دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ISSN: 1735-4951

۷۵

همراه با ویژه‌نامهٔ زنده‌یاد پرویز شهریاری

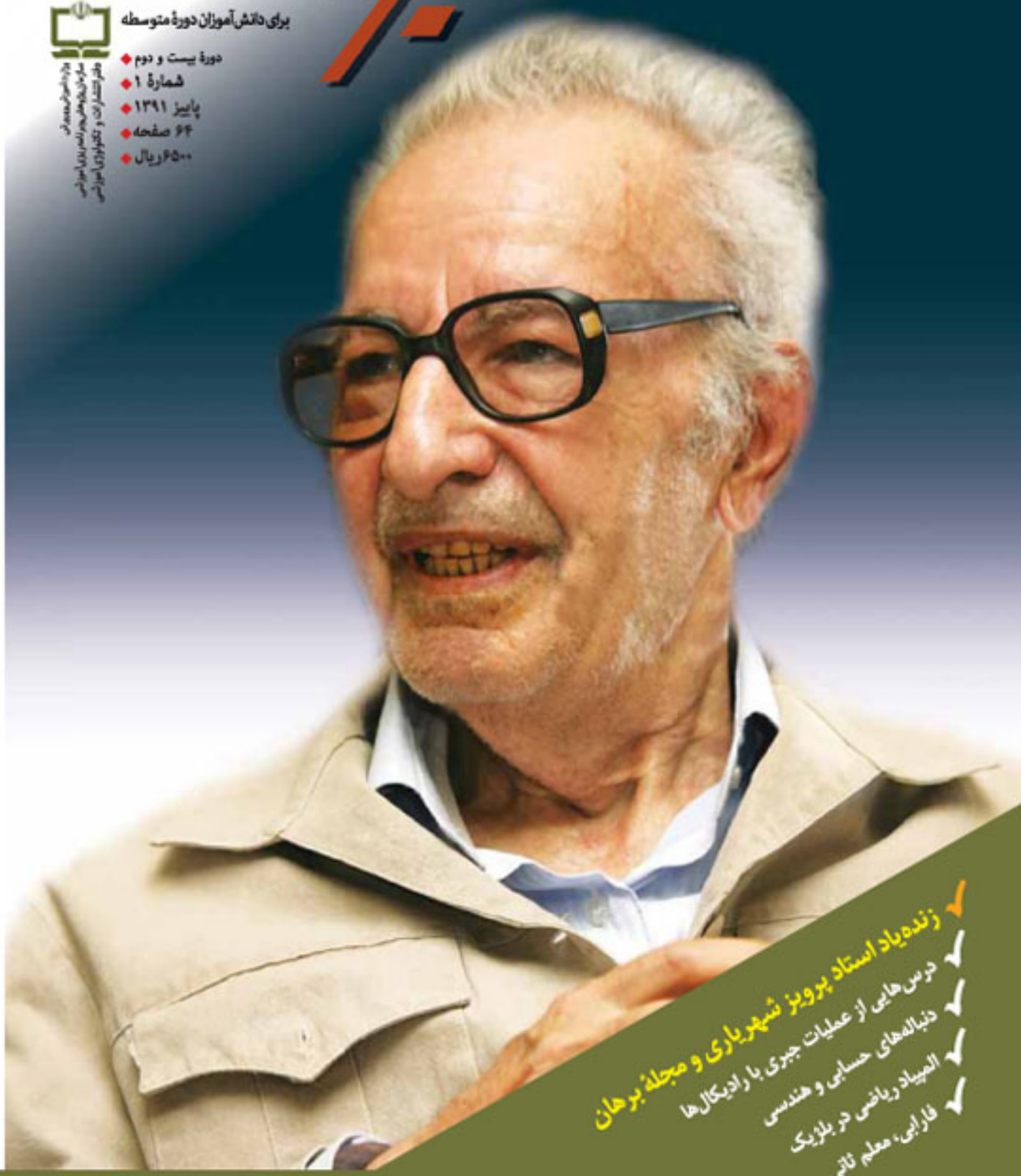
www.roshdmag.ir

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

رشد برهان ریاضی

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست و دوم
شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۱
۶۴ صفحه
۶۵۰۰ ریال



- زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری و مجلهٔ برهان
- درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها
- دنباله‌های حسابی و هندسی
- المپیاد ریاضی در بلژیک
- فارابی، معلم ثانی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حرف اول

مردی که ۲۱ سال با مجلهٔ رشد برهان متوسطه زندگی کرد

دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی «رشد برهان متوسطه» و تمام کسانی که در طول این ۲۱ سال با مجلهٔ برهان آشنا بوده و مقالات آن را مطالعه کرده‌اند و در واقع، همهٔ افرادی که به نوعی با ریاضیات سروکار دارند، استاد پرویز شهریاری، چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی ایران را می‌شناسند، از کتاب‌ها و مقالات ایشان استفاده کرده‌اند و به نوعی خود را شاگردِ استاد می‌دانند. استاد فرزانه‌ای که هم‌اکنون بین ما نیست و چندی است به دیار باقی شتافته و همهٔ ما از فیض وجودش محروم شده‌ایم.

استاد شهریاری از اولین شمارهٔ مجله برهان که در سال ۱۳۷۰ به چاپ رسید و البته قبل از چاپ مجله، یعنی از اواخر سال ۱۳۶۹، در برنامه‌ریزی و تعیین خط‌مشی مجله با آن همکاری مستمر و تنگاتنگی را آغاز کرد. وی علاوه بر شرکت فعال در جلسات هیئت تحریریه و حضور مؤثر در جمع اعضای این هیئت، همواره در هر شماره مقاله یا مقالاتی را نوشته است. همیشه، مقالات استاد به گفتهٔ همهٔ خوانندگان جزو خواندنی‌ترین و بهترین مقالاتِ برهان بوده است؛ سلسله مقاله‌هایی تحت عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» (که این سلسله مقاله‌ها به صورت کتاب توسط انتشارات مدرسه به چاپ رسید) «از تاریخ بیاموزیم»، «یادهای آموزشی»، «اتحاد و معادله»، «ریاضیات در ایران» و... که تعداد این مقاله‌ها در ۷۴ شمارهٔ برهان به حدود ۱۰۵ مقاله می‌رسد.

استاد شهریاری در طول ۲۱ سال همکاری مستمر با مجلهٔ ریاضی برهان، حتی در یک جلسهٔ هیئت تحریریه تأخیر نداشتند و همیشه لااقل نیم ساعت قبل از شروع جلسه در دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی حاضر بودند. هرگاه در جلسات هیئت تحریریه روی مسئلهٔ مهمی بحث می‌شد یا اختلاف نظری بین اعضا به‌وجود می‌آمد، ایشان با متانت و آرامش خاصِ خودشان حرف آخر را می‌زدند و البته با ذکر منطق حاکم بر نظر خودشان با ذکر مثال یا تجربه‌ای در آن زمینه، بحث را خاتمه می‌دادند.

وقتی در زمستان سال ۱۳۶۹با طرحم برای چاپ یک مجلهٔ ریاضی موافقت شد، به منظور معرفی اعضای هیئت تحریریه با استاد شهریاری تماس تلفنی گرفتم و جریانِ انتشار این مجله و اهداف آن را با ایشان در میان گذاشتم. ایشان فرمودند: «مجله‌ای شبیه به مجلهٔ یکان؟! خیلی موافقم! اولین جلسه کجا و کی تشکیل می‌شود؟»

من واقعاً باور نمی‌کردم استاد بزرگی همچون شهریاری به همین راحتی دعوت مرا پذیرفته باشند. ایشان در همان جلسهٔ اول که با حضور آقایان غلامرضا یاسی‌پور و محمدهاشم رستمی و سیدحسین سیدموسوی تشکیل شد، نام زیبای برهان را برای مجله پیشنهاد کردند که همگی پذیرفتند.

فکر می‌کنم بعد از چاپ سه یا چهار شماره از مجلهٔ ریاضی برهان، استاد شهریاری مجلهٔ «آشنایی با ریاضیات» را که خودشان سردبیری آن را به‌عهده داشتند، تعطیل کردند. وقتی از ایشان سؤال کردم چرا این مجله را تعطیل کردند فرمودند: «دست تنها بودم. در ضمن برهان خیلی خوب دارد پیش می‌رود و من بیشتر روی این مجله انرژی خواهم گذاشت.»

و ما در طول این ۲۱ سال همکاری، شاهد عمل به این قولِ توسط استاد بودیم. مجلهٔ ریاضی برهان واقعاً برایشان در اولویت کارها، نوشته‌ها و تألیفاتشان قرار داشت.

ضایعه جبران‌ناپذیر از دست دادن استاد شهریاری نه تنها برای مجلهٔ ریاضی برهان، بلکه برای جامعهٔ ریاضی و علمی ایران بسیار سنگین است. از خداوند متعال خواستارم که ما را در ادامهٔ راه استاد که همان عزت و سربلندی جامعهٔ علمی کشور و دست‌یابی به بالاترین حد آموزش، به‌خصوص آموزش ریاضی در ایران است، یاری بخشد تا روح زنده‌یاد پرویز شهریاری به آرامش ابدی برسد.

سردبیر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

همچون آفتاب

ویژه‌نامهٔ یار دیرین مجله و ریاضیدان معاصر

زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری

دل می‌رود ز دستم...

گزارشی کوتاه از مراسم تشییع و مراسم بزرگداشت استاد پرویز شهریاری

«وداع با شهریار ریاضیات» عنوان مطلبی بود که در یکی از نشریات صبح روز شنبه ۲۳ اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱ در بازتاب خبر درگذشت استاد پرویز شهریاری، به چاپ رسید. استاد پرویز شهریاری در پی ناراحتی ناشی از عفونت ریه‌ها، روز چهارشنبه ۲۰ اردیبهشت در بیمارستان جم تهران بستری شد و دو روز بعد، در صبح جمعه ۲۲ اردیبهشت دارفانی را وداع گفت.

مراسم تشییع پیکر ایشان بعدازظهر همان روز و از مقابل «دبیرستان فیروز بهرام» انجام گرفت. در مراسم تدفین استاد ده‌ها نفر از چهره‌های فرهنگی کشور حضور داشتند. از جمع اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ «رشد برهان متوسطه» نیز، آقایان حمیدرضا امیری، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر و سیدمحمدرضا هاشمی موسوی در این مراسم شرکت کردند. پس از آن سه مراسم به شرح زیر در بزرگداشت آن استاد فرزانه برگزار شد:

۱. روز پنج‌شنبه ۲۸ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۱۸ تا ۲۲ از طرف «خانهٔ ریاضیات تهران» و به مناسبت «روز جهانی خیام» مراسم ویژه‌ای برگزار شد. در این مراسم به مناسبت بزرگداشت زنده‌یاد دکتر شهریاری نیز برنامه‌هایی به اجرا درآمد؛ از جمله: سخن‌رانی آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجلهٔ رشد برهان متوسطه؛ سخن‌رانی آقای محمد باقری؛ سخن‌رانی آقای دکتر ممقانی، نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران و فیلم کوتاهی هم از زندگی استاد نمایش داده شد.

آقای امیری در سخن‌رانی خود، متن پیام تسلیت آقای دکتر محی‌الدین بهرام محمدیان، معاون وزیر و رییس «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی» وزارت آموزش‌وپرورش را قرائت کرد و پس از آن متن این پیام را به آقای دکتر شهریار شهریاری (فرزند استاد) تقدیم نمود.

۲. روز جمعه ۲۹ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۳ تا ۵ بعدازظهر مراسمی در محل «انجمن زرتشتیان تهران» واقع در «خیابان میرزا کوچک‌خان» برگزار شد. در این مراسم بسیاری از دبیران، استادان دانشگاه، مؤلفان، مترجمان و صدها نفر از چهره‌های فرهنگی و شخصیت‌های علمی حضور داشتند. حضور جناب حجت‌الاسلام سیدمحمود دعایی، نمایندهٔ محترم ولی فقیه در «روزنامهٔ اطلاعات» نیز جالب توجه بود.

سخن‌ران این مراسم ضمن بیان شمه‌ای از فعالیت‌ها و تلاش‌های استاد شهریاری در ترویج دانش ریاضی بین نسل‌های گوناگون جوانان این مرز و بوم، به تجلیل از شخصیت ماندگار ایشان پرداخت. شایان ذکر است که به علت ازدحام جمعیت، حضور بسیاری از علاقه‌مندان استاد در این مراسم میسر نشد و همه نتوانستند به سالن مراسم وارد شوند.

۳. روز چهارشنبه ۳ خرداد ۹۱ نیز مراسمی در محل «فرهنگ‌سرای ابن‌سینا» واقع در شهرک قدس تهران برگزار شد.

سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز

پیام تسلیت حجت‌الاسلام والمسلمین دکتر محمدیان معاون وزیر و رییس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی به مناسبت درگذشت استاد پرویز شهریاری

هر ورق از تاریخ کشور ما، نام و یادی از عالمان و دانشمندان یا هنرمندانی را در خود جای داده است که آثار وجودی آنها، مایهٔ افتخار مُلک و ملت و خیر و برکت عالم انسانی است؛ کسانی که کتاب و قلم و خامه و چامهٔ آنان روشنی‌بخش اندیشه و آرامش‌بخش دل انسان‌های مشتاق آموختن و فهمیدن برای بهتر زیستن است؛ به‌ویژه اگر آن عالم یا هنرمند معلمی در خدمت تربیت، آموزش و تألیف و ترجمه بوده باشد. استاد گران‌مایه، **پرویز شهریاری**، معلم پیش‌کسوت و پیشرو در آموزش ریاضی برای فرزندان این مرز و بوم و چهرهٔ ماندگار این رشته، مردی که چندین نسل از دانش‌آموزان و دانش‌آموختگان کشور با کتاب‌های او، ریاضی‌خوان و ریاضی‌دان شده‌اند، شخصیتی بود که علی‌رغم چهره در نقاب خاک کشیدن، هم‌چون آفتاب در دل و جان و ذهن و یاد دانشجویان و پژوهشگران عرصهٔ دانش ریاضیات خواهد ماند.

فقدان این استاد دانشمند که با «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» در برنامه‌ریزی، تألیف و تدوین کتاب‌های درسی، به‌ویژه مجلات رشد همکاری پایا و مانایی داشت، موجب تألم و تأثر گردید.

ضمن عرض تسلیت این ضایعهٔ غمناک و تأسف‌برانگیز به شاگردان و بهره‌مندان محضر علمی آن استاد فرزانه، به‌ویژه خاندان محترم ایشان، آرزومند علوّ درجه و مرتبه، و آرامش و غفران در جوار رحمت حق تعالی برای روح آن استاد، و صبر و شکیبایی برای بازماندگان هستیم. امید آنکه با دوام تلاش‌های علمی، آموزشی و پژوهشی از سوی شاگردان و تربیت‌یافتگان ایشان شاهد سربلندی جمهوری اسلامی ایران در عرصه‌های علم و فرهنگ که از آرزوهای همیشگی استاد بوده است، باشیم.

سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز
مرده آن است که نامش به نکویی نبرند

دل‌نوشته‌ای از دکتر مهدی بهزاد

رییس پیشین «انجمن ریاضی ایران» و استاد ریاضی دانشگاه‌های کشور

ورای بوستان دل یک صحرا است بی‌پایان
به پای جان توان رفتن در آن صحرای حیوانی
ترا چون از تو بستاند، نمانی، جمله او ماند
تو آن‌که خواه اَنَا الحق گوی و خواهی گوی سبحانی
(فخرالدین عراقی)

فرهیختهٔ نیک‌پندار، پرویز شهریاری را بیش از ۴۰ سال است می‌شناسم و با دستاوردها و توانایی‌های گوناگونش آشنایی دارم: معلمی شایسته، مدیری مدبر، مورخی چیره‌دست، نویسنده‌ای توانا و مترجمی پرکار و پربار بود که در آستانهٔ ۹۰ سالگی هم از تماشای رقص قلم خسته نمی‌شد و همچنان افتخار می‌آفرید. بخت با ایران و ایرانی یار بود که به دنبال اخذ مدرک دکترا نرفت و به جای آن آثاری متنوع تولید کرد که کم و کیفشان را بزرگان به تفضیل خواهندنوشت.

در دو سفر داخلی همراهش بودم و در چند نشست علمی از وجودش کسب فیض کردم. افتخار می‌کنم که نقشی بموقع و مؤثر ایفا کردم تا به شایستگی دکترای افتخاری کسب کند و عنوان چهرهٔ ماندگار ریاضیات مدرسه‌ای نصیبش شود. بی‌شک بسیاری از آثارش بارها و بارها تجدید چاپ خواهند شد و منبع فیض خواهند بود، اما چون علم و ریاضیات را کم اهمیت‌تر از شعر و ادبیات نمی‌دانم، به جد از شاگردان مستقیم و غیرمستقیم میلیونی استاد می‌خواهم به عنوان زیارتگه علم و معرفت، احداث بنای یادبودی را به عظمت بارگاه **شهریار** در تبریز به افتخار شهریاری در کرمان مدنظر قرار دهند. و نیز به دو «انجمن ریاضی ایران» و «ترویج علم ایران» پیشنهاد می‌کنم جایزه‌ای مشترک به نام پرویز شهریاری تعیین کنند تا همه ساله طبق آیین‌نامه‌ای خاص به مروجان برتر ریاضیات کشور اهدا شود.

یادش جاودان و راهش پررهرو باد.

یاد استاد

حمیدرضا امیری ـ سردبیر مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطه

خیلی سخت و دشوار است که بخواهم در مورد شخصیتی بنویسم که ۲۱ سال در کنار هم بودیم و اکنون در جمع ما حضور ندارد و برای همیشه در کنار او بودن و فیض وجودش را از دست داده‌ایم.

استاد شهریاری عزیز، شما برایم همیشه زنده‌اید و افکار، توصیه‌ها و راهبردهای شما همواره با من و در ذهن و جان من جاری و ساری است.

استاد عزیز، هیچ‌گاه لذت لحظاتی که با شما سپری کردم، از یاد و خاطرم نخواهد رفت. روزها و ساعت‌هایی که در جمع هیئت تحریریه و یا مکان‌های دیگر بنا بر مناسبت‌های گوناگون در محضر شما بودم و از لحظه‌لحظهٔ آن درس می‌گرفتم و شاگردی می‌کردم و شما همچون پدری مهربان برایم راهنما و سرمشق بودید، جزو بهترین ساعت‌های عمرم محسوب می‌شود.

هرگز روزهایی را که در «دبیرستان فیروز بهرام» با هم تدریس داشتیم فراموش نمی‌کنم. به‌خصوص زنگ‌های تفریح که شما از کلاس جبر سوم و بنده از کلاس ریاضیات جدید می‌آمدیم و در آن دقایقی که در خدمت شما بودم، همواره با شوخی‌های لطیف خود روحیه‌ای مضاعف به من می‌بخشیدید.

استاد عزیزم، از سال ۱۳۶۹ تاکنون هنوز طنین اولین صحبت تلفنی با شما در گوشم هست که وقتی خودم را معرفی کردم و توضیح دادم که می‌خواهم مجله‌ای مشابه «مجلهٔ یکان» راه‌اندازی کنم و به کمک شما نیاز دارم، فرمودید: «کار خیلی خوبی است. با این کار موافقم. آدرس شما کجاست تا اولین جلسه را شروع کنیم؟»

باورم نمی‌شد ای استاد که به همین راحتی و در نهایت بزرگواری دعوت مرا پذیرفته باشید. از آن پس همواره با چهرهٔ متین، آرامش‌بخش و در عین حال فکور، هر سه یا چهار هفته یک‌بار نیم ساعت قبل از شروع جلسه هیئت تحریریه در دفتر انتشارات حضور می‌یافتید و تا پایان ما را همراهی می‌کردید.

استاد شهریاری عزیز، سال‌ها از آن تاریخ می‌گذرد که یک‌بار از شما سؤال کردم: «چرا پیشنهاد «دانشگاه ونکوور» را برای تدریس «تاریخ ریاضیات» با آن شرایط ایده‌آل و در کنار خانواده نپذیرفتید؟»

و شما با عبارتی کوتاه اما معنی‌دار که تا زنده‌ام آن را فراموش نخواهم کرد، فرمودید: «اگر قبول می‌کردم، الان در جمع شما عزیزان مجله برهان نبودم.»

استاد بزرگوار، روزی ویژگی‌های شغل معلمی را برایم بیان کردید و فرمودید:

«معلم یک پروندهٔ زنده است. در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجهٔ کار خود را تا زنده است، مشاهده کند.»

اینکه: «معلم همیشه در دو نسل زندگی می‌کند: یکی نسل خودش و دیگری نسل بچه‌هایی که با آنها سروکار دارد.»

و اینکه از من سؤال کردید چند ساعت در روز تدریس می‌کنم و عرض کردم حدود هشت ساعت. فرمودید: «پس هشت ساعت دروغ نمی‌گویید. این ویژگی شغل شریف شماست که تا درس می‌دهید، امکان دروغ‌گفتن را در حضور دانش‌آموزان ندارید.»

استاد عزیز، من از شما درس‌ها و تجربیات بسیاری را آموخته‌ام و به مصداق کلام گهربار امیر مؤمنان **علی(ع)** که فرمودند: «من عَلّمَنی حرفاً فَقَد صَیَّرنی عَبداً»، بار سنگینی را بر دوش خود احساس کرده و می‌کنم؛ اینکه بتوانم حق شاگردی را به‌جا آورم، یاد و خاطرهٔ شما را زنده نگه دارم و همهٔ تجربیات و آموزه‌هایم را که شما در طبق اخلاص و در کمال بزرگواری در اختیارم قرار دارید، به نسل‌های بعدی منتقل نمایم.

استاد عزیزم، شما هیچ‌گاه از یاد و خاطرهٔ شاگردانتان نخواهید رفت و همواره برای همهٔ ما زنده‌اید. از خداوند منان می‌خواهم توفیق ادامهٔ راه استاد را که همان راه معلمی و ترویج علم و معرفت است، به ما عطا کند.

به همهٔ شما دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان توصیه می‌کنم که در همهٔ دوران زندگی خود همواره قدر معلمان و استادان محترم خود را بدانید و از شمع وجود آنها فیض ببرید.

پرورش‌دهندهٔ شکوفه‌های ریاضی

زهرا گویا ـ استاد ریاضیات دانشگاه شهید بهشتی و سردبیر مجلهٔ رشد ریاضی

استاد شهریاری طی پنج سالی که مراسم «جُنگ شکوفه‌ها» از طرف دانشکدهٔ علوم ریاضی «دانشگاه شهید بهشتی» برگزار می‌شد (۱۳۷۵ تا ۱۳۸۰)، در تمام آنها شرکت کرد. تقریباً هم تا آخر مراسم حضور داشت و با حوصله، سعهٔ‌صدر و شوخ‌طبعی منحصر به فردش، با دانش‌آموزان دبیرستانی به گفت‌وگو نشست. شیرینی حضور ایشان در جمع‌های بیش از ۱۰۰۰ نفری «بچه مدرسه‌ای‌ها»، غوغایی در دانشگاهمان برپا می‌کرد که نظیرش کمتر دیده می‌شد.

شهریاری سخنور، انسان‌دوست، عاشق، فهیم و آشنا با زمانهٔ خویش بود و شخصیتی چندوجهی و چندبعدی داشت. استاد در مراسم سومین گردهمایی شکوفه‌های ریاضی، مثل همیشه راست قامت، مطمئن، سربلند و عاشقانه، خطاب به بیش از هزار دانش‌آموز، آنها را «معشوق‌های» خویش نامید و به این نکتهٔ اساسی اشاره کرد: «سفارشی که به جوان‌های خودم، فرزندان خودم، دارم این است که کوشش کنند چندبعدی باشند. انسان موجودی نیست که بتوان پاره‌پاره‌اش کرد... خودمان را از رشته‌های دیگر جدا نکنیم.»

و بالاخره با توضیحات مبسوط، فرق بین «انسان» و «آدم‌واره» را بیان کردند. شهریاری برای بسیاری از دانش‌آموزان ما چندان شناخته شده نیست، اما در ۱۰۰ شمارهٔ مجله، آثارش چراغ راه این عزیزان است.

هرگز نمیرد آن‌که دلش زنده شد به عشق ثبت است بر جریدهٔ عالم دوام ما

معلم نمونه

هوشنگ شرقی ـ مدیرداخلی مجلهٔ رشد برهان متوسطه

پرویز شهریاری عزیز از میان ما رفته و حالا قرار است مطلبی به یاد او بنویسم، ولی چه می‌توانم بنویسم. صدها خاطره از او جلوی چشمانم دارم و به همین خاطر باور نمی‌کنم که از پیش ما رفته باشد. آنها که با من بوده‌اند، می‌توانند گواهی دهند که در تمام این سال‌ها چه تعلق‌خاطر عمیقی نسبت به او داشته‌ام و نقد و احیاناً اسائهٔ ادب نسبت به او را به هیچ روی برنمی‌تافتم. البته همهٔ انسان‌ها قابل نقد هستند، اما او برای من موجود دیگری بود. به همین دلیل بود که تیتر اصلی ویژه‌نامه‌ای که برای بزرگداشت او در شمارهٔ ۱۲ و ۱۳ «مجلهٔ ریاضی توان» (از انتشارات مبتکران) انتخاب کردم، این بود: «هیچ‌کس مثل او نیست».

من به‌راستی معتقد بودم و هستم که هیچ‌کس چون پرویز شهریاری نبوده و نیست. هر چند نویسنده‌ای در گرامی‌داشت او گفت که مطمئن است پرویز شهریاری در میان نسل‌های بعد همگنانی خواهد داشت؛ که امیدوارم چنین باشد. ولی مگر او که بود و چه بود که درباره‌اش چنین می‌اندیشم؟ گمان می‌کنم به جای هر توضیحی بهتر است پرسش و پاسخی را که خود با او داشتم و در همان شمارهٔ مجله، در قالب مصاحبهٔ من با او، به چاپ رسید، در این‌جا بیاورم:

«سؤال: به نظر من پرویز شهریاری نمونه‌ای است که ثابت می‌کند، معلم ریاضی می‌تواند در حوزهٔ ادبیات فعال باشد. می‌تواند اهل مطالعه باشد، اهل نویسندگی باشد. می‌تواند درد آشنا باشد و با دردهای کودکان و نوجوانان، دانش‌آموزان و دانشجویان، و طبقات مردم آشنا باشد و به راه‌حل آنها بیندیشد و مقاله بنویسد. می‌تواند دربارهٔ تاریخ به‌طور عام و تاریخ ریاضی به‌طور ویژه مطلب بنویسد و خلاصه موجودی چندبعدی باشد. معلم ریاضی چگونه می‌تواند چنین باشد؟

جواب: حقیقت این است که شما به من محبت دارید، ولی من معتقدم، انسان در هر زمینه‌ای که کار می‌کند، اگر با علاقه تلاش کند و با هیچ مشکلی از میدان خارج نشود، می‌تواند موفق باشد. من نه استعداد فوق‌العاده‌ای دارم

و نه حالت به‌خصوص دیگری داشته‌ام، ولی هیچ‌وقت کارم را رها نکرده‌ام. با اینکه اتفاق افتاده است که در مواقعی نتوانسته‌ام کار کنم، ولی تا وقتی که توانسته‌ام کار کنم، همیشه پشت میز کار بوده‌ام... آن‌چه باعث موفقیت انسان می‌شود، پشتکار و ادامهٔ کار است. اگر تأثیر هوش و استعداد دو تا سه درصد باشد، ۹۷ تا ۹۸ درصد بقیه به پشتکار و علاقه‌مندی مربوط می‌شود.»

و به‌خاطر همین دیدگاه و به خاطر همین استقامت و مردانگی و ده‌ها خصلت انسانی دیگر بود که خیلی‌ها مثل من شیفتهٔ شخصیت والای پرویز شهریاری بودند و تا نفسی باقی است او را فراموش نمی‌کنند.

روحش شاد و یادش گرامی باد

بار امانت

میرشهرام صدر ـ عضو هیئت تحریریه مجلهٔ رشد برهان متوسطه

غمی خواهم که غم‌خوارش تو باشی*
دلی خواهم دل آزارم تو باشی
جهان را یک جوی ارزش نباشد
اگر یارم اگر یارم تو باشی
ببوسم چوبهٔ دارم به‌شادی
اگر در پای آن دارم تو باشی
به بیماری دهم جان و سر خود
اگر یار پرستارم تو باشی
شوم ای دوست پرچم‌دار هستی
در آن روزی که سردارم تو باشی
کشم بار امانت با دلی زار
امانت‌دار اسرارم تو باشی

استاد **شهریاری** دربارهٔ کارهای فرهنگی «نه» نمی‌گفت. از جان مایه می‌گذاشت. یادم می‌آید، زمستان سال ۱۳۸۳ قرار بود اولین همایش ریاضیات شهرستان خمین برگزار شود. همکاران گروه ریاضی آموزش‌وپرورش خمین بسیار مشتاق بودند که در این همایش استاد شهریاری حضور داشته باشد و سخن‌رانی کند. به همین دلیل مرا واسطه قرار دادند که ایشان را دعوت کنم. اما در آن زمان استاد به دلیل کهولت سن پادرد داشتند و با عصا راه می‌رفتند و فکر نمی‌کردم با این بُعد مسافت، آن هم با وسیلهٔ شخصی این دعوت را قبول کنند. اما وقتی با ایشان تماس گرفتم و ماجرا را گفتم، ایشان قبول کردند. به جز این، هر کجا که معلمان ریاضی دور هم جمع می‌شدند و از ایشان دعوت می‌کردند، با هر سختی که بود، حضور فعال پیدا می‌کردند. معلمی «معشوق» او شده بود و در این راه سر از پا نمی‌شناخت.

چند سالی بود که جلسات هیئت تحریریهٔ برهان را در منزل استاد تشکیل می‌دادیم (به این دلیل که استاد زحمت ایاب و ذهاب نداشته باشد). هر بار که با ایشان تماس می‌گرفتم تا تاریخ و ساعت جلسه را هماهنگ کنم، «نه» نمی‌گفت و با روی باز استقبال می‌کرد.

دو موضوع خاطر استاد را آزرده می‌کرد:

یکی برگزاری آزمون‌های سراسری به شیوهٔ تستی بود. ایشان می‌گفت تا وقتی کنکور به این وضع برگزار می‌شود، تیشه به ریشهٔ دانش می‌زند. دانش‌آموز سال چهارم متوسطه فقط دنبال روش‌های تستی است و معلمی از نظر مسئولان مدرسه و دانش‌آموزان پایهٔ چهارم موفق است که نکته‌های تستی بیشتری بگوید و کمتر مسئله یا قضیه حل کند. این روش، حاصلی جز از بین رفتن تدریجی دانش ندارد. زیرا تدریس ریاضیات باید با کاربرد ریاضی، تاریخ ریاضی و به‌خصوص با فلسفهٔ ریاضی همراه باشد. مرتب از ایشان شنیده بودم که برای حل فلان معضل (برای مثال، کاشت درخت آلبالو!)، چندین سمینار برگزار می‌کنند، اما برای رفع معضل کنکور به این روش، هیچ کسی قدم جلو نمی‌گذارد.

دیگر اینکه بسیاری از کتاب‌های ریاضی‌دانان ایرانی، مانند جبر و مقابله، به زبان‌های دیگر ترجمه شده‌اند، البته مرحوم **خدیو جم** این کتاب را به فارسی ترجمه کرده است. اما برخی از رساله‌های **کاشانی** به روسی، انگلیسی، فرانسه و آلمانی ترجمه شده‌اند و اصل رساله به زبان عربی است، اما به فارسی ترجمه نشده‌اند، در حالی‌که باید به فارسی ترجمه شوند تا هر کس که مطالعه می‌کند، بداند کاشانی چه کسی بوده و چه کارهایی انجام داده است. در حال حاضر، کتاب «مفتاح‌الحساب» **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** به زبان عربی، توسط دانشگاه حلب سوریه با عنوان «تُراثُنا»، یعنی ارث و میراث ما، به چاپ رسیده است. در واقع کتاب مفتاح‌الحساب کاشانی را جزو میراث عرب در نظر گرفته‌اند.

یکی از دلایلی که استاد «بنیاد پرویز شهریاری» را تأسیس کرد این بود که این‌گونه کتاب‌ها و رساله‌ها که میراث گذشتگان ما هستند، به نحو مطلوبی ترجمه و در اختیار دانش‌آموزان و محققان این مرز و بوم قرار گیرد. ان‌شاءالله با این‌گونه تلاش‌ها شاهد روزی باشیم که این **بار امانت** را به سرمنزل مقصود رسانده باشیم و در متون غربی‌ها دیگر ننویسند: «الکاشی، ریاضی‌دان عرب»، بلکه بنویسند: «کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی».

* غزل «بار امانت» از مجموعهٔ اشعار **امام خمینی**(قدس سره)

اشاعه‌گر دانش ریاضی

محمدهاشم رستمی ـ عضو هیئت تحریریه مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطه

از ابتدای شغل معلمی‌ام در سال ۱۳۴۱ تاکنون، از کتاب‌های ریاضی تألیف استاد شهریاری استفاده کرده‌ام. برای اولین بار در نخستین جلسه‌های هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان در سال‌های ۷۰-۱۳۶۹ که استاد هم برای شرکت در آن جلسات دعوت داشتند، با ایشان از نزدیک آشنا شدم. این فرصتی مغتنم برای من و دیگر همکاران بود که بتوانیم از رهنمودهای آموزش ریاضی و دانش ریاضی ایشان در ارتقای دانش ریاضی خود بهره‌مند شویم.

استاد شهریاری هرچه از علم ریاضی می‌دانست، در اختیار دانش‌پژوهان، اعم از شاگردان و معلمان ریاضی قرارمی‌داد. یادم هست که برای تألیف «دایره‌المعارف هندسه» مشغول جمع‌آوری منابع ریاضی بودم، در انتهای یکی از کتاب‌های تألیف استاد شهریاری فهرستی از تألیفات ریاضی ایشان یافتم. من که برای تألیف دایره‌المعارف هندسه، در جست‌وجوی کتاب‌هایی بودم که آنها را نداشتم، در بررسی این فهرست چند کتاب هندسه دیدم که تألیف ایشان بود و من نداشتم.

این مطلب را با استاد در میان گذاشتم. ایشان گفتند: من به کتاب‌خانه‌ام مراجعه می‌کنم. اگر از هر کدام از این کتاب‌ها دو نسخه داشته باشم، یک جلد آن را به شما می‌دهم. ولی اگر تنها یک جلد داشتم، آن را به شما می‌دهم تا کپی بگیرید و کتاب اصلی را به من برگردانید. چنین هم شد و از لطف ایشان سپاس‌گزاری کردم. ایشان همواره برای همکاران خود و دانش‌آموزان احترام فراوان قائل بودند و برای اشاعهٔ دانش ریاضی از هیچ کوششی فروگذار نمی‌کردند. روحشان شاد باد.

نام نیکش از یاد نرود

دکتر مانی رضائی ـ مدیرداخلی مجلهٔ رشد آموزش ریاضی

نوشتن درباره مردی که با همهٔ بزرگی و توانایی‌های خود، متواضع و فروتن بود، برایم دشوار است، و انتخاب نقطه‌ای برای آغاز این نوشتار، دشوارتر! پس، از آشنایی خودم با این بزرگ‌مرد می‌نویسم؛ کسی که باور داشت آموزش کاری مهم است و به آرامی اثر می‌کند.

با نام **پرویز شهریاری** از نوجوانی آشنا شدم؛ زمانی که دانش‌آموز مدرسه‌ای بودم که او معلم آن بود. آن زمان برایم جالب بود که بسیاری از بزرگ‌ترهایی که دور و بر من بودند، او را می‌شناختند و آنها نیز با کتاب‌هایش بزرگ شده بودند. تا پیش از آنکه معلم بشوم، در دوره‌های متفاوت از کتاب‌هایش بهره‌ها بردم و انگار پایانی بر تعداد کتاب‌هایشان نبود. وقتی

معلم شدم نیز کتاب‌های بیشتری از او یافتم که به کمک حرفه‌ام می‌آمد، و زمانی که با ایشان ملاقات داشتم، سرآغاز دیگری برایم بود.

استاد شهریاری نخستین کتاب خود را در سال ۱۳۲۷ منتشر کرد. خودش می‌گفت: «حدود ۴۰۰ عنوان کتاب تألیف و ترجمه کرده است.» گنجینه‌ای گران‌بها برای علاقه‌مندان ریاضی و دانش‌آموزان که حاصل حدود ۷۰ سال فعالیت علمی است. برای من به عنوان معلم، بخش‌هایی از این گنجینه، دست‌مایه‌ای است تا شور و اشتیاق را به کلاس‌های درس ببرم؛ شور و اشتیاقی که در پیام‌های استاد شهریاری به معلمان و دانش‌آموزان نهفته است. دو نکتهٔ مهم را می‌توان از این پیام‌ها دریافت:

۱. همه می‌توانند ریاضیات را درک کنند و از آن لذت ببرند؛

۲. باید برای همه فرصت برابر ایجاد کنیم تا ریاضی بیاموزند.

برای تحقق این دو، استاد شهریاری بر اهمیت پرداختن به کاربردهای ریاضی و تاریخ ریاضیات تأکید داشت و از جنبه‌های سرگرمی و بازی ریاضی نیز غافل نمی‌ماند. به یقین می‌توان گفت تأثیر نگرش پرویز شهریاری بر معلمان و دانش‌آموزان ماندنی است؛ تأثیر و نقشی که شاید غبار معاصر بودن با شهریاری امکان دیدن آن را کم کرده باشد! اما بی‌شک با گذشت ایام نقش وی پررنگ و واضح خواهد شد.

یاد و نام نیکش گرامی

به یاد پرویز شهریاری

دکتر یحیی تابش، استاد ریاضیات دانشگاه صنعتی شریف

پرویز شهریاری مجموعه‌ای از توانمندی‌های علمی و فرهنگی خود را در زمینه‌های متفاوت به منصهٔ ظهور رسانده بود و به گونه‌ای از «فرد» به «نهاد» تبدیل شده بود. او به حرفهٔ اصلی خود، دبیری آموزش‌وپرورش می‌بالید، ولی آنچه که او را به عنوان یک دبیر آموزش‌وپرورش متمایز و کم‌نظیر کرد، شخصیت «دانشور»* او بود. دانشوران، عمیق، جامع و تأثیرگذارند. پرکاری و منظم بودن دیگر ویژگی آنان است. آنان هر چه را که می‌دانند، وسیع، پرمایه و با دقت و ظرافت فراگرفته‌اند و به یک معنا انسان‌هایی فرهنگی‌اند. شاید این ویژگی‌ها صرفاً در میان مردان قدیم یافت می‌شد که **احمد بیرشک** و **پرویز شهریاری** نمودهایی قابل توجه از آنان در میان دبیران ریاضی زمان ما بودند. دغدغهٔ اصلی آنان آموزش بود، برای پرورش استعدادها و توسعهٔ تفکر خلاقانه بین دانش‌آموزان، متناسب با توانایی‌ها و استعداد آنان، که این مؤلفه‌ها مهم‌ترین عوامل در توسعهٔ منابع انسانی محسوب می‌شوند.

فقدان دانشوران همیشه اندوهبار و تلخ است، ولی از آن تلخ‌تر این واهمه است که مشعل دانایی، که در دست آنان بود، دیگر نگه‌داری نیابد؛ خوشبختانه، علی‌رغم این نگرانی رشد فناوری و توسعهٔ زیرساخت‌های ارتباطی، نسل جوان را با فضای ذهنی جدیدی مواجه ساخته است. بر این اساس، از بین دبیران جوان نیز حتماً دانشورانی ظهور خواهند کرد که مشعل دانش را، که چندی در دست شهریاری بود، استوار و جاودانه نگه خواهند داشت و یاد پرویز شهریاری را گرامی می‌دارند.

* Scholar

پدر و معلم*

دکتر شهریار شهریاری، فرزند استاد پرویز شهریاری، استاد ریاضی دانشگاه در کشور آمریکا

استاد راهنمای من برای پایان‌نامهٔ دکترای ریاضی، پروفسور **مارتین آیزاکس** از «دانشگاه ویسکانسین» در آمریکا بود. او در اوایل آشنایی‌مان از من دربارهٔ خانواده‌ام پرسید. ضمن توضیح درخصوص فعالیت‌های پدرم گفتم اکثر کسانی که در ایران تحصیل کرده‌اند و نیم علاقه‌ای به ریاضیات داشته‌اند، پدر مرا می‌شناسند. او چیزی نگفت ولی معلوم بود که ادعای مرا کمی گزافه‌گویی دانسته است.

سال‌ها بعد که برای فرصت مطالعاتی به «انستیتوی تحقیقات ریاضی» در برکلی رفته بودم، آیزاکس هم آن‌جا بود. یکی از روزها که برای دیدار او به دفترش رفتم، شخص دیگری هم در دفتر او حضور داشت. آیزاکس آقای دکتر **اسدی** را به من معرفی کردند. دکتر اسدی بلافاصله به زبان فارسی رابطهٔ مرا با پرویز شهریاری جویا شدند و بعد از پاسخ من، به آیزاکس گفت که پدر مرا می‌شناسد. آیزاکس جواب داد که این مطلب تازه‌ای نیست، چرا که همهٔ ایرانیان پدر شهریار را می‌شناسند. او بعد به من گفت که تا آن زمان با هر ایرانی روبه‌رو شده، پدرم را می‌شناخته است!

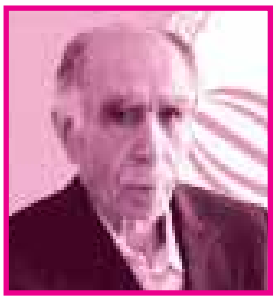
***

وقتی دورهٔ لیسانس ریاضی را در آمریکا می‌گذراندم، استادی داشتم که نظریهٔ عددها را تدریس می‌کرد. او به کارهای **سرپینسکی****، ریاضی‌دان لهستانی خیلی علاقه داشت و پژوهش‌های او را می‌پسندید. روزی سر کلاس به دانشجویان سفارش کرد، کتاب «نظریهٔ عددها»ی سرپینسکی را تهیه و مسئله‌های آن را حل کنند. او وقتی فهمید که من ترجمهٔ فارسی این کتاب را در اختیار دارم، بسیار شگفت‌زده شد که چگونه ممکن است چنین کتابی به زبان فارسی ترجمه شده باشد. این کتاب را پدرم سال‌ها پیش از آن، ترجمه کرده بود که شامل پیش‌گفتاری مفصل و شرح کارهای سرپینسکی بود.

* برگرفته از یادداشت دکتر شهریار شهریاری برای کتاب «جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری»، انتشارات فردوس، ۱۳۸۲.

** واتسلاو سرپینسکی، ریاضی‌دان معاصر لهستانی. کتاب برجستهٔ او در نظریهٔ اعداد را تحت عنوان «۲۵۰ مسئلهٔ حساب» استاد پرویز شهریاری در آبان‌ماه ۱۳۴۹ ترجمه کردند و «انتشارات خوارزمی» آن را منتشر ساخت.

خردگرایی در پرتو ریاضیات



استاد عبدالحسین مصحفی، سردبیر مجلهٔ ریاضی یکان (۱۳۵۶-۱۳۴۲) معلم پیشکسوت ریاضی، مترجم و مؤلف ده‌ها عنوان کتاب و مقاله

اشاره

استاد گرانقدر عبدالحسین مصحفی وضعیت جسمانی مساعدی ندارند و متأسفانه چندی است که در بستر بیماری به‌سر می‌برند. مطمئنم که اگر این استاد فرزانه وضعیت مناسب‌تری داشتند، حتماً مایل بودند که در این ویژه‌نامه مطلبی به یاد استاد شهریاری بیاورند. اکنون به نیابت از ایشان، بخش‌هایی از مطلب ایشان در کتاب «جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری» را در این‌جا درج می‌کنیم.

سال‌ها پیش از آنکه با خود آقای پرویز شهریاری آشنا شوم، با نامش آشنا بودم و آن‌گاه که با خواندن یکی از مصاحبه‌هایش، سال تولدش را دانستم و دریافتم دوران کودکی را در محلهٔ دولت‌خانهٔ کرمان گذرانده است، پی بردم که در سال‌هایی از دوران نوآموزی در دبستان، روزانه یکی دو بار از کنار هم می‌گذشته‌ایم...

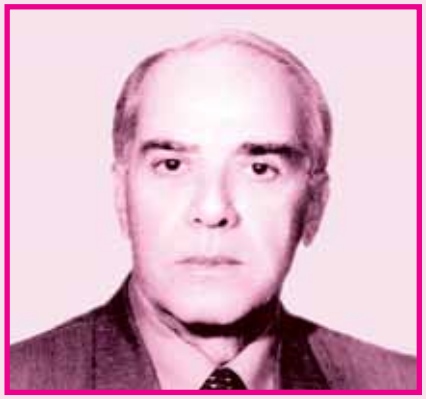
نخستین دیدارم با آقای پرویز شهریاری در آذرماه ۱۳۴۲ بود. امتیاز انتشار «مجلهٔ ریاضی یکان» را گرفته بودم و به دنبال فراهم آوردن مقاله برای آن، به سراغ فرهنگ دوستان می‌رفتم. شهریاری آن موقع مجلهٔ سخن علمی را درمی‌آورد. گمان نداشتم با آن همه گرفتاری، همکاری با مجلهٔ یکان را هم بپذیرد. اما او با گرمی این را پذیرفت و تشویقم کرد، در کاری که در پیش دارم از پای ننشینم ...

پرویز شهریاری در سطح‌ها و در محیط‌های متفاوت آموزشی درس داده است و مسلماً خیلی از شاگردانش به مقام‌های بالای علمی یا اجتماعی دست یافته‌اند، اما هیچ‌گاه از او نشنیده‌ام که موردی را نام ببرد و از بابت آن به خود ببالد. خوب آموختن برای او هدف بود و رضایتش در رسیدن به این هدف برآورده می‌شد. به گفتهٔ خودش: «... معلمان خوب عاشقانی هستند که روح و جان و زندگی خود را فدای عشق خود می‌کنند...» و خود او به گواهی بسیاری از شاگردانش، یک معلم خوب بوده است...

پرویز شهریاری شخصیتی خود ساخته و انسانی تلاشگر است. تلاش او در دو راه صرف شده و می‌شود: یادگرفتن و یاددادن. او زیاد می‌خواند و زیاد می‌نویسد. اگر آنچه را می‌نویسد، همه‌اش ریاضیات است، اما آنچه را می‌خواند یا ریاضیات است و یا به گفتهٔ خودش: «ریاضی‌دان نه تنها باید با هنر و ادبیات آشنا باشد، بلکه باید به این آفریده‌های زیبای روح انسانی عشق بورزد... و نه تنها هنر و ادبیات، ریاضی‌دان باید به تاریخ، فلسفه و علوم اجتماعی علاقه‌مند باشد. موسیقی را دوست داشته باشد، و از شعر خوب هم لذت ببرد... کوتاه سخن، انسان باشد. بدون این، یک ریاضی‌دان حتی ریاضی‌دان هم نیست.»

شهریار ریاضیات ایران

ابراهیم دارابی، دبیر پیشکسوت ریاضی، عضو سابق هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی ریاضی



استاد **پرویز شهریاری**، شهریار ریاضیات ایران ما، تنها یک ریاضی‌دان، یک ادیب و یک مورخ نبود، آموزگاری بزرگ از آموزگاران زندگی بود که همچون ستاره‌ای همهٔ عمر خلاق خود را در مدار خورشید مرادش چرخید و ذره ذرهٔ وجودش را «واژه» کرد و چون همه را فرو ریخت، تکثیر شد، کتاب شد، مجله شد و مقاله شد تا راه را از چاه، خیر را از شر، و زیبایی را از زشتی به ما بشناساند.

بر این اساس استاد از میان ما نرفته است. در آثارش تکثیر و ماندگار شده است. هر دانش‌آموز و دانشجویی، هر معلم و استادی، هر علاقه‌مند به علم و تاریخی، هر شیفتهٔ هنر و ادبیاتی که آثار استاد را خوانده است، و یا از این پی خواهد خواند، یک شهریاری را در قلب و وجود خویش حس خواهد کرد...

از استاد بسیاری، بسیار آموخته‌اند، من نیز یکی از آنها هستم. در دوران تدریسم در مدارس، هر شب که خود را برای تدریس روز بعد آماده می‌کردم، استاد با من بود. وقتی پای تخته می‌نوشتم، با من بود. وقتی سرفراز از تدریس روز، کلاس را ترک می‌کردم، با من بود...

حالا هم که می‌نویسم، با من است: با سیمای انسانی دوست‌داشتنی احترام برانگیزشان بالای سرم ایستاده‌اند و با تبسم نوشته‌هایم را با نگاهشان سیر می‌کنند.

شهریاری؛ همراه همیشگی جوانان

سپیده چمن‌آرا ـ سردبیر مجلهٔ رشد برهان راهنمایی تحصیلی

پرویز شهریاری، معلم این نسل و آن نسل نبود، او معلم همهٔ نسل‌ها بوده و هست. او در هر سنی، با سعهٔ صدر و فروتنی کم‌نظیری، با جوانان و نوجوانانی که قصد انجام کاری در حیطهٔ توسعهٔ دانش ریاضی داشتند، برخورد می‌کرد. بگذارید برایتان خاطره‌ای بگویم:

زمستان سال ۱۳۸۰ بود. من با گروهی از دانشجویان ریاضی و به مدیر مسئولی دکتر **یحیی تابش**، برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، نشریه‌ای به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» منتشر می‌کردیم؛ همان که امروز با عنوانِ «نشریهٔ ریاضیات» توسط «انتشارات فاطمی» به چاپ می‌رسد.

قصد داشتیم برای نوروز ۱۳۸۱ ویژه‌نامه‌ای چاپ کنیم و برای اینکه عید نوروز را به خوانندگان جوانمان تبریک بگوییم، پس از بحث بر سر پیشنهادهای متفاوت، قرار شد هر یک از اعضای تحریریه و تعدادی از نویسندگان همکار با مجله، چند سطری بنویسند و آنها را به جای سرمقاله قرار دهیم. دکتر تابش پیشنهاد داد که از پرویز شهریاری هم درخواست کنیم که برای این ویژه‌نامه، مطلبی برایمان بنویسد. همه از این پیشنهاد استقبال کردیم.

من تا آن زمان نام پرویز شهریاری را بسیار شنیده بودم و کتاب‌های زیادی به قلم یا ترجمهٔ او داشتم، ولی هرگز او را ندیده بودم. می‌دانستم با ترجمه و تألیف کتاب‌های بسیار دربارهٔ ریاضی و سرگرمی‌های ریاضی، خدمت بزرگی به رواج این علم نزد نوجوانان و جوانان کرده است. تصور اینکه ملاقاتی با شهریاری داشته باشم و ضمن اهدای شماره‌های پیشین ماهنامه، از او حضوراً مطلبی برای مجله درخواست کنم، برایم غیرممکن بود. یعنی من مرد بزرگی را که این همه کتاب تألیف با ترجمه کرده است، از نزدیک می‌بینم و با او مانند یک همکار صحبت خواهم کرد؟

قرار گذاشته شد و من و یکی دو نفر دیگر از اعضای تحریریه، به منزل ایشان رفتیم. استقبال گرم او از ما ـ که گویی سال‌هاست ما را می‌شناسد ـ و شوقش برای شنیدن حرف‌های ما و دیدن شماره‌های ماهنامه، مرا متعجب کرد. پیرمردی که این همه شهرت و تجربه داشت، چگونه با ما چند جوان کم‌تجربه به این مهربانی و راحتی ارتباط گرفت و تقاضای ما را پذیرفت؟ البته به هر حال ما به اعتبار دکتر تابش به این ملاقات رفتیم، ولی برخورد شهریاری با ما کاملاً مستقل از آن می‌نمود.

بعدها نیز که مدیر داخلی رشد آموزش ریاضی شدم و برای ویژه‌نامه‌ای برای خود او، باز هم با او ملاقات کردم، او هم‌چنان ماهنامه را به‌خاطر داشت و پی‌گیر آن شد.

این خاطره را گفتم تا به خوانندگان برهان یادآور شوم که به راستی این مرد فروتن و صبور، از هیچ کمکی به جامعهٔ آموزش ریاضی ایران دریغ نکرده است. شاید بد نباشد نوشتارم را با آخرین بند از همان مطلبی که شهریاری برای شمارهٔ نهم ماهنامهٔ ریاضیات در اسفند ۱۳۸۰ نوشت، به اتمام برسانم. یادش گرامی و راهش مستدام باد:

«من درد دل‌های زیادی در زمینهٔ آموزش ریاضی دارم که جای آن در این مختصر نیست و معتقدم تا زمانی که این کنکور را برندارند و دست از تست نکشند، کار آموزش از جمله آموزش ریاضی به جایی نمی‌رسد. این کنکور به شکلی که وجود دارد، از یک‌طرف سطح آگاهی جوانان را پایین نگه می‌دارد و... کنکور سال‌هاست که دانش مملکت را ویران کرده است و باید فکری عاجل برای آن کرد.»

شهریاری و ظهور مجلهٔ برهان ریاضی

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ـ عضو هیئت تحریریه مجلهٔ رشد برهان متوسطه

اولین بار که با نام استاد **شهریاری** آشنا شدم، در سال سوم رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک (نظام قدیم) و در درس حساب و جبر آن زمان بود. کتاب درسی حساب و جبر ایشان بسیار متنوع و جذاب بود، به‌طوری که یکی از بهترین و دوست‌داشتنی‌ترین کتاب‌های مورد علاقهٔ من بود. علاوه بر این، چند کتاب ایشان از جمله روش‌های جبر (جلد اول)، روش‌های مثلثات، اندیشهٔ ریاضی، در پی فیثاغورس و... به دستم رسید. در آن زمان همیشه آرزو داشتم ایشان را ببینم که با «مجلهٔ آشتی با ریاضیات» و بعد از آن با «آشنایی با ریاضیات» (مجلهٔ آشتی با ریاضیات به آشنایی با ریاضیات تغییر نام پیدا کرد) روبه‌رو شدم. این مجلات چنان جذاب و تأثیرگذار بودند که مرا به نوشتن مقاله تشویق کردند. پس مصمم شدم که به دفتر مجله بروم و استاد را ملاقات کنم.

بالاخره انتظار به سر رسید و در دفتر مجله واقع در خیابان جمهوری ایشان را مقالات کردم. پس از ارائهٔ مقاله و استقبال خوب و صمیمی ایشان، به نوشتن مقالات بعدی تشویق شدم. در آن زمان که دانش‌آموز بودم، بیشتر پنج‌شنبه‌ها به میدان انقلاب می‌رفتم و در کتاب‌فروشی‌ها به دنبال کتاب جدید ریاضی ایشان می‌گشتم. از آنجا که پول هفتگی من کفاف خرید کتاب را نمی‌داد، مجبور بودم که بیشتر مسافت‌ها را پیاده بروم تا پول خود را برای خرید کتاب‌های استاد ذخیره کنم. به دنبال مقالاتی که این جانب پی‌درپی به دفتر مجلهٔ آشنایی با ریاضیات ارائه می‌کردم، ارتباط من با استاد تنگاتنگ شد تا زمانی که مجلهٔ ریاضی برهان ظهور کرد. آن زمان در دبیرستان‌های البرز و کمال تدریس می‌کردم و بیشتر وقتم صرف خواندن کتاب‌های ایشان، تحقیق و پژوهش، نگارش مقاله برای مجلات آشنایی با ریاضیات، رشد آموزش ریاضی و مجله‌های ریاضی برهان، و تألیف کتاب‌های ریاضی (سری کتاب‌های کوچک ریاضی) می‌شد. این‌جانب که از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان بودم، دعوت‌نامه‌ای برای همکاری از طرف مجله برای استاد شهریاری بردم.

ایشان از اولین شماره، مجلهٔ ریاضی برهان را یاری کردند. و با ارائهٔ مقالات بسیار ارزنده، همیشه مشوق دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضیات بودند. در مدت ۳۰ سالی که در محضر استاد بودم، بسیار چیزها یاد گرفتم که تا آخرین لحظات زندگی‌ام یاد شیرین آن لحظات همیشه جاودان است. همیشه یادش گرامی.

کنون کز برم رفته آن غمگسار
دگر با که گویم غم روزگار؟ *

غلامرضا یاسی‌پور ـ عضو هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد برهان متوسطه

استاد **شهریاری** از میانمان رفت و با رفتنش جمع برهانیون را که متجاوز از ۲۰ سال در هیئت تحریریهٔ «مجلهٔ ریاضی برهان»، در حضور ایشان جمع می‌شدند، پریشان کرد.

روزی که با جناب **امیری**، سردبیر مجله، و استاد **رستمی** رأی زدیم و که از تجربهٔ استاد در تهیهٔ مطالب مجله کمک بگیریم، روزی فراموش‌نشدنی در تاریخچهٔ این مجله است. استاد همان لحظه قول همکاری داد و در مدت ۲۰ سالی که از انتشار این مجله گذشت، هیچ‌گاه ترکمان نکرد. همواره با رویی گشاده ما نوسفران این راه دشوار را می‌پذیرفت و هدایتمان می‌کرد.

مردی از تبار جوانمردان و از قبیلهٔ جهان‌گردان، هیچ‌گاه در اجابت تقاضایی که اوقات شریفشان را نیز بسیار می‌گرفت، «نه» بر لب نداشت. در هر دشواری، مرد «آری» بود.

یاد دارم هر زمان برای برنامهٔ «**در جهان ریاضی**» که به مدت یک‌سال از «**رادیو فرهنگ**» پخش می‌شد، یا برنامهٔ «**آراء**» که میزگردی دو نفره بود، از ایشان دعوت می‌کردیم نیز سر ساعت حاضر بودند. با این‌که گاهی در ورود به **صدا و سیما** دچار اشکال می‌شدند، نه گله می‌کردند و نه شکایت می‌آوردند.

خودشان تعریف می‌کردند روزی که برای شرکت در برنامه به **صدا و سیما** آمده بودند، سرباز جلوی دروازه از ورود ایشان به این عذر جلوگیری کرد که نام شهریاری در دفتر اسامی وارد شوندگان نیست. استاد حکایت کردند که به او گفتم ممکن است اسامی دفتر را من هم ملاحظه کنم که قبول کرد. آن‌وقت استاد نام پرویز شهریاری را که در دفتر بود به سرباز نشان می‌دهند و می‌گویند: پس این چیست؟ و سرباز ساده‌دل پاسخ می‌دهد: شما گفتید شهریاری، در حالی که این پرویز شهریاری است.

رسم معمول این بود که برای مدعوین برنامه وسیلهٔ آمد و رفت در نظر بگیرند. اما استاد هر بار خودشان می‌آمدند و خودشان می‌رفتند و ما هرچه اصرار می‌کردیم، قبول نمی‌کردند.

استاد در رفتار مؤدب بودند و با فعلشان به ما شاگردان درس ادب می‌آموختند.

من در مدت ۵۰ سالی که ایشان را می‌شناختم، و از آن زمان‌ها که شاگرد ایشان بودم و بعدها که همکار ایشان شدم، هرگز اخمی بر چهرهٔ باصفایشان ندیدم. هیچ‌گاه هم بانگی بلند از ایشان نشنیدم. به جرئت می‌توانم ادعا کنم که تمام شاگردان استاد عاشقانه دوستشان داشتند و از ایشان علاوه بر ریاضی، در رفتار و کردار نیز درس می‌گرفتند.

استاد چو آن بید معلّق **بهار**، دست ضیمران‌های ضعیف را می‌گرفتند و نه تنها اندیشهٔ ریاضی را می‌آموختند که روش انسان‌بودن را نشان می‌دادند. ریاضیات استاد ریاضیات پای در عمل بود و دست در کار. همچون **کانت** که فلسفه را آموختن اندیشیدن می‌دانست نه آموزش اندیشه‌ها، کار ریاضیات را آموزش انسان بودن و در خدمت انسان‌ها قرار گرفتن می‌دانستند. ریاضیات بدون عمل را چون **سعدی** که علم بی‌عمل را زنبور بی‌عسل می‌گوید، بیهوده می‌انگاشتند و در این راه به روش ریاضی‌دانان گذشتهٔ ایرانی می‌رفتند که ریاضیاتشان عملی و کاربردی بود.

به ایران و ایرانیان عشق می‌ورزیدند،

آن‌گونه که ترک زن و فرزند فرنگ مانده را کرده بودند و در دوران پیری و بیماری به تنهایی، اما در ایران، روزگار می‌گذراندند.

روزی در زنگ تفریح جلسهٔ تحریریهٔ برهان تعریف کردند:

«یکی از روزها در ایامی که در کانادا بودم، خانمی زنگ زد که اگر ممکن است فردا به ادارهٔ فلان برای شنیدن پیشنهادی بیایید. من به ایشان گفتم چون خیابان‌های شهر را نمی‌شناسم، خودتان بیایید. قرار شد فردا مراجعه کنند. فردا خانم و آقایی آمدند و گفتند ما از وزارت فرهنگ کانادا آمده‌ایم. به شما ویزای اقامت می‌دهیم و همهٔ امکانات را برایتان آماده می‌سازیم. تنها از شما انتظار داریم که در دانشکده‌های ما تاریخ ریاضیات تدریس کنید. در مقدمهٔ کتاب‌هایی هم که تألیف می‌کنید، بنویسید این کتاب‌ها را در کانادانوشته‌اید.»

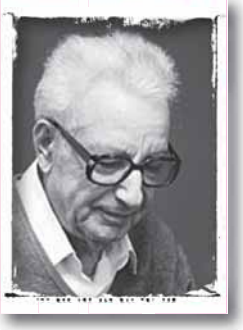
استاد می‌گویند: «به ایشان گفتم به اقامت نیاز ندارم و اگر کاری کنم، برای کشورم و در کشورم انجام می‌دهم. این مدت کوتاه را نیز برای دیدن فرزندانم به کانادا آمده‌ام.»

باری از این خاطرات، هم ما و هم دیگران از استاد زیاد داریم و بسیار خوانده و شنیده‌ایم. برایند تمام این خاطرات در ذهن من که آشنایی ۵۰ ساله‌ای با استاد داشتم، این است که استاد مردی خوش‌بخت بود. سعید زیست و سعید از دنیا رفت. از همه مهم‌تر، خطبهٔ نامدار خود را به قول **حسین مسرور** در منبر روزگار خواند و آن‌گاه از آن فرود آمد.

به سر برد آن خطبهٔ نامدار
فرود آمد از منبر روزگار

* استاد حسین مسرور

زنده‌یاد پرویز شهریاری



فارابی معلم ثانی

کلیدواژه‌ها: فارابی، فلسفهٔ نوافلاطونی، سیف‌الدولهٔ حمدانی، مدینهٔ فاضله، افلاطون، آرمانشهر، ارسطو، بیکن، ابن‌رشد، ابوالوفای بوزجانی، مقدمات، اقلیدس

زندگی، فعالیت‌ها و دیدگاه‌ها

از زندگی خصوصی فارابی، چندان نمی‌دانیم، جز اینکه: در «فاراب» ماوراءالنهر (دقیق‌تر، در قریه، «وسیج» فاراب در کنار رود سیحون و واقع در جنوب جمهوری قزاقستان)، در سال ۲۵۹ یا ۲۶۰ هجری قمری، در خانوادهٔ یکی از سرداران سپاه سامانی به‌دنیا آمد، در همانجا درس خواند و به احتمالی، نزد **یوحنا**، فرزند **حیلان مسیحی** ـ که در مرو زندگی می‌کرد و با فلسفهٔ نوافلاطونی فیلسوفان اسکندرانی آشنا بود ـ با فلسفهٔ نوافلاطونی، آشنا شد. سپس، برای تکمیل تحصیل خود به بغداد رفت و در آنجا ضمن فراگیری زبان عربی، نزد همان استاد قبلی خود یوحنا (که او هم، از مرو به بغداد آمده بود) و استاد مسیحی دیگری به نام **مستی**، فرزند **یونس** (مترجم برخی کتاب‌های یونانی به عربی)، درس خود را ادامه داد. همچنین به حلب (در سوریه) و مصر سفر کرد. فارابی بیشتر کتاب‌های خود را در بغداد نوشت و سرانجام در سال ۳۳۹ هجری قمری، در دمشق درگذشت.

سفر او به حلب، به دعوت **سیف‌الدولهٔ حمدانی** (۳۰۱-۳۵۶ هجری قمری) بود. سیف‌الدوله برای نخستین بار حکومتی مستقل در حلب (که شامل خود حلب و بسیاری از سرزمین‌های دور و بر آن می‌شد) تشکیل داده بود. او حاکمی مستبد و خون‌ریز، ولی شجاع بود. در عین حال، به دانش و ادبیات علاقه داشت و می‌کوشید دانشمندان را در دربار خود گردآورد. **ابوالفرج اصفهانی**، کتاب «اغانی» خود را به او پیشکش کرده است.

علی، فرزند حمدان و معروف به **ابوالحسن**، وقتی در ۳۳۰ هجری قمری، **ابن‌رائق**، امیرالامرای سابق خلافت بغداد را، با همکاری برادرش کشت، از طرف **متقی**، خلیفهٔ عباسی، لقب «سیف‌الدوله» گرفت. دوران زندگی فارابی، دوران ضعف و آغاز فروپاشی کامل خلافت عباسی بود. سراسر سرزمین‌های خلافت بغداد را، کشمکش، جنگ و نافرمانی فراگرفته بود. هر امیری در هر ناحیه‌ای خروج می‌کرد و دعوی استقلال داشت. حکومت بغداد که از درون پوسیده بود، قادر به حفظ خود و نگه‌داری سرزمین‌های قلمرو خود نبود. یکسره در جنگ و خون‌ریزی با رقیبان و مدعیان به‌سر می‌برد. بغداد و سرزمین‌های اطراف، دائماً به دست سپاهیان خلیفه و یا مدعیان او غارت می‌شدند و...

چه بسا، همین ناامنی‌ها و بی‌عدالتی‌ها که زمینه‌ای ویرانگر برای هرگونه کار علمی است، فارابی را قانع کرده بود که با پذیرش دعوت سیف‌الدوله، بغداد را ترک کند و به دربار او برود.

آن‌چه مسلم است، فارابی هرگز به خدمت امیر یا خلیفه‌ای درنیامد و با آن‌که در «سیاست» صاحب‌نظر بود، خود را از هرگونه کار دولتی و دیوانی کنار نگه داشت. به دلیل اعتقادهای عرفانی خود، بسیار ساده زندگی می‌کرد و مثل صوفی‌ها لباس می‌پوشید. اگر **ابن‌سینا**، اصطلاح‌های عرفانی و صوفیگری را، به عنوان تتمه و ضمیمه‌ای بر فلسفهٔ خود می‌آورد، فارابی از این اصطلاح‌ها در متن کتاب‌های خود و به عنوان اصطلاح‌های فلسفی استفاده می‌کند.

فارابی دیدگاه‌های سیاسی و فلسفی

فارابی

خود را، در رساله‌های متعددی شرح داده است که از آن جمله می‌توان از «فصوص‌الحکم»، «فصول‌المدنی»، «سیاست المدینه» و «آراء اهل المدینه الفاضله» نام برد. به‌خصوص «مدینه فاضله» یا «آرمانشهر» فارابی، می‌تواند معرف نظریه‌های سیاسی و گاه فلسفی او باشد. شک نیست که فارابی، آرمانشهر خود را به تقلید از **افلاطون** و تحت تأثیر او ـ که خود تحت تأثیر شیوهٔ تفکر ایرانی بود ـ نوشته است.

او جامعه‌های انسانی را به سه گروه تقسیم می‌کند: جامعه‌های کوچک (خانواده، کوی، روستا و شهر)، جامعه‌های میانه (یک کشور یا قلمروی حکومتی) و جامعهٔ بزرگ (شامل تمامی مردم روی زمین). سپس، هر جامعه را به یک انسان تشبیه می‌کند: در انسان، قلب رییس و فرمانده تمامی بدن است. بعد از قلب اندام‌هایی وجود دارند که از قلب فرمان می‌برند و به نوبهٔ خود بر اندام‌های دیگری فرمان می‌رانند. این سلسله مراتب خود را به اندام‌هایی می‌رساند که تنها فرمان می‌برند و خود بر جایی فرمان نمی‌رانند. بنابراین (فارابی نتیجه می‌گیرد)، در هر جامعه و هم در جامعهٔ بزرگ انسانی، باید همچون «سلسله مراتب» اندام‌های آدمی، حکومتی هرمی شکل وجود داشته باشد که در رأس آن فرمانده و رییس جامعه، و در سطح قاعدهٔ هرم، مردم عادی فرمان‌بر قرار دارند. افراد بینابینی که در سلسله مراتب بین رأس و قاعده واقع‌اند، از رییس خود فرمان می‌برند و به زیردستان خود فرمان می‌دهند. آنها با واسطهٔ رییس خود، مطیع و فرمان‌بر رییس جامعه‌اند. تنها مردم عادی هستند که هیچ خدمت‌گزاری ندارند و فقط باید کار کنند و فرمان ببرند.

البته در آرمانشهر فارابی، برخی دیدگاه‌های مثبت نیز وجود دارند، او برای رییس شرط می‌گذارد که باید فیلسوفی آگاه، عدالت‌خواه، هوادار مظلومان، صلح‌طلب و بری از فساد، دزدی و مال‌اندوزی باشد. فارابی تعاون، هم‌فکری و کار گروهی را شرط سلامت جامعه می‌داند و جامعه‌ای را که در پی جنگ و توسعه‌طلبی است و می‌خواهد سنت‌ها و اعتقادهای خود را بر مردم سرزمین‌های دیگر تحمیل کند، در مقابل آرمانشهر خود قرار می‌دهد و آن را نفی می‌کند و... .

با وجود این، فارابی نمی‌تواند چهرهٔ دل‌پذیری از شهر آرمانی خود نشان دهد که در آن، مردمی آزاد با امکان‌های برابر و امنیت فکری و مالی زندگی می‌کنند و کسی قدرت زورگویی و ستم و یا تحمیل اعتقاد خود را به دیگران ندارد. فارابی، تحت تأثیر شرایط زمان و تحت تأثیر نوشته‌های افلاطون، حکومت از بالا به پایین را توصیه می‌کند و به امکان‌های بالقوه‌ای که می‌تواند یک جامعهٔ آزاد و «برابر حقوق» را پیش ببرد، توجه نمی‌کند. بنابراین، آثارش نمی‌توانند برای زمان ما، به جز ارزش یک اثر تاریخی، ارزش دیگری داشته باشند.

فارابی که به اعتقاد **جرج سارتون** (مورخ بزرگ دانش) بزرگ‌ترین فیلسوف عصر بود، از نخستین مبلغان و مفسران فلسفهٔ ارسطویی در شرق به‌شمار می‌رود و به همین مناسبت، او را «معلم ثانی» نامیدند (معلم اول خود ارسطوست).

در واقع در سرزمین‌های خاور، به هر دو فیلسوف یونانی، افلاطون و **ارسطو**، اعتقاد داشتند و به هر دوی آنها احترام می‌گذاشتند. در حالی‌که در واقع بسیاری

از دیدگاه‌های فلسفی این دو، متناقض یکدیگرند و کمتر اشتراکی با هم دارند. فارابی بسیار کوشیده است که نظرهای افلاطون و ارسطو را به هم نزدیک کند و در این مورد، تحت تأثیر فیلسوفان و مفسران نوافلاطونی اسکندریه بود که نوشته‌های ارسطو و افلاطون، و به‌خصوص افلاطون را، به میل خود ـ و نه به صورتی که در واقع وجود داشت ـ تفسیر می‌کردند. به هر حال، فارابی را باید پایه‌گذار فلسفهٔ ارسطویی در شرق دانست که بر دیدگاه‌های بسیاری از فیلسوفان و اندیشمندان بعد از خود تأثیری جدی داشت.

فارابی فلسفه و ایمان را مغایر هم نمی‌داند و معتقد است که هر دو به یک هدف خدمت می‌کنند. ولی فلسفه را برتر می‌داند، چرا که بر برهان عقلی و استدلال منطقی تکیه دارد. شاید بتوان گفت که فلسفهٔ فارابی، برایندی از فلسفهٔ افلاطون و ارسطو (و به‌خصوص ارسطو) از یک طرف، و تصوف و عرفان از طرف دیگر است.

فارابی را که ۵۰۰ سال پیش از **گالیله** و **بیکن** زندگی می‌کرد، می‌توان پایه‌گذار روش «مشاهده‌ای ـ تجربی» دانست که البته بیشتر در بحث‌های روش‌شناختی و آموزشی او مطرح می‌شود (بند بعدی را ببینید). او همچنین در بحث‌های فلسفی خود، روش قیاسی و استدلالی را توصیه می‌کند و از این جهت، در مقابل **زکریای رازی** قرار می‌گیرد که بر استقراء و تمثیل تکیه می‌کرد.

اگرچه فارابی ـ بعد از **کندی** و در تکمیل کارهای او ـ در جهت آشتی علم و ایمان تلاش کرده است و با وجود آن که بیشتر فیلسوفان بعد از او، نظر او را پذیرفته‌اند و زیر تأثیر اندیشه‌های او بوده‌اند، اما مورد انتقاد کسانی هم‌چون **ابن‌رشد** (در «تهافت التهافت») و **ابن‌طفیل** قرار گرفته است. با این همه فارابی را باید بزرگ‌ترین و با نفوذترین فیلسوف زمان خود دانست.

فارابی به ساده‌نویسی و تفسیر متن‌های دشوار معروف است. مشهور است که ابن‌سینا با آن‌که بارها «متافیزیک» ارسطو را خوانده بود، تنها وقتی توانست مضمون اصلی کتاب را بفهمد که با شرح فارابی دربارهٔ آن آشنا شد. هم‌چنین، به احتمال زیاد **بیرونی** کتاب «التفهیم» خود را تحت تأثیر ساده‌نویسی فارابی، به زبانی ساده و قابل فهم برای همگان تنظیم کرده است.

دیدگاه‌های آموزشی، روش‌شناختی و علمی

کارهای فارابی در زمینهٔ ریاضیات جالب و فراوان است. او به‌طور جدی دربارهٔ موضوع‌های مهم روش‌شناسی ریاضیات کار کرد، نمونه‌های عالی از کاربرد روش‌ها و نظریه‌های ریاضی را در حل مسئله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی و صنعت (اخترشناسی، نظریهٔ موسیقی، نور، معماری و...) ارائه داد، و بررسی‌های کاملاً تازه‌ای را در ریاضیات نظری دنبال کرد. فارابی به هر سه جنبهٔ ریاضیات (روش‌شناسی و آموزش، کاربرد علمی، و جنبهٔ نظری) که از دیدگاه تاریخی، همیشه در پیوند با هم پیش رفته‌اند، توجه داشت.

جالب‌ترین جنبه‌ها در آثار فارابی از نظر تاریخ ریاضیات نظری، بررسی‌های او در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب «شرح المجسطی» (که در آن به شرح و تفسیر کتاب بزرگ بطلمیوس پرداخته است) «تانژانت» و «کتانژانت» را در دایرهٔ مثلثاتی وارد ساخت و قضیهٔ سینوس‌ها و تانژانت‌ها را برای مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی ثابت کرد. او در این زمینه از نخستین پیشروان است. فارابی در کتابی که دربارهٔ هندسه نوشته است («کتاب الحیل الروحانیه و الاسرار الطبیعیه فی دقایق الاشکال الهندسه»، کتابی که به احتمال زیاد الهام‌بخش ابوالوفای بوزجانی در تنظیم کتاب معروف خود، «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه» بوده است. این کتاب به عمل‌های هندسی لازم برای صنعت‌کاران می‌پردازد)، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، به صورتی منظم، مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند. از میان مسئله‌های مزبور، به ویژه مسئله‌های رسم به کمک پرگار ثابت (پرگاری که شعاع آن تغییر نمی‌کند)، رسم سهمی، رسم چندضلعی‌های منتظم و هم‌چنین ترسیم‌های روی کره، جالب هستند.

فارابی در نوشته‌های خود، به بنیان‌های ریاضیات و به روش طرح مفهوم‌های اصلی و پایه‌ای ریاضیات، اهمیت زیادی می‌دهد. وی از نخستین کسانی است که اثر معروف **اقلیدس**، یعنی «مقدمات» را مورد بررسی انتقادی قرار دادند. او در کتاب «شرح المستغلق من مصادرات المقاله الاولی و الخامسه من اقلیدس» به بحث دربارهٔ دو فصل اول و پنجم از کتاب مقدمات اقلیدس پرداخته است: فصل اول کتاب اقلیدس ۴۸ گزاره دارد دربارهٔ مثلث‌ها، خط‌های راست عمود برهم و موازی با هم، متوازی‌الاضلاع، مساحت شکل‌ها، و قضیهٔ فیثاغورث و عکس آن. فصل پنجم مقدمات نیز که یکی از اساسی‌ترین فصل‌های کتاب است، به «نظریهٔ نسبت‌ها» اختصاص دارد.

فارابی در دو اثر مشهور خود، «احصاءالعلوم» و «مراتب‌العلوم»، دانش‌ها را برحسب جنبه‌های آموزشی آنها تقسیم‌بندی می‌کند و ریاضیات را شامل هفت شاخه می‌داند: حساب، هندسه، نور، اخترشناسی، موسیقی، مکانیک و سرانجام، علم استادی و مهارت در کارها. می‌بینیم که فارابی، وقتی از ریاضیات

صحبت می‌کند، به درستی دو جنبهٔ نظری و کاربردی آن را با هم و در پیوند با یکدیگر در نظر می‌گیرد. او در دوره‌ای از تاریخ ریاضیات قرار دارد که ضمن بستگی کامل نظریه و کاربرد با یکدیگر، ریاضیات سمت‌گیری کاربردی داشته است.

اقلیدس در مقدمات از «روش ترکیبی» استفاده می‌کند و از مفهوم‌های ساده‌تر، خود را به تعریف مفهوم‌های پیچیده‌تر می‌رساند. فارابی از این روش اقلیدس، که به روش ترکیبی بیش از اندازه اهمیت می‌دهد، انتقاد می‌کند و برای رسیدن به نتیجهٔ مطلوب، روش تجزیه را هم توصیه می‌کند. از زبان خود فارابی بشنویم: «... پایه‌های هندسه و حساب، با دو روش آموخته می‌شوند: روش تجزیه و روش ترکیب. ریاضی‌دانان قدیم در نوشته‌های خود این دو روش را توأم می‌کردند، ولی اقلیدس کتاب خود را تنها با روش ترکیبی نوشت...»

فارابی در تألیف کتاب عظیم خود «الموسیقی الکبیر» (که در دو جلد تنظیم شده بود و دریغ که تنها جلد اول آن به ما رسیده است)، توانست با موفقیت دو روش مذکور را با هم به کار گیرد. این موضوع را می‌توان از جمله‌های زیر که از مقدمهٔ این کتاب آورده‌ایم، به خوبی فهمید: «... تا اینجا از تجزیه استفاده کرده‌ایم. برای اینکه هنر موسیقی را بیاموزیم، ترکیب را هم به‌کار می‌بریم. تجزیه به این دلیل برای ما لازم است که عنصرها را، به ردیف شناخت شده، منظم کنیم؛ یعنی به همان ردیفی که این عنصرها مورد شناسایی ما قرار گرفته‌اند. برعکس، ترکیب، این عنصرها را به همان ردیفی که در واقع وجود دارند، تنظیم می‌کند... .»

فارابی، طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه و اصل‌های هندسی را در همان کتاب «بررسی دشواری‌های مقالهٔ اول و مقالهٔ پنجم اقلیدس» ارائه داده است. در این‌جا، او با اندیشهٔ فلسفی عمیق دربارهٔ سرچشمه به وجود آمدن مفهوم‌های بنیانی هندسه، از راه انتزاع تدریجی و گام‌به‌گام آنها از دنیای واقع، گفت‌وگو می‌کند. مثلاً با اشاره به تعریف‌هایی که از اقلیدس در فصل اول مقدمات آورده است، مسیر جداشدن مفهوم‌ها را از واقعیت عینی، تجزیه و تحلیل می‌کند.

به این منظور او دو حالت را بررسی می‌کند: نخست اینکه آنچه را به احساس مستقیم نزدیک‌تر است، مقدم بدانیم. دوم اینکه آنچه را به عقل نزدیک‌تر است، در جای اول قرار دهیم. باز هم از زبان خود او بشنویم: «... جسم از همه به احساس نزدیک‌تر است، سپس سطح، بعد خط و سرانجام دورتر از همهٔ اینها، نقطه. ولی به عقل، چیزی نزدیک‌تر است که از بخش‌های کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هر چیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیک‌تر است. و به این ترتیب، به آنجا می‌رسیم که دربارهٔ چیزی بیندیشیم که برای وجود آن هیچ جزئی دخالت نداشته باشد. بنابراین، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به‌دست می‌آید، نقطه در جای نخست قرار گرفته است، سپس خط، بعد سطح و در جای آخر جسم.

با وجود این، وقتی که با یک شاگرد سروکار داریم، از آنجا که در سال‌های نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد، گرایش دارد، ما ردیفی را انتخاب می‌کنیم که متناظر با احساس است. ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر است، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود. سپس این جسم، از همهٔ آنچه که آن را محسوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود. بعد به سطح و خط و سرآخر، به نقطه پرداخته می‌شود. به این ترتیب، بهتر این است کار خود را از **محسوس** و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به **نقطه** برسیم و سپس دوباره به ردیفی بپردازیم که متناظر با عقل است؛ یعنی به ترکیب...»

می‌بینیم که فارابی در بررسی انتقادی خود از مقدمات اقلیدس، تأکید می‌کند که ضمن طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه، باید فلسفهٔ پیدایش آنها را در مسیر جداشدنشان از جسم فیزیکی و دنیای واقع، در نظر بگیریم. اقلیدس در مقدمات از تعریف «انتزاعی‌ترین» مفهوم‌ها آغاز می‌کند و سپس به تدریج به تعریف‌هایی می‌پردازد که در درجهٔ کمتری از انتزاع قرار دارند. فارابی با تجزیه و تحلیل انتقادی روش اقلیدس، طرح محسوس و مادی سرچشمه‌های پیدایش مفهوم‌های ریاضی را ارائه می‌دهد. باید به این توصیهٔ فارابی در مورد رعایت عینی بودن نظام آموزش در نخستین گام‌ها توجه کرد، زیرا دانش‌آموز در نخستین سال‌های آموزش «بیشتر به سمتی کشش دارد که محسوس است».

ابوریحان بیرونی، زیر تأثیر مستقیم نوشته‌های فارابی، در کتاب «التفهیم» خود برخلاف اقلیدس مفهوم‌های اساسی هندسه را به ترتیب انتزاعی بودن آنها (از محسوس به طرف تجرید) تعریف می‌کند.

فارابی در نوشته‌های خود اندیشه‌های درست و کاملی دربارهٔ مسئله‌های نظری (و از آن جمله ریاضیات) به صورت قابل فهم و در عین حال علمی و دقیق ارائه می‌دهد. کتاب موسیقی فارابی را باید نخستین کتاب علمی دربارهٔ موسیقی نظری دانست که به کلی با آموزش‌های فیثاغورس و افلاطون دربارهٔ موسیقی ـ که پر از ابهام و در مسیر بحث‌های «ماوراءالطبیعه» است ـ فرق دارد. با پیروی از فارابی بود که بعد از او دانشمندان دیگری مثل ابن‌سینا، **جرجانی** و **قطب‌الدین شیرازی** به بررسی علمی موسیقی پرداختند.

کتاب موسیقی فارابی، مجموعه‌ای

است از بحث‌های دقیق و جالب دربارهٔ ریاضیات، فیزیک و موسیقی. به یاد داشته باشیم که فارابی، با گونه‌های اندکی از سازها (که در زمان او معمول بود)، مثل نی، تنبور و عود سروکار داشت (تنبور ۲ سیم و عود ۴ یا ۵ سیم دارد). با وجود این، توانسته است از عهدهٔ بررسی علمی موسیقی برآید. او پرده‌ها (صداها) و گام‌های متفاوت را مورد بحث قرار داده و انواع آنها را در میان قوم‌های مختلف با هم مقایسه کرده است. او به موجی و ارتعاشی بودن صوت، به احتمال قریب به یقین، برای نخستین بار پی برد. همچنین، برای جمع و تفریق فاصله‌های صوتی، طول تارهای مولد آنها را درهم ضرب و برهم تقسیم می‌کرد. یعنی به‌طور ضمنی از این قانون که جمع و تفریق فاصله‌های صوتی از قانون‌های لگاریتم پیروی می‌کنند (بدون اینکه مفهوم «لگاریتم» را بشناسد)، اطلاع داشت.

فارابی نوعی الفبای موسیقی را به‌کار می‌برد و «نت‌ها» را با «عدد» مشخص می‌کرد. او می‌گفت برای شناختن موسیقی باید به سرچشمهٔ آن، یعنی طبیعت روآورد. فارابی معتقد بود که در موسیقی نمی‌توان مبدأ را تغییر داد و به دل‌خواه انتخاب کرد (آن‌طور که مثلاً، در گرماسنج و برای تعیین درجهٔ حرارت ممکن است). برای پیدا کردن مبدأ موسیقی باید به سراغ طبیعت رفت. هم‌نوایی و هم‌آهنگی که بعدها از سدهٔ هجدهم میلادی مورد توجه قرار گرفته است، در بحث‌ها و بررسی‌های فارابی وجود دارد.

روش‌شناسی فارابی بسیار جالب و آموزنده است. او در مقدمهٔ کتاب «موسیقی» می‌نویسد: « ... برای اینکه اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون توجه به اینکه مربوط به کدام دانش است، باید سه شرط را داشته باشیم:

۱. همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛

۲. توانایی نتیجه‌گیری‌های لازم را، از این قاعده‌ها و داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛

۳. توانایی پاسخ‌گویی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم، اندیشه‌ها و عقیده‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا سازیم، و به اصلاح اشتباه‌ها دست بزنیم...»

فارابی، توصیه‌های مربوط به روش‌شناسی علمی خود را در کتاب‌ها و رساله‌های فراوانی که در زمینه‌های گوناگون دانش نوشته، به کار بسته است و بهترین نمونه‌های مربوط به بررسی بنیان‌های دانش زمان خودش را، در این میان، بررسی انتقادی او از «المجسطی» **بطلمیوس**، جای نمایانی دارد. فارابی، در مقدمهٔ این بررسی، یادآوری می‌کند: « ... تلاش کرده‌ام مضمون این نوشته را تا حدی که ممکن است قابل فهم کنم...»

بطلمیوس در «المجسطی» همه‌جا می‌کوشد به بررسی‌های مربوط به پدیده‌های اخترشناسی جنبهٔ محاسبه‌ای بدهد. او سعی می‌کند از روش‌های خالص ریاضی در مورد داده‌های عددی که از راه تجزیه به‌دست آمده‌اند، استفاده کند. همچنین، از شرط‌های هندسی معینی آغاز می‌کند و سپس از آنها به نتیجه‌های عددی می‌رسد.

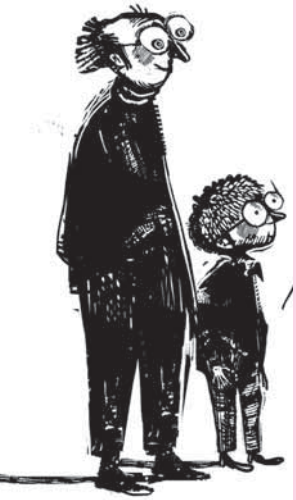
در بررسی‌های فارابی یا اصلاً داده‌های عددی وجود ندارد و یا به عنوان بازماندهٔ نادری از روش «المجسطی» پیدا می‌شود. او با به‌کار گرفتن قالب‌های خطی مثلثاتی و گسترش مفهوم عدد تا عدد حقیقی مثبت، تا مرز روش‌های جبری پیش می‌رود. به برکت این روش دقیق نظری، نه تنها نوشتهٔ فارابی نسبت به «المجسطی» حجم کمتری دارد، بلکه مهمتر از آن، برای خواننده، ساده‌تر و قابل فهم‌تر شده است.

نتیجه

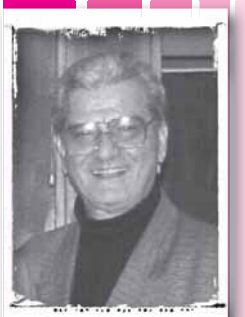
به این ترتیب می‌بینیم که اگر دیدگاه‌های فارابی دربارهٔ سیاست، جامعه‌شناسی و فلسفه (فلسفه به معنای خاص خود، یعنی پرداختن به کون و مکان، و لاهوت و ناسوت)، تنها از نظر تاریخی اهمیت دارد، کارهای علمی فارابی در چنان درجه‌ای از اهمیت است که از بسیاری از آنها حتی امروز هم می‌توان استفاده کرد. به‌خصوص بررسی و مطالعهٔ کتاب‌های «موسیقی»، «هندسه»، «شرح مجسطی»، «احصاء العلوم» و «مراتب العلوم» که با کمال تأسف بسیار کم به آنها پرداخته شده است، از نظر روش‌شناسی علمی اهمیت بسیار دارد. کتاب «موسیقی» فارابی نمونهٔ بسیار ارزنده‌ای برای دانشمندان است که نشان می‌دهد چگونه می‌توان مسئله‌های دشوار دانش‌های طبیعی را به کمک ریاضیات حل کرد!

دیدگاه‌های فارابی در زمینهٔ روان‌شناسی آموزشی و روش‌شناسی علمی، مثل بسیاری از دیدگاه‌های دیگر او، تقریباً ناشناخته مانده‌اند و شناخت آنها به بررسی‌های خاص و مجدّانه‌ای نیاز دارد.

کتاب‌های فارابی با همهٔ اهمیتی که دارند، هنوز به زبان فارسی درنیامده‌اند و مشتاقان ایرانی از مطالعهٔ مستقیم نوشته‌های این اندیشمند بزرگ محروم‌اند. وزارت‌خانه‌های ارشاد، آموزش عالی و آموزش‌وپرورش، و همچنین دانشگاه‌ها باید ترجمه و چاپ کتاب‌های اندیشمندان ایرانی را از وظیفه‌های درجهٔ اول خود بدانند. بدون تکیه بر گذشتهٔ علمی خود و بدون تجزیه و تحلیل راه گذشته، نمی‌توان مسیر پیشرفت آینده را پیدا کرد.



احمد قندهاری



درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها

کلیدواژه‌ها: رادیکال، تجزیهٔ رادیکال‌ها، رادیکال مرکب، گویا کردن، مزدوج

الف) تجزیهٔ رادیکال‌ها.....

می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ را به دو رادیکال جدا از هم تبدیل کنیم. این عمل را «تجزیهٔ رادیکال‌ها» گوییم.

برای این کار فرض می‌کنیم: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

(A، B، x و y مثبت‌اند.)

دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm ۲\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ ۲\sqrt{xy} = \sqrt{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ ۴xy = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ xy = \dfrac{B}{۴} \end{cases}$$

حال برای تعیین x و y، معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش x و y باشد و سپس معادلهٔ تشکیل شده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + y = A = S \\ x.y = \dfrac{B}{۴} = P \end{cases}$$

$$Z^۲ - SZ + P = ۰ \Rightarrow Z^۲ - AZ + \frac{B}{۴} = ۰$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{A \pm \sqrt{A^۲ - B}}{۲}$$

فرض می‌کنیم: $C = \sqrt{A^۲ - B}$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z = \frac{A \pm C}{۲} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = \dfrac{A + C}{۲} \\ y = \dfrac{A - C}{۲} \end{cases}$$

داشتیم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

پس:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{۲}} + \sqrt{\frac{A - C}{۲}}$$

نتیجه:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{۲}} + \sqrt{\frac{A - C}{۲}}, \quad C = \sqrt{A^۲ - B}$$

توجه: اگر رادیکال مرکبی داشته باشیم و آن را به دو رادیکال ساده‌تر تبدیل کنیم، این عمل را «تجزیهٔ رادیکال‌ها» گویند. قبل از حل، رادیکال مرکب مسئله را به $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ تبدیل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱. عبارت $\sqrt{۳۷ - ۲۰\sqrt{۳}}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\sqrt{۳۷ - ۲۰\sqrt{۳}} = \sqrt{۳۷ - \sqrt{۴۰۰ \times ۳}} = \sqrt{۳۷ - \sqrt{۱۲۰۰}}$$

با مقایسه با فرمول:

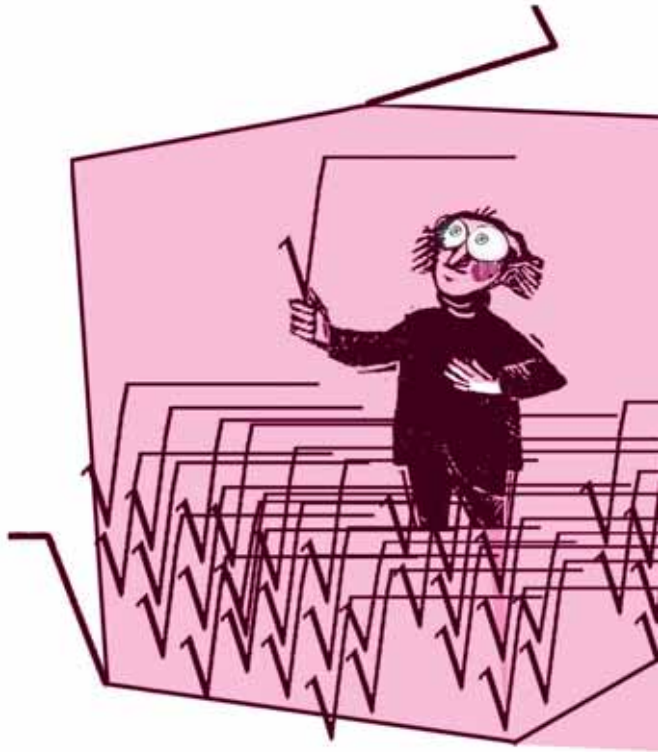
$$\begin{cases} A = ۳۷ \\ B = ۱۲۰۰ \end{cases}, \quad C = \sqrt{A^۲ - B} = \sqrt{۳۷^۲ - ۱۲۰۰} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

بنابر فرمول:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{۲}} - \sqrt{\frac{A - C}{۲}}, \quad C = ۱۳$$

$$\sqrt{۳۷ - \sqrt{۱۲۰۰}} = \sqrt{\frac{۳۷ + ۱۳}{۲}} - \sqrt{\frac{۳۷ - ۱۳}{۲}} = \sqrt{۲۵} - \sqrt{۱۲}$$

$$= ۵ - ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳۷ - ۲۰\sqrt{۳}} = ۵ - ۲\sqrt{۳}$$



مسئلهٔ ۲. حاصل $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ را بیابید.

حل:

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$$

ابتدا $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+\sqrt{144\times 2}}=\sqrt{17+\sqrt{288}}\quad \begin{cases}A=17\\B=288\end{cases}$$

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{17^2-288}=\sqrt{289-288}=\sqrt{1}=1$$

داشتیم:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}\ ,\ C=\sqrt{A^2-B}$$

پس:

$$\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{\frac{17+1}{2}}+\sqrt{\frac{17-1}{2}}=3+\sqrt{8}$$

بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}$$

حالا $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases}A=3\\B=8\end{cases}\ ,\ C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{9-8}=1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}\ ,\ C=1\ ,\ \begin{cases}A=3\\B=8\end{cases}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1$$

بنابراین:

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1$$

مسئلهٔ ۳. حاصل $P=\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ را بیابید.

حل: ابتدا $\sqrt{13+\sqrt{48}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}\quad \begin{cases}A=13\\B=48\end{cases}\quad C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{169-48}$$

$$=\sqrt{121}=11$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}\quad C=\sqrt{A^2-B}$$

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{13+11}{2}}+\sqrt{\frac{13-11}{2}}=\sqrt{12}+1$$

$$P=\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12}-1}}$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$$

حال $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{4-\sqrt{12}}\quad \begin{cases}A=4\\B=12\\C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2\end{cases}$$

پس:

$$\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+2}{2}}-\sqrt{\frac{4-2}{2}}=\sqrt{3}-1$$

بنابراین:

$$P=\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}=\sqrt{3+\sqrt{3}-1}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$P=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$P=\sqrt{2+\sqrt{3}}\quad \begin{cases}A=2\\B=3\\C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{4-3}=1\end{cases}$$

$$P=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=$$

ب) گویا کردن .....

گویا کردن مخرج یک کسر، عملی است که رادیکال مخرج کسر را حذف می‌کند.

۱. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{n\sqrt{a}}$، $a>0$، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{15}{7\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{15}{7\sqrt{5}}=\frac{15}{7\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{7\times 5}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

۲. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$، $a>0,\ m,n\in N$، $m>n$، صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}$ را گویا کنید $(a\neq 0)$.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}\times\frac{\sqrt[11]{a^{11-7}}}{\sqrt[11]{a^{11-7}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}\times\frac{\sqrt[11]{a^4}}{\sqrt[11]{a^4}}=\frac{\sqrt[11]{a^4}}{\sqrt[11]{a^{11}}}=\frac{\sqrt[11]{a^4}}{a}$$

۳. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}$ $(a,c\neq 0\ ,\ b,d>0)$، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج، یعنی $a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}$، ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\times\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{4(3)-9(5)}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{-33}$$

۴. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}$، صورت و مخرج را دوبار در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم $(a,b>0)$.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}\times\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}$$
$$=\frac{(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$$

۵. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$، صورت و مخرج را در عبارت $(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{5-2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$$

۶. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$، صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b})$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ را گویا کنید.

حل:

$$a^2=9\Rightarrow a=3,\ b^2=4\Rightarrow b=2,\ ab=6$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\underbrace{3^2}_{a^2}}-\sqrt[3]{\underbrace{3\times 2}_{a.b}}+\sqrt[3]{\underbrace{2^2}_{b^2}}}\times\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\underbrace{3}_{a}}+\sqrt[3]{\underbrace{2}_{b}}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{3+2}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$$

مثال ۲. مخرج کسر $\frac{2}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{2}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}=\frac{2}{\sqrt[3]{\underbrace{16}_{a^2}}+\sqrt[3]{\underbrace{4}_{b^2}}+\sqrt[3]{\underbrace{8}_{ab}}}\qquad\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$$
$$=\frac{2}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{8}}\times\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$
$$=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{4-2}=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{2}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$$

مسئلهٔ ترکیبی ۱. مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}$ را گویا کنید.

حل: ابتدا فرجهٔ مشترک می‌گیریم. یعنی، دو رادیکال مخرج را به فرجهٔ ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۵^۲}-\sqrt[۶]{۲^۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}$$

حال صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}\times\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}=\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۸}}=$$

حال بنابر شمارهٔ (۵) همین درس، مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵}_{a}}-\sqrt[۳]{\underbrace{۸}_{b}}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲۵^۲}+\sqrt[۳]{۲۵\times ۸}+\sqrt[۳]{۸^۲}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵^۲}_{a^۲}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵\times ۸}_{ab}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۸^۲}_{b^۲}}}$$

$$=\frac{(\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸})(\sqrt[۳]{۶۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰۰}+\sqrt[۳]{۶۴})}{۲۵-۸}=\frac{\text{عبارت صورت}}{۱۷}$$

مسئلهٔ ترکیبی ۲. حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$P=\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$$

حل:

صورت کسر را K فرض می‌کنیم:

$$۰<K=\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt{K^۲}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{(\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲})^۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}-۲+۲\sqrt{\underbrace{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}$$

$$K=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}-۴}=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+۱)}=\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}$$

$$P=\frac{\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}-\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱)=P=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}+۱\Rightarrow P=۱$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی

در جدول واژه‌های به‌هم ریختهٔ زیر، نام‌های تعدادی از مشاهیر ایران اعم از شاعر، نویسنده، ریاضی‌دان، دانشمند و... آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. به عنوان نمونه نام‌های **فارابی** و **رازی** را مشخص کرده‌ایم. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان نامی ایران به‌دست می‌آید. نام و زندگی‌نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

د	ر	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ط	ا
م	ج	ب	ه	ز	ا	د	س	ب	ل
م	و	ل	و	ی	ع	ج	ن	ر	د
ن	م	ن	س	ط	ک	س	ا	ی	ی
ف	ا	ر	ا	ب	ی	ع	ی	د	ب
ر	ی	ر	ب	ن	ی	م	ی	ن	ظ
د	خ	ح	ا	ح	ی	ر	ی	ج	ف
و	ر	ی	م	ز	ر	ا	و	خ	ا
س	م	ک	ا	ی	م	ا	ظ	ن	ح
ی	ع	ر	ا	ی	ش	و	ک	ی	ی

نام‌های مشاهیر:

فارابی، رازی، عمر خیام، ابن‌سینا، خوارزمی، نیریزی، بهزاد، طبری، بیدل، مولوی، حافظ، سنایی، کسایی، فردوسی، کوشیار، بیرونی، نظامی، خجندی، عسجدی، عطار

مسئلهٔ ترکیبی ۱. مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}$ را گویا کنید.

حل: ابتدا فرجهٔ مشترک می‌گیریم. یعنی، دو رادیکال مخرج را به فرجهٔ ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۵^۲}-\sqrt[۶]{۲^۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}$$

حال صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}\times\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}=\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۸}}=$$

حال بنابر شمارهٔ (۵) همین درس، مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵}_{a}}-\sqrt[۳]{\underbrace{۸}_{b}}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲۵^۲}+\sqrt[۳]{۲۵\times ۸}+\sqrt[۳]{۸^۲}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵^۲}_{a^۲}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵\times ۸}_{ab}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۸^۲}_{b^۲}}}$$

$$=\frac{(\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸})(\sqrt[۳]{۶۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰۰}+\sqrt[۳]{۶۴})}{۲۵-۸}=\frac{\text{عبارت صورت}}{۱۷}$$

مسئلهٔ ترکیبی ۲. حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$P=\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$$

حل:

صورت کسر را K فرض می‌کنیم:

$$۰<K=\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt{K^۲}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{(\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲})^۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}-۲+۲\sqrt{\underbrace{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}$$

$$K=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}-۴}=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+۱)}=\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}$$

$$P=\frac{\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}-\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱)=P=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}+۱\Rightarrow P=۱$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی

در جدول واژه‌های به‌هم ریختهٔ زیر، نام‌های تعدادی از مشاهیر ایران اعم از شاعر، نویسنده، ریاضی‌دان، دانشمند و... آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. به عنوان نمونه نام‌های **فارابی** و **رازی** را مشخص کرده‌ایم. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان نامی ایران به‌دست می‌آید. نام و زندگی‌نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

د	ر	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ط	ا
م	ج	ب	ه	ز	ا	د	س	ب	ل
م	و	ل	و	ی	ع	ج	ن	ر	د
ن	م	ن	س	ط	ک	س	ا	ی	ی
ف	ا	ر	ا	ب	ی	ع	ی	د	ب
ر	ی	ر	ب	ن	ی	م	ی	ن	ظ
د	خ	ح	ا	ح	ی	ر	ی	ج	ف
و	ر	ی	م	ز	ر	ا	و	خ	ا
س	م	ک	ا	ی	م	ا	ظ	ن	ح
ی	ع	ر	ا	ی	ش	و	ک	ی	ی

نام‌های مشاهیر:

فارابی، رازی، عمر خیام، ابن‌سینا، خوارزمی، نیریزی، بهزاد، طبری، بیدل، مولوی، حافظ، سنایی، کسایی، فردوسی، کوشیار، بیرونی، نظامی، خجندی، عسجدی، عطار

احسان یارمحمدی

نگاهی به فیلم اتاق فرما

کلیدواژه‌ها: اتاق فرما، لوئیز پیدراهیتا، کریستین گلدباخ، جرج کانتور، کورت گودل، پاسکال، هیلبرت، فیثاغورس

اسم فیلم: اتاق فرما ● **کارگردانان:** لوئیز پیدراهیتا[1] و رودریگو سوپنا[2] ● **تهیه‌کنندگان:** سزار بنیتز[3]، آدولفو بلانکو[4] و خوزه ماریا ایریساری[5] ● **نویسندگان:** لوئیز پیدراهیتا و رودریگو سوپنا ● **بازیگران:** آلخو ساآوراس[6]، النا بالستروس[7]، لوئیز هومَر[8]، سانتی میلان[9] و فدریکو لوپی[10] ● **موسیقی:** فدریکو خوسید[11] ● **فیلم‌برداری:** میگوئل آنخل آمِوادو[12] ● **تدوین:** خورخه ماکایا[13] ● **تاریخ اکران:** هفتم اکتبر ۲۰۰۷ ● **محصول:** اسپانیا

بدون این اثبات، جهان خواهد ماند

فیلم با صحنه‌ای آغاز می‌شود که در آن ریاضی‌دان جوانی در حال توضیح دادن حدسی دربارهٔ نظریهٔ اعداد است که توسط **کریستین گولدباخ**[14] (۱۷۶۴-۱۶۹۰) در سال ۱۷۴۲ به دنیای ریاضیات وارد شد. در این صحنه ریاضی‌دان جوان برای تعدادی از دانشجویان بیان می‌کند که هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول بیان کرد. او برای درک بهتر این موضوع، مثال‌های ۱۱+۷=۱۸، ۱۹+۵=۲۴ و ۳۷+۱۳=۵۰ را ارائه می‌کند. دو دانشجو نیز از او می‌خواهند که برای اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نیز حدس گلدباخ را ارائه کند و او در پاسخ این جواب‌ها را به ایشان ارائه می‌کند: ۸۳+۱۷=۱۰۰ و ۵۲۱+۴۷۹=۱۰۰۰.

در نهایت هم به پلاک اتومبیل خود که عددی زوج است، اشاره می‌کند و آن را به صورت ۵۱۱۹+۱۹۹۳=۷۱۱۲ برای آنها تحلیل می‌کند.

در ادامهٔ گفت‌وگو، او به دانشجویان می‌گوید که استفاده از حدس گلدباخ برای اعداد با مقادیر بزرگ کار بسیار دشواری است و نیز بی‌شماری عددها و نبود قانون و قاعده‌ای کلی برای استفاده از این حدس، به دشواری آن می‌افزاید. در واقع، ریاضی‌دان جوان روی اثبات این حدس و ارائهٔ آن به عنوان یک قضیه کار می‌کند و قرار است در تاریخ بسیار نزدیکی از اثبات خود برای این قضیه دفاع کند. اما ناگهان با مراجعه به دفتر کارش درمی‌یابد که اتاقش مورد حمله قرار گرفته و تمام زحماتش برای ارائهٔ عمومی این حدس در قالب قضیه، برباد رفته است. برای اثبات مجدد آن نیز به وقت کافی نیاز دارد و نمی‌تواند آن را در تاریخی که از پیش تعیین شده است، آماده کند.

در صحنهٔ بعدی این فیلم که به چهار ماه بعد اشاره دارد، ریاضی‌دان کهن‌سالی را مشاهده می‌کنیم که در حال بازی شطرنج با یکی از دوستانش است و دوست او اصرار دارد که این ریاضی‌دان ریاضیات را رها کند؛ چون تعداد زیادی از ریاضی‌دانان بااستعداد و نابغه، مانند **جورج کانتور**[15] (۱۹۱۸-۱۸۴۵)، **یوتاکا تانیاما**[16] (۱۹۵۸-۱۹۲۷) و **کورت گودِل**[17] (۱۹۷۸-۱۹۰۶)، سرانجام دیوانه و

شـیدا شـدند. در ادامـه، ریاضی‌دان کهن‌سـال نامـه‌ای را برای دوسـتش می‌خوانـد که دربرگیرنـدهٔ معمایی به امضای شـخصی با نام مستعار **فرما**[18] اسـت. در این نامه اشاره شده است که اگر او بتواند به این معما پاسـخ درست و مناسب بدهد، اجازه دارد در جلسه‌ای که در آخر هفته پیرامون مبتکرانه‌ترین نظریه‌های ریاضی تشـکیل می‌شـود، شرکت کند.

(معمای مطرح شده در نامه به این صورت است: رابطهٔ بین اعداد ۱، ۳، ۷، ۶، ۸، ۹، ۲، ۴، ۵ را پیدا کنید.)

در صحنـه‌ای دیگر از ایـن فیلم، ریاضی‌دان دیگری را مشاهده می‌کنیم که به سبب دریافت نامه‌ای مشابه نامهٔ مزبـور، در حال بررسـی معمـا و ارائهٔ راه‌حـل برای آن اسـت. در این هنگام همکارش به او می‌گوید اگر خواسـتی اتـاق را تـرک کنی، کتاب‌هـای مورد اسـتفاده‌ات را براسـاس حـروف الفبا مرتب کن.

این راهنمایی ناخواسـته جرقه‌ای در ذهن او می‌زند: «این اعداد براساس حروف الفبـا ارائه شـده‌اند و بین آنها فقط همین رابطـه وجود دارد» (چون ایـن فیلم به زبان اسـپانیایی اسـت، ارائهٔ متـرادف لغوی برای اعداد در این معما براسـاس مترادف اسپانیایی برای آنهاست).

در ادامـهٔ فیلم، چهـار ریاضی‌دان را مشـاهده می‌کنیـم کـه توانایـی پاسـخ‌گویی به این معما را داشـته‌اند. آنها در دعوت‌نامه‌ای به امضای فرما به نام‌های مستعار **پاسکال**[19]، **هیلبرت**[20]، **اُلیوا**[21] و **گالویس**[22] نامیده شـده‌اند. در این دعوت‌نامه از آنها خواسـته شـده اسـت، از آوردن تلفن همراه به جلسه و فاش‌کردن هویـت واقعی خود برای سـایر مهمانان جلسه خودداری کنند.

آنان اکنون با قایقی به نام **فیثاغورس**[23] در حال عبور از رودخانه‌ای هسـتند تا به محل تشـکیل جلسه که درون یک انباری است، برسند.

بعد از مـدت کوتاهی که به محل جلسه می‌رسند، شخصی وارد می‌شود و خـود را فرما معرفـی می‌کند و آنها مشغول گفت‌وگو می‌شوند. دقایقی بعد تلفن همراه فرمـا زنگ می‌خورد! فرما بعـد از پاسـخ‌گویی می‌گوید که ناچار است برای رسیدگی به وضعیت دختر بستری شدهٔ خود در بیمارستان، جلسه را ترک کند. لحظاتی پس از رفتن فرما، آنها پیامـی را در قالب یـک پیام‌گیر دریافت می‌کنند که در آن بیان شـده است:

ـ شـما یک دقیقه وقـت دارید به این معما پاسـخ دهید: «فروشـنده‌ای سـه جعبه آبنبات دارد که یکی از آنها حاوی آبنبات نعنایـی، دیگری حاوی آبنبات مغزدار و سومی دارای مخلوطی از آبنبات‌های نعنایی و مغزدار اسـت. روی هر جعبه با برچسـب نوشته شده اسـت: آبنبات نعنایی، آبنبات مغزدار و آبنبـات مخلوط نعنایی و مغزدار. البته فروشنده می‌گوید که جعبه‌ها اشتباهی نام‌گـذاری شـده‌اند. کمتریـن تعداد آبنبات‌هایی را که فروشـنده می‌باید از داخـل جعبه‌ها بیـرون آورد تا بفهمد کـه محتوی هر جعبه شـامل چه نوع آبنباتی است، مشخص کنید.

بعد از مطرح شـدن این معما، آنها متوجـه می‌شـوند که اگـر ظرف یک دقیقـه نتوانند به آن پاسـخ درسـت بدهنـد، اتاقـی که در آن قـرار دارند، کوچـک و کوچک‌تـر می‌شـود و این موضوع با ارائهٔ معماهای بعدی مجدداً نیز تکرار می‌شود. در آخر هم اتاقی که در آن محبوس شده‌اند، به یک قوطی کبریت شـبیه خواهد شد. در حقیقت آنهـا در مخمصه‌ای قـرار گرفته‌اند که در نهایت به از دسـت رفتن جان آنها می‌انجامد. با به‌وجود آمدن خطر مرگ، آنها به اقداماتی بـرای فرار از اتاق و یا تغییر چیدمـان مبلمان و اثاثیهٔ داخل اتاق برای جلوگیری از کوچک‌تر شدن آن دسـت می‌زننـد. ولـی تمامی این کارها بی‌فایده است.

در حیـن رخ دادن ایـن اتفاقات و نیز بحث و گفت‌وگوهای متنوع دربارهٔ علـت و چگونگـی رخداد ایـن ماجرا، پاسـکال با مطالعهٔ کتابـی که از یکی از قفسـه‌های کتاب برداشـته اسـت، متوجه می‌شـود، اختصاص آن نام‌های مسـتعار به آنها دلیل داشـته اسـت: ریاضی‌دانان مشهور، **اِواریسته گالویس** (۱۸۳۲-۱۸۱۱)، **لوئیـس دِ اُلیـوا سـابوکو**[24] و **بلـز پاسـکال**[25] (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، در سـنی جان به جان آفرین تسلیم کرده‌اند که هر یک از آنها که در این اتاق با نام گالویس، اُلیوا و پاسکال شناخته می‌شوند، در حال حاضر در آن سـن قرار دارند و قرار است در همین سن و در همین اتاق بمیرند.

سپس با بررسـی کارت شناسایی واقع در کت شـخصی که آن را هنگام ترک اتاق جا گذاشـت و نام مسـتعار «فرما» را با خود به یدک می‌کشـید، متوجه می‌شوند که سن او با سنی که ریاضی‌دان نامی **پیر دِ فرما**[26] (۱۶۶۵-۱۶۰۱) بـه هنگام مرگ داشـته، یکی است.

در اواخر فیلم آنها متوجه می‌شوند کـه تمام این ماجرا و دردسـرهای آن، متوجـه ریاضی‌دانی اسـت کـه با نام مسـتعار هیلبرت در این جلسه حضور دارد. در واقع، او همان کسـی است که نظریهٔ ریاضی‌دان جوان را در ابتدای فیلم نابود کرده اسـت. هیلبرت مدت زیادی برای اثبات حدس گلدباخ کوشیده، اما

متوجه شده است که این ریاضی‌دان جوان نیز روی آن کار می‌کند. به علاوه، تمام روزنامه‌ها و مجلات توجه خود را به این جوان معطوف کرده‌اند و عکس او را به عنوان کسی که قرار است اثباتی برای این حدس ارائه کند، به تصویر کشیده‌اند.

بعد از مرور ماجراها و واقعیات پیرامون این ملاقات، هیلبرت خود را به عنوان اولین کسی معرفی می‌کند که حدس گلدباخ را اثبات کرده است. ریاضی‌دان جوان از این موضوع عصبانی می‌شود و با مشت ضربه‌ای به صورت هیلبرت می‌زند.

هیلبرت به زمین می‌افتد و سرش به پایهٔ صندلی می‌خورد و بیهوش می‌شود. پاسکال به ریاضی‌دان جوان می‌گوید که هیلبرت تا همین دقیقهٔ آخر داشت به فرار فکر می‌کرد. علاوه بر این، تمامی ما در سنی خواهیم مرد که ریاضی‌دانان شهیر، پاسکال، اُلیوا و گالویس دارفانی را وداع گفته‌اند. اما **دیوید هیلبرت**[27] ریاضی‌دان در سن ۸۰ سالگی بدرود حیات گفت. این در حالی است که شخص با نام مستعار هیلبرت که در بین ماست، در این سن قرار ندارد. بنابراین او قصد فرار داشته و در این‌جا نیز راهی برای گریز از این تنگنا که توسط وی قبلاً آماده شده است، وجود دارد. سپس آنها متوجه تختهٔ سیاهی می‌شوند که روی آن کلمهٔ «آزادی» نوشته شده است. قهرمانان داستان با شکستن این تخته و فرار از داخل آن اتاق پردردسر، از این ماجرا جان سالم به‌در می‌برند.

در پایان فیلم، هنگامی که پاسکال، اُلیوا و گالویس با قایق در مسیر برگشت هستند، پاسکال اثبات ارائه شده توسط هیلبرت را که به همراه خود دارند، به داخل رودخانه می‌اندازد و خاطرنشان می‌کند که بدون این اثبات نیز جهان همان‌گونه که بوده است، خواهد بود.

پی‌نوشت

1. Luis Piedrahita
2. Rodrigo Sopena
3. Cesar Benitez
4. Adolfo Blanco
5. Jose Maria Irisarri
6. Alejo Sauras
7. Elena Ballestros
8. Lluis Homar
9. Santi Millan
10. Federico Luppi
11. Federico Jusid
12. Miguel Angel Amoedo
13. Jorge Macaya
14. Christian Goldbach
15. George Cantor
16. Yutaka Taniyama
17. Kurt Godel
18. Fermat
19. Pascal
20. Hilbert
21. Oliva
22. Galois
23. Pythagoras
24. Luisa de Oliva Sabuco
25. Balse Pascal
26. Pierre de Fermat
27. David Hilbert

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!

در این‌جا بد نیست با خواندن چند لطیفهٔ ریاضی تغییر ذائقه دهیم! البته حتماً انتظار ندارید که این لطیفه‌ها شبیه لطیفه‌هایی باشند که در بعضی سایت‌های رایانه‌ای و یا در پیامک‌هایتان می‌بینید. ولی ظرایفی در آنها نهفته است که به یک‌بار خواندن آنها حتماً می‌ارزد.

● روزی سه نفر، یک مهندس مکانیک، یک ریاضی‌دان و یک مهندس رایانه، سوار بر خودرو به پیک‌نیک می‌رفتند که خودرویشان در جایی خراب شد و متوقف شدند. مهندس مکانیک گفت: «بهتر است بروم درب موتور را بزنم بالا و نگاهی به موتور بکنم، شاید بتوانم کاری بکنم.»

ریاضی‌دان گفت: «حدود یک کیلومتر مانده به اینجا، یک پمپ بنزین دیدم. بهتر است برگردیم به همان نقطه و دوباره این مسیر را بیاییم تا ببینیم علت خرابی ماشین چه بوده است!»

و مهندس رایانه گفت: «احتیاج به این کارها نیست. بهتر است همگی پیاده شویم و دوباره سوار شویم و درها را باز و بسته کنیم و ماشین را روشن کنیم و برویم!

● روزی دو نفر سوار بر بالن در آسمان پرواز می‌کردند که ناگهان ابری عظیم جلویشان سبز شد. به داخل ابر رفتند و مسیر خود را گم کردند. وقتی از ابر بیرون آمدند، بالای قلهٔ کوهی بودند و از بالا مردی را دیدند که روی قله نشسته و در حال فکر کردن است. یکی از آنها به مرد گفت: «هِی آقا ما الان کجا هستیم؟»

مرد جوابی نداد و دوباره ابر آمد و آنها را در خود فرو برد. مدتی گذشت و آنها از ابر بیرون آمدند و دوباره همان مرد را در حال تفکر دیدند. باز از او پرسیدند: «آقا، ما الان کجا هستیم؟»

مرد سرش را بلند کرد و گفت: «شما در بالن هستید!»

یکی از دو بالن‌سوار به دیگری گفت: «شرط می‌بندم این مرد ریاضی‌دان است!»

دیگری پرسید: چرا؟ و او گفت: «به سه دلیل: اولاً خیلی فکر کرد تا جواب بدهد، ثانیاً ساده‌ترین جواب ممکن را داد، ثالثاً اصلاً به کاربرد جوابی که داد فکر نکرد!»

متوجه شده است که این ریاضی‌دان جوان نیز روی آن کار می‌کند. به علاوه، تمام روزنامه‌ها و مجلات توجه خود را به این جوان معطوف کرده‌اند و عکس او را به عنوان کسی که قرار است اثباتی برای این حدس ارائه کند، به تصویر کشیده‌اند.

بعد از مرور ماجراها و واقعیات پیرامون این ملاقات، هیلبرت خود را به عنوان اولین کسی معرفی می‌کند که حدس گلدباخ را اثبات کرده است. ریاضی‌دان جوان از این موضوع عصبانی می‌شود و با مشت ضربه‌ای به صورت هیلبرت می‌زند.

هیلبرت به زمین می‌افتد و سرش به پایهٔ صندلی می‌خورد و بیهوش می‌شود. پاسکال به ریاضی‌دان جوان می‌گوید که هیلبرت تا همین دقیقهٔ آخر داشت به فرار فکر می‌کرد. علاوه بر این، تمامی ما در سنی خواهیم مرد که ریاضی‌دانان شهیر، پاسکال، اُلیوا و گالویس دارفانی را وداع گفته‌اند. اما **دیوید هیلبرت**[27] ریاضی‌دان در سن ۸۰ سالگی بدرود حیات گفت. این در حالی است که شخص با نام مستعار هیلبرت که در بین ماست، در این سن قرار ندارد. بنابراین او قصد فرار داشته و در این‌جا نیز راهی برای گریز از این تنگنا که توسط وی قبلاً آماده شده است، وجود دارد. سپس آنها متوجه تختهٔ سیاهی می‌شوند که روی آن کلمهٔ «آزادی» نوشته شده است. قهرمانان داستان با شکستن این تخته و فرار از داخل آن اتاق پردردسر، از این ماجرا جان سالم به‌در می‌برند.

در پایان فیلم، هنگامی که پاسکال، اُلیوا و گالویس با قایق در مسیر برگشت هستند، پاسکال اثبات ارائه شده توسط هیلبرت را که به همراه خود دارند، به داخل رودخانه می‌اندازد و خاطرنشان می‌کند که بدون این اثبات نیز جهان همان‌گونه که بوده است، خواهد بود.

پی‌نوشت

1. Luis Piedrahita
2. Rodrigo Sopena
3. Cesar Benitez
4. Adolfo Blanco
5. Jose Maria Irisarri
6. Alejo Sauras
7. Elena Ballestros
8. Lluis Homar
9. Santi Millan
10. Federico Luppi
11. Federico Jusid
12. Miguel Angel Amoedo
13. Jorge Macaya
14. Christian Goldbach
15. George Cantor
16. Yutaka Taniyama
17. Kurt Godel
18. Fermat
19. Pascal
20. Hilbert
21. Oliva
22. Galois
23. Pythagoras
24. Luisa de Oliva Sabuco
25. Balse Pascal
26. Pierre de Fermat
27. David Hilbert

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!

در این‌جا بد نیست با خواندن چند لطیفهٔ ریاضی تغییر ذائقه دهیم! البته حتماً انتظار ندارید که این لطیفه‌ها شبیه لطیفه‌هایی باشند که در بعضی سایت‌های رایانه‌ای و یا در پیامک‌هایتان می‌بینید. ولی ظرایفی در آنها نهفته است که به یک‌بار خواندن آنها حتماً می‌ارزد.

● روزی سه نفر، یک مهندس مکانیک، یک ریاضی‌دان و یک مهندس رایانه، سوار بر خودرو به پیک‌نیک می‌رفتند که خودرویشان در جایی خراب شد و متوقف شدند. مهندس مکانیک گفت: «بهتر است بروم درب موتور را بزنم بالا و نگاهی به موتور بکنم، شاید بتوانم کاری بکنم.»

ریاضی‌دان گفت: «حدود یک کیلومتر مانده به اینجا، یک پمپ بنزین دیدم. بهتر است برگردیم به همان نقطه و دوباره این مسیر را بیاییم تا ببینیم علت خرابی ماشین چه بوده است!»

و مهندس رایانه گفت: «احتیاج به این کارها نیست. بهتر است همگی پیاده شویم و دوباره سوار شویم و درها را باز و بسته کنیم و ماشین را روشن کنیم و برویم!

● روزی دو نفر سوار بر بالن در آسمان پرواز می‌کردند که ناگهان ابری عظیم جلویشان سبز شد. به داخل ابر رفتند و مسیر خود را گم کردند. وقتی از ابر بیرون آمدند، بالای قلهٔ کوهی بودند و از بالا مردی را دیدند که روی قله نشسته و در حال فکر کردن است. یکی از آنها به مرد گفت: «هِی آقا ما الان کجا هستیم؟»

مرد جوابی نداد و دوباره ابر آمد و آنها را در خود فرو برد. مدتی گذشت و آنها از ابر بیرون آمدند و دوباره همان مرد را در حال تفکر دیدند. باز از او پرسیدند: «آقا، ما الان کجا هستیم؟»

مرد سرش را بلند کرد و گفت: «شما در بالن هستید!»

یکی از دو بالن‌سوار به دیگری گفت: «شرط می‌بندم این مرد ریاضی‌دان است!»

دیگری پرسید: چرا؟ و او گفت: «به سه دلیل: اولاً خیلی فکر کرد تا جواب بدهد، ثانیاً ساده‌ترین جواب ممکن را داد، ثالثاً اصلاً به کاربرد جوابی که داد فکر نکرد!»

هوشنگ شرقی

ویژهٔ دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم ریاضی

دنباله‌ها

دنباله‌های حسابی و هندسی

کلیدواژه‌ها: دنباله حسابی، دنبالهٔ هندسی، قانون دنباله، جملهٔ عمومی، دنبالهٔ بازگشتی، قدرنسبت، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی

تعریف دنباله

مفهوم دنباله، یک تعریف دقیق ریاضی و یک تعریف ساده و نادقیق دارد. در این‌جا ترجیح داده‌ایم که با تعریف ساده شروع کنیم: «از به دنبال هم قرار دادن تعدادی (متناهی یا نامتناهی) شیء در یک ردیف، یک دنباله از اشیا به‌دست می‌آید»؛ مانند دنبالهٔ زیر که شامل ۱۰ حرف الفبای انگلیسی است:

$a, b, a, c, d, f, e, f, g, i$

چنان‌چه ملاحظه می‌شود، اعضای دنباله می‌توانند تکراری هم باشند و هیچ نظم و قاعده‌ای هم در چینش آنها وجود نداشته باشد. حتی ممکن است همهٔ اعضای دنباله یکسان باشند. چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ ثابت می‌نامیم؛ مانند دنبالهٔ ثابت و نامتناهی زیر که همهٔ اعضای آن عدد ثابت ۲ هستند:

$۲, ۲, ۲, ۲, \ldots$

اگر اعضای دنباله عددهای حقیقی باشند، دنباله را «دنباله عددی» می‌نامیم؛ مانند دنبالهٔ عددی زیر:

$-۱, ۱, \sqrt{۲}, ۵, ۳, ۱, ۳, ۳, ۲, ۰, ۳, ۵, \sqrt{۳}, -۲, \frac{۱}{۵}$

که ۱۵ عضو (جمله) دارد. جملات دنباله را با نماد a_n یا b_n یا t_n و... نمایش می‌دهیم که n شمارهٔ جمله‌هاست. مثلاً در دنبالهٔ فوق داریم:

$a_۱ = -۱ , a_۲ = ۱ , a_۷ = ۳, \ldots$

قانون یا ضابطهٔ دنباله

هرگاه اعضای دنباله با قانون یا ضابطهٔ خاصی، از روی شمارهٔ جمله‌ها یا از روی جملات قبلی به‌دست آیند، دنباله دارای ضابطه است. مثلاً به دنبالهٔ متناهی زیر که ۱۰ جمله دارد، دقت کنید:

$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱, ۱۰۰$

با کمی دقت روشن می‌شود که هر جملهٔ دنباله، مربع شمارهٔ جمله است. یعنی جمله اول $۱^۲$، جملهٔ دوم $۲^۲$، جملهٔ سوم $۳^۲$ و... است. پس جملهٔ nام دنباله، $n^۲$ است: $a_n = n^۲$.

تساوی یاد شده را ضابطه یا قانون دنباله می‌نامیم و به a_n جملهٔ عمومی دنباله می‌گوییم.

مثال ۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ نامتناهی زیر $\frac{۱}{n}$ است:

$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

مثال ۲. جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید:

الف) $۱, ۸, ۲۷, ۶۴, \ldots$

ب) $۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots$

ج) $۰, ۶, ۲۴, ۶۰, ۱۲۰, \ldots$

د) $۱, ۲, ۵, ۱۲, ۲۷, ۵۸, \ldots$

هـ) $\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{-۱}{۳۲}, \ldots$

جواب:

الف) $a_n = n^۳$ ب) $a_n = \frac{۱}{n^۲}$ ج) $a_n = n^۳ - n$

د) $a_n = ۲^n - n$ هـ) $a_n = \frac{(-۱)^n}{۲^n}$

مثال ۳. جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر داده شده است. پنج جملهٔ نخست هر دنباله را بنویسید و دنباله را تشکیل دهید.

الف) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ب) $a_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$

ج) $n^2 - 2n$

حل:

الف) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

ب) $0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{17}, \frac{2}{13}, \ldots$

ج) $-1, 0, 3, 8, 15, \ldots$

مثال ۴. دنبالهٔ $a_n = \frac{n^2}{2n-3}$ مفروض است. اولاً، جملات دهم و بیستم این دنباله را مشخص کنید. ثانیاً، چندمین جمله از این دنباله مساوی ۴ است؟ ثالثاً، آیا این دنباله جمله‌ای مساوی ۲- دارد؟

حل:

اولاً: $a_{10} = \frac{10^2}{2\times10-3} = \frac{100}{17}, \; a_{20} = \frac{20^2}{2\times20-3} = \frac{400}{37}$

ثانیاً: $a_n = 4 \Rightarrow \frac{n^2}{2n-3} = 4 \Rightarrow n^2 = 8n-12$

$\Rightarrow n^2 - 8n + 12 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-2) = 0 \Rightarrow n = 6$

یا $n = 2$

یعنی دو جمله از این دنباله مساوی ۴ هستند.

ثالثاً: $a_6 = a_2 = 4$

$a_n = -2 \Rightarrow \frac{n^2}{2n-3} = -2$

$\Rightarrow n^2 = -4n + 6 \Rightarrow n^2 + 4n - 6 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(-6) = 40$

$\Rightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -2 \pm \sqrt{10} \notin N$

ولی روشن است که باید $n \in N$. بنابراین هیچ جمله‌ای از دنباله مساوی ۲- نیست.

مثال ۵. دنبالهٔ $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$ مفروض است. اولاً، پنج جملهٔ نخست این دنباله را بنویسید و دنباله را با اعضای آن نمایش دهید. ثانیاً، نشان دهید که این دنباله یک دنبالهٔ نزولی است (یعنی جملات آن مرتباً کوچک‌تر می‌شوند) و حدس بزنید که این جملات به چه عددی نزدیک می‌شوند. ثالثاً، حداقل چند جمله از این دنباله را بنویسیم تا فاصلهٔ جملات این دنباله از ۲، کمتر از ۰/۰۱ شود.

حل:

اولاً: $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$

ثانیاً، برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ فوق نزولی است، کافی است نشان دهیم که هر جمله، از جملهٔ ماقبل خود کوچک‌تر است؛ یعنی $a_{n+1} < a_n$.

و یا اینکه: $\frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} < \frac{2n+3}{n+1}$

که معادل است با نامساوی $\frac{2n+5}{n+2} < \frac{2n+3}{n+1}$ و آن هم معادل است با نامساوی $(2n+5)(n+1) < (2n+3)(n+2)$ و یا $2n^2 + 7n + 5 < 2n^2 + 7n + 6$ که واضح است. با ملاحظهٔ جملات دنباله درمی‌یابیم که این جمله‌ها به عدد ۲ نزدیک می‌شوند.

ثالثاً، برای آنکه فاصلهٔ جملات دنباله از عدد ۲ کمتر از ۰/۰۱ باشد، با توجه به اینکه جملات دنباله همگی بزرگ‌تر از ۲ هستند (چرا؟) باید داشته باشیم: $2 < a_n < 2/01$. بنابراین:

$2 < \frac{2n+3}{n+1} < 2/01 \Rightarrow 2n+2 < 2n+3 < 2/01n + 2/01$

$\Rightarrow 0/01n > 0/99 \Rightarrow n > 99$

یعنی باید حداقل ۱۰۰ جمله بنویسیم تا به جمله‌ای برسیم که فاصلهٔ آن تا ۲ کمتر از ۰/۰۱ شود:

$a_{100} = \frac{203}{101} \approx 2/0099 < 2/01$

دنباله‌های بازگشتی

گاهی ضابطهٔ یک دنباله از روی جملات قبلی نوشته می‌شود. یعنی هر جمله، با قانونی مشخص برحسب جمله (یا جملات قبل) به‌دست می‌آید. مثلاً به دنبالهٔ زیر توجه کنید:

$1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

با کمی دقت درمی‌یابید که هر جمله برابر است با دو برابر جملهٔ قبل به اضافهٔ ۱؛ یعنی: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ و $a_1 = 1$. چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ بازگشتی می‌نامیم. با کمی

دقت می‌بینیم که دنبالهٔ فوق دستور مستقیمی برحسب n نیز دارد: $a_n = ۲^n - ۱$. یعنی دنباله‌های بازگشتی ممکن است به صورت مستقیم هم برحسب n دارای جملهٔ عمومی باشند.

مثال ۱. دنبالهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + ۲^n$ و $a_۱ = ۲$ مفروض است. پنج جملهٔ نخست دنباله را بنویسید.

حل:

$a_۲ = a_۱ + ۲^۲ = ۲ + ۴ = ۶$

$a_۳ = a_۲ + ۲^۳ = ۶ + ۸ = ۱۴$

$a_۴ = a_۳ + ۲^۴ = ۱۴ + ۱۶ = ۳۰$

$a_۵ = a_۴ + ۲^۵ = ۳۰ + ۳۲ = ۶۲$

$۲, ۶, ۱۴, ۳۰, ۶۲, \ldots$

مثال ۲. دنبالهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱}.a_{n-۲} + ۱$ و $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ مفروض است. این دنباله را تشکیل دهید.

حل:

$a_۳ = a_۱a_۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

$a_۴ = a_۲a_۳ + ۱ = ۲ \times ۳ + ۱ = ۷$

$a_۵ = a_۳a_۴ + ۱ = ۲۲$

$۱, ۲, ۳, ۷, ۲۲, ۱۵۵, \ldots$

دنبالهٔ فیبوناچی

یکی از معروف‌ترین دنباله‌ها، دنبالهٔ بازگشتی منسوب به **لئوناردو فیبوناچی** (ریاضی‌دان ایتالیایی قرن سیزدهم) است. در این دنباله، جملات اول و دوم مساوی ۱ و هر جمله مساوی مجموع دو جملهٔ ماقبل است: $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ و $a_۱ = a_۲ = ۱$

$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \ldots$

این دنباله ویژگی‌های بسیاری دارد که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توان به آنها پرداخت. علاقه‌مندان را به کتاب‌ها و مقالات متعددی که در این‌باره وجود دارد، رجوع می‌دهیم. در اینترنت و سایت‌های ریاضی هم مطالب بسیاری دربارهٔ این دنباله وجود دارد.

دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای را که هر جملهٔ آن با افزودن مقداری ثابت به جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید، یعنی $a_n = a_{n-۱} + d$، «دنبالهٔ حسابی» می‌نامیم؛ مانند این دنباله:

$۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \ldots$

که هر جملهٔ آن مساوی جملهٔ قبل به اضافهٔ ۳ واحد است؛ یعنی $d = ۳$. مقدار ثابت (d) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. اگر $d = ۰$ باشد، دنبالهٔ ما، دنباله‌ای ثابت است. اما اگر $d > ۰$ باشد، دنباله صعودی و اگر $d < ۰$ باشد، دنباله نزولی خواهد بود.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی

اگر $a_۱$ جملهٔ نخست و d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، بدیهی است که داریم:

$a_۲ = a_۱ + d \ , \ a_۳ = a_۲ + d = a_۱ + ۲d \ , \ a_۴ = a_۱ + ۳d, \ldots$

و به طریق استقرایی حدس می‌زنیم که:

$a_n = a_۱ + (n-۱)d$

براساس این دستور مسائل زیادی را در زمینهٔ دنباله‌های حسابی می‌توان مطرح و حل کرد.

مثال ۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر و جملهٔ هزار و سیصد و نود و یکم آن را بنویسید:

$۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \ldots$

حل:

$a_۱ = ۲, d = ۴ \Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۲ + (n-۱)۴$

$\Rightarrow a_n = ۴n - ۲, a_{۱۳۹۱} = ۴ \times ۱۳۹۱ - ۲ = ۵۵۶۲$

مثال ۲. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که جملهٔ هفتم آن ۲۳ و جملهٔ دوازدهم آن ۳۸ باشد.

حل:

$$\begin{cases} a_۷ = a_۱ + ۶d = ۲۳ \\ a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d = ۳۸ \end{cases} \Rightarrow ۵d = ۱۵ \ , d = ۳, \ a_۱ = ۵$$

$۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \ldots$

مثال ۳. لااقل چند جمله از دنبالهٔ زیر بنویسیم تا مطمئن شویم به جمله‌ای بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ می‌رسیم؟

$-۲, ۳, ۸, ۱۳, \ldots$

حل: $a_۱ = -۲$ و $d = ۵$. در نتیجه:

$a_n = -۲ + (n-۱)۵ = ۵n - ۷ \ , \ a_n > ۱۰۰۰$

$\Rightarrow ۵n - ۷ > ۱۰۰۰ \Rightarrow n > \frac{۱۰۰۷}{۵} \Rightarrow \min(n) = ۲۰۲$

یعنی از جملهٔ دویست و دوم به بعد، جملات بزرگ‌تر از هزار هستند.

مثال ۴. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که جملهٔ هفتم آن سه برابر جملهٔ چهارم آن و حاصل‌ضرب جملات سوم و چهارم آن دو واحد بیشتر از جملهٔ پنجم آن باشد.

حل:

$$a_7 = a_1 + 6d,\ a_4 = a_1 + 3d,\ a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_5 = a_1 + 4d,\ a_7 = 3a_4,\ a_3.a_4 = a_5 + 2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 3(a_1 + 3d) \Rightarrow a_1 + 6d = 3a_1 + 9d \\ \qquad\qquad \Rightarrow 2a_1 = -3d \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = a_1 + 4d + 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (-\frac{3d}{2} + 2d)(-\frac{3d}{2} + 3d) = -\frac{3d}{2} + 4d + 2$$
$$\Rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{3d}{2} = \frac{5d + 4}{2} \Rightarrow 3d^2 = 10d + 8 \Rightarrow 3d^2 - 10d - 8 = 0$$
$$\Rightarrow d = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} \Rightarrow d = 4 \text{ یا } d = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow (d = 4,\ a_1 = -6) \text{ یا } (d = -\frac{2}{3}, a_1 = 1)$$

بنابراین دو دنبالهٔ حسابی با ویژگی فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -6, -2, 2, 6, \ldots \\ 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1, \ldots \end{cases}$$

واسطه‌های حسابی

اگر a، b و c به ترتیب جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، طبق تعریف داریم:

$$b - a = c - b = d \text{ (قدرنسبت)}$$
$$\Rightarrow 2b = a + c,\ b = \frac{a + c}{2}$$

پس رابطهٔ $2b = a + c$ همان شرط آن است که a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند و $b = \frac{a + c}{2}$ نیز واسطهٔ حسابی بین a و c نامیده می‌شود؛ یعنی عددی که اگر بین دو عدد دیگر قرار گیرد، سه عدد دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. پس واسطهٔ حسابی بین دو عدد، همان میانگین آنهاست.

مثال ۵. m را طوری به‌دست آورید که سه عدد $2m - 1$، $3m + 1$ و $7m$ دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

حل: مطابق دستور گفته شده می‌توان نوشت:

$$2(3m + 1) = 2m - 1 + 7m \Rightarrow 6m + 2 = 9m - 1$$
$$\Rightarrow 3m = 3,\ m = 1$$

واسطه‌های حسابی بین دو عدد

هرگاه بین دو عدد a و b بتوان m عدد قرار داد که همهٔ این عددها (همراه با a و b) یک دنبالهٔ حسابی را تشکیل دهند، این m عدد را واسطه‌های حسابی بین a و b می‌نامیم. در این صورت به سادگی می‌توان ثابت کرد که قدرنسبت این دنباله از دستور $d = \frac{b - a}{m + 1}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۶. بین دو عدد ۳ و ۳۱، شش واسطهٔ حسابی پیدا کنید.

حل:

$$d = \frac{31 - 3}{6 + 1} = \frac{28}{7} = 4$$

در نتیجه:

$$3, \underbrace{7, 11, 15, 19, 23, 27}_{\text{واسطه‌های حسابی}}, 31$$

مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی

برای یافتن مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ نخست a_1 و قدرنسبت d، از روش زیر که نخستین بار توسط **گاوس**، ریاضی‌دان آلمانی، به‌کار گرفته شد استفاده می‌کنیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + a_1 + (n - 1)d \\ S_n = a_1 + (n - 1)d + a_1 + (n - 2)d + a_1 + (n - 3)d \\ \qquad + \ldots + a_1 \end{cases}$$

و از جمع جمله به جملهٔ دو تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$2S_n = [2a_1 + (n - 1)d] + [2a_1 + (n - 1)d] + \ldots + [2a_1 + (n - 1)d]$$
$$\Rightarrow 2S_n = n[2a_1 + (n - 1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

و با توجه به تساوی $a_n = a_1 + (n - 1)d$ می‌توان این دستور را به صورت $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ نیز نوشت.

مثال ۷. مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید: $a_1 = 1,\ d = 3$ $\quad 1, 4, 7, 10, \ldots$

حل:

$$S_{100} = \frac{100}{2}[2 + 99 \times 3] = 50 \times 299 = 14950$$

مثال ۸. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که مجموع ۸ جملهٔ نخست آن ۵۰ و مجموع ۸ جملهٔ بعدی آن ۱۴۶ باشد.

حل:

$$S_8 = 50,\ S_{16} - S_8 = 146 \Rightarrow S_{16} = 196$$
$$\frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 50 \Rightarrow 4a_1 + 14d = 25$$
$$\frac{16}{2}[2a_1 + 15d] = 196 \Rightarrow 4a_1 + 30d = 49$$
$$-\begin{cases} 4a_1 + 14d = 25 \\ 4a_1 + 30d = 49 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{3}{2}, a_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{5}{2}, 4, \ldots$$

مثال ۹. مجموع چند جمله از دنبالهٔ زیر برابر ۱۵۵ است؟
$2, 5, 8, \ldots$

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2\times 2+(n-1)3\right]=155$$

$$\Rightarrow n(3n+1)=310 \Rightarrow 3n^2+n-310=0$$

$$\Rightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{3721}}{6}=\frac{-1\pm 61}{6}\Rightarrow n=10 \text{ یا } n=\frac{-31}{3}\notin N$$

بنابراین، مجموع ۱۰ جملهٔ نخست از این دنباله مساوی ۱۵۵ است.

مثال ۱۰. حداقل چند عدد از نخستین عددهای طبیعی را باید جمع کنیم تا مجموع آنها از ۱۰۰۰ تجاوز کند؟

حل:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}\left[2\times 1+(n-1)\times 1\right]=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}>1000 \Rightarrow n^2+n>2000$$

$$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>2000$$

$$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})^2>2000+\frac{1}{4}\Rightarrow n+\frac{1}{2}>\sqrt{2000+\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow n>\sqrt{2000+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

و با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2000+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$ نتیجه می‌گیریم که حداقل مقدار طبیعی n برای آنکه از این عدد بزرگ‌تر شود، $n=45$ است. یعنی باید لااقل ۴۵ جمله را با هم جمع کنیم. با توجه به مقادیر S_{44} و S_{45} درستی عمل ما مشخص می‌شود:

$$S_{44}=\frac{44\times 45}{2}=22\times 45=990$$

$$S_{45}=\frac{45\times 46}{2}=45\times 23=1035$$

تمرین

۱. اگر a و b و c یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، ثابت کنید.

الف) $a^2+8bc=(2b+c)^2$ ب) $3(a^2+b^2+c^2)=6(a-b)^2+(a+b+c)^2$

۲. یک دنبالهٔ حسابی بنویسید که جملهٔ اول آن ۱ و مجموع ۵ جملهٔ اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی باشد (جواب: $1, -2, -5, \ldots$).

۳. بین دو عدد ۳ و ۲۰، پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ادامهٔ ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!

● روزی گروهی از مهندسان تلاش می‌کردند که ارتفاع یک میلهٔ پرچم را اندازه بگیرند. آنها برای این کار فقط یک متر پارچه‌ای بلند داشتند که نمی‌توانستند آن را به بالای میله برسانند. ریاضی‌دانی از آن‌جا می‌گذشت. از او خواستند به آن‌ها کمک کند. او گفت: «این‌که خیلی ساده است!»

و میله را از زمین درآورد و روی زمین گذاشت و به سادگی با آن متر پارچه‌ای طول آن را اندازه‌گیری کرد. یکی از مهندسان گفت: «این ریاضی‌دان‌ها عجب موجوداتی هستند! ما گفتیم ارتفاع میله را اندازه بگیرد، او طول آن را اندازه گرفت!»

ریاضیات هنر دادن نام‌های یکسان به اشیای متفاوت است!

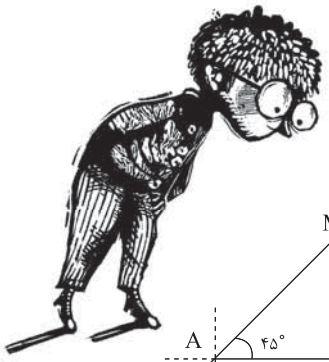
هنری پوآنکاره

(ریاضی‌دان فرانسوی

۱۸۵۴-۱۹۱۲)

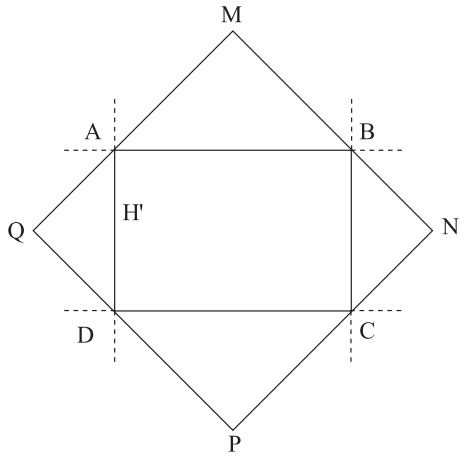
محمدهاشم رستمی

رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه



کلیدواژه‌ها: رویکرد هندسی، رویکرد جبری، مختصاتی، مثلث‌قائم‌الزاویه

مسئله: مستطیل ABCD به ضلع‌های a و b داده شده است. نیم‌سازهای زاویه‌های برونی این مستطیل را رسم می‌کنیم و چهارضلعی حاصل را MNPQ می‌نامیم.



۱. ثابت کنید که چهارضلعی MNPQ مربع است.

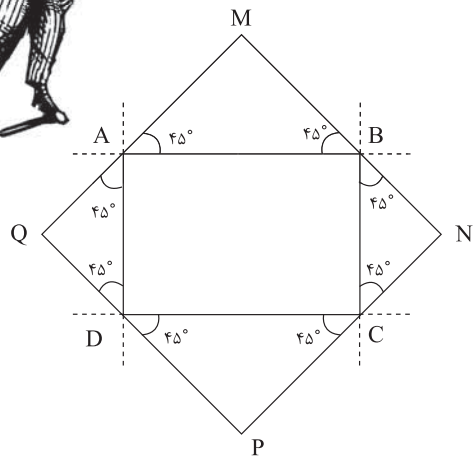
۲. اندازهٔ ضلع مربع MNPQ را برحسب a و b تعیین کنید.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل می‌کنیم:

الف) حل به روش هندسی

۱. می‌دانیم که زاویه‌های درونی مستطیل 90° هستند. پس زاویه‌های برونی آن نیز 90°اند و در نتیجه نیم‌سازهای این زاویه‌ها آنها را به زاویه‌های مساوی 45° تقسیم می‌کند؛ یعنی داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 45^\circ$$



از آنجا در مثلث‌های MAB، NBC، PCD و QAD داریم: $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$. یعنی این مثلث‌ها در رأس‌های M، N، P و Q قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین چهارضلعی MNPQ به دلیل قائمه بودن چهار زاویه‌اش، مستطیل است.

اکنون برای اثبات مربع بودن این چهار ضلعی کافی است ثابت کنیم که دو ضلع مجاور آن برابرند؛ یعنی برای مثال $MQ = MN$ است. به این منظور توجه می‌کنیم که دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و PCD به حالت برابری وتر و زاویه‌های حاده هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \quad \text{و} \quad AB = CD = a$$

پس داریم: $MA = MB = PC = PD \quad (1)$

همچنین، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین NBC و QAD به دلیل برابری وترهایشان، یعنی $BC = AD = b$، هم‌نهشت هستند. بنابراین:

$$BN = NC = AQ = QD \quad (2)$$

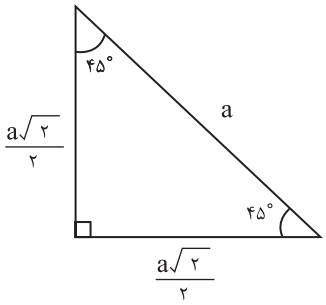
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$MA + AQ = MB + BN \Rightarrow MQ = MN$$

و به‌طور کلی‌تر: $MN = NP = PQ = QM$

پس چهار ضلعی MNPQ مربع است.

۲. برای محاسبهٔ اندازهٔ ضلع مربع MNPQ برحسب اندازهٔ ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی برحسب a و b، می‌دانیم که اگر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی مساوی a باشد، اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه‌اش مساوی $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ یا $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.



بنابراین، در مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و NBC، چون $AB = a$ و $BC = b$ است، خواهیم داشت:

$$MB = MA = \frac{AB\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \quad (۱)$$

$$NB = NC = \frac{BC\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow NB = \frac{b\sqrt{۲}}{۲} \quad (۲)$$

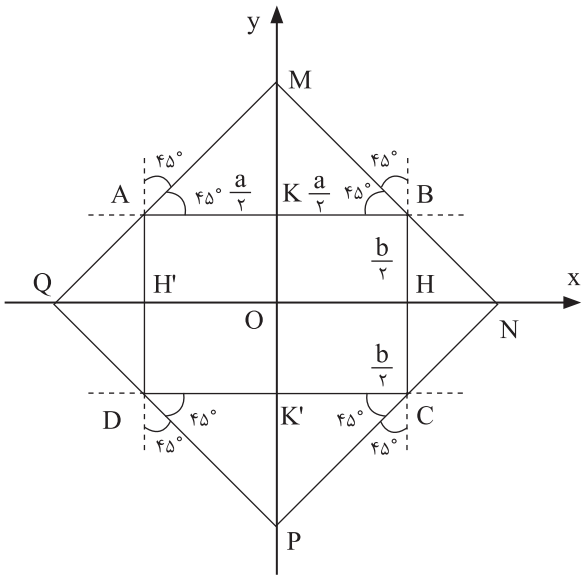
$$(۱)+(۲) \Rightarrow MB + NB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} + \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$$

و این اندازهٔ ضلع مربع MNPQ برحسب اندازهٔ ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی برحسب a و b است.

ب) حل به روش جبری ـ مختصاتی

۱. قطرهای مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را که مرکز تقارن مستطیل است، o می‌نامیم.



دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور x'ox از نقطهٔ o بگذرد و با ضلع‌های AB و CD موازی باشد و محور yها از نقطهٔ o بگذرد و با ضلع‌های BC و DA موازی باشد. مبدأ این دستگاه مختصات قائم را همان نقطهٔ o، مرکز تقارن مستطیل، اختیار می‌کنیم.

با فرض این‌که $AB = CD = a$ و $BC = DA = b$ باشد، اگر نقطه‌های برخورد محور xها با BC و DA را به ترتیب H و H' و نقطه‌های برخورد محور yها با AB و CD را به‌ترتیب K و K' بنامیم، خواهیم داشت:

$$BH = HC = AH' = H'D = \frac{b}{۲}$$

$$AK = KB = DK' = K'C = \frac{a}{۲}$$

و از آنجا، معادلهٔ خط‌های AB و CD به‌صورت:

$$AB : y = \frac{b}{۲},\ CD : y = -\frac{b}{۲}$$

و معادلهٔ خط‌های BC و DA نیز به صورت:

$$BC : x = \frac{a}{۲},\ AD : x = -\frac{a}{۲}$$

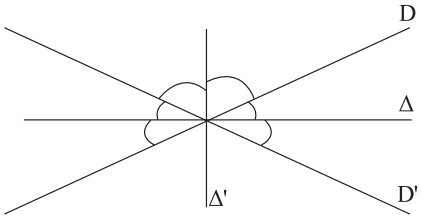
خواهد بود. واضح است که مختصات رأس‌های مستطیل در این

دستگاه مختصات قائم به صورت زیر است:

$$A=(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}),\ B=(\frac{a}{2},\frac{b}{2}),$$

$$C=(\frac{a}{2},-\frac{b}{2}),\ D=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$$

اکنون با توجه به این‌که معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های بیـــن دو خط $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$ به صورت $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ است، معادله‌های نیم‌ســازهای زاویه‌های درونی و برونی مســتطیل ABCD را می‌نویسیم. داریم:



$$AB: y-\frac{a}{2}=0,\ BC: x=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y-\frac{b}{2}}{\sqrt{1+0}}=\pm\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}}\Rightarrow y-\frac{b}{2}=\pm(x-\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی B

$$\Rightarrow y-\frac{b}{2}=x-\frac{a}{2}\Rightarrow y-x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی B

$$\Rightarrow y-\frac{b}{2}=-x+\frac{a}{2}\Rightarrow y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

$$AB: y-\frac{b}{2}=0,\ AD: x+\frac{a}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{y-\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}}=\pm\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}}\Rightarrow y-\frac{b}{2}=\pm(x+\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی A

$$\Rightarrow y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\Rightarrow MQ: y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی A

$$y+x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$$

به همین ترتیب، معادلات نیم‌ساز زاویه‌های درونی و برونی C و D را به‌دست می‌آوریم.

داریم:

$$BC: x=\frac{a}{2} \text{ و یا } x-\frac{a}{2}=0 \text{ و } CD: y=-\frac{b}{2}\Rightarrow y+\frac{b}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}}=\pm\frac{y+\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}}\Rightarrow x-\frac{a}{2}=\pm(y+\frac{b}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز NP

$$\Rightarrow x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی C

$$x+y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

$$DC: y=-\frac{b}{2}\Rightarrow y+\frac{b}{2}+0 \text{ و } DA: x+\frac{a}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{y+\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}}=\pm\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}}\Rightarrow y+\frac{b}{2}=\pm(x+\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی D

$$\Rightarrow y-x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی D یا PQ، $y+x=-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ و

به‌طوری که دیده می‌شود، نیم‌سازهای زاویه‌های مجاور و برونی مستطیل دوبه‌دو برهم عمودند، زیرا داریم:

$$m_{NP}=m_{MQ}=1$$

$$\Rightarrow m_{MN}\times m_{MQ}=(-1)(1)=-1$$

$$m_{MN}=m_{PQ}=-1$$

$$\Rightarrow MN\perp MQ\Rightarrow \hat{M}=90^\circ$$

و بـــه همین ترتیـــب داریـــم: $\hat{N}=\hat{P}=Q=90^\circ$. پس MNPQ مستطیل است.

برای اینکه ثابت کنیم این مستطیل مربع است، طول دو ضلع مجاور آن را به‌دست می‌آوریم که باید با هم مساوی باشند.

داریم:

$$\begin{cases} MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ MQ: y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow M=(0,\frac{a+b}{2})$$

$$\begin{cases} MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ NP: x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow N=(\frac{a+b}{2},0)$$

$$\begin{cases} NP: x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ PQ: y+x=-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow P=(0,-\frac{a}{2}-\frac{b}{2})$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{(0-\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a+b-0}{2})^2}=\sqrt{2}\times\frac{a+b}{2}$$

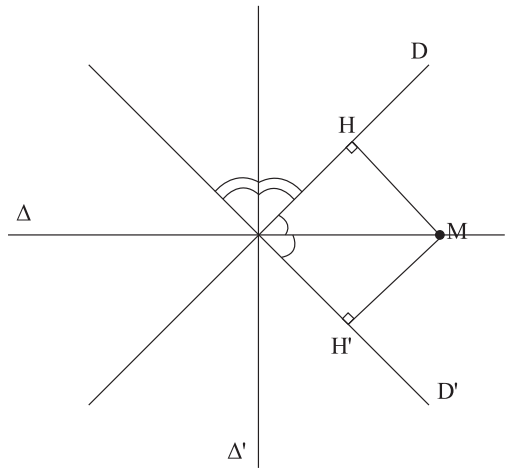
$$\Rightarrow NP=\sqrt{(0-\frac{a+b}{2})^2+(-\frac{a+b}{2}-0)^2}=\sqrt{2}\frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow MN=NP\Rightarrow$ چهار ضلعی MNPQ مربع است.

و طول ضلع مربع نیز برحسب a و b بدست آمده است.

نکتهٔ ۱. می‌توانستیم مختصات رأس Q را نیز به دست آوریم و ثابت کنیم که: $MN=NP=PQ=QA$؛ یعنی MNPQ لوزی است. سپس ثابت کنیم یک زاویهٔ قائمه دارد که در آن صورت، هر چهار زاویه‌اش قائمه و MNPQ مربع خواهد بود.

نکتهٔ ۲. معادلهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$ به‌صورت زیر است:



$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

زیرا اگر $M=(x,y)$ یک نقطهٔ دل‌خواه متعلق به نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط و MH و MH′ فاصلهٔ این نقطه از این دو خط باشد، داریم:

$$MH=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ و } MH'=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\text{MG نیم‌ساز زاویه} \Rightarrow MH=MH'$$

$$\Rightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

و این دو معادله، معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ هستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های حاصل از برخورد دو خط $D: 3x-4y+12=0$ و $D': 5x+12y-30=0$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{5x+12y-30}{\sqrt{25+144}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{5}=\pm\frac{5x+12y-30}{13}$$

$$\Rightarrow 13(3x-4y+12)=5(5x+12y-30)$$

$$\Rightarrow 14x-112y+306=0$$

$$13(3x-4y+12)=-5(5x+12y-30)$$

$$\Rightarrow 64x+8y+6=0$$

نکتهٔ ۳. در این مسئله با توجه به موازی‌بودن ضلع‌های مستطیل با محورهای مختصات، نتیجه می‌شود که نیم‌سازهای زاویه‌های برونی B و D با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات، و نیم‌سازهای زاویه‌های برونی C و A با نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$m_{MN}=m_{PQ}=-1$$

$$m_{NP}=m_{MQ}=1$$

پس با داشتن مختصات رأس‌های A، B، C و D می‌توان معادلهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های برونی A، B، C و D را نوشت.

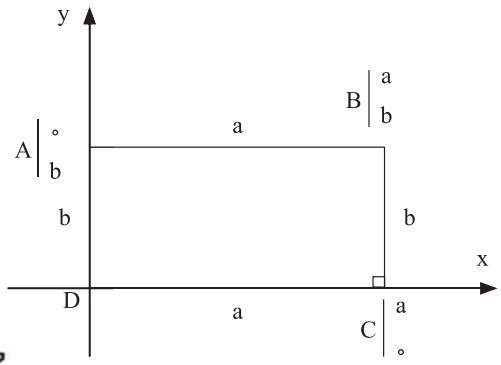
برای مثال داریم:

$$B=(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) \text{ و } m_{MN}=-1\Rightarrow y-\frac{b}{2}=-1(x-\frac{a}{2})$$

$$\Rightarrow y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

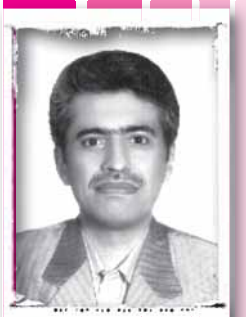
این همان معادلهٔ MN است که با روش قبلی به‌دست آوردیم.

نکتهٔ ۴. دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز در نظر گرفت. مثلاً می‌توان محورxها را روی خط CD و محور yها را روی خط AD اختیار کرد.



محاسبه‌ها را خودتان انجام دهید.

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
دانشیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی



بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا

قسمت نهم

کلیدواژه‌ها: مجموع ریمان، محاسبهٔ سطح و حجم، فاکتوریل، عدد اول، مقسوم علیه، خارج‌قسمت، باقی‌مانده، ب‌م‌م، ک‌م‌م

اشاره

در این قسمت ابتدا مثال‌هایی از کاربرد انتگرال معین را با استفاده از «متمتیکا» حل می‌کنیم. در ادامه به معرفی دستورالعمل‌هایی از متمتیکا می‌پردازیم که در نظریهٔ اعداد و حساب مقدماتی کاربرد زیادی دارند.

۱. محاسبهٔ مجموع ریمان بالا و پایین

فرض کنیم $I=[a,b]$ یک بازه مفروض باشد. اگر این بازه به گردایه‌ای از زیر بازه‌ها به صورت $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$، ... و $[x_{n-1},x_n]$ افراز شود، به‌طوری که $x_0=a$ و $x_n=b$ و x_i^* یک نقطه در زیر بازهٔ iام، $1\le i\le n$، باشد و $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ طول زیر بازهٔ iام باشد، آن‌گاه مجموع ریمان f روی I نسبت به افراز فوق به صورت $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ تعریف می‌شود. مجموع ریمان یک تقریبی از مساحت زیر نمودار تابع f با محور xها در بازهٔ I را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت وقتی طول هر یک از زیر بازه‌ها به صفر میل کند، انتگرال معین f در [a,b] تقریباً با مجموع ریمان برابر است. در حالتی که طول همهٔ زیر بازه‌ها برابر با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ باشد، می‌توان نوشت:

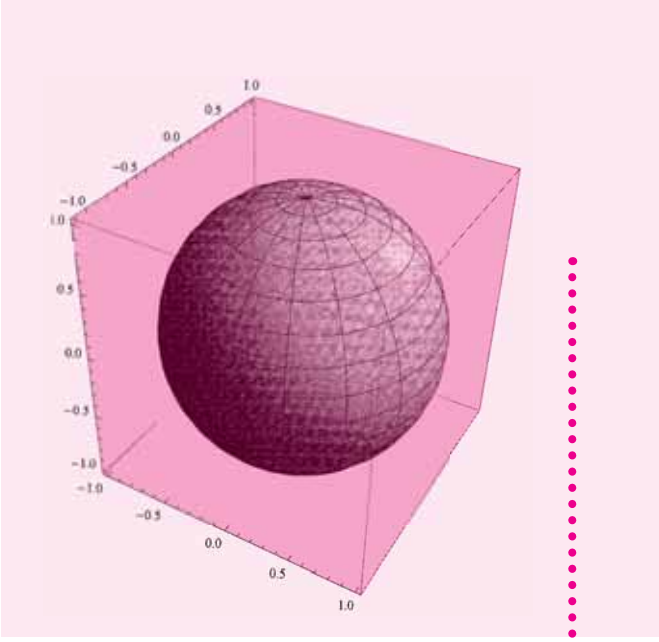
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

برای مثال، می‌دانیم: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}x\,dx=1$. حال یک مجموع ریمان پایینی و یک مجموع ریمان بالایی را برای f روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ در حالتی‌که $n=100$ و طول زیربازه‌ها برابر باشد، می‌یابیم. برای مجموع ریمان پایینی x_i^* را طوری در نظر می‌گیریم که نقاط انتهایی سمت چپ هر زیربازه باشند. برای مجموع ریمان بالایی نیز x_i^* را طوری انتخاب می‌کنیم که نقاط انتهایی سمت راست هر زیربازه باشند. در حالت اول یک تقریب نقصانی و در حالت دوم یک تقریب اضافی را برای انتگرال معین فوق به‌دست می‌آوریم. نتایج با اجرا در متمتیکا به صورت زیر حاصل می‌شوند:

```
f[x_] = Sin[x];
a = 0; b = π/2; n = 100;
Δx = (b − a)/n;
xstar[i_] = a + (i − 1)Δx;
Σ_{i=1}^{n} f[xstar[i]]Δx//N
0/9921125
xstar[i−] = a + iΔx;
Σ_{i=1}^{n} f[xstar[i]]Δx//N
1/00783
```

برای بهبود دقت تقریب حاصل می‌توان نقاط وسط هر زیربازه را به عنوان x_i^* در نظر گرفت. در این حالت $x_i^*=a+(i-\frac{1}{2})\Delta x$. نتیجه در این حالت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

```
xstar[i_] = a + (i − 0/5)Δx;
Σ_{i=1}^{n} f[xstar[i]]Δx//N
1/00001
```



توجه کنید که هر یک از دستورهای موجود در هر خط باید با علامت ; جدا و با فشار دکمه‌های Shift+Enter اجرا شود.

۲. محاسبهٔ سطح محصور

فرض کنید بخواهیم حاصل $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt$ را به ازای $x=2$ در متمتیکا به‌دست آوریم. در این حالت سطح زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(t)=\frac{1}{t}$ و محور افقی در بازهٔ $[1,x]$ موردنظر است که برابر است با: $\text{Ln}x\ (x>0)$. بنابراین: $F(2)=\text{Ln}2$. این امر در متمتیکا به‌صورت زیر قابل محاسبه است. دستور «Assumptions»، فرض $x>0$ را در محاسبهٔ این انتگرال منظور می‌کند:

```
f[x_] = 1/x;
F[x_] = Integrate[f[t], {t,1,x}, Assumptions → x > 0];
F[2]
Log[2]
```

۳. محاسبهٔ سطح بین دو منحنی

فرض کنید بخواهیم سطح محصور بین دو منحنی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ را محاسبه کنیم. به این منظور باید محل تلاقی این دو منحنی را پیدا کنیم و حاصل انتگرال معین اختلاف این دو تابع را از حیث قدرمطلق در بازهٔ تلاقی آنها بیابیم. نتیجه به صورت زیر محاسبه می‌شود. یادآوری می‌شود هر سلول ورودی با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter باید اجرا شود:

```
f[x_] = √x;
g[x_] = x^2;
Solve[f[x] == g[x], x]
{{x → 0}, {x → 1}}
∫_0^1 Abs[f[x] - g[x]]dx
```

$\frac{1}{3}$

۴. محاسبهٔ حجم

می‌دانیم حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی تابع f و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور xها از رابطهٔ $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ و $-3\le x\le 3$. در این حالت نمودار f یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است که اگر این نمودار حول محور xها دوران یابد، کره‌ای به شعاع ۳ را مشخص می‌کند که حجم آن برابر با 36π به شکل زیر به‌دست می‌آید:

```
f[x_] = Sqrt[9 - x^2];
π∫_-3^3 f[x]^2 dx
```

36π

در حالت کلی، اگر $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$، نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r باشد، حجم کرهٔ حاصل از دوران f حول محور xها در $[-r,r]$ برابر است با: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

```
Y = √(r^2 - x^2)
π∫_-r^r Y^2 dx
```

$\sqrt{r^2-x^2}$

$\frac{4\pi r^3}{3}$

در ادامه چند دستورالعمل پایه‌ای را در محیط متمتیکا که پرکاربرد هستند، معرفی می‌کنیم.

۱. دستور مجموع

صورت کلی دستورالعمل مجموع برای محاسبهٔ $\sum_{i=m}^{n} a_i$ به صورت زیر است:

```
Sum[a[i], {i, m, n}]
```

مثال: حاصل $\sum_{i=1}^{100} i^2$ برابر است با:

```
Sum[i^2, {i, 1, 100}]
```

۳۳۸۳۵۰

محاسبهٔ فوق با استفاده از نماد سیگما در پنجرهٔ «Basic Math Input» به‌صورت $\sum_{\square=\square}^{\square}\square$ نیز قابل انجام است. در این حالت، پس از کلیک کردن روی این نماد و قرارگرفتن آن در صفحهٔ متمتیکا، داخل هر مربع خالی را پر می‌کنیم. با فشار دکمهٔ «Tab» به‌راحتی می‌توان به مربع بعدی وارد شد.

$\sum_{i=1}^{100} i^2$

۳۳۸۳۵۰

مثال: حاصل $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$ برابر است با:

```
Sum[1/(k(k+1)), {k,1,9}]
```

$\frac{9}{10}$

توجه شود که حرف اول «Sum» باید بزرگ تایپ شود.

مثال: حاصل $\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=i}^{100}\frac{i}{j}$ برابر است با:

```
Sum[Sum[i/j, {j,i,100}], {i,1,100}]
```

$\frac{65}{2}$

در این حالت سیگمای دوم را باید داخل مربع خالی جلوی سیگمای اول تایپ کنیم و در واقع دوبار روی نماد سیگما کلیک کنیم.

می‌توان با ارائهٔ یک نمو به دستور مجموع، حاصل جمع تعدادی از اعداد را با یک نمو مشخص محاسبه کرد. برای مثال، برای محاسبهٔ $\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{51}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

```
Sum[1/i, {i,15,51,2}]
```

با اجرای دستور فوق نتیجه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\frac{63501391475806044193}{9684514075768739707 5}$

عدد ۲ در دستور Sum همان نمو است که اختلاف بین هر دو اندیس متوالی در این مجموع را مشخص می‌کند.

اگر بخواهیم مقدار خروجی به شکل عددی مشخص شود، از دستور «NSum» به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

```
NSum[1/i, {i,15,51,2}]
```

که نتیجه برابر می‌شود با:

۰/۶۵۵۷

۲. دستور حاصل‌ضرب

صورت کلی دستورالعمل حاصل‌ضرب برای محاسبهٔ $a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_n$ عبارت است از:

```
Product[a[i], {i,m,n}]
```

دستور فوق برابر با $\prod_{i=m}^{n} a_i$ است $(n \geq m)$. نماد حاصل‌ضرب در پنجرهٔ «Basic Math Input» به‌صورت $\prod_{\square=\square}^{\square}\square$ است که با کلیک‌کردن روی آن و پرکردن مربع‌های خالی و اجرای سلول مربوطه، حاصل‌ضرب موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال: حاصل !۷ با استفاده از دسته فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

```
Product[i, {i,1,7}]
```

۵۰۴۰

این دستور معادل با $\prod_{i=1}^{7} i$ است.

مثال: حاصل $1^2 \times 2^2 \times \ldots \times 7^2$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$\prod_{i=1}^{7} i^2$

۲۵۴۰۱۶۰۰

۳. دستور حلقه

دو دستور «While» و «For» به صورت کلی زیر از جمله دستورالعمل‌های حلقه در متمتیکا هستند:

While [عبارت و شرط]

در این حالت، عبارت داده شده به صورت مکرر تا وقتی شرط مفروض برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

For [عبارت و نمو و تست و آغازدهی]

در این حالت با اجرای این دستور، عبارت مفروض با آغازدهی و نمودار داده شده تا زمانی که دستور تست برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

فرض کنید می‌خواهید اعداد ۱ تا ۵ را چاپ کنیم. با استفاده از هر دو دستور فوق به شکل زیر این کار قابل انجام است. منظور از n++ یا i++ در این دستورها آن است که مقادیر n یا i یکی یکی زیاد می‌شود.

```
n = 1;
While[n < 6, Print[n]; n++]
1
2
3
4
5
For[i = 1, i ≤ 5, i++, Print[i]]
1
2
3
4
5
```

حال فرض کنید می‌خواهید مقدار !۱۰ را با استفاده از دستور حلقهٔ While محاسبه کنیم. به این منظور به صورت زیر می‌توان عمل کرد. در این حالت با فرض n = ۱۰ و nfact = ۱ و به‌کارگیری دستور nfact=nfact*n در حلقهٔ While و استفاده از نماد —n، مقدار n یکی‌یکی کاهش می‌یابد تا در نهایت !۱۰ به صورت ۱۰×۹×۸×...×۱ محاسبه و مشخص شود.

```
n = 10;
nfact = 1;
While[n > 0, nfact = nfact * n; n--]
nfact
3628800
```

۴. دستورهای Prime و PrimeQ

برای مشـــخص کردن n امین عدد اول بزرگ‌تر از یک، از دستور Prime به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Prime[n]

مثال:

Prime[۷]

۱۷

Prime[۱۰۰۰]

۷۹۱۹

مثال: دســـتور زیرمجموع ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت ۲+۳+۵+۷+...+۲۲۹ را مشخص می‌کند:

Sum[Prime[k], {k,۱,۵۰}]

۵۱۱۷

هم‌چنین، دستور زیر حاصل‌ضرب ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت ۲×۳×۵×...×۲۲۹ را مشخص می‌کند:

Product[Prime[k]{k,۱,۱۰}]

۶۴۶۹۶۹۳۲۳۰

برای مشخص کردن این‌که یک عدد مفروض طبیعی اول هســـت یا خیر، از دستور PrimeQ استفاده می‌کنیم. خروجی این دستور «True» یا «False» است که در حالت اول عدد اول است و در حالت دوم عدد غیراول است.

مثال: در این مثال اول بودن عدد ۱۷۹ و غیراول بودن عدد ۲۴۹ مشخص شده است.

PrimeQ[۱۷۹]

True

PrimeQ[۲۴۹]

False

۵. دستور Factorial

به منظور محاســـبهٔ فاکتوریل عـــدد طبیعی مفروض n از دستورهای زیر می‌توان استفاده کرد:

Factorial [n] یا n!

مثال: مقادیر !۱۰ و $\binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۴!\times ۶!}$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱۰!

۳۶۲۸۸۰۰

Factorical[۱۰]

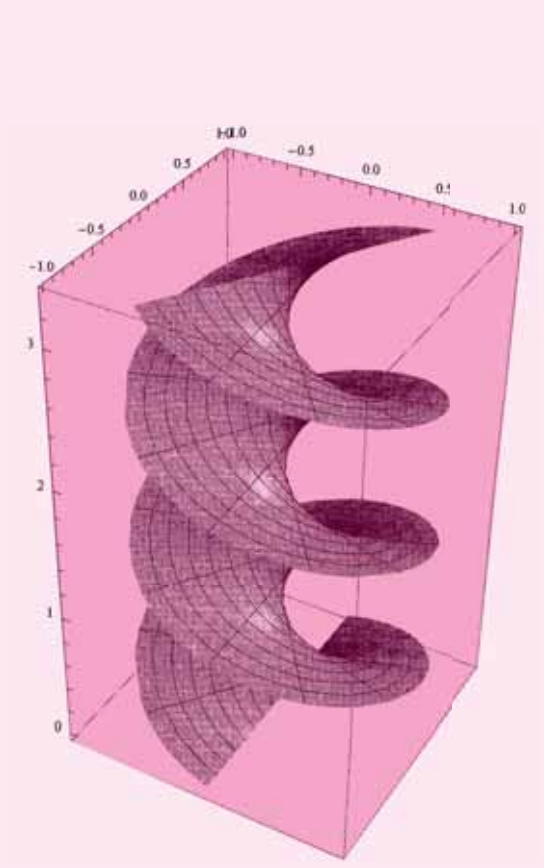
۳۶۲۸۸۰۰

$\frac{۱۰!}{۴!\times ۶!}$

۲۱۰

۶. دستور Factor Integer

به منظور مشـــخص کردن عوامـــل اول یک عدد طبیعی مفروض از دســـتور «Factor Integer» به صورت زیر استفاده



می‌شود:

Factor Integer [n]

توجه کنید حروف F و I حتماً به صورت بزرگ تایپ شوند.

با اجرای این دستور عامل‌های اول n به همراه تعداد آنها داخل آکلاد اعلام می‌شود.

مثال: دستورهای زیر عوامل اول اعداد ۸۱۰ و ۲۴۳۴۵۰۰ را مشخص می‌کنند.

FactorInteger[۸۱۰]

{{۲,۱},{۳,۴},{۵,۱}}

FactorInteger[۲۴۳۴۵۰۰]

{{۲,۲},{۳,۲},{۵,۳},{۵۴۱,۱}}

بنابراین:

$۲۴۳۴۵۰۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۳ \times ۵۴۱$ و $۸۱۰ = ۲\times ۳^۴ \times ۵$

۷. دستور Quotient

به منظور محاسبهٔ خارج‌قسمت تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دســـتور «Quotient» به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Quotient [m,n]

مثال: خارج‌قسمت تقسیم ۱۵۷ بر ۴ برابر است با ۳۹:

Quotient[۱۵۷,۴]

۳۹

۸. دستور Mod

به منظور محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دستور Mod به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Mod [m,n]

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۵۷ بر ۴، یک، ۴۵ بر ۹، صفر و $۳^{۱۲۲}$ بر ۷، دو است:

```
Mod[۱۵۷, ۴]
۱
Mod[۴۵, ۹]
۰
Mod[۳^۱۲۲, ۷]
۲
```

۹. دستور Divisors

به منظور مشخص‌کردن همهٔ شمارنده‌های طبیعی یک عدد طبیعی مفروض از دستور «Divisors» استفاده می‌کنیم.

مثال: دستورهای زیر همهٔ شمارنده‌های طبیعی اعداد ۴۱، ۸۵۴ و ۱۷۲۹ را مشخص می‌کنند.

```
Divisors[۱۷۲۹]
{۱, ۷, ۱۳, ۱۹, ۹۱, ۱۳۳, ۲۴۷, ۱۷۲۹}
Divisors[۸۵۴]
{۱, ۲, ۷, ۱۴, ۶۱, ۱۲۲, ۴۲۷, ۸۵۴}
Divisors[۴۱]
{۱, ۴۱}
```

۱۰. دستورالعمل‌های GCD و LCM

به منظور محاسبهٔ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) و کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م) دو عدد طبیعی مفروض، به ترتیب از دستورهای «GCD» و «LCM» استفاده می‌کنیم. از این دستورها برای محاسبهٔ ب‌م‌م و ک‌م‌م چند عدد طبیعی مفروض هم می‌توان استفاده کرد. به این منظور کافی است این اعداد را داخل کروشه در مقابل هر یک از این دستورها تایپ کنید.

مثال: ب‌م‌م اعداد ۵۳۵۵ و ۴۰۴۲۵ برابر ۱۰۵، ب‌م‌م اعداد ۱۲۵، ۵۰۵ و ۶۳۰ برابر با ۵، ک‌م‌م اعداد ۴۸ و ۳۶ برابر با ۱۴۴ و ک‌م‌م اعداد ۱۷۰، ۲۲۵، ۸۹ و ۳۴۲ برابر با ۱۲۹۳۶۱۵۰ هستند

```
GCD[۵۳۵۵, ۴۰۴۲۵]
۱۰۵
GCD[۱۲۵, ۵۰۵, ۶۳۰]
۵
LCM[۴۸, ۳۶]
۱۴۴
LCM[۱۷۰, ۲۲۵, ۸۹, ۳۴۲]
۱۲۹۳۶۱۵۰
```

منبع

Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline Series, McGraw Hill Comp, 2009.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب!

یک فروشندهٔ ابزارهای دست دوم و کارکرده، وسیلهٔ کارکرده‌ای را به قیمت ده هزار تومان به فروشندهٔ دیگری فروخت. کمی بعد فروشندهٔ دوم، چون نیازی به آن وسیله نداشت، آن را به فروشندهٔ اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشندهٔ دیگری آمد و آن را از همان فروشنده، به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشندهٔ اول چه‌قدر سود برد؟

جواب اول: فروشندهٔ اول، از فروش اول خود دو هزار تومان سود برد، چون آن را ده هزار تومان فروخت و هشت هزار تومان خرید. اما پس از بازپس‌گیری آن به هشت هزار تومان، دوباره آن را به نه هزار تومان فروخت. پس هزار تومان دیگر سود برد و در مجموع سه هزار تومان سود برد.

جواب دوم: در ابتدا این وسیله ده هزار تومان ارزش دارد. سپس فروشندهٔ اول در فروش نخست آن و خرید مجدد، دو هزار تومان سود برده است. اما پس او جنسی را که ده هزار تومان ارزش دارد، به نه هزار تومان می‌فروشد. سپس در معاملهٔ بعدی یک هزار تومان ضرر کرده است. لذا در مجموع سود خالص او هزار تومان است.

جواب سوم: فروشندهٔ اول از فروش نخست خود دو هزار تومان سود می‌برد. اما وقتی آن را به نفر دوم به قیمت نه هزار تومان می‌فروشد، او فقط آن را با نه هزار تومانی که می‌ارزد عوض می‌کند. لذا در معامله با فروشندهٔ بعدی نه سود کرده است و نه زیان. بنابراین سود نهایی او دو هزار تومان است!

به نظر شما کدام جواب درست است!

نظرتان را در این مورد حتماً برای ما بفرستید. این زمینهٔ خوبی برای یک بحث سازندهٔ ریاضی است. این نظرات و تحلیلمان را از آنها، در شمارهٔ بعد می‌آوریم.

قضیه:
همهٔ عددهای صحیح جالب هستند!

اثبات با برهان خلف: فرض کنیم چنین نباشد و بعضی عددهای صحیح غیرجالب باشند. پس کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و غیرجالب وجود دارد. اوه چه جالب! پس این عدد جالب است! (تناقض!)

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۵۷ بر ۴، یک، ۴۵ بر ۹، صفر و $۳^{۱۲۲}$ بر ۷، دو است:

```
Mod[۱۵۷, ۴]
۱
Mod[۴۵, ۹]
۰
Mod[۳^۱۲۲, ۷]
۲
```

۹. دستور Divisors

به منظور مشخص‌کردن همهٔ شمارنده‌های طبیعی یک عدد طبیعی مفروض از دستور «Divisors» استفاده می‌کنیم.

مثال: دستورهای زیر همهٔ شمارنده‌های طبیعی اعداد ۴۱، ۸۵۴ و ۱۷۲۹ را مشخص می‌کنند.

```
Divisors[۱۷۲۹]
{۱, ۷, ۱۳, ۱۹, ۹۱, ۱۳۳, ۲۴۷, ۱۷۲۹}
Divisors[۸۵۴]
{۱, ۲, ۷, ۱۴, ۶۱, ۱۲۲, ۴۲۷, ۸۵۴}
Divisors[۴۱]
{۱, ۴۱}
```

۱۰. دستورالعمل‌های GCD و LCM

به منظور محاسبهٔ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) و کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م) دو عدد طبیعی مفروض، به ترتیب از دستورهای «GCD» و «LCM» استفاده می‌کنیم. از این دستورها برای محاسبهٔ ب‌م‌م و ک‌م‌م چند عدد طبیعی مفروض هم می‌توان استفاده کرد. به این منظور کافی است این اعداد را داخل کروشه در مقابل هر یک از این دستورها تایپ کنید.

مثال: ب‌م‌م اعداد ۵۳۵۵ و ۴۰۴۲۵ برابر ۱۰۵، ب‌م‌م اعداد ۱۲۵، ۵۰۵ و ۶۳۰ برابر با ۵، ک‌م‌م اعداد ۴۸ و ۳۶ برابر با ۱۴۴ و ک‌م‌م اعداد ۱۷۰، ۲۲۵، ۸۹ و ۳۴۲ برابر با ۱۲۹۳۶۱۵۰ هستند

```
GCD[۵۳۵۵, ۴۰۴۲۵]
۱۰۵
GCD[۱۲۵, ۵۰۵, ۶۳۰]
۵
LCM[۴۸, ۳۶]
۱۴۴
LCM[۱۷۰, ۲۲۵, ۸۹, ۳۴۲]
۱۲۹۳۶۱۵۰
```

منبع

Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline Series, McGraw Hill Comp, 2009.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب!

یک فروشندهٔ ابزارهای دست دوم و کارکرده، وسیلهٔ کارکرده‌ای را به قیمت ده هزار تومان به فروشندهٔ دیگری فروخت. کمی بعد فروشندهٔ دوم، چون نیازی به آن وسیله نداشت، آن را به فروشندهٔ اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشندهٔ دیگری آمد و آن را از همان فروشنده، به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشندهٔ اول چه‌قدر سود برد؟

جواب اول: فروشندهٔ اول، از فروش اول خود دو هزار تومان سود برد، چون آن را ده هزار تومان فروخت و هشت هزار تومان خرید. اما پس از بازپس‌گیری آن به هشت هزار تومان، دوباره آن را به نه هزار تومان فروخت. پس هزار تومان دیگر سود برد و در مجموع سه هزار تومان سود برد.

جواب دوم: در ابتدا این وسیله ده هزار تومان ارزش دارد. سپس فروشندهٔ اول در فروش نخست آن و خرید مجدد، دو هزار تومان سود برده است. اما پس او جنسی را که ده هزار تومان ارزش دارد، به نه هزار تومان می‌فروشد. سپس در معاملهٔ بعدی یک هزار تومان ضرر کرده است. لذا در مجموع سود خالص او هزار تومان است.

جواب سوم: فروشندهٔ اول از فروش نخست خود دو هزار تومان سود می‌برد. اما وقتی آن را به نفر دوم به قیمت نه هزار تومان می‌فروشد، او فقط آن را با نه هزار تومانی که می‌ارزد عوض می‌کند. لذا در معامله با فروشندهٔ بعدی نه سود کرده است و نه زیان. بنابراین سود نهایی او دو هزار تومان است!

به نظر شما کدام جواب درست است!

نظرتان را در این مورد حتماً برای ما بفرستید. این زمینهٔ خوبی برای یک بحث سازندهٔ ریاضی است. این نظرات و تحلیلمان را از آنها، در شمارهٔ بعد می‌آوریم.

قضیه:
همهٔ عددهای صحیح جالب هستند!

اثبات با برهان خلف: فرض کنیم چنین نباشد و بعضی عددهای صحیح غیرجالب باشند. پس کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و غیرجالب وجود دارد. اوه چه جالب! پس این عدد جالب است! (تناقض!)

هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در بلژیک

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، بلژیک، اصل لانهٔ کبوتر، هفت ضلعی

مسابقه‌های ریاضی در بلژیک از دههٔ ۱۹۶۰ میلادی آغاز شده است. ابتدا همان پرسش‌های مسابقه‌های ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در آنها مطرح می‌شد، اما از سال ۱۹۷۶، کشور بلژیک المپیاد ریاضی خاص خودش را سازمان‌دهی کرد و از سال ۱۹۸۲، این مسابقات در سه مرحله (دبیرستان، نیمه نهایی و نهایی) برگزار شده‌اند. مرحلهٔ نخست آزمون با پرسش‌های چندگزینه‌ای برگزار می‌شود که به نسبت سؤال‌های المپیادی رایج، آسان هستند، ولی گاهی هم پرسش‌های قابل تأمل و نسبتاً خوبی مانند این نمونه در آنها مطرح می‌شود:

- در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، هر یک از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به طول ثابت L هستند. مساحت این ذوزنقه آن‌گاه ماکزیمم است که اندازهٔ زاویهٔ بین قاعدهٔ بزرگ و یک ساق آن برحسب رادیان برابر باشد با:

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{5}$ د) $\frac{\pi}{6}$

اما پرسش‌های مرحلهٔ نهایی، مسائل قابل اعتنایی هستند و ما در اینجا تعدادی از آنها را همراه با راه‌حل‌هایشان می‌آوریم. لازم به ذکر است که همهٔ این مسائل از کتاب «المپیادهای ریاضی بلژیک»، ترجمهٔ استاد گران‌قدر، آقای **عبدالحسین مصحفی** ـ انتشارات فاطمی ـ برگرفته شده‌اند، اما راه‌حل مسائل در کتاب نیامده و همهٔ راه‌حل‌ها از نگارنده است.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی x داریم:
$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ (۱۹۷۶).

۲. ساکنان دهکدهٔ کوچک «دوران پون» را دو خانواده تشکیل می‌دهند: دوران‌ها و دوپون‌ها. دوران‌ها همواره راست می‌گویند و دوپون‌ها همواره دروغ. مسافری در خیابان اصلی این دهکده چهار نفر از ساکنان را ملاقات می‌کند و از آنها می‌پرسد که آیا دوران هستند یا دوپون.

اولین نفر پاسخ می‌دهد: «همهٔ ما دوپون هستیم.»

دومین نفر می‌گوید: «نه این‌طور نیست، فقط یکی از ما دوپون است.»

آنگاه سومین نفر اظهار می‌دارد: «گفته‌های آنها را باور نکنید. بین ما دقیقاً دو دوپون وجود دارد.»

اما نفر چهارم فقط می‌گوید: «من دوران هستم.»

آیا این نفر چهارم واقعاً یک دوران است؟ (۱۹۷۷)

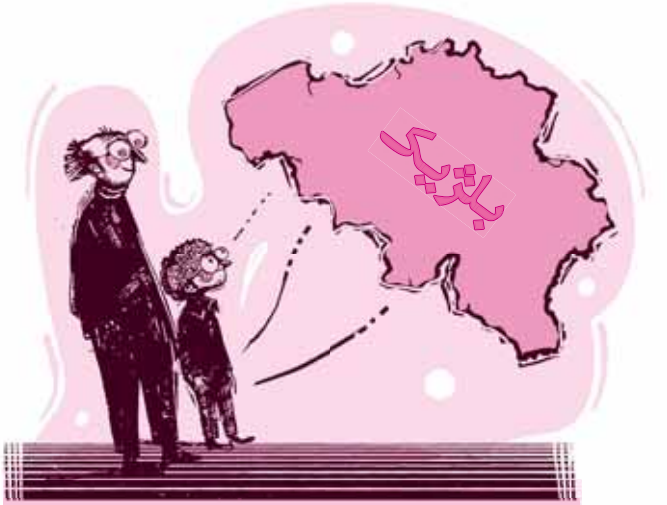
۳. a، b و c سه عدد طبیعی هستند. اگر به ازای هر عدد طبیعی n، مثلثی وجود داشته باشد که a^n، b^n و c^n اندازه‌های ضلع‌های آن باشند، ثابت کنید که همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند (۱۹۷۷).

۴. کدام عددهای طبیعی هستند که در تقسیم آنها بر ۲، ۳ و ۵، باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۴ می‌شوند؟ (۱۹۷۸)

۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، چند جمله‌ای $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است (۱۹۸۱).

۶. فرض کنید هر نقطهٔ صفحه به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز باشد. آیا الزاماً مثلثی متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود خواهد داشت که سه رأس آن از یک رنگ باشند؟ (۱۹۸۴)

۷. نقطه‌های A، B، C و D چهار رأس متوالی یک چندضلعی منتظم هستند. هرگاه $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$ باشد، تعداد ضلع‌های این چندضلعی را مشخص کنید (۱۹۸۷).



حل مسائل

۱. مسئله را به روش استدلال بازگشتی حل می‌کنیم. با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

حال اگر انتهای کمان x در ناحیه‌های دوم و سوم باشد، $\cos x<0$ و در نتیجه: $\sin(\cos x)<0$. ولی چون $\sin x\le 1$، پس: $\frac{\pi}{2}-\sin x>0$ و در نتیجه: $\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>0$ و لذا:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

اما اگر انتهای کمان x در نواحی اول و چهارم باشد، در این نواحی $\cos x>0$ و تابع سینوس یک تابع صعودی است. پس از نابرابری فوق نتیجه می‌شود: $\frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x$ و در نتیجه

$$\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$$

اما می‌دانیم:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}\le \sin x+\cos x\le\sqrt{2}$$

و بنابراین: $\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه حکم قابل اثبات است. استدلال اصلی را خودتان انجام دهید.

۲. بله او واقعاً دوران است، زیرا:

- اولین نفر به یقین دروغ می‌گوید، چون اگر راست‌گو باشد، طبق گفتهٔ خودش باید هر چهار نفر دوپون باشند و دروغ بگویند و این تناقض به‌وجود می‌آورد.
- نفر سوم یا راست می‌گوید یا دروغ. اگر او راست بگوید، آن‌گاه دقیقاً دو نفر دوپون هستند. در نتیجه نفر دوم دروغ‌گو (و دوپون) است و لذا نفرات سوم و چهارم هر دو راست‌گو هستند. اما اگر او دروغ بگوید، آن‌گاه جملهٔ او دروغ است. در نتیجه در آن جمع بیشتر از دو نفر دروغ‌گویند و لذا نفر دوم هم دروغ‌گوست. پس نفرات اول، دوم و سوم هر سه دوپون هستند. و چون نفر اول دروغ‌گوست، پس همهٔ آنها دوپون نیستند و در نتیجه نفر چهارم دوران است. پس در هر صورت نفر چهارم دوران است.

۳. بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $a\ge b\ge c$. اگر یکی از این مثلث‌ها متساوی‌الساقین نباشد، به ازای این یک مثلث خواهیم داشت: $a>b>c$ و در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n هم خواهیم داشت: $a^n>b^n>c^n$. اما اگر $a\ge 2b$ باشد، چون $b+c>a$ است، پس: $b+c\ge 2b$ و یا: $c\ge b$ که تناقض است (زیرا $b>c$). پس باید $a<2b$ و از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی n، a^n، b^n و c^n اضلاع مثلثی هستند، پس با همین استدلال خواهیم داشت:

$$b^n<a^n<2b^n$$

و در نتیجه:

$$b<a<\sqrt[n]{2}.b$$

اما چون a و b عددهای طبیعی هستند و $\sqrt[n]{2}$ با زیادشدن n مرتباً کوچک‌تر می‌شود، پس ممکن نیست که نابرابری فوق به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد (زیرا بین b و $\sqrt[n]{2}.b$ هیچ عدد طبیعی وجود نخواهد داشت). پس لازم است که لااقل دو تا از این عددها با هم مساوی باشند و در نتیجه همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.

۴. اگر این عدد را a بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a=2m+1=3n+2=5p+4$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{3n+1}{2}=n+\frac{n+1}{2}\Rightarrow n+1=2k\Rightarrow n=2k-1$$

$$\Rightarrow 5p+4=3(2k-1)+2=6k-3+2=6k-1$$

$$\Rightarrow 5p=6k-5\Rightarrow p=\frac{6k}{5}-1\Rightarrow k=5k'$$

$$\Rightarrow p=6k'-1\Rightarrow a=5(6k'-1)+4\Rightarrow a=30k'-1$$

یعنی این عددها به فرم $30k'-1$ هستند (عددهایی که در تقسیم بر ۳۰، باقی‌ماندهٔ ۲۹ دارند)؛ مانند ۲۹، ۵۹ و...

۵. از قضیهٔ استقرای ریاضی کمک می‌گیریم:

$$n=1:(x+1)^3+x^3=2x^3+3x^2+3x+1$$

$$=2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1=2x(x^2+x+1)$$

$$+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(2x+1)$$

فرض:

$$n=k:(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}=P(x).(x^2+x+1)$$

حکم:

$$n=k+1:(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=Q(x).(x^2+x+1)$$

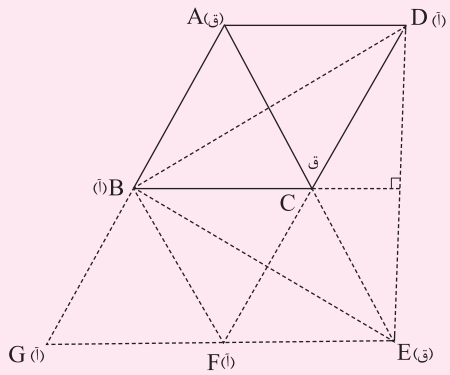
با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(x+1)^{2k+1}=P(x)(x^2+x+1)-x^{k+2}$$

و با جای‌گذاری در حکم خواهیم داشت:

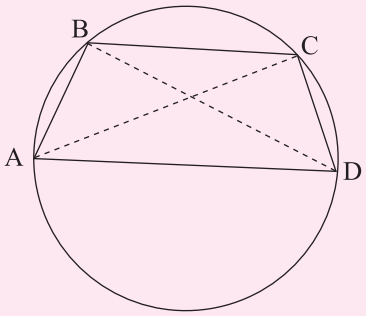
$$(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=[P(x)(x^2+x+1)-x^{k+2}](x+1)^2$$
$$+x^{k+3}=P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2-x^{k+2}((x+1)^2-x)$$
$$=P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2-x^{k+2}(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)[(x+1)^2P(x)-x^{k+2}]=Q(x)(x^2+x+1)$$

۶. این مسئلهٔ جالبی است. بدیهی است که طبق اصل لانهٔ کبوتر، لااقل دو رأس از رئوس هر مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌رنگ خواهند بود. فرض می‌کنیم دو رأس از رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرمز رنگ باشند؛ مثلاً رئوس A و C از مثلث ABC در شکل که با حرف ق مشخص شده‌اند. اگر رأس B هم قرمز باشد، مثلثی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند. پس فرض می‌کنیم این رأس آبی رنگ باشد. حال مثلث متساوی‌الاضلاع ACD را بنا می‌کنیم و با همان استدلال رأس D هم باید آبی باشد.



از D بر امتداد BC عمودی رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا امتداد AC را در E قطع کند. مثلث CDE متساوی‌الساقین است (چرا؟) و داریم: $CF=CE=CD$. چون زوایای مثلث DBE 60° هستند، پس این مثلث هم متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه E نمی‌تواند آبی باشد و قرمز است. بنابراین در مثلث متساوی‌الاضلاع CEF، F هم نمی‌تواند قرمز باشد و آبی است. با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع AEG، G هم باید آبی باشد و از آنجا در مثلث متساوی‌الاضلاع BFG هر سه رأس آبی هستند. پس در هر حال مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند.

۷. اگر AB ضلع یک n ضلعی باشد، به کمک دستور محاسبهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R داریم:



$AB=2R\sin\frac{180}{n}$. همچنین، طول قطر AC را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{B}=180-(B\hat{A}C+B\hat{C}A)=180-2B\hat{A}C$$
$$=180-\widehat{BC}=180-\frac{360}{n}$$
$$\Rightarrow AC=2R\sin B=2R\sin\frac{360}{n}$$

و به همین ترتیب داریم: $AD=2R\sin\frac{540}{n}$ و با فرض $\frac{180}{n}=\alpha$ و فرض مسئله داریم:

$$\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{2R\sin 2\alpha}+\frac{1}{2R\sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow\sin 3\alpha+\sin 2\alpha=\frac{\cos 5\alpha-\cos\alpha}{-2\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow\cos 5\alpha-\cos\alpha=-2\sin\alpha\sin 3\alpha-2\sin\alpha\sin 2\alpha$$
$$\Rightarrow\cos 5\alpha-\cos\alpha=\cos 4\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-\cos$$
$$\Rightarrow\cos 5\alpha-\cos 4\alpha=\cos 3\alpha-\cos 2\alpha$$
$$\Rightarrow-2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=-2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow\sin\frac{9\alpha}{2}=\sin\frac{5\alpha}{2}\Rightarrow\frac{9\alpha}{2}=\frac{5\alpha}{2}\quad\text{و (غ ق ق)}$$
$$\frac{9\alpha}{2}=\pi-\frac{5\alpha}{2}\Rightarrow 7\alpha=\pi,\alpha=\frac{\pi}{7}$$
$$\Rightarrow\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{7}\Rightarrow n=7$$

یعنی چندضلعی فوق باید هفت ضلعی منتظم باشد.

ابراهیم ریحانی ـ فهیمه کلاهدوز
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دماوند

فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

قسمت اول

کلیدواژه‌ها: اثبات، استدلال، استدلال ریاضی، شهود، خلاقیت، ریاضیات مدرسه‌ای، استدلال تجربی ـ دیداری، استدلال صوری

مقدمه

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام «اثبات» نشئت می‌گیرد. بسیاری از محققان آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعهٔ تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات است. برخی از آنان معتقدند یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت، پرورش افرادی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند و برای تصمیم‌گیری در مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند.

«شورای ملی معلمین ریاضی» (NCTM، ۲۰۰۰) نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارد که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های گوناگون توسعه می‌دهد. همچنین، افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد که استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامهٔ درسی است، در نظر گرفته شوند، بلکه این مفاهیم باید به‌طور طبیعی و مداوم در همهٔ بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند.

علی‌رغم تأکید فراوان بر اهمیت و نقش استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در همهٔ سطوح تحصیلی در درک و فهم، و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین، پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که برخی از دانش‌آموزان، ضرورت اثبات را درک نکرده و فقط در حد قبول شدن در امتحانات ریاضی برای آن اهمیت قائل‌اند.

با توجه به اهمیت موضوع، درک و فهم تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان از استدلال و اثبات ریاضی و همچنین توانایی آنها در ساخت اثبات، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. بدین منظور پرسش‌نامه‌ای تهیه شد و تعدادی از دانش‌آموزان دختر و پسر که در رشته‌های ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بودند، آن را تکمیل کردند. در مقالهٔ حاضر نتایج این بررسی مطرح می‌شود. در ادامه، پس از بیان ضرورت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، نمونه‌هایی از استدلال دانش‌آموزان را در فرایند اثبات یک گزارهٔ ریاضی، ارائه خواهیم کرد.

ضرورت و اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مدرسه‌ای مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات غیرممکن است. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبهٔ ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آنها در تحقیقات خود نشان می‌دهند، دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان علمی مستدل به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها

یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی کـه حافظه، رویه‌هـا را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجـازه می‌دهد که بیـن دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعهٔ منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشـان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

به‌طـور کلی، اثبـات در زمینه‌های گوناگـون بـرای افراد مختلـف، معانی متفاوتی دارد. داروسـاز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظـر را بـرای درمـان یک بیماری به اثبات برسـاند. برای آماردان، اثبـات می‌تواند با یـک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی اسـت که بتوان آن را آزمود. در زندگی روزانه نیز افـراد به‌طور طبیعی از اسـتدلال‌های غیررسـمی استفاده می‌کننـد که لزوماً درسـت نیسـتند؛ زیرا دقت و منطـق لازم را ندارند. برای مثال، گاهی در روابط اجتماعی و زندگی روزمره از مثال‌هایی اسـتفاده می‌کنیم که بـه راحتی ما را در مورد صحت یک رویداد متقاعد می‌کنند، اما ریاضی‌دان با این شواهد و مدارک قانع نمی‌شود.

در واقـع ریاضی‌دانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق‌تری اسـت. آنها بـر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار اندازه‌گیری بسـتگی دارد. آزمایش نیز به‌طور قطع ثابت نمی‌کند، زیـرا نتایج حاصـل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشـد و پایدار نیست. البته در برخی موارد، بین ریاضی‌دانان نیز نظرات و دیدگاه‌هـای متفاوتی در مورد نقش و اهداف اثبـات و آن‌چه که یک اثبات را می‌سازد، مشـاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشـخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای اسـتدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند.

از جمع‌بنـدی مباحـث موجود در تحقیقـات مرتبط با اسـتدلال و اثبات می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که به‌طور کلی، اثبـات به معنای ارائهٔ اسـتدلال با اسـتفاده از شـواهد و مدارک موجود بـرای تأیید یا رد یک گـزاره به منظور متقاعدکردن خود و یا دیگران است.

هارل و **سـاودر** (۲۰۰۷) معتقدند معنای اثبات و نقش آن و هر آن‌چه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تأییـد و پذیرش اثبات، از شـخصی به شـخص دیگر و از جامعـه‌ای به جامعهٔ دیگر متفاوت است. بسیاری از محققان در زمینهٔ آمـوزش ریاضی نیز معتقدند که بـرای ارائهٔ اثبات باید به مخاطبان و جامعهٔ موردنظر توجه داشت. برای مثال، اگر یک دانش‌آمـوز کلاس دوم ابتدایی بخواهد بـرای هم‌کلاسـی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند. یا آن‌چه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شـده، ممکن است به عنوان یک اثبـات ریاضی بـرای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد.

در بحث اسـتدلال و اثبات ریاضی، تنها جنبهٔ منطقی مطرح نیست، بلکه کشف، شهود، خلاقیت، تحلیل، توضیح و ارتباطـات، همه نقش اساسـی دارند. اهمیت اثبات در آمـوزش چیزی فراتر از تأییـد و تصدیـق اسـت. اهمیت آن نیز بدین دلیل است که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسـیرهای جدیدی را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند، نشـان دهد، اما نتایج ریاضی در نهایت باید به صورت دقیق اثبات شوند.

لازم به ذکر اسـت که اسـتفاده از مثال‌های عددی و شکل‌ها یا ابزار دیگر ریاضی در توضیح مفاهیم پیچیده در همهٔ علوم و به‌خصوص در ریاضیات، بسـیار مفید است، اما در مواردی که می‌خواهیم درستی یک گزارهٔ ریاضی را به‌طور کلی نشـان دهیم و یا به عبارت دیگر، ثابت کنیم، آن‌گاه بایـد محدودیت مثال‌ها و شکل‌های ریاضی را در نظر بگیریم. برای مثال، ممکن است که با بررسی چند عدد صحیح و یا اعـداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ نتیجه بگیریم که مربع هر عدد حقیقی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. در صورتی که اگر بـه اعداد بین ۰ و ۱ توجه کنیم (اعـدادی که در بیشـتر مثال‌ها نادیده گرفتـه می‌شـوند)، آن‌گاه محدودیـت مثال‌ها مشخص می‌شود.

بنابـر ضـرورت و اهمیـت فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، در این مطالعه نیز عملکـرد تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان در این فرایند، از طریق توزیع و جمع‌آوری یک پرسش‌نامه بین آنها، مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه، نمونه‌هایی از استدلال آنها برای اثبات درستی یک گزارهٔ ریاضی ارائه خواهد شد.

دانش‌آمـوزان چگونـه اسـتدلال می‌کنند؟

در پرسـش‌نامه از دانش‌آمـوزان خواسته شد که درستی گزارهٔ زیر را ثابت کنند:

حاصل جمع هر دو عدد فرد، برابر عددی زوج می‌شود.

استدلال برخی از دانش‌آموزان برای اثبات گزارهٔ موردنظر، به شکل تجربی بود؛ یعنی استدلال‌هایی که براساس شکل (ارائهٔ تصویر) و یا ارائهٔ تعدادی مثال، درستی گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌کردند. نمونه‌ای از این استدلال‌ها در نمونه‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

۱. نمونه‌ای از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنیم که جمع دو عدد فرد، عددی زوج است. هرچه مثال بیشتری بزنیم، باز هم نتیجه تغییری نمی‌کند:

۵+۳=۸ ، ۳+۳=۶ ، ۷+۵=۱۲

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جمع دو عدد فرد یک عدد زوج می‌شود.

نظر شما در مورد این استدلال چیست؟ آیا شما آن را به عنوان یک اثبات می‌پذیرید؟

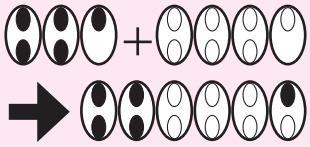
همان‌گونه که می‌دانیم، استفادهٔ درست از مثال‌ها برای درک بهتر مطالب، روشی بسیار مؤثر و مفید است، اما آیا با ارائهٔ چند مثال محدود می‌توانیم به یک نتیجه‌گیری کلی دست یابیم؟! حتی گاهی در زندگی روزمره نیز با ارائهٔ چند مثال، از درستی یک موضوع، به‌طور کامل اطمینان پیدا نمی‌کنیم.

فرض کنید که ما ادعا کنیم، جمع هر دو عدد اول، عددی زوج است و با ارائهٔ سه مثال ۸=۵+۳، ۱۲=۷+۵ و ۱۸=۷+۱۱، درستی این ادعا را تأیید کنیم. آیا شما هم درستی آن‌را تأیید می‌کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در این مثال‌ها، وجود عدد اول ۲ را فراموش کرده‌ایم. این‌جاست که محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر، حاصل عبارت n^2+n+41 را به ازای اعداد طبیعی n=۱,۲,۳,۴,۵ به‌دست آورید. مقادیر به‌دست آمده اعدادی اول هستند. آیا می‌توان گفت که مقدار عبارت داده شده به ازای هر عدد طبیعی، عددی اول است؟ برای روشن شدن موضوع عدد ۴۱ را آزمایش کنید.

۲. نمونه‌ای دیگر از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

اگر مانند شکل زیر، اعداد فرد را دسته‌بندی کنیم، حاصل جمع به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.



این نوع استدلال که آن‌را به عنوان استدلال «تجربی ـ دیداری» مشخص می‌کنیم منطقی است، زیرا دانش‌آموز از شکلی استفاده کرده است که ویژگی بارز و کلی همهٔ اعداد فرد و اعداد زوج را نشان می‌دهد. اما به نظر می‌رسد ارائهٔ چنین استدلالی در دورهٔ متوسطه از طرف دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تجربی که با زبان ریاضی و شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا شده‌اند و ضرورت و اهمیت استفاده از زبان ریاضی برای آن‌ها مشخص شده است، کافی نیست.

نمونهٔ دیگری از پاسخ دانش‌آموزان را که به عنوان استدلال‌های صوری مشخص می‌کنیم، در نمونه‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌کنید. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی بیان شده‌اند، استدلال صوری می‌نامیم.

۳. نمونه‌ای از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم a عددی فرد باشد، آن‌گاه: a+a=۲a. یعنی حاصل جمع بر ۲ بخش‌پذیر است. پس حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

۴. نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم که a عددی زوج باشد. پس (a-۱) و (a+۱) اعدادی فرد هستند و داریم: (a-۱)+(a+۱)=۲a. همان‌گونه که نشان داده شد، جواب بر ۲ بخش‌پذیر است، پس زوج است.

شما چه فکر می‌کنید؟ آیا استدلال‌های فوق را به عنوان اثبات گزارهٔ موردنظر می‌پذیرید؟ آیا این استدلال‌ها برای همهٔ اعداد فرد برقرارند؟

با کمی دقت در نمونهٔ ۳ متوجه می‌شویم که دانش‌آموز درستی این گزاره را ثابت می‌کند که: «حاصل جمع هر عدد فرد با خودش، عددی زوج است.» پس هنوز گزاره به‌طور کلی برای هر دو عدد فرد دل‌خواه ثابت نشده است.

در نمونهٔ ۴ نیز، وقتی (a-۱) و (a+۱) به عنوان دو عدد فرد با هم جمع می‌شوند، توجه داشته باشیم که این دو عدد فرد، متوالی (پشت سر هم) هستند. در واقع دانش‌آموز با ارائهٔ چنین استدلالی، درستی این گزاره را نشان می‌دهد که: «حاصل جمع دو عدد فرد متوالی، عددی زوج است.» پس این استدلال را نیز نمی‌توان به عنوان یک اثبات کلی و صحیح برای گزارهٔ ارائه شده در نظر گرفت. این استدلال تنها برای یک موقعیت خاص درست است.

گاهی دانش‌آموزان فکر می‌کنند که نمادهای ریاضی فقط جنبهٔ تشریفاتی دارند. شاید این نوع نگاه و باور را بتوان در استدلال یکی از دانش‌آموزان مشاهده کرد (نمونهٔ ۵).

۵. باز هم نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که تنها جنبهٔ نمادین دارد

اگر x و y دو عدد فرد باشند و: z=x+y، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x = z - y \\ y = z - x \end{cases} \Rightarrow x + y = z - y + z - x$$

در نتیجه: ۲z=۲x+۲y. پس حاصل بر ۲ بخش‌پذیر است. پس جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

شاید شما هم به این نتیجه رسیده باشید که استدلال فوق کمی با فرایند دور زدن ارتباط دارد. (البته با عرض معذرت!) باید یک نکته را یادآوری کنیم که وقتی می‌گوییم استدلال‌های تجربی و استفاده از مثال‌های عددی برای اثبات گزاره‌های ریاضی کافی نیست و محدودیت دارد، منظورمان دست و پنجه نرم‌کردن با نمادهای ریاضی و حروف انگلیسی نیست تا شاید به جواب برسیم! همان‌طور که می‌دانیم، هدف استفاده از زبان ریاضی و نمادها در اثبات گزاره‌های ریاضی، خلاصه‌نویسی و عمومیت بخشیدن به مطلب موردنظر است.

برای مثال، وقتی بیان می‌کنیم که: ۲+۲=۴ و ۴+۴=۸، تنها نشان داده‌ایم که جمع عدد ۲ با خودش برابر ۴ و جمع عدد ۴ با خودش برابر ۸ است. اما وقتی فرض می‌کنیم که a یک عدد زوج است و نشان می‌دهیم که: a+a=۲a. آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم: «حاصل جمع هر عدد زوج دل‌خواه با خودش، عددی زوج می‌شود»، چون بر ۲ بخش‌پذیر است.

در نمونهٔ ۶ نیز نمونه‌ای از استدلال دانش‌آموزان را که به شکل صوری ارائه شده و از لحاظ منطقی درست است مشاهده می‌کنید.

۶. و آخرین نمونه از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که صحیح است

فرض می‌کنیم ۲a+۱ و ۲b+۱ دو عدد فرد باشند، به‌طوری که: $a, b \in Z$ و داریم:

$$2a+1+2b+1 = 2a+2b+2 = 2(a+b+1)$$

پس حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است، (چون بر ۲ بخش‌پذیر است) و بدین‌گونه درستی گزاره ثابت می‌شود.

در استدلال یاد شده، دانش‌آموز

به‌طور صحیح از نمادهای ریاضی استفاده کرده است؛ به‌گونه‌ای که ۲a+۱ و ۲b+۱ نماینده‌ای از دو عدد فرد دل‌خواه هستند و در حالت کلی، درستی گزارهٔ موردنظر ثابت می‌شود. البته بجاست که همانند شروع استدلال، در پایان آن نیز اشاره شود که: $(a+b+1)\in Z$.

گاه حتی می‌توان بدون استفاده از نمادهای ریاضی، درستی یک گزاره را به‌طور منطقی ثابت کرد. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که دانش‌آموزان صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها برای تأییدگزارهٔ موردنظر به صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی بیان کرده‌اند، تحت عنوان استدلال‌های روایت‌گونه مشخص کرده‌ایم. در نمونهٔ ۷، نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یک دانش‌آموز را مشاهده می‌کنید.

۷. نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یکی از دانش‌آموزان

منظور از عدد فرد، عددی است که دارای چند جفت و یک تکه باشد.

مثلاً عدد ۳، از جمع ۲ و ۱ ساخته می‌شود و عدد ۵ هم برابرست با جمع ۴ و ۱. وقتی ۳ و ۵ را با هم جمع می‌کنیم، تکه‌ها کنار هم و جفت‌ها هم کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و داریم، ۲=۱+۱ و جمع دو عدد زوج هم زوج می‌شود، یعنی: ۶=۴+۲. عددهای ۳ و ۵ را برای مثال گفتم، وگرنه این قانون برای جمع هر دو عدد فرد برقرار است.

همان‌گونه که در نمونهٔ ۷ مشاهده می‌کنید، دانش‌آموز به شکل توضیحی و بدون استفاده از نمادهای ریاضی درستی گزارهٔ موردنظر را ثابت می‌کند. تعداد کمی از دانش‌آموزان با استفاده از زبان ریاضی و یا به صورت روایت‌گونه، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه را به درستی اثبات کرده‌اند. در صورتی‌که به نظر می‌رسید، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه برای دانش‌آموزان این مقطع، گزارهٔ آشنایی باشد. علاوه بر این، دانش‌آموزان در کتاب‌های ریاضی سال اول و دوم دبیرستان با شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا می‌شوند، لذا انتظار می‌رفت که عملکرد آنها در فرایند اثبات، عملکرد مناسبی باشد؛ اما نتایج به گونه‌ای دیگر بود.

شما چگونه می‌اندیشید و دلیل عملکرد دانش‌آموزان را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ آیا برای توسعهٔ درک و فهم دانش‌آموزان و بهبود توانایی آنها در همهٔ دوره‌های تحصیلی در زمینهٔ استدلال و اثبات ریاضی پیشنهادی دارید؟

لازم به ذکر است که باور و دیدگاه افراد نسبت به مفاهیم استدلال و اثبات، می‌تواند بر توانایی آنها در اثبات درستی یا نادرستی یک ادعا تأثیرگذار باشد. همچنین، آشنایی درست با فرایند استدلال و اثبات و آگاهی از اهداف و کارکردهای آن در ریاضیات مدرسه‌ای نیز می‌تواند ما را در یادگیری بهتر این فرایند یاری رساند. در شماره‌های بعدی این مجله قصد داریم که با مفهوم استدلال و اثبات ریاضی و جایگاه آنها در ریاضیات مدرسه‌ای بیشتر آشنا شویم. تا آن هنگام از شما می‌خواهیم که روی این دو سؤال نیز فکر کنید:

۱. استدلال و اثبات ریاضی را چگونه تعریف می‌کنید؟

۲. با رعایت چه شرایطی می‌توانیم بگوییم که درستی یا نادرستی یک گزارهٔ ریاضی را ثابت کرده‌ایم؟

منابع

۱. تال، دیوید (۱۳۸۵). **ماهیت اثبات ریاضی**. ترجمهٔ عرفان صفر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۷-۱۱.

۲. جهانشاهی، محمد (۱۳۸۰). **اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی**. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. تهران.

۳. کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). **بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی**. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (دانشکدهٔ علوم پایه). تهران.

4. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5. Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms.* Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, University Park.

6. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5-23.

7. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

8. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education,* 31(4), 396-428.

9. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

10. Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.

غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچه مجلات ریاضی ایران

کلیدواژه‌ها: تاریخچهٔ مجله برهان، تقی فاطمی، مشاهیر ریاضی جهان، ادموند هالی، در باغ تجربه‌ها، ذهن ریاضی، نظریهٔ فاجعه

اشاره

شمارهٔ ۲۱ برهان متوسطه در تابستان ۱۳۷۶ انتشار یافت. این شماره در سال هفتم نشر مجله منتشر شد.

در مقالهٔ «**تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**» این شماره شرح حال **پروفسور تقی فاطمی**، استاد ارجمند دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تهران را می‌خوانیم. در این شرح حال چنین آمده است:

*قبل از تحصیلات عالیه، در یزد به عنوان **مفتش معارف** خدمت می‌کردم و ضمن آن در مدارس آن‌جا به تدریس اشتغال داشتم. بعد که در اصفهان مدرسهٔ متوسطه دایر شد، به آنجا رفتم و دو سال اخر تحصیلات متوسطه را در مدرسهٔ صارمیه گذراندم. مدیر این مدرسه آقای **ضیاءالدین جناب** بودند که هنوز هم مشغول به خدمت فرهنگ می‌باشند و اگر در کار خود توفیقی داشته‌ام، آن را مرهون تشویق‌های ایشان می‌دانم. از جمله معلمان مرحوم، **مهندس علی ریاضی** و **مرحوم غلامحسین زیرک‌زاده** بودند و دیگری **استاد جلال[الدین] همایی** که نه تنها حق تعالیم بر بسیاری از اشخاص را دارد، بلکه با تبحری که در بیشتر علوم و فنون دارد و با تحقیقات و تتبعاتی که در آثار گذشتگان از علمای ایرانی به‌عمل آورده است، فردی ممتاز می‌باشد.*

در سال ۱۳۰۶ با اولین دستهٔ محصلین که از طرف وزارت جنگ به فرانسه اعزام می‌شد، به این کشور رفتم. با وجود این‌که در امتحان مسابقهٔ اعزام رتبهٔ اول شده بودم و می‌توانستم رشتهٔ پزشکی را که آن موقع داوطلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت انتخاب کنم، اما به علت شوق باطنی، رشتهٔ معلمی را انتخاب کردم و داوطلب ورود به «دانش‌سرای عالی» (Ecole Normale Superieure) پاریس شدم. در فرانسه هنوز دیپلم ایران را نمی‌شناختند. مرا در کلاس پایان تحصیلات متوسطه قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند، به کلاس تهیهٔ «Mathematiques speciales» دانشگاه منتقل شدم. به علاوه همین موضوع باعث شد از آن تاریخ به بعد در فرانسه دیپلم ایران را بشناسند.

سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقهٔ ورودی مدارس بزرگ شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «اکل نرمال سوپریور» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دورهٔ لیسانس ریاضی را تهیه کردم و گذراندم و در دو سال آخر دورهٔ مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم. ضمناً دیپلم هندسهٔ عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله، امتحان «آگرگاسیون» را گذراندم و قبول شدم. در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ به عمل آمد، به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکدهٔ علوم و دانش‌سرای عالی به تدریس مشغول شدم. علاوه بر آن، در دانشکدهٔ فنی هم تدریس داشتم. در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می‌دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکدهٔ علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیز تدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیرکل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آن را کنار گذاشتم؛ شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

در مقالــهٔ «**آموزش ریاضی بــا تأکید بــر کاربردها**» از **محســن صدیقی** در مورد «**رفع خودناباوری**» این مطلب آمده اســت: «یکی از مسائلی که بین دانشجویان ریاضی (و در کل علوم)، به‌خصوص در مقایسه با دانشجویان مهندسی و پزشــکی، کاملاً محســوس اســت، این نکته می‌باشد که دانشجوی کارشناسی ریاضی مشخص‌ترین جایگاه خود در اجتماع را تدریس می‌بیند. و علی‌رغم این که برای شأن معلم صحبت‌های بســیاری مطرح می‌شود، در عمل یک مهندس یا پزشــک از جایگاه اجتماعی بالاتری برخوردار اســت. این موضوع تا آن‌جا پیش می‌رود که چه بســا دانشجوی ریاضی خود را از مرتبهٔ پایین‌تری نســبت به دانشجوی مهندسی و پزشــکی احســاس می‌کند. به نظر من این‌که دانشجو بداند چه جایگاهی در شاخه‌های متفاوت علوم و فناوری می‌تواند داشته باشد، در خودباوری او کاملاً مؤثر است.»

مقالهٔ «**مشــاهیر ریاضی جهان**» نیز شرحی دارد دربارهٔ زندگــی **نیوتن**، از فرهنــگ ریاضیات آکســفورد که در آن چنین آمده اســت: «**نیوتن، ایزاک** (۱۶۴۲-۱۷۲۷). نیوتن به عنوان پسر کشاورزی در **لینکلن شایر** تولد و رشد یافت، تا بر ریاضیات و فیزیک قرن هفدهم حکومت کند و در آنها انقلابی به‌وجود آورد. اســاس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریهٔ مکانیک، قانون جاذبه، نظریهٔ حرکت سیاره‌ای، نظریهٔ رنگ‌ها، **ســری دو جمله‌ای** و نتایج مهم بســیاری در نظریهٔ معــادلات را به او مدیونیــم. کار آنالیز عــددی بدون **روش نیوتن** لنگ می‌ماند. اظهارات در خور شایستگی‌های نسبی ریاضی‌دان‌هایی با این درجه اســتعداد، همواره بحث‌برانگیز بوده است، اما در مورد نیوتن، از آن‌جا که به نظر می‌رسد که هم **گاوس** هم **اینشــتین** مقام برتر را به نیوتن داده‌اند، نیاز به مجادله نیست. تنفری بیمارگونه از انتقاد، نیوتن را از نشر بسیاری از آثارش بازداشت.

در ســال ۱۶۸۴، **ادمونــد هالــی**[1] که ســتارهٔ دنباله‌داری به نام اوســت، به نیوتن پیشــنهاد کرد در مورد قانون جاذبه‌ای که قوانین حرکت ســیاره‌ای **کپلر** را به‌دســت می‌دهد، تحقیق کند. نیوتن که قبلاً در مورد این موضوع کار کرده بود، بلافاصله پاسخ داد که قانون مربع معکوس است. هالی که از این واقعه تقریباً تکان‌خورده بود، بر آن شد که نیوتن را به چاپ نتایجش وادارد و نیوتن ســرانجام این کار را انجــام داد. نیوتن هنــگام تصدی امور ضراب‌خانه مدیر بسیار قابلی بود و اصلاحات عمیقی در پول رایج بریتانیا انجام داد. مقبره و بنای یادبودش در کلیســای **وست مینستر** واقع است. **ولتر** در مورد نیوتن چنین گفت: مدفون چونان سلطانی.»

در مقالهٔ «ترکیبیّات» از **سیمین اکبری‌زاده** در مورد این شــاخهٔ مهم ریاضیات معاصر چنین می‌خوانیم: «ترکیبیات شاخه‌ای بســیار قدیمی از ریاضیات است که بیشتر هنگام مطالعهٔ جایگشــت‌ها و ترکیب‌ها با آن آشــنا شــده‌ایم. در ســال‌های اخیر، هم به دلیل آن‌که رایانه‌ها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته‌اند، و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم رایانه‌ای مطرح شــده‌اند، به روش‌های ترکیبیاتی نیاز دارند، رشدی انفجارآمیز در این زمینه به‌وجود آمده است.»

در مقالــهٔ «**در باغ تجربه‌ها**» پای صحبت **اســتاد احمد بیرشک** می‌نشینیم. در آن چنین آمده است:

❍ استاد به نظر شما فلسفهٔ ریاضیات چیست؟ آیا فلسفهٔ ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

● تعداد رشــته‌های ریاضی در حال حاضر آن‌قدر زیاد است که هیچ‌کس نمی‌تواند در همهٔ رشــته‌های ریاضی تخصص داشــته باشد. حتی در بعضی از رشته‌ها یک عمر لازم است تا آدم تخصص پیدا کند. فلســفهٔ ریاضی به معنی فلســفه نیســت، بلکه روش‌هایی که برای آسان کردن درک ریاضی و ثمربخش‌بودن آن است، مجموعاً فلسفهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهند. کتاب‌های فلســفهٔ ریاضــی مرتب روی روش‌های متفاوت ریاضی بحث می‌کنند.

❍ در این مرحله خوش‌حال می‌شویم از خاطرات خودتان برایمان بگویید.

● من دربارهٔ خاطراتم نمی‌توانم زیاد صحبت کنم، به دلیل این‌که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است. دیگر این‌که خاطرات افراد خیلــی به درد دیگران نمی‌خورد. بنابراین من فقط می‌توانم دربــارهٔ یک خاطــرهٔ ریاضی که به قول یکی از دوســتان به داستان می‌ماند، صحبت کنم: من تحصیلاتم بسیار نامرتب بــود، برای این‌که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبــور بود در مرزهــا خدمت کند. آن وقت‌ها هم که من نوجوان بودم، در مرزهایمان هیچ وســیلهٔ تحصیل نبود. در نتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شــروع کردم پیش خودم کار کردم. بنابراین خیلی جنبهٔ خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دورهٔ

ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم و دورهٔ متوسطهٔ شش ساله را در دو سال طی کردم. یعنی سال‌های اول و دوم متوسطه را تابستان پیش معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم، سال چهارم را پیش خودم خواندم، سال پنجم را در مدرسه خواندم، و سال ششم را پیش خودم خواندم تا دورهٔ متوسطه تمام شد.

خاطره‌ای که دارم دربارهٔ سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم، کتاب‌ها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر که تابستان را با هم باشیم. در آن‌جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. به هر مدرسه‌ای که برای امتحان تجدیدی رفتم، گفتند امتحاناتمان تمام شده، کاری نمی‌توانیم بکنیم. اما من هم نمی‌خواستم یک سال عمرم تلف بشود. بعد از این‌که از همه جا ناامید شدم، به من خبر دادند که در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به نام «شرف مظفری». آخرین امید بود.

رفتم به مدرسه. مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط اتاق ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است. می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده، نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.»

اصرار کردم، به دلیل این‌که آخرین امید بود. گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟»

گفتم: «اسمم احمد بیرشک است.»

گفت: «احمد بیرشک تویی؟!»

گفتم: «بله.»

گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برایت یک فکری بکنند.»

من با خوش‌حالی رفتم سراغ آقای ناظم. سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش‌وپرورش به وزارت رسید؛ **دکتر مهران**. آن وقت اسمش **صادقی** بود. رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این‌که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم. خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم، ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.»

گفتم: «آقای ناظم! آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه این‌که بگویید نمی‌شود.»

گفت: «آقای مدیر فرمودند؟»

گفتم: «بله.»

گفت: «خوب، اسم شما چیست؟»

گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.»

گفت: «آقای احمدخان بیرشک جناب‌عالی هستید؟!»

گفتم: «بله بنده هستم.»

گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.»

روز بعد رفتم امتحان دادم و بالاخره رفتم کلاس پنجم.

این مطلب برای من معما شده بود که چه‌طور آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رییس و ناظم یک مدرسه با اسمش آشنا هستند و اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم و معلوم شد، مدرسهٔ شرف شاگردی داشت در کلاس سوم، هم‌کلاس من که می‌خواست امتحان بدهد. این‌ها دنبال آن بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند. **عبدالرسول دبیر** که شاگردشان بود، امتحانات را داده بود و بعد که رفته بودند نتیجه را بگیرند، دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران. اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند: یکی همین عبدالرسول دبیر است و یکی هم احمد بیرشک. اسم من به خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسمم احمد بیرشک است، دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم نمره است.

در مقالهٔ **«مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان»** زیر عنوان **«یک ذهن ریاضی حیرت‌انگیز»** در شرح حال **گاوس**، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، چنین می‌خوانیم: **«کارل فردریش گاوس** در سال ۱۷۷۷ در **برونسویک** که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنا بود و امید داشت که

پسرش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در سه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناسب آن است. خوش‌بختانه از لحاظ آیندهٔ ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوییم) حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردسال آگاه شد و تعلیم مرتب او را برقرار ساخت. گاوس در سن ۱۵ سالگی، در حالی‌که بسیار جلوتر از توانایی‌های معلمان خود بود، به کالج **کارولین** رفت. طی سه سال استادان این کالج هم مجبور شدند بپذیرند که آنها را نیز پشت‌سر نهاده است.»

«**ادب ریاضی**» این شماره دربارهٔ روش اصل موضوعی چنین می‌گوید: «روش **اصل موضوعی** در ریاضیات امروز گسترش و توفیق زیادی پیدا کرده است. سرچشمهٔ این روش را باید کشف هندسهٔ نااقلیدسی **لباچفسکی** دانست. این روش، در تماس و برخوردی که با دیگر اندیشه‌ها داشت، نه تنها روش‌های تازه‌ای را به‌وجود آورده، بلکه ضمناً موجب پیدایش شاخه‌های تازه‌ای در اندیشهٔ فیزیک و ریاضی شده است. یکی از نمونه‌های حاصل از این روش، **فضای هیلبرتی** است که در مکانیک کوانتایی مورد استفاده قرار گرفته است.

پیشرفت روش اصل موضوعی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد: مرحلهٔ نخست از لباچفسکی آغاز می‌شود و با کوشش‌های هیلبرت دربارهٔ اصل موضوعی کردن ریاضیات پایان می‌یابد و مرحلهٔ دوم از زمان هیلبرت تا امروز ادامه دارد. مرحلهٔ دوم عبارت است از تلفیق مضامین هندسی با آموزشی که همراه با آن تکامل‌یافته و به **منطق صوری** یا **منطق ریاضی** مشهور شده است.»

بعضی دیگر از مقالات این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری
- رسم نمودار تابع f/ ۱ روی نمودار تابع f/ احمد قندهاری
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- رادیکال/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- نامساوی‌ها در احتمال/ سیامک جعفری
- منطق خود را بیازمایید/ حسن نصیرنیا
- مکان هندسی/ محمدهاشم رستمی

بیست و دومین شمارهٔ برهان در پاییز ۱۳۷۶ انتشار یافت. در «**ادب ریاضی**» این شماره دربارهٔ اولین شاخه و انشعاب علمی از کتاب «**تاریخ علومِ**» **پی یر روسو** چنین آمده است: «اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً به تجربه احتیاج نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گلهٔ خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همهٔ آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد. اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً جهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند. زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند، هنگامی که یکی از جوجگان او غایب باشند، ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی، چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعهٔ خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر، در نتیجهٔ احتیاج مجبور شدند نوعی وسیلهٔ شمارش دقیق‌تر ـ غیر از غریزهٔ طبیعی خود ـ به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب‌کردن آماده و مهیایی بود.»

در مقالهٔ «**رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی**» از **میرشهرام صدر** دربارهٔ حرکت تناوبی چنین می‌خوانیم: «هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکت‌های تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسان‌های رقاصک ساعت مچی، سیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر در حال نوسان، عقربهٔ کوچک ساعت که بعد از طی ۱۲ ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند.»

در مقالهٔ «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**» در مورد قضایای «**سِوا**» و «**مِنِلائوس**» آمده است: «قضایای **سِوا** و **مِنِلائوس** که به‌زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربارترین قضایای هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی هستند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌اند. مثلاً قضیهٔ منلائوس، در مورد هر مثلث و هر خط قاطع ناگذرنده از رأس آن به‌کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامش پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و **جیووانی سوای ایتالیایی**[۲] قضیهٔ خود (و قضیهٔ دوباره کشف کردهٔ منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد.»

در مقالهٔ **مشاهیر ریاضی جهان** دربارهٔ **رنه توم**، واضع

«**نظریهٔ فاجعه**» این مطلب را می‌خوانیم: «**توم، رنه** (۱۹۲۳-). توم ریاضی‌دانی فرانسوی است که بیشتر به‌خاطر نظریهٔ ساخت تکوینی معروف است. این نظریه که به نظریهٔ فاجعه مشهور است، یکی از کوشش‌های جدی و معدود در به‌کار گرفتن ریاضیات در قالب‌ها و جریانات موجودات زنده است. اغلب کوشش‌های قبلی به‌طور طبیعی در مسیر کمّی‌بودن در سنت ریاضیات کاربردی انجام گرفته‌اند، و توسط پیچیدگی محض طبیعت با شکست مواجه شده‌اند. نظریهٔ توم از این توان برخوردار است که هم کیفی و هم دقیق است.»

در **ادب ریاضی** این شماره، در مطلبی دربارهٔ تاریخ ریاضی آمده است: «این‌قدر می‌دانیم که در حدود سال ۴۵۰ قبل از میلاد مسیح یونانیان دارای هندسه‌ای بدوی و مقدماتی بوده‌اند. موضوع این هندسه فقط طریقه‌های عملی و دستورهای قابل استفاده در اندازه‌گیری طول پارچه یا میزان محصول زیتون نبوده است، بلکه استدلال‌ها و براهین منطقی متصل به یکدیگر در آن دیده می‌شد که در حدود هندسهٔ مقدماتی ما بوده‌اند. بدون شک این استدلال‌ها چندان دقیق نبوده‌اند و بیشتر از الهام و مکاشفه استفاده می‌کردند تا از منطق و بیشتر آنها مربوط به ساختمان‌های هندسی بوده‌اند.»

بعضی دیگر از مقاله‌ای این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری
- چند نکته دربارهٔ f(x)ها/ احمد قندهاری
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- ریاضیات گسسته/ غلامرضا یاسی‌پور
- هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو/ محمدصادق عسگری
- روش‌های عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرال‌های معین/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- میانگین همساز/ پرویز شهریاری
- تئوری زوج خط/ سیامک جعفری
- کامپیوتر و شغل آینده/ محسن صادقی مشکنانی

مجله با حل مسئلهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۰ و حل مسئله‌های برهان شمارهٔ ۲۱ پایان می‌پذیرد.

پی‌نوشت .....

1. Edmond Halley
2. Giovanni Ceva

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

چندمعمای خواندنی

● این معما را برای هر کس که نقل کنید و برای نخستین بار پاسخ صحیح بدهد، به راستی انسان باهوشی است! اول خودتان امتحان کنید، بعد حتماً برای دیگران هم آن را مطرح خواهید کرد. برای حل آن اطلاعات زیادی هم نیاز ندارید، کافی است با چهار عمل اصلی و شمارش اعداد آشنا باشید. این شما و این هم معمای ویژهٔ اول:

اتوبوسی از مبدأ حرکت خود با ده مسافر به راه می‌افتد. در ایستگاه اول سه مسافر پیاده و دو مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد دو مسافر پیاده و سه مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد چهار مسافر سوار و دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد پنج نفر پیاده و دو نفر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد تنها سه نفر سوار می‌شوند و بالاخره در ایستگاه آخر دو نفر پیاده می‌شوند. پس از آن هم اتوبوس به مقصد نهایی می‌رسد. حالا بگویید در این مسیر چند ایستگاه وجود داشت!

● این یکی کمی جدی است و به قشنگی معمای اول نیست! کاوه و شهریار دو برادر دوقلو و کاملاً شبیه به هم بودند. من سال‌ها پیش با آنها آشنا بودم و می‌دانستم که یکی از آنها همیشه دروغ و دیگری همیشه راست می‌گوید. ولی حالا یادم نیست کدام دروغ‌گو و کدام راست‌گو بود. حالا بعد از سال‌ها آنها را پیدا کرده‌ام و می‌خواهم کاوه را بشناسم، چون با او کار واجبی دارم! چه‌طور می‌توانم با یک سؤال ـ بله فقط یک سؤال، آن هم سؤالی که پاسخ آن فقط بله یا خیر باشد ـ کاوه را بشناسم؟! توجه داشته باشید فقط می‌توانم یک سؤال از یکی از آنها بپرسم. پاسخ را در شمارهٔ آینده ببینید.

البته توجه داشته باشید که $8m+1$ باید مربع کامل باشد. یعنی برای هر m جواب ندارد.
از شما دوست عزیز برای مطلب ارسالی‌تان سپاس‌گزاریم، اما تقاضا می‌کنیم که به مقالات تفضیلی بیشتر توجه داشته باشید و با مجله‌تان در ارتباط مستمر باشید.

● همکار گرامی، آقای **شهریار جاوید**
از شهرستان اردبیل
با سپاس از مطلب ارسالی‌تان باید بگوییم که در زمینهٔ بحث مقاطع مخروطی تا به‌حال در شماره‌های گوناگون مجله مطالب بسیاری داشته‌ایم و در کتاب‌های کمک‌درسی نیز در این‌باره مطالب مشابه بسیاری دیده می‌شود. سعی کنید مطالب و مسائل غیرتکراری و کارهای تازه‌ای برای مجله‌تان بفرستید. با ما در تماس باشید.

● همکار محترم، خانم **نجمه مؤمنی**،
دبیر ریاضی از شهر کرمان
با تشکر فراوان از مطلب ارسالی‌تان تحت عنوان «احتمال و یک پارادوکس»، ممنون می‌شویم اگر مطالب ارسالی‌تان مناسب و در حد توانایی‌های دانش‌آموزان دبیرستان و درچارچوب این مباحث و یا مباحث مرتبط با المپیادهای ریاضی باشد. مطالبی که بیشتر به بحث‌های ریاضی دانشگاهی نزدیک هستند باید در مجلات تخصصی آن حوزه مورد استفاده قرار گیرند. با مجله‌تان در ارتباط باشید.

پی‌نوشت.....
* Spectrum

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟
اگر متوجه پارادوکس موجود در سؤال نشده‌اید، توضیح ما را در شمارهٔ آینده ببینید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چندمعمای خواندنی

● باز هم دوقلوها! مدتی بعد، باز هم کاوه و شهریار را دیدم. آنها رفتارشان را تغییر داده بودند و دیگر هیچ‌کدام همیشه دروغ یا همیشه راست نمی‌گفتند. این‌بار هم می‌خواستم کاوه را بشناسم. از آنها خواستم خودشان را معرفی کنند، ولی آنها خواستند که این موضوع را خودم کشف کنم!

یکی از آنها به من گفت: «برادر من کارتی در جیبش دارد که یا قرمز است، یا سیاه. اگر کارت او قرمز باشد، او یک جملهٔ درست خواهد گفت. اما اگر کارت او سیاه باشد، جملهٔ او نادرست خواهد بود. پدر آنها که می‌دانستم همیشه راست می‌گوید، جملهٔ او را تأیید کرد. سپس برادر دوم به من گفت: «من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم.»
حالا به من کمک کنید تا کاوه را شناسایی کنم. پاسخ را در شمارهٔ بعد ببینید.

تولید ملی، حمایت از کار و سرمایه ایرانی

برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوهٔ اشتراک:
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سمراه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

● نام مجلات درخواستی:
● نام و نام خانوادگی: ● میزان تحصیلات:
● تاریخ تولد: ● تلفن:
● نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان: خیابان:
شمارهٔ فیش: مبلغ پرداختی:
پلاک: شمارهٔ پستی:
● در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را ذکر کنید:
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امورمشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
● اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۱۲۰۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۸۰۰۰۰ ریال

یک نابرابری مرتبط با نقطهٔ ویژه‌ای در مثلث

ترجمه: عباس روح‌الامینی

کلیدواژه‌ها: نقطهٔ داخلی مثلث، نقطهٔ فرمایی، نقطهٔ بروکارد، نابرابری کوشی، قضیهٔ سینوس‌ها، قضیهٔ کسینوس‌ها

مقدمه

F را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه F «نقطهٔ فرمایی» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$$

همچنین، Ω را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه Ω «نقطهٔ بروکارد» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA}$$

در مورد نقطهٔ فِرما و نقطهٔ بروکارد مثلث تعدادی مقاله وجود دارد که این مقاله نتیجهٔ جدیدی به آنها افزوده است.

نتیجهٔ مهم

قضیهٔ ۱: فرض کنید F نقطهٔ فرمایی مثلث ABC باشد که: $\widehat{BCA} < 120^\circ$، $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$.

و نیز فرض کنید Ω_a، Ω_b و Ω_c به ترتیب نقطه‌های بروکارد مثلث‌های FBC، FCA و FAB را مشخص کنند و بتوانید بنویسید:

$$\widehat{\Omega_a FB} = \widehat{\Omega_a BC} = \widehat{\Omega_a CF} = \alpha$$

$$\widehat{\Omega_b FC} = \widehat{\Omega_b CA} = \widehat{\Omega_b AF} = \beta$$

$$\widehat{\Omega_c AB} = \widehat{\Omega_c BF} = \widehat{\Omega_c FA} = \gamma$$

آن‌گاه داریم:

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma \geq 5\sqrt{3}$$

لِم ۱: اگر F نقطه فِرمایی مثلث ABC باشد و: $\widehat{BCA} < 120^\circ$ و $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$ و اگر طول اضلاع BC، CA و AB را به‌ترتیب با a، b و c مشخص کنیم و مساحت مثلث ABC را با Δ نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

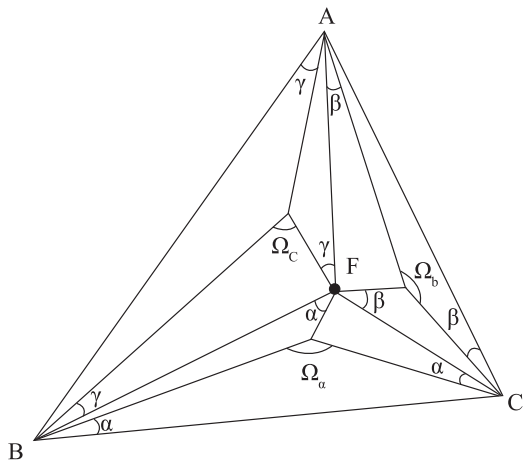
$$(AF+BF+CF)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}\Delta$$

اثبات: به کار بردن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCF نتیجه می‌دهد:

$$a^2 = BF^2 + CF^2 - 2BF\times CF\cos\widehat{BFC}$$
$$= BF^2 + CF^2 + BF\times CF$$

به‌طور مشابه:

$$b^2 = CF^2 + AF^2 + CF\times AF$$
$$c^2 = AF^2 + BF^2 + AF\times BF$$



بنابراین:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(AF^2+BF^2+CF^2) + AF\times BF + BF\times CF + CF\times AF = 2(AF+BF+CF)^2 - 3(AF\times BF + BF\times CF + CF\times AF)$$

و از آنجا:

$$(AF+BF+CF)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{3}{2}(AF\times BF + BF\times CF + CF\times AF)$$

چون:

$$\Delta=\frac{1}{2}AF\times BF\sin\widehat{AFB}+\frac{1}{2}BF\times CF\sin\widehat{BFC}$$
$$+\frac{1}{2}CF\times AF\sin\widehat{CFA}=\frac{1}{2}AF\times BF\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}BF$$
$$\times CF\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}CF\times AF\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ما داریم:

$$AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF=\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}$$

و بنابراین:

$$(AF+BF+CF)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta$$

لِم ۲: فرض کنید Ω نقطهٔ بروکارد مثلث ABC باشد و: $\widehat{\Omega AB}=\widehat{\Omega BC}=\widehat{\Omega CA}=\omega$.

طوع اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با a و b و c مشخص کنید و مساحت مثلث ABC را Δ بنامید. آن‌گاه داریم:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

اثبات: به‌کار بردن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ΩAC نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\Omega A}{\sin\omega}=\frac{b}{\sin(180^\circ-\omega-(A-\omega))}=\frac{b}{\sin A}$$

بنابراین:

$$\Omega A=\frac{b}{\sin A}\sin\omega$$

به‌طور مشابه:

$$\Omega B=\frac{c}{\sin B}\sin\omega\quad \Omega C=\frac{a}{\sin C}\sin\omega$$

داریم:

$$\Delta=\frac{1}{2}\Omega A\times\Omega B\sin\widehat{A\Omega B}+\frac{1}{2}\Omega B\times\Omega C\sin\widehat{B\Omega C}$$
$$+\frac{1}{2}\Omega C\times\Omega A\times\sin\widehat{C\Omega A}=\frac{1}{2}\frac{b}{\sin A}\sin\omega\frac{c}{\sin B}\sin\omega\sin B$$
$$+\frac{1}{2}\frac{c}{\sin B}\sin\omega\frac{a}{\sin C}\sin\omega\sin C$$
$$+\frac{1}{2}\frac{a}{\sin C}\sin\omega\frac{b}{\sin A}\sin\omega\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\omega\left(\frac{bc}{\sin A}+\frac{ca}{\sin B}+\frac{ab}{\sin C}\right)$$

همچنین:

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

بنابراین:

$$\Delta=\frac{1}{2}\sin^2\omega\left(bc\frac{bc}{2\Delta}+ca\frac{ca}{2\Delta}+ab\frac{ab}{2\Delta}\right)$$
$$=\frac{\sin^2\omega}{4\Delta}(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

و در نتیجه:

$$\sin^2\omega=\frac{4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

پس:

$$\cos^2\omega=1-\frac{4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$
$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

بنابراین:

$$\cot\omega=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4\Delta^2}}{2\Delta}$$

چون:

$$\Delta^2=\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)^2=\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2C)$$

داریم:

$$4\Delta^2=a^2b^2\left(1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right)$$
$$=a^2b^2\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}$$
$$=-\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)$$

و از آنجا:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-4\Delta^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$$
$$+\frac{1}{4}(a^4+b^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)$$
$$=\left(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right)^2$$

بنابراین:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

لِم ۳: اگر x_i اعداد حقیقی و y_i اعداد حقیقی مثبت باشند

$(i = 1,2,3,\dots,n,\ n \ge 2, n \in N)$، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i} \ge \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

اثبات: فرض می‌گیریم: $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ و $b_i = \sqrt{y_i}$

$i = 1,2,3,\dots,n$ و آنها را در نابرابری «کوشی»[1] قرار می‌دهیم:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \ge (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

به‌دست می‌آید:

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i})(\sum_{i=1}^{n} y_i) \ge (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

اثبات قضیهٔ ۱: اگر Δ_a، Δ_b و Δ_c مساحت‌های مثلث‌های FBC، FCA و FAB را به‌ترتیب مشخص کنند، چون Ω نقطهٔ بروکارد مثلث FBC است، بنا بر لم ۲ داریم:

$$\cot\alpha = \frac{1}{4\Delta_a}(FB^2 + BC^2 + FC^2)$$

به‌طور مشابه:

$$\cot\beta = \frac{1}{4\Delta_b}(FC^2 + CA^2 + FA^2)$$

$$\cot\gamma = \frac{1}{4\Delta_c}(FA^2 + AB^2 + FB^2)$$

و از آنجا:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1}{4}(\frac{FB^2}{\Delta_a} + \frac{FC^2}{\Delta_b} + \frac{FA^2}{\Delta_c})$$

$$+\frac{1}{4}(\frac{FC^2}{\Delta_a} + \frac{FA^2}{\Delta_b} + \frac{FB^2}{\Delta_c}) + \frac{1}{4}(\frac{a^2}{\Delta_a} + \frac{b^2}{\Delta_b} + \frac{c^2}{\Delta_c})$$

بنابراین، بنا بر لم ۳:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4}\frac{(FB + FC + FA)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

$$\frac{1}{4}\frac{(FC + FA + FB)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c} + \frac{1}{4}\frac{(a + b + c)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

بنا بر لم ۱ و اینکه $\Delta = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c$، داریم:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta)$$

$$\times 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(a + b + c)^2 = \frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+\sqrt{3} + \frac{1}{4\Delta}(a + b + c)^2 = \frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) + \sqrt{3}$$

چون:

$$a^2 + b^2 \ge 2ab,\ b^2 + c^2 \ge 2bc,\ c^2 + a^2 \ge 2ac$$

داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$$

فرض می‌کنیم $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$ و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge 16r^2P^2 = 16\Delta^2$$

زیرا:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge ab.bc + bc.ac + ac.ab$$
$$= abc(a + b + c)$$

اما می‌دانیم که: $abc = 4R\Delta$

بنابراین:

$$abc(a + b + c) = 4R\Delta(2P) = 8(RP\Delta) \ge 8(2rP\Delta)$$

زیرا: $R \ge 2r$، ولی: $\Delta = rp$. بنابراین:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge 16\Delta^2$$

از آنجا:

$$(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c) \ge 16\Delta^2$$

و:

$$(ab + ac + bc)^2 \ge 2 \times 4RrP \times 2P + 16\Delta^2$$
$$= 16RrP^2 + 16\Delta^2$$

با استفاده از نابرابری اولر $R \ge 2r$ داریم:

$$(ab + ac + bc)^2 \ge 32r^2P^2 + 16\Delta^2 = 32\Delta^2 + 16\Delta^2$$
$$= 48\Delta^2$$

و یا:

$$ab + bc + ac \ge 4\sqrt{3}\Delta$$

و:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) + \sqrt{3}$$

$$\ge \frac{1}{4\Delta}(ab + ac + bc) + \frac{3}{4\Delta}(ab + ac + bc) + \sqrt{3}$$

پس:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{\Delta}(ab + bc + ac) + \sqrt{3}$$

$$\ge 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

یعنی:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge 5\sqrt{3}$$

بنابراین نابرابری (۱) ثابت شد.

پی‌نوشت

1. Cauchy

منبع

مقاله‌ای از مجله Math. Spectrum (Volume 40 Number1)

نوشته: Tran Quang Hung ترجمه: محمدرضا نوری

چند نامساوی هندسی

کلیدواژه‌ها: نامساوی هندسی، نامساوی کُشی ـ شوارتز، دایرهٔ محیطی، دایره محاطی

پیشگفتار

در مقاله‌ای که به تازگی توسط **فام هودوک**[1] و با عنوان «یک نابرابری مفید غیرمنتظره»[2] منتشر شد، اثبات نامساوی زیر به همراه برخی از کاربردهای جبری آن ارائه شده است:

$$\forall a,b,c,x,y,z \geq 0: (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \quad (*)$$

آن‌چه بر اهمیت نامساوی (*) می‌افزاید، آن است که نامساوی مذکور نه تنها دارای کاربردهایی در جبر است، بلکه کاربردهای هندسی گوناگونی نیز دارد. اکنون گفتار خود را در این زمینه با ارائهٔ اثبات زیبایی برای نامساوی فوق براساس آن‌چه که در سایت «math links» (منبع شمارهٔ ۲) ارائه شده است، آغاز می‌کنیم:

گزارهٔ ۱: نامساوی زیر برای تمام اعداد حقیقی a، b، c، x، y و z که برای آنها داریم: $ab+bc+ca \geq 0$ و $xy+yz+zx \geq 0$، برقرار است:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

برهان:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$$
$$=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)$$
$$=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]}$$
$$-(ax+by+cz)$$

می‌توان دید که هرگاه، A_1، B_1، A_2 و B_2 عددهای حقیقی مثبتی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{(A_1+B_1)(A_2+B_2)} \geq \sqrt{A_1A_2}+\sqrt{B_1B_2} \quad (1)$$

با به‌کار بستن نامساوی (۱) در مورد $A_1=a^2+b^2+c^2$ ، $B_1=2(ab+bc+ca)$ ، $A_2=x^2+y^2+z^2$ و $B_2=2(xy+yz+zx)$ خواهیم داشت:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$$
$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$
$$+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}-(ax+by+cz)$$

از آن‌جا که بنابر نامساوی «کُشی ـ شوارتز» داریم: $ax+by+cz \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ ، اثبات حکم گزارهٔ ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد.

نامساوی زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱ ارائه کرد:

نتیجهٔ ۱: برای تمام اعداد حقیقی مثبت a، b، c، x، y و z داریم:

$$\frac{a+b}{y+z}x+\frac{b+c}{z+x}y+\frac{c+a}{x+y}z \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

برهان: حکم از جایگزین نمودن (x, y, z) با $(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y})$ در گزارهٔ ۱ و با توجه به نامساوی

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{3}{4}$$

به‌دست می‌آید.

گزارهٔ ۲: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab} \geq 1$$

که در آن a و b و c طول ضلع‌های مثلث می‌باشند.

$(AB=c,\ BC=a,\ AC=b)$

برهان: در میان راه‌های گوناگونی که برای اثبات نامساوی موردنظر وجود دارد، روش اثبات با استفاده از اعداد مختلط را برمی‌گزینیم. فرض کنید عددهای مختلط متناظر با نقاط A, B, C, P در صفحهٔ مختلط به ترتیب برابر w و z_3 و z_2 و z_1 باشند. با استفاده از اتحاد

$$(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)$$
$$+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)$$

داریم:

$$BC.PB.PC+CA.PC.PA+AB.PA.PB$$
$$=|(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)|$$
$$+|(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)|$$
$$+|(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)| \geq \text{(بنابر نامساوی مثلثی)}$$
$$\left|\begin{matrix}(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)\\+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)\end{matrix}\right|$$
$$=|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)|=AB.BC.CA$$

با تقسیم نمودن دو طرف نابرابری بر AB.BC.CA به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab} \geq 1$$

یادداشت: می‌توان دید که نابرابری گزاره ۲ تبدیل به برابری می‌شود اگر و تنها اگر P=H، که در آن H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

اکنون می‌توانیم با ترکیب دو گزارهٔ پیشین، گزارهٔ زیر را به‌دست آوریم:

گزارهٔ ۳: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC و x و y و z عددهایی حقیقی باشند به‌قسمی که $xy+yz+zx \geq 0$. آن‌گاه:

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c} \geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

برهان: با به‌کار بستن گزارهٔ ۱ برای $(\frac{PA}{a}, \frac{PB}{b}, \frac{PC}{c})$ و (x, y, z) به‌دست می‌آوریم:

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}$$
$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab})}$$
$$\geq 2\sqrt{xy+yz+zx} \quad \text{(بنابر گزاره ۲)}$$

که نتیجهٔ موردنظر می‌باشد.

بحث را با اثبات چند مسئله کلاسیک در نابرابری‌های هندسی، با استفاده از نتایج اثبات شده در بالا، پی می‌گیریم:

کاربردها

مسئلهٔ ۱. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geq\sqrt{3}$$

پاسخ: با قراردادن $x=y=z=1$ در گزارهٔ ۳، به‌دست می‌آوریم:

$$2\left(\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\right)\geq 2\sqrt{3}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

مسئلهٔ ۲. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a.PA+b.PB+c.PC\geq 4S_{ABC}$$

که در آن S_{ABC} مساحت مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ:

قرار دهید:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\ y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

در این‌صورت داریم:

$$xy+yz+zx=\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4}$$
$$=4S_{ABC}^2$$

از این‌رو و با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ در مورد (x,y,z) به‌دست می‌آوریم:

$$a^2.\frac{PA}{a}+b^2.\frac{PB}{b}+c^2.\frac{PC}{c}=a.PA+b.PB+c.PC\geq 4S_{ABC}$$

مسئلهٔ ۳. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$PA+PB+PC\geq 6r$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ: قرار دهید: $x=s-a$ و $y=s-b$ و $z=s-c$؛ که در آن a و b و c ضلع‌های مثلث ABC بوده و s برابر نصف محیط می‌باشد. در این‌صورت با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم:

$$PA+PB+PC$$
$$\geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}$$

از طرفی می‌توان دید:

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=r^2+4Rr \quad (2)$$

که در آن r و R به ترتیب شعاع دایره محاطی و شعاع دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند.

بنابراین: $PA+PB+PC\geq 2\sqrt{r^2+4Rr}$.

از آنجایی که در هر مثلث $R\geq 2r$، نتیجه می‌شود[3]:

$PA+PB+PC\geq 6r$.

پی‌نوشت

1. Pham Huu Duc
2. An Unexpected Useful inequality

۲. این تساوی از روابط $\frac{abc}{s}=4Rr$ و $r=\frac{\text{مساحت } ABC}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ (ن. ک به صفحات ۲۴ و ۲۶ کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه» ترجمه عبدالحسین مصحفی) به‌دست می‌آید.

۳. برای اثبات نامساوی $R\geq 2r$ روش‌های گوناگونی وجود دارد که در اینجا یکی از آنها را می‌آوریم: بنابر قضیه‌ای از هندسه می‌دانیم که «هرگاه O مرکز دایره محیطی (به شعاع R)، I مرکز دایره محاطی (به شعاع r) و d فاصله بین این دو مرکز باشد آنگاه $d^2=R(R-2r)$.» (ن. ک به کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، صفحهٔ ۴۳). نامساوی $R\geq 2r$، با توجه به مثبت بودن d^2 به‌دست می‌آید.

منابع

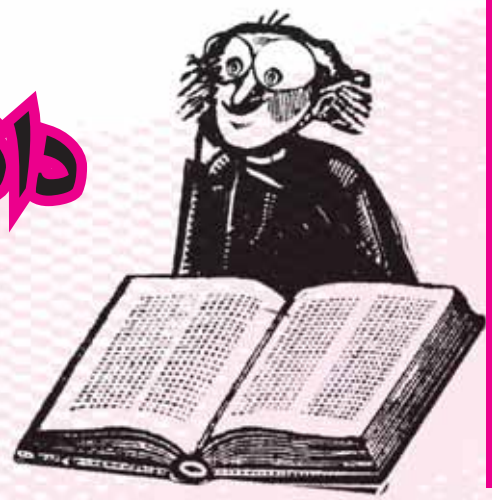
1. Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, Mathematical Reflections 2008, Issue 1.
2. Manlio, Blackmouse, Canhang, Mathlinks Forum 2007, http://www.mathlinks.ro/ viewtopic.php?t=187355.
3. Dragoslav S. Mitrinovic, J. Pecaric, V. Volenec, Recent Advances is Geometric Inequalities.
4. Bottema, Oene; Djordjevic, R. Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D. S.; and Vasic, P.M., Geometric Inequalities.

۵. مقاله‌ای که مطالعه کردید، ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

Tran Quang Hung; On Some geometric inequalities, Mathematical Reflections, 3, 2008.

غلامرضا یاسی‌پور

دانش‌نامهٔ ریاضی



نویسندگان: پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، یدالله ایلخانی‌پور، علاءالدین میرحبیب‌اللهی، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرزی عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: کانون فرهنگی آموزش

۱. دانش‌نامه یا دایرةالمعارف‌نویسی، آن هم به صورت جدید، به‌خصوص در مورد ریاضیات، سابقهٔ چندانی در ایران ندارد. از لغت‌نامه‌های ریاضی می‌گذریم، چرا که مورد بحث ما نیستند. از دانش‌نامه‌های عمومی، نظیر اثر ممتاز **دکتر مصاحب** هم ذکری به میان نمی‌آوریم؛ گرچه در آنها نیز مطالبی از ریاضیات می‌توان یافت. تنها به ذکر نام و نشان بعضی از دانش‌نامه‌ها اشاره می‌کنیم و آن‌گاه به معرفی مفصل‌تر دانش‌نامهٔ مورد نظرمان، با این تذکر می‌پردازیم که این سخن تنها یک معرفی است و منظور نقد و بررسی آن نبوده است.

۲. یکی از دانش‌نامه‌هایی که در حد دورهٔ ریاضی دبیرستان و سال‌های اولیهٔ دوره‌های کارشناسی است، دایرةالمعارف آکسفورد است، که تحت نام «فرهنگ ریاضیات آکسفورد» در سال ۱۳۷۶ در ایران به چاپ رسیده است. نام و نشان این دانش‌نامه به صورت زیر است:

- فرهنگ ریاضیات آکسفورد. کریستوفر کلافام. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدبّر. چاپ اول، ۱۳۷۶.

۳. دانش‌نامهٔ ریاضی دبیرستانی دیگری با نام و نشان زیر داریم:

- فرهنگ ریاضیات. ویگودسکی. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور، مؤسسهٔ انتشارات بهینه. چاپ اول، زمستان ۱۳۷۱.

۴. سایر دانش‌نامه‌های ریاضی موجود عبارت‌اند از:

- دایرةالمعارف ریاضیات (در سه جلد). گروهی از استادان دانشگاه‌های آلمان. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور. ناشر مهاجر. چاپ اول، ۱۳۷۸ و چاپ دوم، ۱۳۷۹.
- فرهنگ ریاضیات، عین‌الله پاشا، محمدهاشم رستمی، پرویز شهریاری، میرشهرام صدر، محمد عابدی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول، ۱۳۷۹ و چاپ دوم، ۱۳۸۱.
- دانش‌نامهٔ ریاضی. ترجمهٔ گروهی از استادان ریاضی. سر ویراستار دکتر علیرضا مدقالچی. بنیاد دانش‌نامه‌نگاری ایران. چاپ اول، ۱۳۸۹.

۵. از اینها که بگذریم می‌رسیم به دانش‌نامهٔ ریاضی موردنظرمان که از موارد فوق جدیدتر است. این دانش‌نامه بیشتر به مطالب ریاضی مربوط به دورهٔ دبیرستان پرداخته است، و در آن، آنگونه که خود می‌گوید، موضوعات را طوری به صورت متوالی پهلوی هم قرار داده است که ارتباط بین آنها حفظ شود. در قسمتی از مقدمهٔ کتاب چنین

آمده است:

«جـای خالی تألیف یک دانش‌نامهٔ موضوعی ریاضیـات، همواره در منابع و مراجع ریاضی و کلاً جامعهٔ ریاضی کشـور احسـاس می‌شـد؛ دانش‌نامه‌ای که بتواند به صـورت کاربردی به تمامی نیازهای دانش‌آموزان، دبیران ریاضی، مؤلفان و کارشناسان پاسخ دهد و شرح و تعریف دقیق و مناسبی برای هر واژه در موضوعات مختلف را شـامل شود. در دست‌رس نبودن و البته پرکردن این جای خالی و خلق چنین اثری بسـیار مشکل و نیاز به عزمی راسخ، تخصص و تجربهٔ بالا، همدلی، هم‌فکری و کار گروهی بسیار منسجم داشت که بحمدالـله این فرصت و توفیق دست داد و به انجام آن همت گماشتیم.»

در مقدمه و در توضیح کارهای انجام شده در این کتاب چنین می‌خوانیم:

- برای هر واژه به صورت مسـتقل حتی‌الامکان تاریخچه یا فلسفه‌ای بیان کرده‌ایم و پس از تعریف مناسـب، یک مثال کلیدی آورده شـده است. در مورد بسیاری از واژه‌ها یا قضیه‌ها، نکات و نتیجه‌های مهم و حتی فرمول‌ها یا رابطه‌های مربوط به آنها آمده است.
- برای هر واژه یا اصطلاح، معادل انگلیسی روبه‌روی آن ثبت شده است.
- در هـر صفحهٔ این دانش‌نامه تعدادی از کلمات داخل متن شـماره خورده‌اند که معادل انگلیسـی آنها در پایین به همراه شـمارهٔ صفحه‌ای که آن واژه در آن قرار دارد، آورده شده است. این کار دست‌یابی به کلید واژه‌های هر صفحه را به آسانی میسّر می‌نماید.
- در ابتدای دانش‌نامه مقدمه‌ای توسط استاد و چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی، جناب آقای دکتر **پرویز شهریاری** آورده‌ایم و سپس واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی و بیوگرافی ریاضی‌دانان معروف دنیا به قلم استاد **غلامرضا یاسی‌پور** آورده شده است.
- بخش هندسـهٔ دانش‌نامه توسـط جناب آقای **میر حبیب‌اللهی** و بقیهٔ بخش‌های کتاب توسـط **حمیدرضا امیری** و قسمت انگلیسـی واژه‌ها توسط آقای غلامرضا یاسی‌پور ویراستاری شده است.

مؤلفان کتاب با توجه به تخصصشـان، به ترتیـب زیر نگارش موضوعات را برعهده داشتند:

- **پرویز شهریاری:** مقدمه
- **غلامرضا یاسـی‌پور:** واژه‌ها و شـاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دانان نامی جهان و دورهٔ اسلامی
- **حمیدرضـا امیری:** نظریهٔ مجموعه‌ها، آنالیز ترکیبـی و ترکیبیات، نظریهٔ گراف، نظریهٔ اعداد، ماتریس، دستگاه معادلات خطی و تبدیل در صفحه
- **یداللـه ایلخانی‌پور:** بردار، دستگاه اعداد حقیقی، تابع، حد و پیوستگی
- **علاءالدین میر حبیب‌اللهی:** هندسهٔ پایه و هندسهٔ فضایی
- **هوشنگ شرقی:** هندسهٔ پایه و هندسهٔ فضایی
- **میرشهرام صدر:** منطق و استدلال‌های ریاضی، آمار، احتمال، معادله‌های خط و صفحه و مقاطع مخروطی
- **دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی:** مشتق، کاربرد مشتق، دنباله و سری
- **احمد قندهاری:** حساب دیفرانسیل و انتگرال
- **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی:** جبر، مثلثات و حساب

از محسنات کتاب یکی لغت‌نامه‌های مفصل فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی آن است، و دیگری فصل‌های مقدمه‌ای بر دانش‌نامهٔ ریاضی، واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دان‌های نامی جهان و ریاضی‌دان‌های دورهٔ اسلامی.

کل کتاب در یک پیش‌گفتار و یک مقدمه و ۲۸ فصل و دو ضمیمه و ۸۸۰ صفحه تنظیم شده است، و نام و نشان آن چنین است:

دانش‌نامه ریاضی. پرویز شهریاری، حمیدرضا امیـری، یداللـه ایلخانی‌پور، هوشـنگ شـرقی، میرشـهرام صـدر، محمدعلی فریبـرزی عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، علاءالدین میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسـی‌پور. طراح و ناظر علمی: حمیدرضا امیری. ویراستاران: حمیدرضـا امیری، علاءالدیـن میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسی‌پور. چاپ اول، ۱۳۹۰.

دانش‌نامـهٔ ریاضی همان‌طـور که در همین معرفی اندک هم ملاحظه می‌شـود، کتابی جامع است که هم به کار دانش‌آموز ریاضی می‌آید هم بـه کار دبیـر ریاضی، و به‌طور کلـی به کار همهٔ کسانی که به دانش ریاضی علاقه‌مند هستند.

با مخاطبان

اشاره

این بخش از مجله دریچهٔ ارتباط ما با خوانندگان، همکاران معلم، دانش‌آموزان و به‌طور کلی دوست‌داران مجله است. تصمیم داریم پس از مدتی که «این مثنوی تأخیر شد!» بخش حاضر را دوباره فعال کنیم. از شما می‌خواهیم با ما بیش از پیش در ارتباط باشید تا ما هم پاسخ نامه‌ها و ایمیل‌های شما را بدهیم.

● آقای **رحمان کیومرثی**،
همکار محترم از شهرستان شهرکرد

با سپاس فراوان از نامهٔ پرمهر شما و مقاله‌تان که با خط زیبا برای ما فرستاده بودید. مشابه مقالهٔ شما، مقاله‌ای از آقای احسان یارمحمدی داشتیم، در مورد حدّ تابع نمایی $f(x)^{g(x)}$ در نقطهٔ x که در شمارهٔ ۷۰ مجله به چاپ رسید. منتظر ارسال مطالب تازه‌تر شما ـ در چارچوب مطالب کتاب‌های درسی و یا مرتبط با آنها ـ هستیم.

● آقای **عباس روح‌الامینی**
از شهرستان سیرجان

دوست عزیز، سپاس فراوان از شما به‌خاطر همکاری گسترده‌تان با مجلهٔ برهان طی سال‌های متمادی. فکر می‌کنم تاریخ نخستین نامهٔ شما به مجله، به سال ۱۳۷۱ یعنی ۲۰ سال پیش برمی‌گردد! و این علاقهٔ خالصانهٔ شما به دانش ریاضی ستودنی است. نامه‌تان را که همراه با ترجمهٔ مقاله‌ای از مجلهٔ «اسپکتروم»* بود دریافت کردیم و در همین شماره آن را به چاپ رسانده‌ایم.

اما دوست عزیز، شما که ادعای ارتباط با مجلهٔ اسپکتروم و ارسال مقاله برای آنها را دارید (که حتماً همین‌طور است)، چرا برای ما ایمیل نفرستاده‌اید تا لااقل آدرس شما را داشته باشیم و بتوانیم با شما در تماس آنلاین باشیم و از مطالبتان بیشتر استفاده کنیم! باز هم برای ما مطلب بفرستید.

● همکار عزیز، آقای **سعدالله قصّابی**

مطلب شما درباب مسئله‌ای خاص از ترکیبیات به دستمان رسید. مسئلهٔ بدی نیست و در همین‌جا ذکر راه‌حل آن را درج می‌کنیم:

مسئله: ثابت کنید اگر تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه‌ای mتا باشد، تعداد اعضای آن $\left[\sqrt{2m}+1\right]$ است.

اثبات: می‌دانیم اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، $\binom{n}{2}$ یا $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دارد. بنابراین $m=\frac{n^2-n}{2}$ و یا $n^2-n-2m=0$ از آن‌جا با توجه به مثبت‌بودن n نتیجه می‌شود: $n=\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$.

حال نشان می‌دهیم که با فرض طبیعی بودن $\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$، داریم: $\left[\sqrt{2m}+1\right]=\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$ و یا

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}\le\sqrt{2m}+1<\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}+1$$

به این منظور از نامساوی $\sqrt{x+y}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}$ $(x,y\ge 0)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sqrt{8m}+\sqrt{1})$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{2m}+\frac{1}{2}=1+\sqrt{2m}$$

و $\sqrt{2m}+1<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}+1\Leftrightarrow\sqrt{2m}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m}<1+\sqrt{8m+1}\Leftrightarrow\sqrt{8m}<1+\sqrt{8m+1}$$

بنابراین:

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}\le\sqrt{2m}+1<\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}+1$$

و در نتیجه: $\left[\sqrt{2m}+1\right]=\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$ و بنابراین:

$$n=\left[\sqrt{2m}+1\right]$$

البته توجه داشته باشید که $8m+1$ باید مربع کامل باشد. یعنی برای هر m جواب ندارد.
از شما دوست عزیز برای مطلب ارسالی‌تان سپاس‌گزاریم، اما تقاضا می‌کنیم که به مقالات تفضیلی بیشتر توجه داشته باشید و با مجله‌تان در ارتباط مستمر باشید.

● همکار گرامی، آقای **شهریار جاوید**
از شهرستان اردبیل
با سپاس از مطلب ارسالی‌تان باید بگوییم که در زمینهٔ بحث مقاطع مخروطی تا به‌حال در شماره‌های گوناگون مجله مطالب بسیاری داشته‌ایم و در کتاب‌های کمک‌درسی نیز در این‌باره مطالب مشابه بسیاری دیده می‌شود. سعی کنید مطالب و مسائل غیرتکراری و کارهای تازه‌ای برای مجله‌تان بفرستید. با ما در تماس باشید.

● همکار محترم، خانم **نجمه مؤمنی**،
دبیر ریاضی از شهر کرمان
با تشکر فراوان از مطلب ارسالی‌تان تحت عنوان «احتمال و یک پارادوکس»، ممنون می‌شویم اگر مطالب ارسالی‌تان مناسب و در حد توانایی‌های دانش‌آموزان دبیرستان و درچارچوب این مباحث و یا مباحث مرتبط با المپیادهای ریاضی باشد. مطالبی که بیشتر به بحث‌های ریاضی دانشگاهی نزدیک هستند باید در مجلات تخصصی آن حوزه مورد استفاده قرار گیرند. با مجله‌تان در ارتباط باشید.

پی‌نوشت.....
* Spectrum

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟
اگر متوجه پارادوکس موجود در سؤال نشده‌اید، توضیح ما را در شمارهٔ آینده ببینید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چندمعمای خواندنی

● باز هم دوقلوها! مدتی بعد، باز هم کاوه و شهریار را دیدم. آنها رفتارشان را تغییر داده بودند و دیگر هیچ‌کدام همیشه دروغ یا همیشه راست نمی‌گفتند. این‌بار هم می‌خواستم کاوه را بشناسم. از آنها خواستم خودشان را معرفی کنند، ولی آنها خواستند که این موضوع را خودم کشف کنم!

یکی از آنها به من گفت: «برادر من کارتی در جیبش دارد که یا قرمز است، یا سیاه. اگر کارت او قرمز باشد، او یک جملهٔ درست خواهد گفت. اما اگر کارت او سیاه باشد، جملهٔ او نادرست خواهد بود. پدر آنها که می‌دانستم همیشه راست می‌گوید، جملهٔ او را تأیید کرد. سپس برادر دوم به من گفت: «من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم.»
حالا به من کمک کنید تا کاوه را شناسایی کنم. پاسخ را در شمارهٔ بعد ببینید.

تولید ملی، حمایت از کار و سرمایه ایرانی

برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوهٔ اشتراک:
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سمراه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

● نام مجلات درخواستی:
● نام و نام خانوادگی: ● میزان تحصیلات:
● تاریخ تولد: ● تلفن:
● نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان: خیابان:
شمارهٔ فیش: مبلغ پرداختی:
پلاک: شمارهٔ پستی:
● در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را ذکر کنید:
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امورمشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
● اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۱۲۰۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۸۰۰۰۰ ریال

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مسائل مسابقه‌ای برهان

کلیدواژه‌ها: جزء صحیح، وتر، مسابقهٔ برهان، مسئلهٔ ریاضی

۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x $(x \neq k\pi)$ حاصل عبارت زیر همواره مقداری ثابت است:

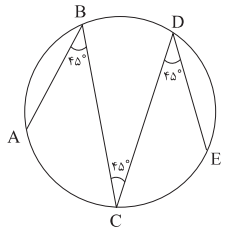
$$y = x - \pi\left[\frac{x}{\pi}\right] + tg^{-1}(\cot gx)$$

($[a]$، جزء صحیح عدد حقیقی a می‌باشد)

۲. در شکل زیر زاویهٔ بین وترهای متوالی مساوی ۴۵° است:

$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = ۴۵^\circ$

ثابت کنید: $AB^۲ + CD^۲ = BC^۲ + DE^۲$



۳. مجموعهٔ S و عمل $*$ روی آن را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

هر $a, b \in S : (a * b) * a = b$

ثابت کنید: $a * (b * a) = b$

۴. در کشوری کوچک، همهٔ مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور شد. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آنها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آنها را A، B و C می‌نامیم.

در دادگاه قاضی از A پرسید: آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ و B یا پاسخ داد بله و یا خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: من خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می دانم چه کسی جاسوس است!

با ذکر دلیل قانع‌کننده، بگویید جاسوس کیست.

*** منتظر پاسخ‌های شما به مسائل مسابقه‌ای هستیم. پاسخ‌های خود را به آدرس پستی مجله ارسال فرمایید و یا به پست الکترونیکی ما ایمیل کنید. پاسخ صحیح را در شمارهٔ آینده ببینید**

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند)
رشد کودک — برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دورهٔ دبستان
رشد نوآموز — برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ دبستان
رشد دانش‌آموز — برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ دبستان
رشد نوجوان — برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی
رشد برهان — برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه و پیش دانشگاهی

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند)
• رشد آموزش ابتدایی • رشد آموزش راهنمایی تحصیلی • رشد تکنولوژی آموزشی • رشد مدرسه فردا • رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی
(به صورت فصلنامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند)
• رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی) • رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه) • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش قرآن • رشد آموزش متوسطه • رشد آموزش تربیت‌بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش زبان • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش راهنمایی • رشد آموزش فنی و حرفه‌ای • رشد آموزش هنر دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
• تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۲۷۸ - ۰۲۱

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات