac{5}{7}$$

۱۰. می‌دانیم که: $\frac{1}{\log_b^a}=\log_a^b$، بنابراین داریم:

$$A=\log_2^{2^3\times 3}\times\frac{1}{\log_{96}^2}-\log_2^{2^6\times 3}\times\frac{1}{\log_{12}^2}$$

$$=(\log_2^{2^3}+\log_2^3)\log_2^{3^5\times 3}-(\log_2^{2^6}+\log_2^3)\log_2^{2^2\times 3}$$

$$=(3\log_2^2+\log_2^3)(\log_2^{3^5}+\log_2^3)$$

$$-(6\log_2^2+\log_2^3)(\log_2^{2^2}+\log_2^3)$$

$$=(3+\log_2^3)(5\log_2^2+\log_2^3)$$

$$-(6+\log_2^3)(2\log_2^2+\log_2^3)$$

با فرض این‌که $a=\log_2^3$، خواهیم داشت:

$$A=(3+a)(5+a)-(6+a)(2+a)$$

$$=15+8a+a^2-12-8a-a^2=3$$

۱۱. ابتدا دامنهٔ جواب معادلهٔ لگاریتمی را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x-1\neq 1 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow D=(1,2)\cup(2,+\infty)$$

با توجه به دستور $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_b^c}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$1+\log_2^{(x-1)}=\frac{\log_2^4}{\log_{(x-1)}^2}$$

$$\Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=2\times\frac{1}{\log_{(x-1)}^2}$$

$$\Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=2\log_2^{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-1)}=1 \Rightarrow x-1=2$$

$$\Rightarrow x=3\in D \quad \text{قابل قبول}$$

۱۲. برای حل این مسئله از تبدیل به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارت‌های درجه دوم به شکل x^2+bx+c را با اضافه و کم کردن $\frac{b^2}{4}$ می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$A=\sin^2 x-2\sin x+\frac{(-2)^2}{4}-\frac{(-2)^2}{4}+5$$

$$=(\sin^2 x-2\sin x+1)+4$$

$$\Rightarrow A=(\sin x-1)^2+4$$

اکنون واضح است که اگر مقدار داخل پرانتز صفر باشد، آن‌گاه A کمترین مقدار را خواهد گرفت، یعنی: $\min A=4$

از طرفی بیشترین مقدار $(\sin x-1)^2$ برای $\sin x=-1$ به دست می‌آید، که در این حالت داریم:

$$A=(-1-1)^2+4 \Rightarrow \max A=8$$

۱۳. ابتدا کمان‌های داده شده را به صورت $(\pi\pm\alpha)$ یا $(2\pi\pm\alpha)$ می‌نویسیم.

$$\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{3}=2\pi-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \frac{7\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$$

اکنون کمان‌های داده شده را به صورت بالا در عبارت A جایگزین می‌کنیم:

$$A=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+\sin(\pi+\frac{\pi}{4})\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{3})-\sin\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}(-\sin\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{0}{-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}=0$$

۱۴.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (-x+2)x+3(2x)=0$$

$$\Rightarrow -x^2+8x=0 \Rightarrow x(-x+8)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=8$$

۱۵.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{15-14}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A-2A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -14 & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 21 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۶. برای آن‌که عدد چهاررقمی حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید رقم اول آن ۴ یا ۵ باشند، بنابراین داریم:

④ یا ⑤

② ⑤ ④ ③ ; $2\times 5\times 4\times 3=120$

۱۷.

الف) $\binom{3}{1}\times\binom{9}{2}=3\times\frac{9!}{2!\times 7!}=108$

ب) $\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}=3\times\frac{7!}{2!\times 5!}=63$

حل مسئله‌های هندسهٔ ۱

محمدهاشم رستمی

۱. با توجه به شکل داریم:

$$3x-25^\circ=2x \Rightarrow 3x-2x=25^\circ$$

$$\Rightarrow x=25^\circ, 3x-25+x+y=180^\circ$$

$$\Rightarrow 4x+y=205^\circ, x=25^\circ \Rightarrow 100^\circ+y=205^\circ$$

$$\Rightarrow y=205^\circ-100^\circ=105^\circ, z=x+y$$

$$\Rightarrow z=25^\circ+105^\circ=125^\circ$$

۲. الف) از $\hat{2}=\hat{1}$ نتیجه می‌شود که $D\hat{F}E=D\hat{B}C$، زیرا وقتی دو زاویه مساوی باشند مکمل‌های آن‌ها نیز مساوی‌اند. در نتیجه دو مثلث DFE و DEC به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند، زیرا:

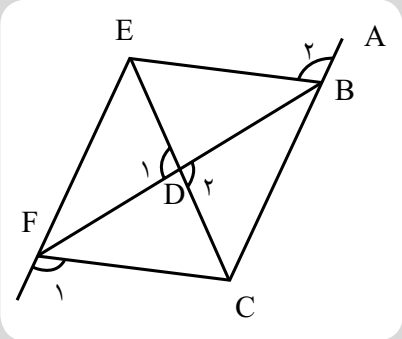
$$F\hat{D}E=E\hat{D}C,\ D\hat{F}E=D\hat{B}C,\ DF=DB$$

در نتیجه $\hat{C}=\hat{E}$ است.

روش دیگر حل الف): از برابری $\hat{2}=\hat{1}$ نتیجه می‌شود که دو خط GE و AC با هم موازی‌اند. در نتیجه بنا به توازی این دو خط و قاطع بودن EC نتیجه می‌شود که $\hat{C}=\hat{E}$ است.

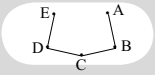
ب) چون دو پاره خط EC و BF یکدیگر

را نصف کرده‌اند، پس چهارضلعی BCFE متوازی الاضلاع است، زیرا می‌دانیم هرگاه قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است و در نتیجه ضلع‌های رو به روی آن با هم مساوی‌اند، بنابراین $BC = EF$ است.



روش دیگر حل ب): دو مثلث DBC و DEF به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا بنا به فرض $DB = DF$ و $DE = DC$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ است، بنابراین $BC = EF$ است.

۳. الف) چهار ضلعی محدب ABCD خم سادهٔ بسته است.

ب) شکل  خم سادهٔ غیر بسته است.

۴. با توجه به ویژگی‌های متوازی الاضلاع داریم:

الف) $AB = CD \Rightarrow ۲x = y$ (۱)

محیط متوازی‌الاضلاع $= ۲(AB + AD)$

$\Rightarrow ۸۴ = ۲(۲x + ۵x) \Rightarrow ۷x = ۴۲$ (۲)

$(۲) \Rightarrow x = ۶ , (۱) \Rightarrow y = ۱۲$

ب) $AB = CD \Rightarrow ۲x = ۷x - ۲۵$

$\Rightarrow x = ۵$

$AD = BC \Rightarrow ۵y - ۱۰^\circ = ۳y + ۸ \Rightarrow y = ۹$

پ)

$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow ۴y - ۶۰^\circ = ۲y \Rightarrow y = ۳۰^\circ$

$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + ۲y = ۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow x + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲۰^\circ$

ت)

$\hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x + ۱۰x - ۱۵^\circ = ۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۳x = ۱۹۵^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$

$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow ۳x = y , x = ۱۵^\circ \Rightarrow y = ۴۵^\circ$

۵. داریم:

$CG = \frac{۵}{۱۴}BC, CF = \frac{۷}{۱۰}CD$

$\Rightarrow CG.CF = \frac{۱}{۴}BC.CD$

اما $CE.CF = S_{CEGF}$ و $CB.CD = S_{ABCD}$، پس، داریم:

$S_{CEGF} = \frac{۱}{۴}S_{ABCD}$

$S_{CEGF} = ۷۰ \Rightarrow ۷۰ = \frac{۱}{۴}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = ۲۸۰cm^۲$

۶. اگر اندازهٔ ساق مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ , AB = AC)$ را b و اندازهٔ وتر آن را a فرض کنیم، می‌دانیم که:

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB.AC = \frac{۱}{۲}b.b = \frac{۱}{۲}b^۲$

و چون:

$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + b^۲$

$\Rightarrow a = \sqrt{۲}\, b \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{۲}}$

پس خواهیم داشت:

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(\frac{a}{\sqrt{۲}})^۲ = \frac{۱}{۴}a^۲$

از آن‌جا اندازهٔ ساق‌های مثلث را خواهیم داشت:

$۳۲ = \frac{۱}{۲}b^۲ \Rightarrow b^۲ = ۶۴ \Rightarrow b = ۸$

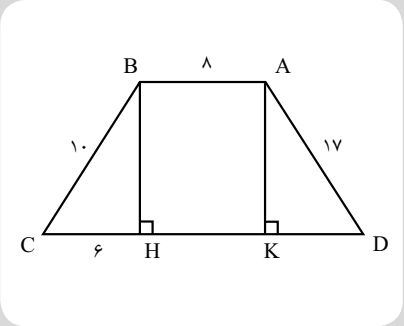
و اندازهٔ وتر مثلث برابر است با:

$a = b\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۸\sqrt{۲}$

۷. مربع بزرگ به ضلع ۳ و مربع کوچک ۲=۱+۱ است. قسمت مشترک مستطیلی به عرض ۱ و طول ۲ است. پس مساحت آن مساوی ۲=۲×۱ واحد سطح است.

نکته: به روش‌های دیگر نیز می‌توان مساحت قسمت مشترک را محاسبه کرد.

۸. ارتفاع AK از ذوزنقه را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی ABHK مستطیل و مثلث AKD قائم‌الزاویه است و بنا به داده‌های مسئله داریم:

$BH = \sqrt{BC^۲ - CH^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$

$\Rightarrow AK = AH = ۸ , AD = ۱۷$

$\Rightarrow KD = \sqrt{AD^۲ - AK^۲} = \sqrt{۱۷^۲ - ۸^۲} = ۱۵$

$HK = AB = ۸ \Rightarrow CD = CH + HK + KD$
$= ۶ + ۸ + ۱۵ = ۳۹$

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD)BH$

$= \frac{۱}{۲}(۸ + ۲۹) . ۸ = ۱۴۸$ واحد سطح

۹. بنا به قضیهٔ تالس در مثلث داریم:

$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x + ۳}{x - ۲} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$

$\Rightarrow ۳x - ۶ = x + ۳ \Rightarrow ۲x = ۹ \Rightarrow x = ۴/۵$

۱۰. مثلث‌های AMB و A′M′B′ ، همچنین مثلث‌های AMC و A′M′C′ متشابه‌اند و داریم:

$\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM} \Rightarrow \frac{x}{x + ۹} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow ۳x = ۲x + ۱۸ \Rightarrow x = ۱۸$

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{M'C'}{MC} \Rightarrow \frac{۲۲}{AC} = \frac{۱۲}{۱۸} \Rightarrow \frac{۲۲}{y} = \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow y = ۳۳$

۱۱. دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=(\frac{AH'}{AH})^{۲}, AH=AH'+H'H$$
$$=۴۰=AH'+۱۲\Rightarrow AH'=۲۸$$
$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=(\frac{۲۸}{۴۰})^{۲}=(\frac{۷}{۱۰})^{۲}=\frac{۴۹}{۱۰۰}$$

۱۲. الف) حجم منشور مساوی حاصل‌ضرب سطح قاعده در ارتفاع آن است. اما قاعدهٔ این منشور شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر است. با توجه به این که مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a مساوی $\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$ است، داریم:

$$\text{مساحت قاعده}=\frac{۳\sqrt{۳}\times ۱۲^{۲}}{۲}=۲۱۶\sqrt{۳}cm^{۲}$$

ارتفاع × مساحت قاعده= حجم منشور
$$=۲۱۶\sqrt{۳}\times ۳۰=۶۴۸\sqrt{۳}cm^{۳}$$

پ) نخست حجم استوانه را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که شعاع دایرهٔ محاط در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a مساوی سهم آن ۶ضلعی منتظم، یعنی $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین:

$$\text{شعاع قاعدهٔ استوانه}=\frac{۱۲\times\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

ارتفاع × مساحت قاعده= حجم استوانه و
$$\Rightarrow \text{حجم استوانه}=\pi R^{۲}.h$$
$$=\pi(۶\sqrt{۳})^{۲}.۳۰=۳۲۴۰\pi\ cm^{۳}$$

حجم فضای بین منشور و استوانه $\Rightarrow$
حجم استوانه - حجم منشور منتظم=
حجم فضای بین منشور و استوانه
$$=۶۴۸۰\sqrt{۳}-۳۲۴۰\pi=۱۰۳۶/۸\ cm^{۳}$$

۱۳. داریم:

حجم مخروط
$$=\frac{۱}{۳}\times\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\times\pi R^{۲}.h$$
$$=\frac{۱}{۳}\times\pi\times ۸^{۲}\times ۲۱=۴۴۸\pi cm^{۳}$$

سطح کرهٔ به شعاع R
$$=۴\pi R^{۲}\Rightarrow ۳۶\pi=۴\pi R^{۲}\Rightarrow R^{۲}=۹$$
$$\Rightarrow R=۳cm$$
$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳}=۳۶\pi cm^{۳}$$

الف) شعاع قاعدهٔ مخروط ۸ سانتی‌متر است. پس قطر قاعدهٔ آن ۱۶ سانتی‌متر و شعاع کره ۳ سانتی‌متر است. پس قطر دایرهٔ عظیمهٔ آن ۶ سانتی‌متر خواهد بود. بدیهی است که این کره به‌طور کامل درون مخروط قرار می‌گیرد. می‌توان مشخص کرد که کره در چه موقعیتی نسبت به ارتفاع مخروط قرار می‌گیرد.

درصورتی که می‌توانید این مطلب را مشخص کنید، راه‌حل خود را به نشانی مجله بفرستید. بهترین راه‌حل جایزه خواهد داشت.

ب) داریم:

حجم کره- حجم مخروط = حجم باقی‌مانده

$$\Rightarrow \text{حجم باقی‌مانده}=۴۴۸\pi-۳۶\pi=۴۱۲\pi cm^{۳}$$

پاسخ سؤالات جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱.

$$n=۱:(۱+\frac{۱}{۱})=۱+۱\Rightarrow ۲=۲$$

فرض:
$$n=k:(۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱+\frac{۱}{k})$$
$$=k+۱$$

حکم:
$$n=k+۱:(۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})...(۱+\frac{۱}{k})(۱+\frac{۱}{k+۱})$$
$$=k+۲$$

دو طرف فرض استقرا را در $۱+\frac{۱}{k+۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$(۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱+\frac{۱}{k})...(۱+\frac{۱}{k})$$
$$(۱+\frac{۱}{k+۱})=(k+۱)(۱+\frac{۱}{k+۱})$$
$$=k+۱+۱=k+۲$$

۲.

$$a=۲k+۱\Rightarrow a^{۳}=(۲k+۱)^{۳}=۸k^{۳}+۱۲k^{۲}$$
$$+۶k+۱=۲(۴k^{۳}+۶k^{۲}+۳k)+۱=۲k'+۱$$

۳. برهان خلف: فرض می‌کنیم این عدد گویا باشد، بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{۵}-\sqrt{۲}}=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}, a,b\neq ۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}-\sqrt{۲}=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow \sqrt{۲}=\sqrt{۵}-\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow ۲$$
$$=۵+\frac{a^{۴}}{b^{۴}}-\frac{۲\sqrt{۵}a^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow \frac{۲\sqrt{۵}a^{۲}}{b^{۲}}=\frac{a^{۴}+۳b^{۴}}{b^{۴}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{\frac{a^{۴}+۳b^{۴}}{b^{۴}}}{\frac{۲a^{۲}}{b^{۲}}}=\frac{a^{۴}+۳b^{۴}}{۲a^{۲}b^{۲}}=\frac{a'}{b'}$$
$$a',b'\in\mathbb{Z}, b'\neq ۰$$

بنابراین $\sqrt{۵}$ مساوی یک کسر گویاست و این خلاف فرض مسئله است.

۴. از استدلال بازگشتی کمک می‌گیریم:

$$x^{۲}+۲y^{۲}+۱\geq ۲yx+۲y\Rightarrow x^{۲}+۲y^{۲}$$
$$+۱-۲xy-۲y\geq ۰\Rightarrow (x^{۲}+y^{۲}-۲xy)$$
$$+(y^{۲}-۲y+۱)\geq ۰\Rightarrow (x-y)^{۲}+(y-۱)^{۲}\geq ۰$$

و نابرابری فوق همواره درست است، زیرا مربع‌های کامل همواره نامنفی‌اند. همهٔ مراحل نیز بازگشت‌پذیرند.

۵. لباس‌ها در سه نوع و سه اندازه هستند، پس طبق اصل ضرب، ۹=۳×۳ و ۹ گونهٔ مختلف از لباس (از نظر اندازه و نوع) داریم. چون ده دست لباس خریداری شده، پس طبق اصل لانهٔ کبوتر دست‌کم دو تای آن‌ها از یک گونه‌اند، یعنی اندازه و نوع آن‌ها مثل هم است.

۶. دو طرف حکم را که یک قضیهٔ دو شرطی است اثبات می‌کنیم. اگر $C\subseteq A$ باشد، $A\cup C=A$ و $A\cap C=C$ بنابراین به کمک خاصیت توزیع‌پذیری می‌توان نوشت:

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$=A\cap(B\cup C)$$

اما برعکس اگر داشته باشیم:

$(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ می‌توان نوشت:

$$(A\cup C)\cap(B\cup C) = A\cap(B\cup C)$$

اما می‌دانیم که:

$$(A\cup C)\cap(B\cup C) = A\cup(B\cup C)$$

(چرا؟)

حال با فرض $B\cup C = X$ و $A\cup C = Y$ و $A=Z$ تساوی‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} Y\cap X = Z\cap X \\ Y\cup X = Z\cup X \end{cases}$$

و از این دو رابطه به‌صورت زیر نتیجه می‌گیریم که $Y=Z$:

$$Y = Y\cup(Y\cap X) = Y\cup(Z\cap X)$$
$$= (Y\cup Z)\cap(Y\cup X) = (Y\cup Z)\cap(Z\cup X)$$
$$= Z\cup(Y\cap X) = Z\cup(Z\cap X) = Z$$

گفتنی است که در اثبات بالا به غیر از فرض مسئله از قانون موسوم به قانون جذب نیز استفاده شده است که اثبات آن به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود:

$$(A = A\cap(A\cup B) = A\cup(A\cap B))$$

حال از تساوی $Y=Z$ نتیجه می‌شود:

$$A\cup C = A \Rightarrow C\subseteq A$$

۷.

$$|2x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le 2x-1\le 2 \Rightarrow -1\le 2x\le 3$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0,1 \Rightarrow A = \{0,1\}$$
$$x\le\sqrt{x} \overset{x\ge 0}{\Rightarrow} x^2\le x \Rightarrow x^2 - x\le 0$$
$$\Rightarrow x(x-1)\le 0 \Rightarrow 0\le x\le 1$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } 1 \Rightarrow B = \{0,1\}$$
$$A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$A\times B = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$\Rightarrow A^2 - A\times B = \varnothing$$

۸. خاصیت بازتابی:

$$(x,y)R(x,y) \Rightarrow x+y+xy = y+x+yx$$

خاصیت تقارنی:

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow (z,t)R(x,y)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+t+xt = y+z+yz \\ z+y+zy = t+x+tx \end{cases}$$

خاصیت تعدی:

$$(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s) \Rightarrow (x,y)R(r,s)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+t+tx = y+z+yz \\ z+s+sz = t+r+tr \end{cases}$$

حال به دو طرف هریک از تساوی‌های بالا، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+t+tx+1 = y+z+yz+1 \\ z+s+sz+1 = t+r+tr+1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (t+1)(x+1) = (y+1)(z+1) \\ (z+1)(s+1) = (t+1)(r+1) \end{cases}$$

حال دو طرف دو تساوی فوق را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(t+1)(x+1)(z+1)(s+1)$$
$$= (y+1)(z+1)(t+1)(r+1)$$
$$\Rightarrow (x+1)(s+1) = (y+1)(r+1)$$
$$\Rightarrow xs+x+s+1 = yr+y+r+1$$
$$\Rightarrow x+s+xs = y+r+yr$$

$\Rightarrow (x,y)R(r,s)$ خاصیت تعدی

درنتیجه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

$$(x,y)R(1,-2) \Rightarrow x-2-2x = y+1+y$$
$$\Rightarrow 2y = -x-3y \Rightarrow Y = \frac{-x-3}{2}$$
$$\Rightarrow [(1,-2)] = \left\{(x,y)\middle| y = \frac{-x-3}{2}\right\}$$

۹. الف)

S= {(پ, پ, ۱), (پ, پ, ۱), (ر, پ, ۱), (ر, ر, ۱), (پ, پ, ۳), (ر, ر, ۲), (پ, پ, ۲), (ر, ر, ۱), (پ, ر, ۳), (پ, پ, ۳), (ر, ر, ۳), (پ, ۴), (پ, پ, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, ر, ۵), (ر, ۴), (پ, ر, ۵), (پ, پ, ۶), (ر, ر, ۵), (ر, ۶)}

ب)

A= {(پ, پ, ۱), (پ, پ, ۱), (ر, پ, ۱), (پ, ر, ۱), (پ, پ, ۳), (پ, پ, ۳), (پ, ر, ۳), (ر, پ, ۳), (پ, ۲), (پ, ر, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, پ, ۵), (پ, ۴), (پ, ۶)}

ج)

B= {(پ, پ, ۳), (پ, پ, ۳), (پ, ر, ۳), (ر, پ, ۳), (پ, پ, ۶), (ر, ر, ۳), (ر, ۶)}

د)

A ∩ B′ = A − B = {(پ, پ, ۱), (پ, ۴), (پ, ۲), (پ, ر, ۱), (ر, پ, ۱), (پ, پ, ۵), (پ, پ, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, ر, ۵)}

۱۰. فرض می‌کنیم n مهرهٔ آبی در ظرف باشد. احتمال هم‌رنگ بودن دو مهرهٔ خروجی (هر دو قرمز یا هر دو سفید یا هر دو آبی) را به دست می‌آوریم و مساوی $\frac{14}{45}$ قرار می‌دهیم:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}+\binom{3}{2}+\binom{n}{2}}{\binom{n+8}{2}} = \frac{14}{45}$$
$$\Rightarrow \frac{10+3+\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{14}{45}$$
$$\Rightarrow \frac{26+n^2-n}{n^2+15n+56} = \frac{14}{45}$$
$$\Rightarrow 14n^2+210n+784 = 45n^2+1170-45n$$
$$\Rightarrow 31n^2-255n+386 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = (225)^2 - 4\times 31\times 386$$
$$\Rightarrow \Delta = 65025 - 47864 = 17161$$
$$\Rightarrow n = \frac{255\pm 131}{62}$$

$\Rightarrow n = 2$ یا $n = \frac{193}{31}$ غیرقابل قبول

یعنی دو مهرهٔ آبی وجود دارد.

۱۱.

$$P(2) = P(3) = P(5) = 3P(1)$$
$$= 3P(4) = 3P(6) \quad \text{و}$$
$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 1$$
$$\Rightarrow 12P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = P(4) = P(6) = \frac{1}{12} \text{ و}$$
$$P(2) = P(3) = P(5) = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow P(x\le 3) = P(1)+P(2)+P(3)$$
$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

۱۲. اگر طول و عرض مستطیل‌ها را x و y بگیریم، فضای نمونهٔ این پیشامد عبارت است از:

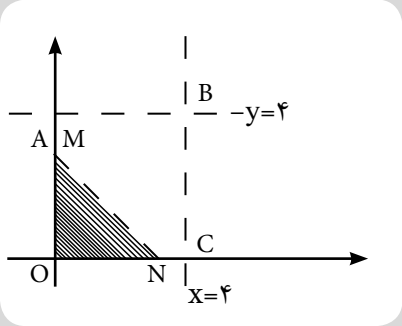
$$S = \{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}, 0<x,y<4\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$A=\{(x,y)|(x,y)\in S, x+y>3\}$

و به روش هندسی، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{S_{OMN}}{S_{OABC}}=\frac{\frac{3\times 3}{2}}{4\times 4}=\frac{9}{32}$$



۱۳. اگر پیشامد قبولی نرگس را A و پیشامد قبولی مژده را B بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases}P(A-B)=0/3\\ P(A\cup B)=0/7\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(A)-P(A\cap B)=0/3\\ P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7\end{cases}$$

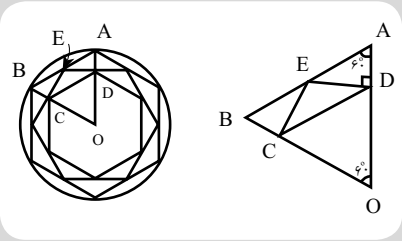
$$\Rightarrow 0/3+P(B)=0/7\Rightarrow P(B)=0/4$$

پاسخ مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱. در مثلث OAB داریم:

$$\frac{DC}{AB}=\frac{OD}{OA},\ OD=OE.\cos 30^\circ$$



با توجه به این‌که OE ارتفاع مثلث OAB، ضلع مقابل به زاویهٔ 60° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است پس:

$$\frac{DC}{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

CD مربوط به شش ضلعی سوم و AB مربوط به شش ضلعی اول است، نسبت اضلاع آن‌ها برابر q^2 خواهد بود. پس $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_\infty=\frac{6}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\text{محیط اولیه}}{1-\text{(قدر نسبت)}}$$

و برای یافتن حد مجموع مساحت‌ها با توجه به فرمول مساحت شش ضلعی که برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است، داریم:

$$S_\infty=\frac{6(\frac{\sqrt{3}}{4})}{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}}=6\sqrt{3}$$

نکته: هرگاه وسط‌های اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم، nضلعی‌هایی ایجاد می‌شوند که محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها با محیط و مساحت‌های nضلعی اولیه دنبالهٔ هندسهٔ نزولی تشکیل می‌دهند و قدرنسبت محیط‌های آن‌ها $\cos\frac{\pi}{n}$ و قدرنسبت مساحت‌های آن‌ها $\cos\frac{2\pi}{n}$ است.

۲. با توجه به اتحاد

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$$

داریم:

$$(x+1)^{1384}-(x-2)^{1384}=0$$

$$\Rightarrow x+1=\pm(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x+1=x-2 \text{ غ‌ق‌ق}\\ x+1=-(x-2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

۳. الف) تعداد جملات این بسط برابر (۸+۱) یعنی ۹ است.

ب) برای یافتن مجموع ضرایب داریم:

$$x=y=1\Rightarrow(x+2y)^8=(1+2)^8=3^8$$

پ) جملهٔ (k+۱)اُم بسط $(a+b)^n$ عبارت است از:

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

پس جملهٔ پنجم بسط $(x+2y)^8$ برابر است با:

$$\binom{8}{4}x^{8-4}(2y)^4=\binom{8}{4}x^4\times 2^4y^4$$

$$=\frac{8!}{4!4!}\times 16x^4y^4=1120x^4y^4$$

۴.

$$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

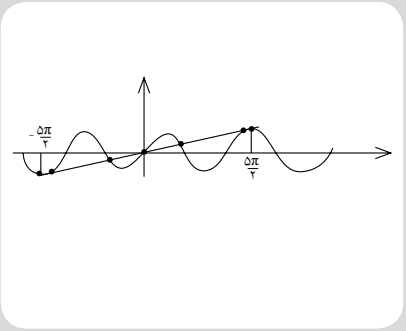
$$x^2+x+1=0$$

$$\Rightarrow P(x)=x^3(ax^2+bx+c)+(dx^2+ex+f)$$

از آن‌جا که P(x) باید برابر صفر شود، لذا باید ضرایب پرانتز اول و دوم با هم برابر باشند تا با فاکتورگیری از آن‌ها به x^2+x+1 برسیم که برابر صفر است. بنابراین به جای اعداد مساوی a، b و c شش رقم و به جای اعداد مساوی d، e و f نیز شش رقم می‌توانیم جای‌گذاری کنیم که طبق اصل ضرب ۳۶ عدد به جای ضرایب می‌توان جایگزین کرد.

۵. معادله هفت ریشه دارد.

$$\sin x=\frac{2x}{5\pi}$$



۶. الف) $f(a_1)$ می‌تواند هر کدام از اعداد b_1 و b_2 و... و b_m باشد. پس برای $f(a_1)$، m حالت موجود است. $f(a_2)$ نیز به هر یک از b_1 و b_2 و... و b_m نظیر می‌شود. پس آن هم m حالت دارد و... و $f(a_m)$ نیز m حالت دارد. بنابراین، طبق اصل ضریب $m\times m\times m\times...\times m=m^n$ تابع موجود است.

ب) $f(a_1)$ یک حالت دارد، زیرا فقط می‌تواند b_1 باشد، ولی $f(a_2)$، ...، $f(a_n)$ محدود نیستند و هر کدام m حالت دارند، پس $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{n-1\ \text{حالت}}=m^{n-1}$

پ) توابع ثابت عبارت‌اند از $f(x)=b_1$ و $f(x)=b_2$ و ... و $f(x)=b_m$، پس m تا هستند.

ت) $f(a_1)\neq b_1$ پس $f(a_1)$، $m-1$ حالت دارد و بقیهٔ $f(a_2)$ و... و $f(a_n)$ هر کدام m حالت دارند. پس:

$$(m-1)(m)(m)\ldots(m)=m^{n-1}\times(m-1)$$
$$=m^n-m^{n-1}$$

۷.

$$g(x)=f(x)\Rightarrow\sqrt{ax^2+1}-bx^2=\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{ax^2+1}-bx^2=\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\times\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{3x-\sqrt{9x^2+1}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{ax^2+1}-bx^2=\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{9x^2-9x^2-1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{ax^2+1}-bx^2=\sqrt{9x^2+1}-3x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=9\\b=3\end{cases}$$

۸. از آن‌جا که $f(f(n))$ به علاوهٔ $f(n)$ درجهٔ یک شده است، پس $f(n)$ باید درجهٔ یک باشد، پس آن را $f(n)=an+b$ در نظر می‌گیریم.

$$f(f(n))+f(n)=2n+3$$
$$\Rightarrow f(an+b)+an+b$$
$$=a(an+b)+b+an+b$$
$$\Rightarrow f(an+b)+an+b$$
$$=(a^2+a)n+(ab+2b)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+a=2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=-2\end{cases}\\ab+2b=3\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow b=1\\a=-2\Rightarrow 0=3\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}\end{cases}$$

۹.

$$\text{فرض}\begin{cases}x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)-3x_2>f(x_1)-3x_1\\\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>3x_2-3x_1\quad(1)\\x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)-x_2^3>f(x_1)-x_1^3\\\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>x_2^3-x_1^3\quad(2)\end{cases}$$

$$\text{حکم}\ x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)-x_2^2-x_2>f(x_1)-x_1^2-x_1$$
$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>x_2^2-x_1^2+x_2-x_1\quad(3)$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$x_2^3-x_1^3\geq x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

یا

$$3x_2-3x_1\geq x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

که به روش برهان خلف آن را اثبات می‌کنیم.

فرض خلف:

$$3x_2-3x_1<x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

و

$$x_2^3-x_1^3<x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2^2-x_1^2+x_2-x_1>3x_2-3x_1\\x_2^2-x_1^2+x_2-x_1>x_2^3-x_1^3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x_2-x_1)(x_2+x_1+1)>3(x_2-x_1)\\(x_2-x_1)(x_2+x_1+1)>(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\end{cases}$$

با فرض $x_1x_2=P$ و $x_2+x_1=S$ و این‌که می‌دانیم $S^2-2P\geq 2P$، یعنی $S^2\geq 4P$

$$\begin{cases}S>2\\S+1>S^2-P\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S>2\\S+P+1>S^2>4\\\Rightarrow S+\frac{S^2}{4}+1>S+P+1>S^2\end{cases}$$

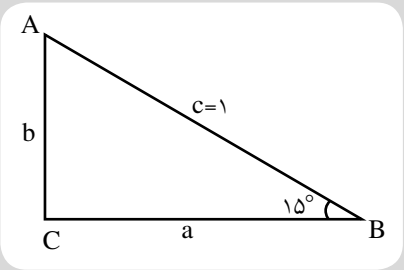
$$\Rightarrow 3S^2-4S-4<0\xrightarrow{S<2}\text{تناقض}$$

۱۰. با توجه به این‌که $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ داریم:

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}\tan 15^\circ=\frac{b}{a}=2-\sqrt{3}\Rightarrow b=a(2-\sqrt{3})\\a^2+b^2=c^2\Rightarrow a^2+a^2(2-\sqrt{3})^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{1}{4(2-\sqrt{3})}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
$$\Rightarrow b=(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})(2-\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow\sin 15^\circ=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\text{و}$$
$$\cos 15^\circ=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

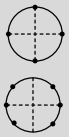


۱۱.

$$\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 3x}=2\Rightarrow\frac{2\sin 3x.\cos 4x}{\sin 3x}=2$$
$$\Rightarrow\cos 4x=1\Rightarrow 4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

ولی با توجه به دامنهٔ تابع که $\sin 3x\neq 0$ یعنی $3x\neq k\pi\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{3}$، درنتیجه جواب نهایی عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\Leftrightarrow\\x=\frac{k\pi}{3}\Rightarrow\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{x=\frac{k\pi}{2}\right\}$$

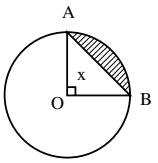


$$-\left\{x=\frac{k\pi}{3}\right\}=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۲. الف)

$$=\frac{x}{2\pi}\times\pi r^2=\frac{xr^2}{2}$$

مساحت $\overset{\Delta}{OAB}$ = مساحت دایره × $\frac{\text{کمان}}{\text{محیط}}$



$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{OAB} = \frac{1}{2}r.r/\sin x = \frac{1}{2}r^2\sin x$$

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{xr^2}{2} - \frac{1}{2}r^2\sin x = \frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$$

ب)

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos x$$

$$\Rightarrow AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos x$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos x = 2r^2(1-\cos x)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2r^2(2\sin^2\frac{x}{2}) = 4r^2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2r\sin\frac{x}{2}$$

ت)

$$AB = 2r\sin\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{AB}{2r} = \sin\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \sin^{-1}\frac{AB}{2r} \Rightarrow x = 2\sin^{-1}\frac{AB}{2r}$$

.۱۳

$$\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+1}} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{\sqrt{(x-1)^2}} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x}{|x-1|} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x<0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\Rightarrow \{0<x<2\} - \{1\} = (0,1)\cup(1,2)$$

$$\Rightarrow 0 < |x-1| < 1$$

.۱۴

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} ax\left[\frac{1}{x}\right] = a(\frac{1}{2})^+\left[\frac{1}{(\frac{1}{2})^+}\right] \\ = a(\frac{1}{2})\left[2^-\right] = a(\frac{1}{2})\times 1 = \frac{a}{2} \\ \lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} \cos\frac{\pi x}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2}$$

.۱۵

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x\tan x} \xlongequal{\text{تبدیل به ضرب}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x-3x}{2}.\sin\frac{x+3x}{2}}{x\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(-x)\sin 2x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} 2\times 1\times\frac{2\sin x.\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 4\cos^2 x = 4\times 1 = 4$$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{3x-\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(\frac{1}{2}-\cos x)}{3(x-\frac{\pi}{3})}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x)}{3(x-\frac{\pi}{3})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(-2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}.\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2})}{3(x-\frac{\pi}{3})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} -4\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}}{3(x-\frac{\pi}{3})}.\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2}{3}\sin\frac{\pi+x}{2} = \frac{2}{3}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.۱۶

$$f(x) = \sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}-0}{x}$$

$$\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}}}{\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos ax}}{x\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos ax}}{x\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}}}\times\frac{\sqrt{1+\cos ax}}{\sqrt{1+\cos ax}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 ax}}{x(\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{1+\cos ax})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|\sin ax|}{x(\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{1+\cos ax})}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x(\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{1+\cos ax})} = \frac{a}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin ax}{x(\sqrt{1+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{1+\cos ax})} = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر است با:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{\frac{a}{2}-(-\frac{a}{2})}{1+\frac{a}{2}(-\frac{a}{2})}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \left|\frac{a}{1-\frac{a^2}{4}}\right| = \frac{4}{3}$$

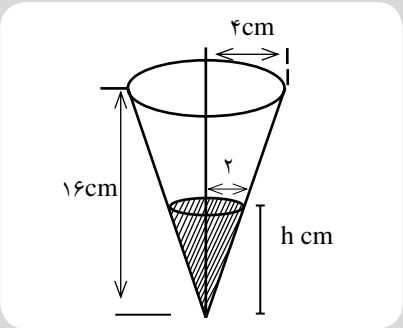
$$\Rightarrow 3|a| = |4-a^2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-a^2 = 3a \Rightarrow a^2+3a-4=0 \\ 4-a^2 = -3a \Rightarrow a^2-3a-4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a=1 \\ a=-4 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ چهار مقدار برای a وجود دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=4 \end{cases}$$

.۱۷



$$\frac{h}{16} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{4}$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{h}{4})^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$$

$$v'_t = \frac{3\pi h^2 h'_t}{48} \Rightarrow -2 = \frac{3\pi(8)^2 h'_t}{48}$$

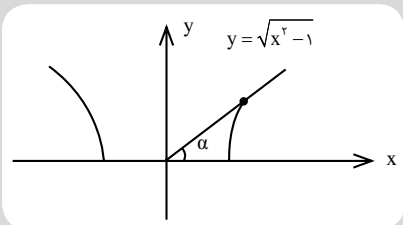
$$\Rightarrow h'_t = \frac{-2}{4\pi} = \frac{-1}{2\pi}\text{cm}$$

.۱۸

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{\cos x^{-1}x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{\cos^{-1}(x^2)}}}{2\sqrt{1+\sqrt{\cos^{-1}(x^2)}}}$$

.۱۹



$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha'(1+\tan^2\alpha) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

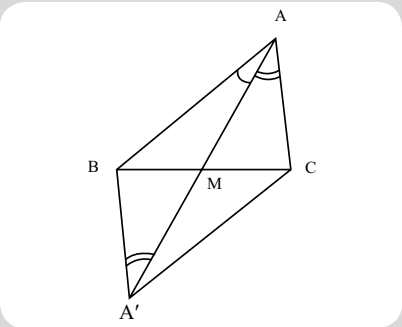
$$\Rightarrow \alpha' = \frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2(1+(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})^2)} = \frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2(\frac{2x^2-1}{x^2})}$$

$$\Rightarrow \alpha' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

حل مسئله‌های هندسهٔ ۲

محمدهاشم رستمی

۱. الف) میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ M' به‌دست آید. $(MA' = MA)$. از A' به C وصل می‌کنیم، چهارضلعی $ABA'C$ که قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند متوازی‌الاضلاع است، پس $A'B = AC$ و $B\hat{A'}M = M\hat{A}C$ است. بنا به فرض $AB > AC$ است، پس $AB > AB'$ است. بنابراین در مثلث ABB'، چون $AB > A'B$ است، $B\hat{A'}A > M\hat{A}B$ است امّا $B\hat{A'}A = M\hat{A}C$ است، پس داریم $M\hat{A}C > M\hat{A}B$ یا $M\hat{A}B < M\hat{A}C$ که در نتیجه حکم مسئله ثابت شده است.



با استفاده از این مسئله می‌توان گفت:

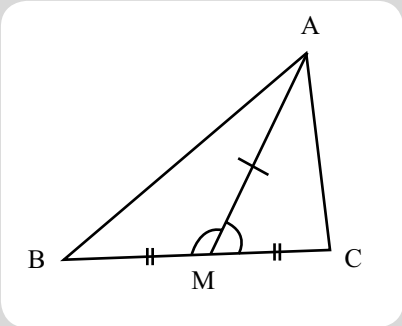
اگر دو ضلع مثلثی نابرابر باشند، میانهٔ وارد بر ضلع سوم مثلث با ضلع بزرگ‌تر، زاویه‌ای می‌سازد که کوچک‌تر از زاویه‌اش با ضلع کوچک‌تر است، یعنی:

ΔABC , $AB > AC$, $MB = MC$

$\Rightarrow M\hat{A}B < M\hat{A}C$

ب) برای حل این قسمت از مسئله، دو مثلث MAB و MAC را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم:

$MA = MA, MB = MC, AB > AC$



پس بنا به عکس قضیهٔ لولا، داریم:

$B\hat{M}A > C\hat{M}A$

۲. بنا به ویژگی نیمساز زاویهٔ درونی مثلث داریم:

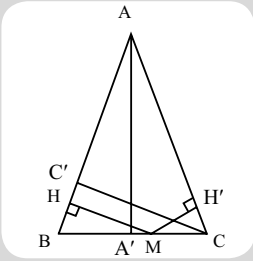
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x+4}{2x+1} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 4x+2 = 3x+12 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow DB = 14 , DC = 21$$

$$\Rightarrow BC = 14+21 = 35$$

۳. می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن، مساوی اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. بنابراین اگر ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث را AA' و ارتفاع وارد بر ساق مثلث را CC' بنامیم، برای پیدا کردن جواب مسئله باید اندازهٔ CC' را به‌دست آوریم. با توجه به این که $2S_{ABC} = BC . A'A' = AB.CC'$ است، داریم:



$$BA' = A'C = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6 , AB = 10$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

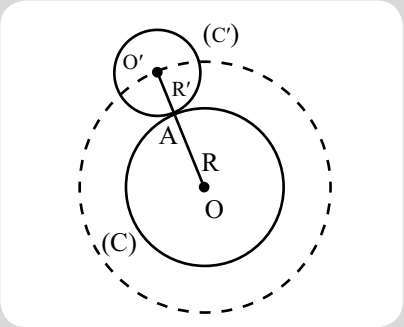
$$\Rightarrow 12 \times 8 = 10 \times CC' \Rightarrow CC' = 9/6$$

در نتیجه جواب مسئله

$$\Rightarrow MH + MH' = CC' = h_c = 9/6$$

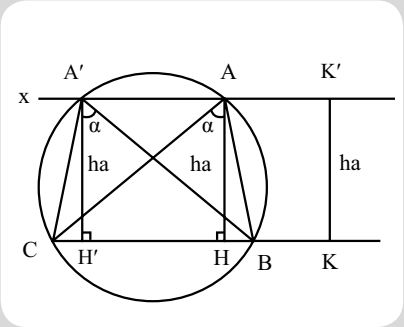
۴. مکان هندسی جواب مسئله، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ است، زیرا اگر دایرهٔ $C'(O',R')$ یکی از دایره‌های مکان هندسی مورد نظر باشد، یعنی دایره‌ای به شعاع R' و مرکز O' باشد که بر دایرهٔ $C(O , R)$ مماس است، داریم:

$O'O = O'A + AO = R' + R =$ مقدار ثابت



و چون O نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ O' دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ است.

۵. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، سپس کمان در خور زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ رو به رو پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه K واقع بر خط BC عمود KK' به

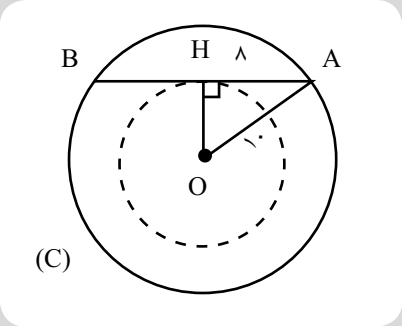


طول h_a را خارج می‌کنیم (در همان طرفی

که کمان در خور قرار دارد) از نقطهٔ K' خطی موازی BC رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با کمان در خور را A و A' می‌نامیم و از A و A' بـه B و C وصل می‌کنیم. مثلث‌های ABC و $AB'C$ جواب مسئله‌اند.

بحث: بـه تعـداد نقاط برخـورد، خط $K'x$ که از K' موازی BC رسـم می‌شود. بـا کمان در خـور زاویهٔ A، مسـئله دارای جواب است.

۶. دایرهٔ $C(O,۱۰)$ و وتر AB به طول ۱۶ از این دایره را در نظر می‌گیریم. از O عمود OH را بر AB فـرود می‌آوریم و از O به A وصل می‌کنیم. داریم:



$OA = R = ۱۰, AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸,$

$OH = \sqrt{۱۰^۲ - AH^۲}$

$\Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶ =$ مقدار ثابت

پس مکان هندسـی نقطهٔ H وسـط وتر AB، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶ است.

۷. داریم:

$۲(AB + CD) =$ محیط چهارضلعی

$\Rightarrow ۱۲۰ = ۲(۱۴ + x + x + ۶ + ۲۰)$

$\Rightarrow ۶۰ = ۲x + ۴۰ \Rightarrow ۲x = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰$

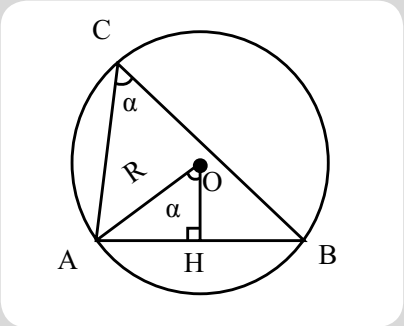
۸. داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۳۶۰^\circ \\ ۴۲ = \frac{y - x}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۳۶۰^\circ \\ y - x = ۸۴^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow ۲y = ۴۴۴ \Rightarrow y = ۲۲۲^\circ$

$\Rightarrow x = ۳۶۰^\circ - ۲۲۲^\circ = ۱۳۸^\circ$

۹. اگر R شـعاع دایره‌ای باشد که کمان درخـور زاویهٔ α رو به پاره‌خط AB به طول a بخشی از آن است و OH فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB باشد، داریم:



الف) $R = \frac{AB}{۲\sin\alpha} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲\sin ۶۰} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲ \times \sqrt{\frac{۳}{۲}}}$

$= ۴ \Rightarrow R = ۴$

ب) $OH = R\cos\alpha = ۴\sqrt{۳} \times \cos ۶۰^\circ$

$= ۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow OH = ۲\sqrt{۳}$

۱۰. بنا به رابطه‌های متری در دایره داریم:

$MA . MB = MC . MD$

$\Rightarrow ۳y . ۲y = ۲x . ۳x \Rightarrow ۶y^۲ = ۶x^۲$

$\Rightarrow x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = y, x = -y$ غیر قابل قبول

از طرفی داریم:

$AB = ۲CD - ۱۰$

$\Rightarrow ۳y + ۲y = ۶x + ۴x - ۱۰$

$\Rightarrow ۵y = ۱۰x - ۱۰$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = y \\ ۵y = ۱۰x - ۱۰ \Rightarrow ۵x = ۱۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۲$

$\Rightarrow AB = ۵y = ۵ \times ۲ = ۱۰,$

$CD = ۵x = ۵ \times ۲ = ۱۰$

۱۱. داریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۵ = ۳ \\ y - ۳ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۴ \end{cases} \Rightarrow M = (-۱, ۴)$$

۱۲. محـور ایـن بازتاب، نیمسـازهای زاویه‌هـای بین ایـن دو خطانـد. از طرفی می‌دانیم که معادلهٔ نیمسـازهای زاویه‌های بین دو خط به معادله‌های:

$D : a'x + b'y + c' = ۰, Dx + by = cx = ۰$

به صورت $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \pm\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^۲ + b'^۲}}$

است. بنابراین داریم:

$$\frac{۳x - ۴y - ۱}{\sqrt{۹ + ۱۶ = ۵}} = \pm\frac{۴x + ۳y + ۷}{\sqrt{۹ + ۱۶ = ۵}}$$

$\Rightarrow ۳x - ۴y - ۱ = \pm(۴x + ۳y + ۷)$

معادلـهٔ محـور بازتـاب دیگـر $= ۷x - y + ۶ =$

و معادلهٔ یک محور بازتاب:

$\Rightarrow x + ۷y + ۸$

۱۳. داریم:

الف) $T(x,y) = (۲x, ۲y), A = (۲,۰)$

$\Rightarrow A' = T(۲,۰) \Rightarrow A' = (۴,۰)$

$B = (۰,۴) \Rightarrow B' = T(۰,۴)$

$\Rightarrow B' = (۰,۸), C = (۴,۵) \Rightarrow C' = T(۴,۵)$

$\Rightarrow C' = (۸,۱۰)$

$m/AB = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴ - ۰}{۰ - ۲} = -۲,$

$m/A'B' = \frac{۸ - ۰}{۰ - ۴} = -۲, m/AB = m/A'B' = -۲$

$m/BC = \frac{۵ - ۴}{۴ - ۰} = \frac{۱}{۴}, m/B'C' = \frac{۱۰ - ۸}{۸ - ۰} = \frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow m/BC = m/B'C' = \frac{۱}{۴}$

$m/AC = \frac{۵ - ۰}{۴ - ۲} = \frac{۵}{۲}, m/A'C' = \frac{۱۰ - ۰}{۸ - ۴} = \frac{۵}{۲}$

$\Rightarrow m/AC = m/A'C' = \frac{۵}{۲}$

بنابرایـن $A'B'$ مـوازی AB، $B'C'$ موازی BC و $A'C'$ موازی AC است، یعنی پاره‌خط‌های نظیر موازی‌اند.

$AB = \sqrt{(۰ - ۲)^۲ + (۴ - ۰)^۲} = ۲\sqrt{۵},$

$A'B' = \sqrt{(۰ - ۴)^۲ + (۸ - ۰)^۲} = ۴\sqrt{۵}$

$\Rightarrow A'B' = ۲AB, AC = \sqrt{(۴ - ۲)^۲ + (۵ - ۰)^۲}$

$= \sqrt{۲۹}, A'C' = \sqrt{(۸ - ۴)^۲ + (۱۰ - ۰)^۲} = ۲\sqrt{۲۹}$

$\Rightarrow A'C' = ۲AC$

$BC = \sqrt{(۴ - ۰)^۲ + (۵ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۷},$

$B'C' = \sqrt{(۸ - ۰)^۲ + (۱۰ - ۸)^۲} = ۲\sqrt{۱۷}$

$\Rightarrow B'C' = ۲BC$

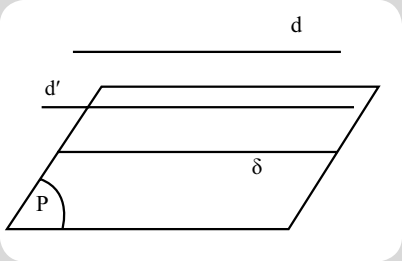
P″

k′

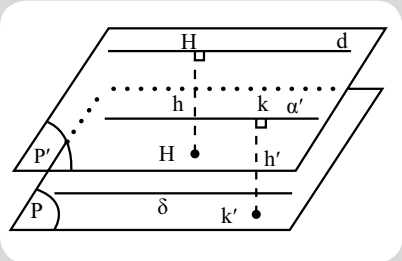
بنابرایــن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=۲$ است، یعنی پاره‌خط‌های متناظر متناسب‌اند و نسبت آن‌ها برابر ۲ است.

این تبدیل تجانســی به مرکز O، مبدأ مختصات و نسبت تجانس ۲=k است.

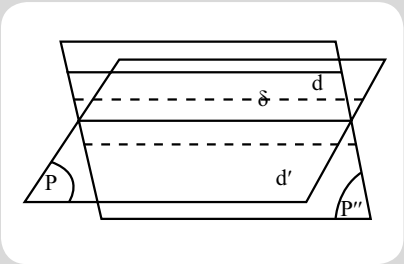
۱۴. دو خــط d و d′ مــوازی صفحهٔ p هستند. فاصلهٔ دو خط d و d′ از صفحهٔ p را به‌ترتیب h و h′ می‌نامیم.



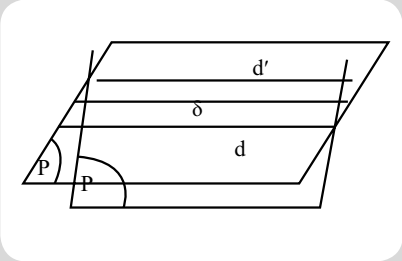
۱) اگر $h=h'\neq ۰$ باشــد، صفحهٔ p′ با صفحهٔ p موازی است.



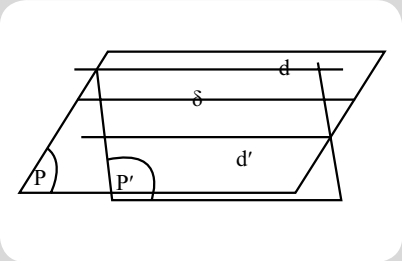
۲) اگر $h\neq h'$ باشد، صفحهٔ p′ با صفحهٔ p متقاطع است.



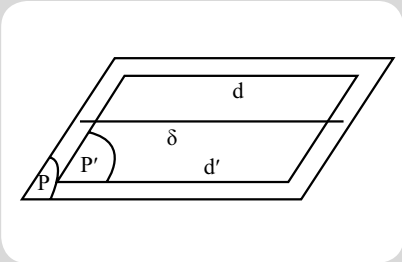
۳) اگر h=۰ و $h'\neq ۰$ باشد، صفحهٔ p′ با صفحهٔ p در خط d متقاطع است.



۴) اگر $h\neq ۰$ و $h'=۰$ باشد، صفحهٔ p′ با صفحهٔ p در خط d′ متقاطع است.



۵) اگر $h=h'=۰$ باشــد، صفحهٔ p′ بر صفحهٔ p منطبق است.



۱۵. می‌دانیم که اگر صفحه‌ای دو صفحهٔ متــوازی را قطع کند، فصل مشــترک‌های ایجاد شــده با هم موازی‌اند. با توجه به این نکتــه، KS و MH که فصل مشــترک‌های صفحــهٔ گذرنــده بر دو خــط KH و SM با هــم موازی‌اند. پس دو مثلث PKS و PMH متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{SK}{MH}=\frac{PS}{PM}=\frac{PK}{PH} \qquad (۱)$$

هم‌چنین RK || HT است، پس:

$$\frac{RK}{HT}=\frac{PK}{PH}=\frac{PR}{PT} \qquad (۲)$$

هم‌چنین RS || MT است، پس:

$$\frac{RS}{MT}=\frac{PR}{PT}=\frac{PS}{PM} \qquad (۳)$$

از مقایســهٔ رابطه‌هــای (۱) ، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{SK}{MH}=\frac{RK}{HT}=\frac{RS}{MT}$$

بنابرایــن، دو مثلــث RKS و MHT متشابه‌اند.

۱۶. در مکعب مستطیل به ضلع‌های b a، و c و قطر d داریم:

$$d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

از آن‌جا با توجه به این‌که

$d=AH=۱۰\sqrt{۶۵}\ ,AD=b=۲۰,$
$AB=a=۵۰$

با فرض AF=c داریم:

الف) $d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$

در نتیجه ضلع سوم مکعب مستطیل

$$۱۰\sqrt{۶۵}=\sqrt{۵۰^۲+۴۰^۲+c^۲}$$
$$۶۵۰۰=۲۵۰۰+۱۶۰۰+c^۲$$
$$\Rightarrow c^۲=۲۴۰۰\Rightarrow c=۲۰\sqrt{۶}$$

ب) عمود مشترک دو خط متنافر EF و BG پاره‌خط FG است، زیرا FG هم بر EF $(G\hat{F}E=۹۰^\circ)$ و هــم بر BG $(F\hat{G}B=۹۰^\circ)$ عمود است. بنابراین طول این عمود مشترک مساوی طول ضلع AB یعنی ۵۰ است.

نمایهٔ مقاله‌های ۶۹ شماره‌ی برهان متوسطه

ا

اتحادهـای مثلثاتـی، نامسـاوی‌های مثلثاتی (مثلثات)/ برهان ۲

اتحادهای مهم جبری (جبر)/ برهان ۴

اثبـات نادرسـتی و ناتمامی قواعد اسـتنتاج (منطق)/ برهان ۴

اثبات شرطی (منطق)/ برهان ۷

اصل حجره‌ها یا لانهٔ کبوتری (آنالیز ترکیبی)/ ۹

استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی (کامپیوتر)/ ۱۰

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر (منطق)/ ۱۱ و ۱۳

اثبات نادرستی (منطق)/ ۱۲ و ۱۳

انتگرال معین (دیفرانسیل)/ ۱۲

اثبات نامساوی‌ها (جبر)/ ۱۷

اصل رد و شمول (آنالیز ترکیبی)/ ۲۰

اثبات اتحاد (جبر)/ ۲۳

اثبات اتحاد مزدوج (جبر)/ ۲۴

اثبات یکتا بـودن جواب در حل یک مسـأله (هندسه)/ ۲۵

انتگرال کسرهای گویا (دیفرانسیل)/ ۲۵ و ۲۶

از تاریخ بیاموزیم (عمومی)/ ۲۹ الی ۴۷

اتحادهای جبری (جبر)/ ۳۱

اثبات چند قضیهٔ هندسه از راه‌های تازه و ساده (هندسه)/ ۳۸

اصول شمول و عدم شـمول و کاربردهای آن (آنالیز ترکیبی)/ ۳۹

اثبات اتحادها به کمک هندسـه (جبر)/ ۴۰ و ۴۱

استقرای ریاضی (نظریهٔ اعداد)/ ۴۰ و ۴۱

اثبات قضیهٔ فیثاغورس (هندسه)/ ۴۳

اعداد فیبوناتچی (جبر)/ ۴۰ الی ۴۴

اتحادها و معادله‌ها (جبر)/ ۴۳

اصل لانهٔ کبوتری (آنالیز ترکیبی)/ ۴۳ و ۶۹

احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته (احتمال)/ ۴۳ و ۴۴

اعداد اول (نظریهٔ اعداد)/ ۴۹

اثبـات دو قضیهٔ تقـارن به کمک نگاشـت‌ها (جبر)/ ۴۴

اتحاد و معادله (جبر)/ ۵۱، ۵۲، ۵۳ و ۵۶

استدلال‌های ریاضی (منطق)/ ۵۵ و ۵۶

ارثیهٔ مرد عرب (منطق)/ ۵۶

احتمال شـرطی در فضاهای هم‌شانس و غیر هم‌شانس (احتمال)/ ۵۶

اثبات اصل لانهٔ کبوتری در حالت کلی (آنالیز ترکیبی)/ ۵۶

انتخاب یک دسته گل (آنالیز ترکیبی)/ ۵۸

اثبات دیگری بر قضیهٔ هرون (هندسه)/ ۵۸

انتگرال مرزدار و بی‌مرز (انتگرال)/ ۵۹

اعداد جالب ریاضی (حساب)/ ۵۹

اتحادهای مثلثاتی (مثلثات)/ ۶۳

انتگرال‌گیری جدولی (دیفرانسیل)/ ۶۳

اتحاد و تجزیه (جبر)/ ۶۶

اتحادی دیگر (جبر)/ ۶۶

اثبات بازگشتی (استدلال ریاضی)/ ۶۷

اعداد موهومی (عمومی)/ ۶۷

اعداد اول (عمومی)/ ۶۸

اثبـات یک فرمـول کاربردی در دیفرانسـیل (دیفرانسیل)/ ۶۸

آ

آموزش ترجمه و متون ریاضی (آموزش ترجمه متون)/ ۵ الی ۲۸

آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان (عمومی)/ ۹

آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشـد (جبر)/ ۱۰

آشنایی با اعداد مختلط (جبر)/ ۱۳

آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها (عمومی)/ ۲۱

آموزش برنامه‌نویسی پاسکال (کامپیوتر)/ ۲۱، ۲۲، ۲۶ و ۳۱

آیـا قاعدهٔ هوپیتال همیشـه کارآمد اسـت؟! (دیفرانسیل)/ ۳۹ و ۴۰

آیا استدلال تمثیلی یک استدلال ریاضی است (منطق)/ ۳۳

آهنگ تغییر (دیفرانسیل یا حسابان)/ ۳۵

آشنایی با بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا (کامپیوتر)/ ۶۷ الی ۶۹

ب

بخش‌پذیری در چندجمله‌ای‌ها (جبر)/ ۱

بسـط دوجمله‌ای خیام- نیوتـن و تعمیم آن (جبر)/ ۵

برهان خلف (استدلال)/ ۶

بردارها (جبر)/ ۱۲ الی ۱۵

بی‌نهایت (جبر)/ ۱۹

بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم (هندسه تحلیلی)/ ۲۰

بررسـی قضیه‌هـای مشـتق و کاربردهای آن (دیفرانسیل)/ ۲۷ و ۲۸

برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (کامپیوتر)/ ۳۳

بحث در وجود و تعداد جواب‌های معادله سیاله تحت فضای محدود (جبر)/ ۳۵

بخش‌پذیری (جبر)/ ۳۰ و ۵۶

بحثـی در حل معماهـای فکـری و منطقی (سرگرمی ریاضی)/ ۴۳

بحـث پیرامون مقاطـع مخروطی (هندسـه تحلیلی)/ ۴۳

برد تابع (جبر)/ ۴۴

با چشـم بسـته وارد دنیای ریاضیات نشـوید (عمومی)/ ۴۴

بازتابندگی مقاطع مخروطی (هندسهٔ تحلیلی)/ ۴۶

بزرگ‌ترین توان m در n! (نظریهٔ اعداد)/ ۵۰

بحث وجود و علامت ریشـه‌های معادلهٔ درجه دوم پارامتری ۱ (جبر)/ ۵۱ و ۵۲

با راهیان المپیاد ریاضی (المپیاد)/ ۴۷ تا ۶۸

بحـث در وجـود و علامت ریشـه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم (جبر)/ ۵۳ الی ۵۵

بزرگ‌ترین مقسـوم‌علیه‌های مشترک (نظریهٔ اعداد)/ ۵۸

بلندای خئوپس (هندسه)/ ۶۰

برتراندراسل (عمومی)/ ۶۲

بی‌نهایت (عمومی)/ ۶۶

بخش‌پذیری (جبر)/ ۶۶

پ

پارادوکس وصیت شـگفت‌انگیز (سـرگرمی،

ریاضی)/ ۸
پارامتری جبری متجانس (جبر)/ ۹
پارادوکس‌هـای ریاضیات و علوم (سـرگرمی، ریاضی)/ ۳۱ و ۳۹
پارادوکس شیپور گابریل (جبر)/ ۳۵
پیشامد نامنتظر در قضیهٔ وارون (حسابان)/ ۴۰
پنج روش برای محاسـبهٔ $S_p(n)=\sum_{i=1}^{n} i^p$ (دیفرانسیل)/ ۶۱

ت
تقارن (هندسه)/ ۱ و ۱۵
تاریخچهٔ مختصر پیدایش هندسه (هندسه)/ ۱
تاریخچهٔ مجلات ریاضـی در ایران (عمومی)/ ۱۲ الی ۲۷ و ۶۶ الی ۶۹
تصاعد هندسی (جبر)/ ۳
تابع و بررسـی خاصیت یک بـه یکی در انواع توابع (جبر)/ ۴
تقارن‌محوری و مرکـزی در تابع‌های sinx و cosx (جبر)/ ۵
توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع (جبر)/ ۶
تابع معکوس تابع‌های مثلثاتی (جبر)/ ۶ الی ۸
تعیین دامنه و برد توابع (جبر)/ ۶ و ۷
تناقض‌ها در ریاضیات و علوم (منطق)/ ۶
تحقیقی پیرامون عدد π (جبر)/ ۸
توابع گزاره‌ای و سورها (منطق)/ ۹ و ۱۰
تعییـن علامـت عبارت‌هـای جبـری و حل نامعادلات و دستگاه توأم (جبر)/ ۱۱
توان (حساب)/ ۱۶ و ۱۷
تبدیل- تبدیلات خطی (نگاشـت‌های خطی)، (جبر خطی)/ ۱۷
تجزیـه چندجمله‌ای‌هـا از طریق ریشـه‌یابی (جبر)/ ۱۸
در حاشیه تابع (جبر)/ ۱۹ و ۲۳
تغییرات و انتقال منحنی‌ها (جبر)/ ۲۰
ترکیبیات (آنالیز ترکیبی)/ ۲۱
تئوری زوج خط (هندسهٔ تحلیلی)/ ۲۲
تجزیهٔ یک عـدد به عوامل اول (نظریهٔ اعداد)/ ۲۲
تابع (چند نکته دربارهٔ f(x)ها)، (جبر)/ ۲۲
تثلیث زاویه (هندسه)/ ۲۳ و ۲۵
تجزیه چندجمله‌ای‌ها (جبر)/ ۲۴
توابع مولد (گسسته)/ ۲۵
تربیت خلاقیت ریاضی (عمومی)/ ۲۵
تفکر الگوریتمی و هنر برنامه‌نویسی (کامپیوتر)/ ۲۸
تحقیقی دربارهٔ نقش تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی (تاریخ ریاضیات)/ ۲۸
تابع معکوس (جبر)/ ۳۷
تعیین علامت عبارت‌هـای جبری (جبر)/ ۲۹ و ۳۰
تعیین تعداد روابط (ترکیبیات)/ ۳۱
توزیع‌های گسسته (احتمال)/ ۳۵
تابع نمایی و تابع لگاریتمی (جبر)/ ۳۷ و ۳۹
تبدیل در صفحه (جبر خطی)/ ۳۹
تابع‌هـای متناوب و روش‌های محاسـبه دورهٔ تناوب آن‌ها (جبر)/ ۳۹
تابع‌های توانی و مدل‌های ریاضی (جبر)/ ۳۹
تعمیم قضیهٔ فیثاغورس (هندسه)/ ۴۰
تابع‌های متناوب (جبر)/ ۴۰
تعمیم یافته اصل لانهٔ کبوتر (ترکیبیات)/ ۴۱
تقریب ریشه سوم یک عدد (جبر)/ ۴۲
تابع حسابی فی‌اویلر (نظریه اعداد)/ ۴۲
تصاعد عددی (جبر)/ ۴۵
تعییـن وضع نقطه و صفحه به هم (هندسـه تحلیلی)/ ۴۶
تعیین نوع مقطع مخروطی (هندسه تحلیلی)/ ۵۲
تابع جزء صحیح (جبر)/ ۵۳ و ۵۴
ترکیبیات/ ۳۴، ۳۵، ۵۴ و ۵۵
تابع (جبر)/ ۵۵
تجزیه (حساب)/ ۵۹
تولد یک مجله (مصاحبه)/ ۵۹ و ۶۰
تعمیم قضیهٔ مربـع ارتفاع مثلـث قائم‌الزاویه (هندسه)/ ۶۲
تعـداد افرازهـای یـک مجموعـهٔ nعضوی (مجموعه‌ها)/ ۶۳
تابع چندجمله‌ای (توابع)/ ۶۴ و ۶۵
تابع رونسکی (ماتریس)/ ۶۵
تئوری پروانه (هندسه)/ ۶۶
تعیین دامنه توابع با اسـتفاده از رسـم نمودار (جبر)/ ۶۷
تابع توانی (جبر)/ ۶۸

ج
جزء صحیح (حساب)/ ۲۴، ۳۰، ۲۹، ۳۱ و ۳۸
جدول ریاضی (عمومی)/ ۴۰، ۶۱ و ۶۲
جمع چیست؟ (تابع)/ ۵۹

چ
چند برهان برای قضیهٔ همرسـی سـه ارتفاع مثلث (هندسه)/ ۵۵
چند حکم بسـیار سـاده با نتیجه‌های بسیار جالب (هندسه)/ ۶۳
چند مسئله در جبر، هندسه و هندسه تحلیلی (هندسه)/ ۶۴
چند نکته دربارهٔ اعداد اول (نظریهٔ اعداد)/ ۶۵
چند مسئلهٔ پیکارجو (المپیاد)/ ۶۸
چند رادیکال مسلسل (جبر)/ ۶۹

ح
حرف اول (یادداشت سردبیر)/ ۱ تا ۶۹
حلقه و میدان (جبر)/ ۸
حد (تعریف حد)، (دیفرانسـیل)/ ۱۳، ۱۴، ۱۶ و ۱۷
حل یک مسئله به روش‌های جبری، هندسی و... (هندسه و جبر)/ ۱۳
حل یک مسـئلهٔ جالب هندسه به کمک تابع همنگار (هندسه)/ ۱۴
حل یک مسئله آنالیز با هندسه (هندسه)/ ۱۹
حجم یک مخروط (هندسه تحلیلی)/ ۳۴
حل معادله هم‌نهشتی (نظریهٔ اعداد)/ ۳۵
حد تابع (دیفرانسیل)/ ۳۹
حل معادله‌های مثلثاتی (مثلثات)/ ۳۹ الی ۴۳
حد پیوستگی و مشتق‌پذیری... (دیفرانسیل)/ ۴۱
حل یک مسـئلهٔ هندسـه به کمک ترسـیم (هندسه)/ ۴۲
حل نامعادله‌های جبری به روش هندسی (جبر و هندسه)/ ۴۲
حل معادله‌های غیر سـادهٔ مثلثاتی (مثلثات)/ ۴۵، ۴۸ و ۵۰
حل معادله‌های کلاسـیک مثلثاتی (مثلثات)/ ۴۹
حل هندسـه چند معادله (هندسهٔ تحلیلی)/ ۵۸
حد تابع در یک نقطه (دیفرانسیل)/ ۶۰ و ۶۱

خ
خطوط مجانب‌ها (دیفرانسیل)/ ۱۰
خط‌های راسـت و صفحه‌هـای عمودبرهم در فضا (هندسه تحلیلی)/ ۱۵ و ۱۷
خم پروانه (هندسه)/ ۲۸

د
در بـاغ تجربه‌ها (عمومـی)/ ۴، ۵، ۸، ۲۱، ۲۳ الی ۲۵ و ۲۸
در حاشیهٔ مجموعه‌ها (مجموعه‌ها)/ ۵

دیفرانسیل و انتگرال/ ۶ و ۷
دوران در هندسهٔ تحلیلی (هندسه تحلیلی)/ ۹
دستگاه محورهای مختصات (هندسه تحلیلی)/ ۱۲
دربارهٔ مسائل ساختمانی در هندسهٔ فضایی (هندسه تحلیلی)/ ۱۳
در پیرامون منظومهٔ شمسی (عمومی)/ ۱۴ و ۱۵
داستان شیر و موش در هندسه (عمومی)/ ۱۷
در اظهار نظر اشتباه نکنیم (عمومی)/ ۱۸
دسته خط (هندسه تحلیلی)/ ۱۹
در کشویی (هندسه)/ ۲۲
دنباله (دیفرانسیل)/ ۲، ۲۳، ۴۵ و ۶۹
دنباله و تصاعدهای عددی و هندسی (جبر)/ ۲۹
در حاشیهٔ تابع (جبر)/ ۲۴
در حاشیهٔ مشتق و مشتق‌پذیری (دیفرانسیل)/ ۲۵
دربارهٔ سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات (عمومی)/ ۲۵
دو روش در ترسیم نیمساز (هندسه)/ ۲۶
دیفرانسیل خطی‌سازی و خط/ ۲۷
دفاعیهٔ ریاضی‌دان (عمومی)/ ۳۱
در آینه (عمومی)/ ۳۱
در حاشیهٔ مثلثات/ ۲۹ الی ۳۱
دربارهٔ یک مسئلهٔ بوزجانی (هندسه)/ ۳۰
دترمینان (ماتریس)/ ۴۰ و ۴۱
در حاشیهٔ گراف‌های ساده (گراف)/ ۴۱
دنباله، حد دنباله (دیفرانسیل)/ ۴۱ و ۴۲
دربارهٔ اتحاد و معادله (جبر)/ ۴۱ و ۴۲
در حاشیهٔ هندسه تحلیلی، صفحه نیمساز در فضا (هندسه تحلیلی)/ ۴۳
دایره‌های محاط در بیضی (هندسه تحلیلی)/ ۵۱
دنباله‌های عددی (جبر)/ ۵۲
درخت چیست؟ (گراف)/ ۵۳
دستگاه شمار (نظریه اعداد)/ ۶۳
دربارهٔ یکی از نظرهای هوشمندانهٔ ابوالوفای بوزجانی (هندسه)/ ۶۷

ر
روش برهان خلف (منطق)/ ۸
ریاضیات گسسته/ ۱۰، ۱۶ و ۱۸ الی ۲۴
رابطه ـ خواص رابطه (مجموعه‌ها)/ ۱۲
رابطه‌های هم‌ارزی و کلاس‌های هم‌ارزی (مجموعه‌ها)/ ۱۳، ۴۵ و ۶۸
رابطهٔ هم‌نهشتی ـ خواص و کاربردهای آن در Z (نظریه اعداد)/ ۱۴
ریاضیات کاربردی (عمومی)/ ۱۶
رادیکال (حساب)/ ۱۷ الی ۲۱، ۳۰ و ۳۱
رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f (دیفرانسیل)/ ۱۸ و ۶۴
ریاضیات و کاربردهای آن (عمومی)/ ۱۸
رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی نمودار تابع f (دیفرانسیل)/ ۲۱
رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی به روش نقطه‌یابی و انتقال (مثلثات)/ ۲۲
روش‌های عددی برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های معین (دیفرانسیل)/ ۲۲ و ۶۶
رابطهٔ آموزش ریاضی و فرهنگ (عمومی)/ ۲۴
رشد و زوال (دیفرانسیل)/ ۲۹
ریاضیات ترکیبیاتی (ترکیبیات)/ ۲۷
روش‌های محاسبهٔ سریع (حساب)/ ۳۴ و ۳۷
روش تعیین عرض‌های اکسترمم (دیفرانسیل)/ ۳۴
ریاضیات تفریحی از منظر تکامل (عمومی)/ ۳۸ و ۳۹
روشی برای اثبات $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (دیفرانسیل)/ ۳۸
رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g (دیفرانسیل)/ ۴۰ و ۶۳
ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (جبر)/ ۴۱
ریاضیات و نقش آن در زندگی روزمره (عمومی)/ ۴۱
راه‌حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شدهٔ ریاضی (عمومی)/ ۴۳
روش ارشمیدس برای محاسبه عدد π (جبر)/ ۴۶
روش مگسی در حل مسائل ریاضی (عمومی)/ ۵۰
رسم نمودار تابع بدون مشتق (دیفرانسیل)/ ۵۴ و ۵۵
رویکرد هندسی ـ رویکرد جبری (هندسه و جبر)/ ۵۶ تا ۶۹
ریاضیات در ایران (عمومی)/ ۵۹ تا ۶۷
روش یافتن جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ خاص با ... (حساب)/ ۵۹
رسم نمودار تابع (جبر)/ ۵۹
رنه دکارت (عمومی)/ ۶۱
ریاضی‌دان و شاعر خطه‌ی خراسان (عمومی)/ ۶۶
ریشهٔ خارجی معادله (جبر)/ ۶۶
روشی دیگر برای محاسبهٔ ماتریس وارون (ماتریس)/ ۶۷
ریاضیات و تصمیم‌گیری جمعی (عمومی)/ ۶۸
رابطهٔ بین مجذور اعداد و مجذور مقلوب آن‌ها (عمومی)/ ۶۸

س
سرگرمی برای اندیشه‌ورزی (منطق)/ ۲۰، ۲۲ و ۶۷
سهمی (هندسه تحلیلی)/ ۲۷
سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته/ ۴۵ و ۵۱
سری (دیفرانسیل)/ ۴۶
سری هندسی مثلثاتی (سری‌ها)/ ۶۸

ش
شگفتی‌های ریاضی (عمومی)/ ۵
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (عمومی) ۱۱ الی ۲۶
شهود ریاضی و استدلال شهودی (منطق)/ ۴۷
شرایط تدریس ریاضی (منطق) ۴۸
شرط عمود بودن و مماس‌بودن یک خط بر مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی)/ ۱۴

ص
صورت قطبی (مثلثاتی) و هندسی اعداد مختلط (جبر و مثلثات)/ ۱۵
صفر (عمومی)/ ۶۲

ض
ضرب خارجی و برخی ویژگی‌های آن (هندسه تحلیلی)/ ۴۵
ضرب ماتریس‌ها و خواص عملی ضرب ماتریس (ماتریس)/ ۵۰

ط
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی (جبر)/ ۳ الی ۲۴
طرح یک مسئلهٔ جالب دربارهٔ قوطی‌ها (عمومی) ۷
طول تسمه (عمومی)/ ۵۵
طراحی با رابطه‌های ریاضی (رسم نمودار رابطه)/ ۶۳

ع

عمود مشترک دو خط متنافر (هندسه تحلیلی)/ ۷

عدد جادویی هفت (پیش‌گویی) (حساب)/ ۱۳

عمل حاصل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها (مجموعه‌ها)/ ۱۱

عبارت‌های جبری گویا و اعمال بر روی آن‌ها (جبر)/ ۴۴

عدم وجود حد (دیفرانسیل)/ ۳۳

عدد پی (نظریهٔ اعداد)/ ۶۴

عدد e (نظریهٔ اعداد)/ ۶۵

غ

غیاث‌الدین جمشید کاشانی (تاریخ ریاضیات)/ ۴۲

ف

فاصلهٔ یک نقطه از یک مجموعهٔ نقاط (هندسه تحلیلی)/ ۸

فیثاغورس و هوش آزمایی فرزندان (عمومی)/ ۱۰

فاصلهٔ نقطه از خط در فضا (هندسه تحلیلی)/ ۱۴

فضای برداری (جبر خطی)/ ۱۵ و ۱۶

فرمولی در اعداد اول و نتایج آن (نظریه اعداد)/ ۵۲

فرمانروای هوشمند (عمومی)/ ۵۹

ق

قضیهٔ رول و قضیهٔ مقدار میانگین (دیفرانسیل)/ ۴۵

قرینه‌یابی در فضا (هندسه تحلیلی)/ ۵۱

قضیهٔ مقدار میانگین (دیفرانسیل)/ ۲۹ و ۳۰

قضیهٔ کوتاه‌ترین راه (هندسه)/ ۳۴

قضیهٔ نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن (هندسه)/ ۶۰

قضیه تقسیم و کاربردهای آن در z (نظریهٔ اعداد) ۶۱ تا ۶۴

ک

کانون‌یاب بیضی (هندسه تحلیلی)/ ۱۰

کاربردهایی از تابع همنگار (جبر)/ ۱۲

کاربرد دترمینان (جبر خطی)/ ۱۷ و ۱۸

کاربرد ریاضی در شیمی (عمومی)/ ۲۱

کامپیوتر و شغل آینده (کامپیوتر)/ ۲۲

کاربردهایی از قضیهٔ لاگرانژ (جبر)/ ۵۸

کشف یک عدد با بازی ریاضی (عمومی)/ ۶۷

گ

گروه پیدایش و کاربرد نظریهٔ گروه‌ها (جبر نوین)/ ۱

گراف (گراف)/ ۱۷ و ۱۸

گراف اویلری (گراف)/ ۵۱

گراف همیلتنی (گراف)/ ۵۲

گشت‌وگذاری در ریاضیات معاصر (عمومی)/ ۲۹ الی ۳۳

گراف تورنمنت (گراف)/ ۵۸

گراف‌های منتظم و کامل (گراف)/ ۶۷

ل

لگاریتم (حساب)/ ۱ و ۵۸

م

منطق قدیم و ریاضیات (منطق)/ ۱

معادلات (جبر)/ ۲

منطق جدید و ریاضیات (منطق)/ ۲

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه (مثلثات)/ ۳

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (عمومی)/ ۳ تا ۲۸

مثال‌های هندسی برای تابع‌های گسسته (هندسه و جبر)/ ۴

مفهوم‌های اصلی و اصل موضوع‌ها در هندسهٔ فضایی (هندسه تحلیلی)/ ۷ الی ۱۰

مرکزیاب دایره (هندسه تحلیلی)/ ۷

مشتق‌پذیری (دیفرانسیل)/ ۸

میدان (جبر نوین)/ ۸

معادلهٔ درجه سوم (جبر)/ ۹

مکان هندسی (هندسه)/ ۹ الی ۳۷

مثلث ارتفاعیه (هندسه)/ ۱۰ و ۱۱

معادلهٔ درجه دوم (جبر). ۱۱، ۴۸ الی ۵۱

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی (کامپیوتر)/ ۱۲ الی ۲۰

مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی)/ ۱۷، ۱۸ و ۲۰ تا ۲۲

محاسبهٔ همزمان سری‌های $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ به کمک اعداد مختلط (دیفرانسیل)/ ۱۷

معرفی یک اتحاد مثلثاتی و کاربردهایی از آن (مثلثات)/ ۱۸

ماکزیمم و مینیمم (جبر)/ ۱۹

محاسبهٔ مساحت دایره (هندسه تحلیلی)/ ۲۰

منطق خود را بیازمایید (منطق)/ ۲۱

میانگین همساز (جبر)/ ۲۲

مجموع k عدد طبیعی اولیه (نظریه اعداد)/ ۲۳

مفهوم حد (دیفرانسیل)/ ۲۳

مصاحبه با یک عدد (عمومی)/ ۲۴

مبهم یا تعریف شده (دیفرانسیل)/ ۲۵

مسئلهٔ حل مسئله‌های ریاضی (عمومی)/ ۲۵ الی ۳۰

معرفی ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی (تاریخ ریاضیات)/ ۲۶

معماهایی با ماهیت ریاضی (منطق و سرگرمی)/ ۲۷ و ۲۸

مربع‌های فوق‌جادویی (منطق و سرگرمی)/ ۲۸

مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی)/ ۳۱ و ۳۷

معادله خط (هندسه تحلیلی)/ ۳۷

ماتریس‌ها، تبدیل و کاربردهای آن‌ها (جبر خطی)/ ۳۸

مدل‌سازی مقدماتی ریاضی (عمومی)/ ۳۸

مکان‌های هندسی دو نقطه‌ای (هندسه)/ ۴۰

مبحثی در هم‌گرایی چند سری خاص (دیفرانسیل)/ ۴۲

مجانب‌ها (دیفرانسیل)/ ۴۲

مشتق‌پذیری تابع f در نقطه x_0 روی منحنی f (دیفرانسیل)/ ۴۳

ماتریس وقوع گراف جهت‌دار (گراف)/ ۴۳

معادله‌های مثلثاتی (مثلثات)/ ۴۴، ۴۶ و ۴۷

محاسبه حدود $\sum\frac{1}{x^n}$ (دیفرانسیل)/ ۴۴

مثلثات (مثلثات)/ ۴۴

مجموعه اعداد گویا (مجموعه‌ها)/ ۴۴

معادله و اتحاد (جبر)/ ۴۵

منطق ریاضی (منطق)/ ۴۶ الی ۴۹

میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله اصفهانی (تاریخ ریاضیات)/ ۴۶

محک‌هایی برای شناخت اعداد اول و دوقلوهای اول (نظریه اعداد)/ ۴۶

مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته (احتمال)/ ۴۷ و ۴۸

معادله‌های گنگ (جبر)/ ۴۷

مسائل هندسهٔ ابوالوفای بوزجانی (هندسه)/ ۴۸

معماهای فکری و منطقی (منطق و سرگرمی)/ ۴۸

معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی (جبر)/ ۴۹

مسابقهٔ ریاضی در کشورهای مختلف دنیا (المپیاد)/ ۴۹ تا ۶۹

محاسبهٔ فاصلهٔ پای عمودمنصف (هندسه تحلیلی)/ ۵۰

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات