

ریاضی



برای دانش آموزان دوره متوسطه

- دوره بیست و دوم
- شماره ۲
- زمستان ۱۳۹۱
- ۶۴ صفحه
- ۶۵۰۰ ریال

دانشگاه فرهنگیان  
سازمان پژوهش و نشر  
مجله رشد

دانلود از سایت ریاضی سرا  
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)



✓ کاربرد قدر مطلق در  
یک ضابطه ای کردن  
توابع

✓ مربع های جادویی،  
دنیایی از رمز و راز  
اعداد

✓ اثبات هایی کوتاه تر بر  
قضایای تشابه مثلث ها

✓ دایره تبدیل و کاربرد آن در  
ساده کردن عبارات های جبری

✓ پیشامدهای تصادفی و احتمال در  
فناهای نمونه گسسته و پیوسته



♦ مدیرمسئول:

محمد ناصری

♦ سردبیر:

حمیدرضا امیری

♦ مدیر داخلی:

هوشنگ شرقی

♦ طراح گرافیک:

شاهرخ خرده‌غانی

♦ تصویرگر:

میشم موسوی

♦ هیئت تحریریه:

حمیدرضا امیری،

محمد هاشم رستمی،

دکتر ابراهیم ریحانی

احمد قندهاری،

میرشهرام صدر،

هوشنگ شرقی،

سید محمدرضا هاشمی موسوی،

غلامرضا یاسی‌پور

و به یاد همکار عزیزمان

زنده‌یاد پرویز شهریاری

♦ ویراستار ادبی:

بهروز راستانی

♦ وبگاه:

www.roshdmag.ir

♦ رایانامه:

Borhan@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی:

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

☎ تلفن دفتر مجله:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲

☎ تلفن امور مشترکین:

۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۶

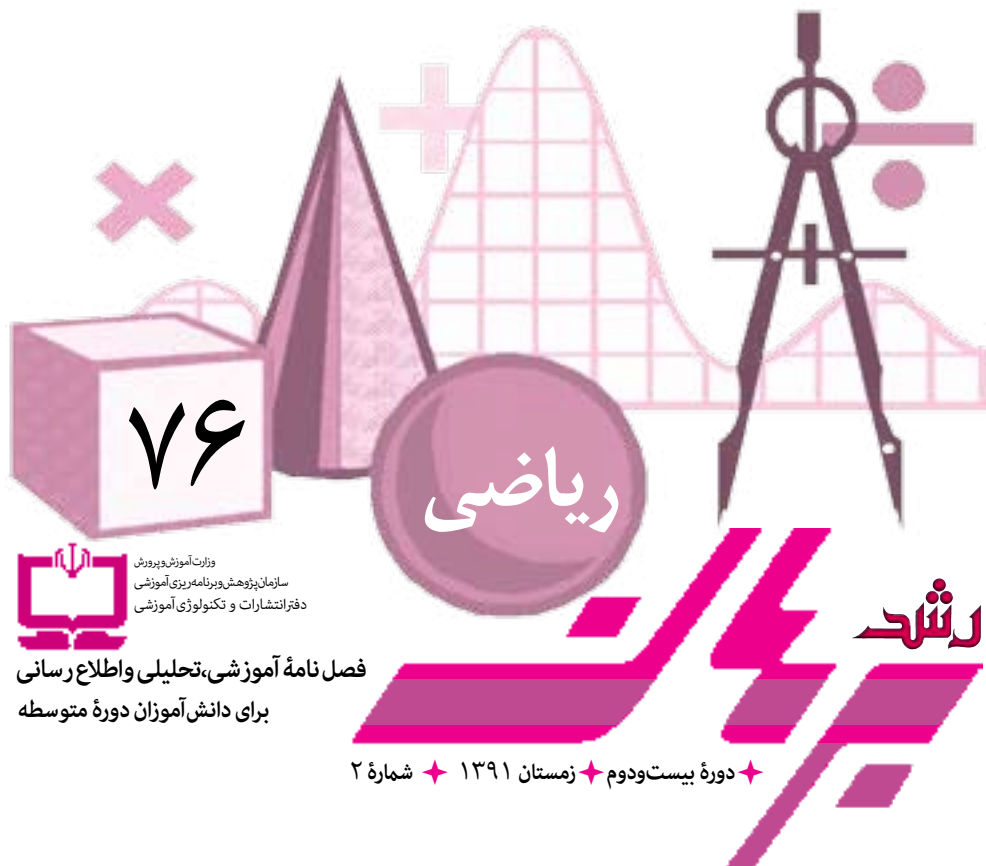
۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵

♦ شمارگان:

۱۰/۵۰۰ نسخه

♦ چاپ:

شرکت افست (سهامی عام)



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه

♦ دوره بیست و دوم ♦ زمستان ۱۳۹۱ ♦ شماره ۲

حرف اول / بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق	۲	سردبیر
محمد کرچی، ریاضی‌دان ایرانی	۳	زنده‌یاد پرویز شهریاری
پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونه گسسته و پیوسته	۷	حمیدرضا امیری
نگاهی به فیلم تاریخ مختصر زمان	۱۳	احسان یارمحمدی
المپیاد ریاضی در اسپانیا	۱۴	هوشنگ شرقی
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه اول: جدول ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی	۱۷	هوشنگ شرقی
پای صحبت ابراهیم دارابی، معلم و نویسنده پیش‌کسوت ریاضی	۱۸	هوشنگ شرقی
دایره تبدیل و کاربرد آن در ساده‌کردن عبارات جبری	۲۴	احمد قندهاری
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی	۲۶	
دنیاهای - دنباله‌های حسابی و هندسی	۲۷	هوشنگ شرقی
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه سوم: یک مسئله و دو جواب	۳۱	
معرفی کتاب / افسانه پادشاه و ریاضی‌دان	۳۲	غلامرضا یاسی‌پور
مسائل مسابقه‌ای رشد	۳۵	
پاسخ مسائل مسابقه‌ای رشد شماره ۷۵	۳۶	
تاریخچه مجلات ریاضی ایران	۳۸	غلامرضا یاسی‌پور
با مخاطبان / پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و...	۴۳	
اثبات‌هایی کوتاه‌تر بر قضایای تشابه مثلث‌ها	۴۴	قاسم حسین قنبری
کاربرد قدرمطلق در یک ضابطه‌ای کردن توابع	۴۶	عنایت‌اله راستی‌زاده
مسائل برای حل	۴۸	
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!	۵۲	
حل مسائل	۵۳	
پاسخ‌های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی برهان شماره ۷۵	۶۳	

مجله رشد برهان متوسطه، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

• نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه) • طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح معماهای ریاضی • نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

• مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. • مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد. • مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.





## حرف‌اول

### بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق

یکی از بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق مطالب و تثبیت مفاهیم علمی، بازگو کردن آن برای دیگری، و یا به عبارت دیگر، تدریس آن به دیگری است. آیا تا به حال برای شما پیش آمده است که بخواهید مسئله‌ای، قضیه‌ای یا مفهوم و معنی شعری را برای دیگری شرح دهید؟ بی‌شک تجربه کرده‌اید که به همراه تشریح آن برای شما جاافتاده و قطعاً مدت زمان بیشتری در ذهن شما باقی‌مانده است. یعنی این موضوع بسیار مهم است که انسان یافته‌های خود را در اختیار دیگران قرار دهد تا ضمن بهره‌رسانی به دیگران، خود نیز از آن بهره‌مند شود. از آنجا که «زکات علم، نشر آن است»، زکات علم خود را نیز داده باشد.

به همه شما عزیزان دانش آموز توصیه می‌کنم:

- آنچه آموخته‌اید و منابعی که در اختیار دارید (اعم از جزوه، کتاب یا مجله) در طبق اخلاص بگذارید و در اختیار دوستان و علاقه‌مندان قرار دهید.
- روی مسائل و مفاهیم علمی با دوستان و هم‌کلاسی‌های خود به بحث و تبادل نظر بپردازید و از نظرات یکدیگر بهره‌مند شوید.
- برای حل مسائل علمی به دنبال راه‌حل‌های بهتر و متنوع‌تر باشید. فقط به راه‌حل کتاب یا معلم اکتفا نکنید و برای هر مطلب دلیل بخواهید و به دنبال علت باشید. والسلام.

سردبیر

# کرجی محمد

ریاضی‌دان ایرانی

**کلیدواژه‌ها:** محمد کرجی، جمشید کاشانی، ابوالوفای بوزجانی، خیام، مقدمات، اقلیدس، فرنسس وپکه، آدولف هوخهام، بسط دو جمله‌ای

ریاضی‌دانان ایرانی، دوره‌ای از تاریخ ریاضی را دربرگرفته‌اند که از سده سوم تا سده نهم هجری ادامه داشته است که یک دوره کامل از تکامل ریاضیات است و بیشتر دوره کاربردی ریاضیات بود. بیشتر ریاضی‌دانان ایرانی، از محمد خوارزمی تا جمشید کاشانی، به ریاضیات محاسبه‌ای نظر داشتند تا بتوانند دشواری‌هایی را که در عمل پیش می‌آید، برطرف کنند. آن‌ها حساب و روش‌های محاسبه را پیش بردند و عددنویسی هندی را که در آن از ۱۰ نماد استفاده می‌شد - به همین شیوه امروزی در مبنای ۱۰ نوشته می‌شد و «موضعی» بود؛ یعنی رقم‌ها بسته به جای خود ارزشیابی می‌شدند - قبول کردند. جبر در ایران و به وسیله محمد خوارزمی به وجود آمد و هنوز هم در سراسر جهان به همان نامی شناخته می‌شود که خوارزمی بر آن گذاشت. در ضمن خوارزمی نخستین الگوریتم‌ها را برای جبر و در رابطه با حل معادله درجه دوم آورده است. بیرونی و ابوالوفای بوزجانی، مثلثات

را به دنبال قانون‌های نخستین آن (که باز هم کار ایرانی‌ها بود)، یعنی رابطه‌های مثلثاتی را (چه روی صفحه و چه روی سطح کره) آوردند که بیشتر در اخترشناسی کاربرد داشت. سرانجام جمشید کاشانی با حل جبری یک معادله درجه سوم، سینوس یک درجه را با دقت تا هر میزان دل‌خواه محاسبه کرد. خواجه نصیر توسی نیز توانست براساس کار ریاضی‌دانان پیش از خود، نخستین کتاب مثلثات را به نام «کشف القناع...» بنویسد. در واقع، ریاضی‌دانان ایرانی زیر تأثیر «انگیزه بیرونی» ریاضیات بودند، یعنی دشواری‌هایی را که از «بیرون» در برابر ریاضیات گذاشته می‌شد، حل می‌کردند. البته، این وضع را نباید به معنای آن گرفت که از «انگیزه درونی» ریاضیات پرهیز می‌کردند. از جمله، ابوالوفای بوزجانی، به صورت «نیمه‌آشکار» از معکب‌هایی که بیش از سه بعد داشته باشند، صحبت می‌کند. یا فضل نیریزی و خیام، «مقدمات» اقلیدس را به چالش می‌کشند. ریاضی‌دانان ایرانی در بحث‌های

نظری خود، عدد را به عنوان عدد حقیقی تعریف می‌کنند و زمینه را برای پیدایش آنالیز ریاضی مهیا می‌سازند. ریاضیات ایرانی، بعد از ریاضیات یونانی و با استفاده از همه دستاوردهای ریاضیات نظری یونانی و ریاضیات کاربردی پیش از آن به وجود آمد و خود در مجموع، جنبه کاربردی داشت، ولی بسیاری چیزها هم به ریاضیات نظری افزود.

در این میان به ریاضی‌دانی به نام محمد کرجی (با کنیه ابوبکر) برمی‌خوریم که به قول فرنسس وپکه، خاورشناس و ریاضی‌دان آلمانی، به راستی شگفت‌انگیز است. وپکه یکی از کتاب‌های کرجی را به نام «الفخری فی الجبر و مقابله» [کتاب فخری در جبر و مقابله] از روی نسخه خطی که در پاریس موجود بود، در سال ۱۸۵۳ در ۲۶۵ صفحه با شرح و تفصیل منتشر کرد. به دنبال آن، آدولف هوخهام کتاب «الکافی فی الحساب» [بحثی درباره حساب] کرجی را در



کاشانی و چه توسی این قاعده را ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشهٔ عددها آورده‌اند.

هم‌چنین براساس آگاهی‌هایی که داریم، خیام، ریاضی‌دان، فیلسوف و شاعر ایرانی سده‌های یازدهم و دوازدهم میلادی، در رساله‌ای، از کتاب خود به نام «درستی روش هندی در جذر و کعب» نام می‌برد (این کتاب هنوز پیدا نشده است) که در آن به تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ جذر و کعب پرداخته است. بر همین اساس می‌توان معتقد بود که خیام هم در نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم میلادی از دستور نیوتون برای توان مثبت و درست دو جمله‌ای اطلاع داشته است.

در سال ۱۹۷۲ میلادی، صلاح ابونصر سموویل یحیا مغربی، ریاض و اخترشناس سدهٔ دوازدهم میلادی، به نام «الباهر فی علم الحساب» در د چاپ کردند. مغربی موضوع‌هایی از کرجی را و به‌ویژه بخشی را که مربوط به ضریب‌های بسط دوجمله‌ای است، کرده است. این رسالهٔ کرجی تا

پیدا نشده است و مغربی هم نام آن را نمی‌آورد، ولی به ظاهر باید همان کتاب «فی حساب الهند» باشد که خود کرجی در کتاب «البدیع فی الحساب» خود از آن یاد کرده است.

سموویل مغربی در فصل چهارم از بخش دوم کتاب «الباهر فی علم الحساب» قاعدهٔ بسط  $(a+b)^n$  را برای حالت‌هایی که  $n$  برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد بیان می‌کند. در اینجا ما برگردان آن را از کتاب صلاح احمد و رشدی راشد می‌آوریم:

«حالا قاعده‌هایی را می‌آوریم که به کمک آن‌ها می‌توان تعداد جمله‌ها را برای ضرب در جمله‌های دیگر، وقتی که

برای  $x^2$  و  $x^3$  به کار می‌برند) آزاد می‌کند و عبارت‌های جبری را مثل «مال مال و ۳ کعب منه‌ای ۶»  $(x^2 + 3x^2 - 6)$  مورد بحث قرار می‌دهد. از این راه از قاعده‌های حساب برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کند. او عدد منفی را «عدد ناقص» و عدد مثبت را «عدد زیادت» یا عدد اضافی می‌نامد و از جمله از رابطهٔ

$$a - (-b) = a + b$$

آگاهی داشته است ولی نتوانسته است جبر چندجمله‌ای را پیدا کند، زیرا این کار مستلزم اطلاع از عمل‌هایی نظیر  $-(a - b) = -a - (-b)$

بوده که کرجی کشف نکرده بود؛ یعنی نمی‌توانست یک مقدار منفی را از مقدار منفی دیگری کم کند.

می‌بینیم که محمد کرجی هم در زمینهٔ ریاضیات کاربردی کار کرده است (مثل مساحی، اخترشناسی و استخراج آب‌های پنهانی) و هم در زمینهٔ ریاضیات نظری. او با دید تازه‌ای به چند جمله‌ای‌ها، به توان‌های بالای مجهول و به عددهای منفی نگاه می‌کرد؛ درست همان‌گونه که ما امروز فکر می‌کنیم.

## کرجی و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای

در سال ۱۹۴۸، پائول تیولی، مورخ ریاضی اهل آلمان، وجود دستور نیوتون را برای توان‌های درست و مثبت، در «مفتاح الحساب» جمشید کاشانی، مشهورترین ریاضی‌دان سدهٔ پانزدهم میلادی، کشف کرد. سپس احمداف، مورخ ریاضی اهل تاشکند، قانون تشکیل ضریب‌های دوجمله‌ای را در یکی از رساله‌های خواجه نصیر توسی، ریاضی‌دان سده سیزدهم کشف کرد (این رساله دربارهٔ محاسبه به یاری تخته و شن بحث می‌کند). چه جمشید

بغداد رفته و به خدمت فخرالملک مزبور، وزیر بهاءالدوله و پسرش سلطان‌الدوله، معروف به ابوشجاع، درآمده است. کرجی در سال ۴۰۳، بعد از کشته شدن بهاءالدوله عراق را ترک کرده و به زادگاه خود برگشته است. در بازگشت، به دستور ابوغانیم (معروف به محمد) کاتب و وزیر منوچهر قابوس که از ۴۰۳ تا ۴۲۰ هجری قمری حاکم طبرستان بوده، کتاب «استخراج آب‌های پنهانی» را نوشته است. کرجی در حدود سال ۴۲۰ هجری قمری (۱۰۲۹ میلادی) درگذشته است.

از نوشته‌های او (که تا ۸۰ اثر شمرده‌اند)، تعداد اندکی باقی مانده، ولی از همین کتاب‌های باقی مانده، می‌توان دربارهٔ کرجی و نوآوری‌های او داوری کرد. کرجی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان ایرانی است و تا آن‌جا که ما اطلاع داریم، بسیاری از دیدگاه‌های او تازه‌اند و به تکامل ریاضیات، به‌ویژه در زمینه جبر یاری فراوان رسانده‌اند.

کتاب‌هایی که از کرجی به‌دست ما رسیده، نشان می‌دهد که او روی حساب، جبر، معادله‌های سیال، مساحی، اخترشناسی و آب‌های زیرزمینی کار می‌کرده است. او مجهول  $(x)$  را شیء، مربع آن  $(x^2)$  را مال، مکعب آن  $(x^3)$  را کعب، توان چهارم را مال‌مال، توان پنجم را کعب مال، و غیره می‌نامد. برای هر  $(x^n)$ ، عکس آن را جست‌وجو می‌کند  $(\frac{1}{x^n})$ ؛ به‌نحوی که حاصل ضرب آن‌ها برابر واحد شود.

او خود را از قید سطح و حجم (که یونانی‌ها و به تبعیت از آن‌ها، ایرانی‌ها

خاورشناس ایتالیایی ثابت کرد که کرجی اشتباه نسخه‌نویس بوده و در واقع، کرجی اهل ایران و از ناحیهٔ «کرج» در نزدیک شهرری (و تهران کنونی) است نه عراق. لوی دولویدا به کتاب‌های خطی «البدیع فی الحساب» (در کتاب‌خانهٔ واتیکان) و کتابی از کرجی مربوط به جبر در کتاب‌خانهٔ آکسفورد و غیره، استناد می‌کند که همه‌جا نام «کرجی» با جیم نوشته شده است. علاوه بر این، سموویل یحیا مغربی که ۷۰ سال بعد از مرگ کرجی می‌زیسته و کتاب «الباهر فی العلم الحساب» را نوشته است و در کتاب خود بارها به نوشته‌های کرجی استناد می‌کند، همه‌جا او را کرجی می‌نامد و نه کرجی.

خود کرجی در پیش‌گفتار کتابش به نام «استخراج آب‌های معدنی» با ترجمهٔ زنده‌یاد خدیو جم می‌گوید:

«هنگامی که به عراق وارد شدم و دیدم که مردم آنجا از کوچک و بزرگ دانش‌دوست و قدرشناس علم هستند و دانشمندان را گرمی می‌دارند، کتاب‌هایی در حساب و هندسه تألیف کردم.» یعنی از جای دیگری به عراق آمده بوده است. خود دولویدا کتاب‌های «البدیع» و «علل حساب الجبر و المقابله» را معرفی و به ایتالیایی ترجمه کرده است.

آنچه از زندگی کرجی می‌دانیم، چندان زیاد نیست. باید در زادگاه خود «کرج» مقدمه‌های دانش را فراگرفته و بعد به شهرری که در آن زمان مرکز دانشمندان بوده و کتابخانه‌ای مجهز داشته است، در جست‌وجوی کتاب‌های مورد علاقه‌اش رفته باشد. احتمالاً بعد به



کشته شد) نوشته شده است. کتاب وُپکه به دلیل ارزش خود مورد توجه خاورشناسان قرار گرفت ولی در نسخه‌ای که مورد استفادهٔ وُپکه بود، نسخه‌نویس نام «کرجی» را «کرجی» آورده بود و وُپکه هم، کرجی را اهل کرخ (یکی از محله‌های بغداد) دانسته است.

انتساب کرجی به عراق کنونی نزدیک به ۵۰ سال بین مورخان ریاضیات رواج داشت تا این‌که در سال ۱۹۳۴، لوی دولویدا،

سه جلد در سال‌های ۱۸۷۸ و ۱۸۸۰ به آلمان ترجمه و منتشر کرد. این سرآغاز آشنایی اروپاییان با سند بزرگ ایرانی بود. کتاب «الحساب دارای ۷۰ بخش حساب، هندسه و جبر است. ب فخری به نام فخرالملک بن علی بن خلف)، وزیر سدهٔ دیلمی پسر عضدالدوله (که از ۴۰۱ تا ۴۰۷ هجری بر عراق کنونی حکومت در سال ۴۰۷ هجری قمری





پیشامدهای  
تصادفی و احتمال  
در فضاهاى نمونه  
گسسته و پیوسته



**کلیدواژه‌ها:** احتمال، پیشامدهای تصادفی، فضای نمونه، آندره کولموگروف، پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی، احتمال دو جمله‌ای



## مقدمات و تعریف‌های اولیه

آزمایش تصادفی یا پدیده تصادفی: هر آزمایش یا پدیده‌ای که قبل از وقوع، نتیجه آن معلوم نباشد، ولی همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن برای ما مشخص باشد، «آزمایش تصادفی» یا «پدیده تصادفی» نامیده می‌شود.

مثال: وقتی یک تاس را می‌ریزیم، تا وقتی ثابت نشده و در حال چرخش است، نمی‌توانیم به‌طور قطعی اعلام کنیم چه عددی رو خواهد شد، ولی از همهٔ حالت‌های ممکن باخبریم. یعنی می‌دانیم عدد ۱ یا ۲ یا ... یا ۶ ظاهر خواهد شد. پس این آزمایش، تصادفی است.

مثال: اگر روی هر شش وجه یک تاس عدد ۲ را حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا قبل از ثابت شدن تاس (قبل از وقوع) می دانیم و یقین داریم که عدد ۲ رو می شود. مثلاً اگر روی پنج وجه یک تاس، عددهای ۱ تا ۵ و روی یک وجه آن عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا از همه حالت های رخداد این پدیده اطلاع نداریم. (کدام عدد طبیعی روی وجه ششم حک شده است؟)

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن،

در به وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را «فضای نمونه‌ای» می‌نامیم و معمولاً با «S» نشان می‌دهیم. به فضاهای نمونه‌ای که تعداد اعضای آنها متناهی یا قابل شمارش (هم‌ارز با N) باشند «فضاهای گسسته» می‌گوییم. در مثال‌های زیر سعی کرده‌ایم در حالت‌های متفاوت، فضای نمونه‌ای را برای آزمایش‌های تصادفی معرفی کنیم که در آینده و در حل مسائل و تست‌ها، این حالت‌ها مورد نیاز خواهند بود.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

(I) کنار هم قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز به صورت تصادفی.

● جواب:  $n(S) = n!$

(II) کنار هم قرار گرفتن اشیای a و b و c و d و a و c.

● جواب:  $n(S) = \frac{6!}{2! \times 2!}$

(III) انتخاب تصادفی  $k$  نفر از بین  $n$  نفر برای ساختن یک تیم  $k$  نفره ورزشی.

$n(S) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$       k نفره ورزشی.

(IV) انتخاب تصادفی  $k$  نفر از بین  $n$  نفر برای کنار هم قرار گرفتن آنها.

● جواب:

$$n(S) = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

می‌آوری: واحد، چهار، شش، چهار، واحد. از اینجا تو می‌دانی که مربع مربع عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مربع مربع می‌کنی، زیرا در انتها واحد داری. سپس هر عدد را در مکعب دیگری چهار مرتبه ضرب می‌کنی، زیرا به دو انتها، یعنی واحد، چهار چسبیده است. سپس مربع یکی را در مربع دیگری شش بار ضرب می‌کنی، زیرا در وسط، شش داری.

به همین ترتیب  $(a+b)^5$  داده می شود و مؤلف نتیجه می گیرد: «از این راه می توانیم مربع و مکعب و هر توان دیگری را که بخواهیم، معلوم کنیم.»

در پایان هم جدول ضریب‌های دو جمله‌ای  $(a+b)^n$  را، برای  $n=1$  تا  $n=12$  می‌دهد (جدول را ببینید). به این ترتیب، طبق مدرک‌هایی که در اختیار داریم، محمد کرجی نخستین ریاضی‌دانی است که برای تعیین ضریب‌های بسط دو جمله‌ای راهی قانونمند پیدا کرد و جدولی در این باره تشکیل داد. البته ریاضی‌دانان هندی حتی در سدهٔ دوم

سرانجام باید از **بلز پاسکال** (که کم و بیش با نیوتون هم عصر بود)، نام برد که جدولی تشکیل داد و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را در آن منظم کرد. این جدول که به صورت مثلثی تنظیم شده و امروز به نام «مثلث پاسکال» معروف است، ویژگی‌های بسیاری دارد و هر پژوهشگری ممکن است ویژگی‌های دیگری از آن را کشف کند.

بسط دوجمله‌ای امروز به نام «دوجمله‌ای نیوتون» مشهور است، زیرا او قانون بسط دوجمله‌ای را برای عددهای کسری و منفی هم به کار برد.

[illegible]

یک عدد به دو بخش تقسیم شده باشد، پیدا کرد. کرجی می گوید: اگر تو این را می خواهی، به عنوان اساس کار، واحد را زیر واحد بگذار. سپس واحد را به ستون بعد ببر. واحدی را که زیر واحد اول قرار دارد، به آن اضافه کن می شود دو. این دو را زیر واحد بگذار و بعد دوباره یک واحد زیر آن قرار بده، به دست می آوری: واحد، دو، واحد. این به تو نشان می دهد که مربع هر عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است که هر کدام از عددها را باید یکبار در خودش ضرب کنی. زیرا در هر دو طرف واحد و واحد داری و هر عدد را در عدد دیگر باید دو بار ضرب کنی، چون در وسط، دو داری. در مجموع، مربع این عدد را به دست می آوری.

«حالا دوباره واحد را به ستون بعد ببر. واحد را به دو برابر اضافه کن. سه به دست می آوری. آن را زیر واحد بنویس. دو را به واحد که زیر آن است اضافه کن. سه به دست می آوری. آن را به زیر سه بنویس. در ستون سوم به دست می آوری:

واحد، سه، سه، واحد. از اینجا تو می‌دانی مکعب هر عدد، وقتی از دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مکعب کن و هر عدد را در مربع دیگری سه بار ضرب کن. «واحد ستون سوم را به ستون چهارم ببر. سپس واحد را به سه که زیر آن است، اضافه کن، شش به‌دست می‌آوری. آن را زیر چهار بنویس. بعد دومین سه را به واحد اضافه کن. چهار به‌دست می‌آوری. آن را زیر شش بنویس. در ستون چهارم به‌دست

(V) انتخاب تصادفی k مهره رنگی از بین n مهره.

● جواب:  $n(S) = \binom{n}{k}$

**تذکره ۱:** توجه داریم که در تمام مسائل احتمال مربوط به مهره‌های رنگی، هر r مهره از یک رنگ با شماره‌های ۱ تا r شماره‌گذاری شده‌اند و در واقع، مهره آبی شماره ۱ با مهره آبی شماره ۲ فرق دارد.

**تذکره ۲:** اگر  $S_1$  و  $S_2$  فضاهای نمونه‌ای مربوط به دو پدیده تصادفی باشند و این دو پدیده با هم رخ دهند و یک پدیده تصادفی ایجاد کنند، و S فضای نمونه‌ای این پدیده باشد، داریم:

$$n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$$

(VI) ریختن یک تاس:

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow n(S) = 6$$

(VII) پرتاب یک سکه:  $S = \{H, T\} \rightarrow n(S) = 2$

(IIX) ریختن دو تاس با هم، یا ریختن یک تاس دوبار:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

(IX) پرتاب n سکه و k تاس با هم:

$$n(S) = (\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n) \times (\underbrace{6 \times 6 \times \dots \times 6}_k) = 2^n \times 6^k$$

**تعریف پیشامدهای تصادفی:** اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعه S مانند A را یک «پیشامد تصادفی از فضای S» می‌نامیم.

**تذکره ۱:** اگر S مجموعه‌ای n عضوی باشد، دارای  $2^n$  زیرمجموعه است. طبق تعریف فوق، هر  $A \subseteq S$  یک پیشامد تصادفی است. پس روی S به تعداد  $2^n$  پیشامد تصادفی می‌توان تعریف کرد.  $A_1 = S$  و  $A_1 = \emptyset$  نیز پیشامدهای تصادفی از فضای S هستند و به ترتیب آنها را پیشامد غیرممکن و پیشامد مطمئن یا حتمی می‌نامیم.

**تذکره ۲:** اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد پیشامدهای تصادفی k عضوی که می‌توان روی S

تعریف کرد، برابر است با  $\binom{n}{k}$ .

◀ مثال: تاسی را می‌ریزیم، اولاً چند پیشامد

تصادفی روی فضای نمونه‌ای حاصل می‌توان تعریف کرد؟ ثانیاً این آزمایش تصادفی چند پیشامد تصادفی ۴ عضوی دارد؟

$$\rightarrow S = \{1, 2, \dots, 6\} : \text{اولاً}$$

$$64 = 2^6 = \text{تعداد پیشامدهای تصادفی}$$

$$= \binom{6}{4} = 15 = \text{تعداد پیشامدهای ۴ عضوی: ثانیاً}$$

**تعریف:** اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و  $A \subseteq S$  پیشامدی در فضای S باشد، متمم پیشامد A را با  $A'$  یا  $A^c$  یا  $\bar{A}$  نمایش می‌دهیم؛ به شرط آن‌که:  $A \cap A' = \emptyset$  و  $A \cup A' = S$ .

**تذکره ۳:** اگر  $A'$  متمم پیشامد A از فضای S باشد، رخداد A به منزله عدم رخداد  $A'$  و رخداد  $A'$  به منزله عدم رخداد A است (A و  $A'$  نمی‌توانند با هم رخ بدهند).

**تذکره ۴:** در بعضی از مسئله‌ها و تست‌ها، تعداد عضوهای A در S زیاد و شمارش آنها سخت و یا وقت‌گیر است و ما از طریق محاسبه تعداد عضوهای  $A'$  و کم کردن آنها از کل عضوها، به تعداد عضوهای A پی می‌بریم.

**تعریف:** اگر  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعه تک‌عضوی مانند  $A_i = \{a_i\}$  را یک پیشامد ساده در فضای S می‌نامیم.

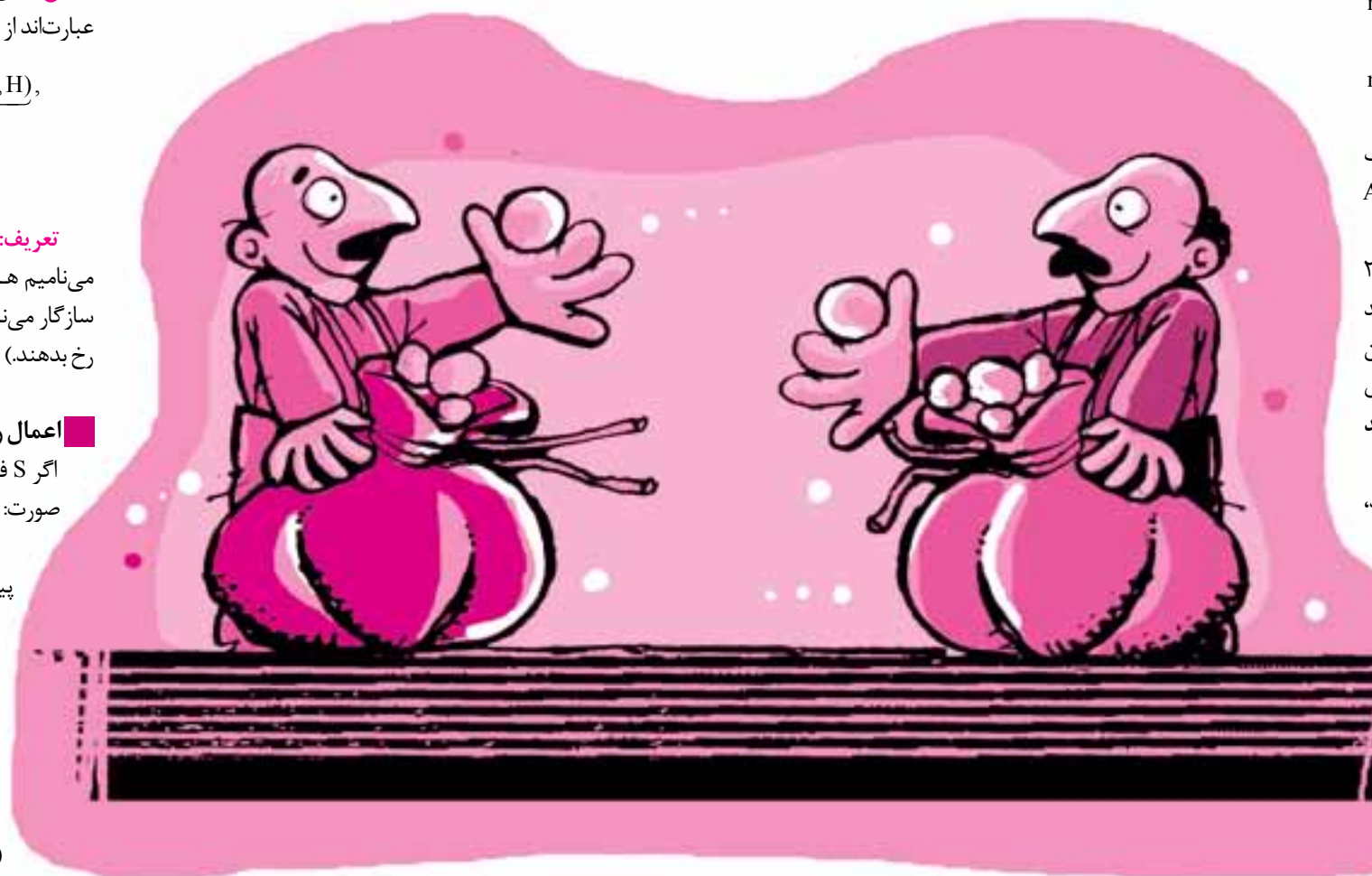
**تذکره مهم:**

اگر  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و پیشامد ساده  $\{a_i\}$  رخ دهد، در این صورت هر پیشامد تصادفی مانند  $A \subseteq S$  که شامل  $a_i$  باشد نیز رخ داده است.

◀ مثال: اگر تاسی را بریزیم و مشاهده کنیم که عدد ۲ رو شده است، در این صورت هر زیرمجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  که شامل ۲ باشد، قطعاً رخ داده است. مثلاً  $A_1 = \{1, 2\}$ ،  $A_2 = \{1, 2, 3\}$  و  $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  قطعاً رخ داده‌اند. (مجموعه S دارای  $2^{6-1} = 32$  زیرمجموعه است که شامل عدد ۲ هستند).

**تذکره مهم:**

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی A که همگی در k عضو مشخص مشترک باشند، برابر است با  $2^{n-k}$ .



◀ مثال: ۱. از بین ۸ نفر ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A انتخاب حداقل یکی از دو نفر a و b بین این ۴ نفر باشد، در این صورت A چند عضو دارد؟

$$(1) 15 \quad (2) 45 \quad (3) 50 \quad (4) 55$$

● حل: گزینه (۴) صحیح است، زیرا پیشامد  $A'$  آن است که هیچ‌کدام از این دو نفر a و b بین ۴ نفر نباشد؛ یعنی ۴ نفر از بین ۶ نفر غیر از a و b انتخاب شوند. پس  $n(A') = \binom{6}{4}$  و چون:  $n(S) = \binom{8}{4} = 70$ ، پس:

$$n(A) = n(S) - n(A') = 70 - 15 = 55$$

۲. تاسی را می‌ریزیم. اگر زوج بیاید، تاس دیگری می‌ریزیم و اگر فرد بیاید دو سکه پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A را رو شدن عدد اول برای تاس اول تعریف کنیم، A چند عضو دارد؟

$$(1) 12 \quad (2) 14 \quad (3) 10 \quad (4) 11$$

● حل: گزینه (۲) صحیح است، زیرا اعداد اول ۱ تا ۶ عبارت‌اند از  $\{2, 3, 5\}$ . بنابراین:

$$A = \underbrace{\{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6)\}}_6, \underbrace{\{(3, T, T), \dots, (3, H, H)\}}_4, \underbrace{\{(5, T, T), \dots, (5, H, H)\}}_4 \rightarrow |A| = 14$$

**تعریف:** دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم هرگاه:  $A \cap B = \emptyset$  و اگر:  $A \cap B \neq \emptyset$ ، آن‌ها را سازگار می‌نامیم. (اگر A و B ناسازگار باشند، نمی‌توانند با هم رخ بدهند).

## اعمال روی پیشامدها

اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت:

(I)  $(A \cap B)$  عبارت است از پیشامد آنکه هر دو پیشامد A و B با هم رخ بدهند.

(II)  $(A \cup B)$  عبارت است از پیشامد آنکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ بدهد.

(III)  $(A - B)$  عبارت است از پیشامد آنکه پیشامد A رخ بدهد و B رخ ندهد.

(IV)  $(A \Delta B)$  عبارت است از پیشامد آنکه دقیقاً A رخ بدهد یا دقیقاً B رخ بدهد؛ زیرا:

$$(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A)$$





#### تذکر مهم:

با توجه به قوانین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) و تعاریف قبل، روابط زیر بین پیشامدها برقرار است:  
 $n(A') = n(S) - n(A)$  و  $n(A) = n(S) - n(A')$

**تذکر:** از این به بعد به جای  $n(A)$  از نماد  $|A|$  استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} ۱) n(A \cup B) &= |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ ۲) |A - B| &= |A| - |A \cap B| \\ ۳) |A' \cap B'| &= (A \cup B)' \Rightarrow |S| - |A \cup B| \\ ۴) |A \Delta B| &= (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow |A - B| + |B - A| \\ &\xrightarrow{(۲)} |A \Delta B| = |A| + |B| - ۲|A \cap B| \end{aligned}$$

۳. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر پیشامد  $A$  را مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۳ تعریف کنیم، در این صورت  $A$  چند عضوی است؟

$$۲۸ \quad (۴) \quad ۳۳ \quad (۳) \quad ۳۵ \quad (۲) \quad ۳۴ \quad (۱)$$

● **حل:** گزینه (۳) صحیح است. مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد که در این صورت بهتر است  $A'$  را به دست آوریم:

$$A' = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد

$$|A'| = ۳ \rightarrow |A| = |S| - |A'| = ۳۶ - ۳ = ۳۳$$

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم و پیشامد  $A$  را چنین تعریف می‌کنیم که مجموع دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشند. در این صورت  $|A|$  کدام است؟

$$۱۴ \quad (۱) \quad ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۱ \quad (۳) \quad ۱۰ \quad (۴)$$

● **حل:** گزینه (۲) صحیح است.  $B$  را پیشامد مجموع ۸ و  $C$  را پیشامد هر دو فرد تعریف می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} |A| &= |B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = ۵ + ۹ - ۲ = ۱۲ \\ B &= \{(۳,۵), (۵,۳), (۲,۶), (۶,۲), (۴,۴)\} \rightarrow |B| = ۵ \\ C &= \{۱,۳,۵\} \times \{۱,۳,۵\} \rightarrow |C| = ۹ \\ (B \cap C) &= \{(۳,۵), (۵,۳)\} \rightarrow |B \cap C| = ۲ \end{aligned}$$

۵. در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز، ۵ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این جعبه سه مهره را با هم و به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. اگر پیشامد  $A$  را حداقل ۱ مهره آبی تعریف کنیم، در این صورت  $|A|$  کدام است؟

$$۱۸۵ \quad (۴) \quad ۳۵ \quad (۳) \quad ۱۰ \quad (۲) \quad ۲۱۰ \quad (۱)$$

● **حل:** گزینه (۴) صحیح است. محاسبه  $|A'|$  ساده‌تر است و  $A'$  پیشامد آن است که هیچ مهره‌ای آبی نباشد یا هر سه مهره غیرآبی باشند که در این صورت داریم:

$$|S| = \binom{۱۲}{۳} = ۲۲۰ \quad \text{و} \quad |A'| = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

$$\rightarrow |A| = ۲۲۰ - ۳۵ = ۱۸۵$$

#### تذکر مهم:

در تمام مسئله‌ها و تست‌هایی که با مهره‌های رنگی سروکار داریم، همواره مهره‌هایی که از یک رنگ هستند، متمایزند.

برای مثال، ۴ مهره قرمز به صورت قرمز ۱، قرمز ۲، قرمز ۳ و قرمز ۴ مشخص شده‌اند. همچنین، در انداختن دو تاس با هم، تاس‌ها را آبی و قرمز و متمایز فرض می‌کنیم، و فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن دو تاس با هم، با فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن یک تاس در دو مرحله، برابر است.

#### فضاهای نمونه‌ای پیوسته

اگر  $S$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد، به گونه‌ای که  $S$  متناهی نباشد و اعضای آن شمارش‌پذیر نیز نباشند ( $S$  گسسته نباشد)، در این صورت فضای  $S$  را پیوسته

می‌نامیم. (هر مجموعه نامتناهی که با  $N$  هم‌ارز نباشد، یعنی در تناظر یک‌به‌یک نباشد، پیوسته نامیده می‌شود.)

به‌طور کلی، هر یک از کمیت‌های طولی، سطحی، حجمی، وزنی و زمانی، کمیت‌های پیوسته‌اند و فضاهای نمونه‌ای که از این کمیت‌ها تشکیل یافته باشند، فضاهای نمونه‌ای پیوسته نامیده می‌شوند.

◀ **مثال:** در هر یک از حالت‌های زیر اندازه فضای نمونه‌ای و اندازه پیشامدهای تعریف شده را مشخص کنید.

(I) از بین اعداد حقیقی بازه  $[-۶, ۱۴]$  یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد  $A$  را منفی بودن این عدد و  $B$  را صحیح بودن عدد انتخابی تعریف می‌کنیم:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -۶ \leq x < ۱۴\} \rightarrow S = I_S = ۲۰$$

$$A = \{x \in [-۶, ۱۴] \mid x < ۰\} \rightarrow I_A = ۶$$

$$B = \{-۶, -۵, \dots, ۱۲, ۱۳\} \rightarrow I_B = ۰$$

#### تذکر مهم:

اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی و یا شمارش‌پذیر باشد، همواره طول مجموعه  $A$  صفر است. برای مثال، طول مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و حتی اعداد گویا صفر است، و نیز پاره خط یا خط دارای مساحت صفر است. همین‌طور هر صفحه حجمی برابر با صفر دارد.

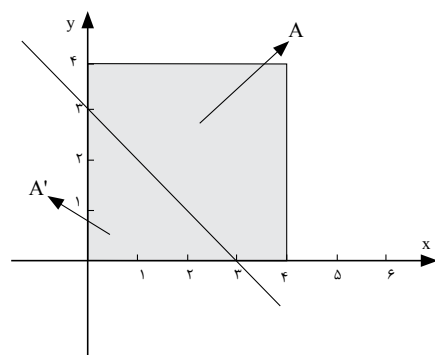
(II) دو عدد حقیقی مانند  $x$  و  $y$  از بازه  $[۰, ۴]$  به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد  $A$  را مجموع دو عدد بزرگ‌تر از ۳ و پیشامد  $B$  را مجموع دو عدد مساوی با ۲ و پیشامد  $C$  را حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۱ تعریف می‌کنیم:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ۰ \leq x \leq ۴, ۰ \leq y \leq ۴\} = [۰, ۴] \times [۰, ۴]$$

$$\rightarrow a_S = ۴^2 = ۱۶$$

$$A = \{(x, y) \in S \mid x + y > ۳\}$$

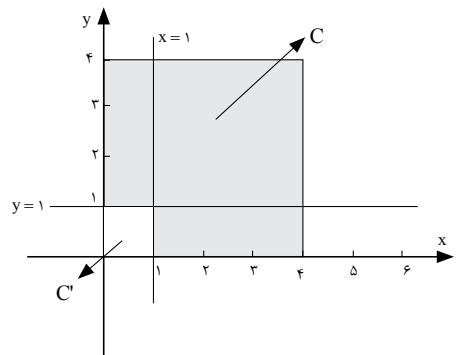
فضای  $S$ ، سطح مربعی است در ناحیه اول به طول ضلع ۴ و مساحت ۱۶ و بنابراین:  $|S| = a_S = ۱۶$



$$a_A = a_S - a_{A'} = ۱۶ - \frac{۹}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱ \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{(x, y) \in S \mid x + y = ۲\} \rightarrow a_B = ۰$$

$x + y = ۲$  در  $S$  یک پاره خط است و مساحت پاره خط صفر است.)



$$C = \{(x, y) \in S \mid x > ۱ \text{ یا } y > ۱\}$$

$$a_C = a_S - a_{C'} = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$

**تذکر:** همان‌طور که در مثال قبل مشاهده کردید، در فضاهای پیوسته ممکن است پیشامد  $A$  ناتهی باشد، ولی اندازه  $A$  صفر باشد (در حالت (I)  $B \neq \emptyset$ ، ولی  $I_B = ۰$  و در حالت (II) نیز  $B \neq \emptyset$ ، ولی  $a_B = ۰$ ).

**تذکر:** برای مشخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادله  $ax + by > c$  کافی است خط  $ax + by = c$  را رسم کنیم. سپس یک نقطه از یکی از دو نیم صفحه ایجاد شده توسط این خط، را به دل‌خواه برگزینیم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم (نقطه  $O$  مناسب‌ترین انتخاب است). اگر صدق کرد، نیم‌صفحه شامل همان نقطه، و اگر صدق نکرد، نیم‌صفحه دیگر، مجموعه جواب‌های نامعادله را تشکیل می‌دهند. برای مثال، مجموعه جواب‌های نامعادله  $x + y > ۳$  در مثال قبل قسمت (II) با جهت پیکان روی خط در شکل مربوطه مشخص شده است.

#### احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. احتمال در فضای گسسته: اگر  $S$  یک فضای نمونه‌ای گسسته، و  $A \subseteq S$  یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای  $S$  باشد، در این صورت احتمال رخداد پیشامد  $A$  را با نماد  $P(A)$  نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S} \rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

می‌توان تابعی چون  $P$  از مجموعه زیرمجموعه‌های  $S$  (مجموعه توانی  $S$  یا  $P(S)$ ) به بازه  $[0, 1]$  تعریف کرد که به آن تابع احتمال می‌گوییم.

$$P: P(S) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|}$$

این تابع دارای ویژگی‌های زیر است:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

زیرا:

$$A \subseteq S \rightarrow 0 \leq |A| \leq |S| \rightarrow \frac{|A|}{|S|} \leq \frac{|S|}{|S|} = 1 \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$$

$$\text{زیرا: } P(S) = \frac{|S|}{|S|} = 1, P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|S|} = \frac{0}{|S|} = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{زیرا: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین بر } |S| \text{ تقسیم شود}} \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف احتمال}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**۲. احتمال در فضای پیوسته:** اگر  $S$  یک فضای نمونه‌ای پیوسته و  $A \subseteq S$  پیشامدی تصادفی در فضای  $S$  باشد، برحسب اینکه فضای  $S$  از چه کمیت پیوسته‌ای تشکیل یافته باشد، احتمال رخداد پیشامد  $A$  به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$\text{I) اگر فضای } S \text{ کمیتی طولی باشد: } P(A) = \frac{l_A}{l_S}$$

$$\text{II) اگر فضای } S \text{ کمیتی مساحتی باشد: } P(A) = \frac{a_A}{a_S}$$

$$\text{III) اگر فضای } S \text{ کمیتی حجمی باشد: } P(A) = \frac{V_A}{V_S}$$

$$\text{IV) اگر فضای } S \text{ کمیتی زمانی باشد: } P(A) = \frac{t_A}{t_S}$$

### اصول احتمال – قوانین و قضایای احتمال

**آندره کولموگروف** روسی در سال ۱۹۳۳ سه اصل زیر را به عنوان اصل موضوعه علم احتمال مطرح ساخت و توسط این سه اصل قوانین و قضایای احتمال را ثابت کرد:

**اصل اول:** اگر  $A$  پیشامدی از فضای نمونه‌ای  $S$  باشد

$S$  پیوسته یا گسسته، در این صورت  $0 \leq P(A) \leq 1$

**اصل دوم:** اگر  $S$  فضای نمونه‌ای باشد،  $P(S) = 1$ .

**اصل سوم:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد جدا از هم باشند (ناسازگار باشند)، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cap B) = 0$$

**قضیه ۱:** اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار از فضای  $S$  باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

**قضیه ۲:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای  $S$  باشند و  $A \subseteq B$ ، آن‌گاه:

$$P(A) \leq P(B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

**قضیه ۳:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد دل‌خواه از فضای  $S$  باشند، آن‌گاه: ( $S$  می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### قوانین احتمال

قوانین زیر همگی با استفاده از اصول و قضایای بیان شده قابل اثبات هستند:

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A \cup A') = \underbrace{P(S)} = P(A) + P(A')$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

$$P(A \cap B) \leq P(A), \quad P(A \cap B) \leq P(B)$$

$$P(A - B) \leq P(A)$$

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A) + P(B) > 1 \Rightarrow \underbrace{(A \cap B)} \neq \emptyset$$

$A$  و  $B$  سازگارند

$$P(A \cap B) \neq 0$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

## نگاهی به فیلم تاریخ مختصر زمان



**کلیدواژه‌ها:** تاریخ مختصر زمان، استفن هاو کینگ، کیهان‌شناسی، کوآنتم، گنجینه کیهانی، آنترپی

- **اسم فیلم:** تاریخ مختصر زمان<sup>۱</sup> ■ **کارگردان:** ارول موریس<sup>۲</sup> ■ **تهیه‌کنندگان:** دیوید هیگمن<sup>۳</sup>، گوردن فریدمن<sup>۴</sup>، استیون اسپیلبرگ<sup>۵</sup> و کاتلین کندی<sup>۶</sup> ■ **نوشته‌شده براساس:** کتاب استفن هاو کینگ<sup>۷</sup> ■ **هنرپیشه:** استفن هاو کینگ ■ **موسیقی:** فلیپ گلاس<sup>۸</sup> ■ **فیلم‌برداری:** جان بایلی<sup>۹</sup> ■ **تاریخ اکران:** اکتبر ۱۹۹۱ در «سانتا مونیکا»<sup>۱۰</sup> کالیفرنیا و اکران عمومی در ۲۱ اوت ۱۹۹۲
- **مدت فیلم:** ۸۰ دقیقه ■ **زبان:** انگلیسی

فیلم مستند «تاریخ مختصر زمان» درباره فیزیک‌دان، ریاضی‌دان و کیهان‌شناس، **استفن هاو کینگ** است که به مدت ۳۰ سال کرسی ریاضیات «لوکاس» را داشت. وی به بیماری ALS یا «اسکلروز جانبی آمیوتروفیک» مبتلاست. اسم این فیلم از نام کتابی با همین عنوان، اثر استفن هاو کینگ گرفته شده است که به مدت ۲۳۷ هفته، رکورددار پرفروش‌ترین کتاب در بریتانیا بود.<sup>۱۱</sup> البته با این تفاوت که در کتاب «تاریخ مختصر زمان»، موضوع مورد بحث «کیهان‌شناسی» است، در حالی که موضوع اصلی فیلم «تاریخ مختصر زمان» زندگی استفن هاو کینگ است. این فیلم گوشه‌ای از زندگی وی را در ابعاد شخصی و علمی از طریق گفت‌وگو با پرستار دوران کودکی او، و همکارانش در عرصه دانش، و نیز مصاحبه‌های اختصاصی با اعضای خانواده او به تصویر کشیده است.

از آثار تألیفی دیگر استفن هاو کینگ می‌توان به «طرح بزرگ»، «جهان در پوست گردو»، «دریچه‌ای به سوی کیهان» و «گنجینه کیهانی» اشاره کرد. از آن‌جا که ابتلای استفن هاو کینگ به بیماری فوق باعث شده است تا پس از گذشت سال‌ها، وی گرفتار یک فلج کامل شود و تنها می‌تواند اندکی دو انگشت دست چپش را حرکت دهد، از اواخر دهه ۱۹۶۰ برای جابه‌جایی از صندلی چرخ‌دار استفاده می‌کند. برای او یک رایانه شخصی بسیار پیشرفته طراحی و تهیه شده است که او تنها با تکان دادن آن دو انگشت قابل استفاده‌اش از آن استفاده می‌کند. آن رایانه به جای استفن هاو کینگ صحبت می‌کند و آن‌چه را که او مایل است برایش به محیط پیرامون انتقال می‌دهد. شما می‌توانید به تعداد دفعات زیاد این صحنه‌ها را در فیلم تاریخ مختصر زمان مشاهده کنید. در ادامه فیلم می‌توانید به صحبت‌هایی که استفن هاو کینگ درباره کیهان‌شناسی، جاذبه، کوانتوم و دستاوردهایی که در زمینه سیاه‌چاله‌ها و انفجار آن‌ها عرضه کرده است، گوش فرادهید.

جالب توجه‌ترین صحنه این فیلم اشاره به فنجانی دارد که آن را رها می‌کنند، که پس از برخورد با سطح

زمین تکه‌تکه می‌شود؛ و این امر بیانگر این نقطه‌نظر از استفن هاو کینگ است که می‌گوید: «تفاوت میان

گذشته و آینده از کجا ناشی می‌شود؟ قوانین علم میان گذشته و آینده تمایزی قائل نمی‌شود،

با این حال در زندگی عادی تفاوتی عظیم میان گذشته و آینده وجود دارد. ممکن است

ببینید یک فنجان از روی میز به زمین بیفتد و تکه‌تکه شود، اما هرگز شاهد آن نخواهید

بود که فنجان تکه‌های خود را جمع کند و به بالا بپرد و به روی میز برگردد. افزایش

بی‌نظمی یا به اصطلاح آنترپی، چیزی است که گذشته را

از آینده متمایز می‌کند و به زمان جهت می‌دهد.»<sup>۱۲</sup>





# المپیاد ریاضی در اسپانیا

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، اسپانیا، نقاط شبکه‌ای، سهمی، نقطه ثابت، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، مرکز ثقل مثلث

در کشور اسپانیا از سال ۱۹۶۴، المپیادهای ریاضی به‌طور مرتب و در دو نوبت برگزار می‌شوند. در سال‌های اول در هر نوبت به شرکت‌کنندگان هشت مسئله داده می‌شد، اما در سال‌های بعد، مانند المپیاد بین‌المللی ریاضی، شش سؤال در دو روز متوالی داده می‌شود. نخستین حضور اسپانیا در المپیادهای بین‌المللی ریاضی به سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد که رتبه بیست و سوم را به‌دست آورد. از آن سال تاکنون کشور اسپانیا مرتباً در این رقابت‌ها حضور داشته و بهترین مقامی که به‌دست آورده، در رقابت‌های ۱۹۸۷ کوبا بود که رتبه بیست و دوم را کسب کرد. ولی در سال‌های بعد روندی به شدت نزولی داشت و تا رتبه شصت و چهارم نیز سقوط کرد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که این کشور تنها مهد فوتبال و گلوبازی است! نکته جالب توجه آن است که به‌رغم نزول مذکور، مسائل مطرح شده در المپیاد ریاضی این کشور مسائل قابل قبولی هستند و از سطح کیفی نسبتاً خوبی برخوردارند. این موضوع را می‌توان در متن سؤال‌ها که در پی می‌آیند، مشاهده کرد. البته در مقایسه با سؤال‌های مسابقات کشورهای صاحب نام در المپیاد ریاضی (مانند کشورهای اروپای شرقی، انگلستان، آمریکا، چین، هندوستان و ایران)، این سؤال‌ها بسیار سطح پایین‌تر هستند، اما گاهی هم سؤال‌های بسیار دشوار در میان مسائل آن‌ها دیده می‌شود. این کشور همچنین یک بار در سال ۲۰۰۸ میزبان المپیاد بین‌المللی ریاضی بوده است. در این‌جا منتخبی از مسائل مطرح شده در المپیادهای سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۷ این کشور را همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم.

## صورت مسائل

- مجموع توان دوم ۱۰۰ جمله نخست یک دنباله حسابی را حساب کنید، اگر مجموع ۱۰۰ جمله نخست آن ۱، و مجموع دومین، چهارمین، و... صدمین جمله آن نیز ۱ باشد.
- فرض کنید  $A$  یک مجموعه ۱۶ عضوی از نقاط شبکه‌ای یک مربع  $4 \times 4$  باشد. بیشترین تعداد اعضای  $A$  را بیابید، به‌طوری که هیچ سه تا از آن‌ها تشکیل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ندهند.
- $p$  یک عدد اول است. همه اعداد  $k \in \mathbb{Z}$  را بیابید که  $\sqrt{k^2 - pk}$  عددی صحیح باشد.
- همه سهمی‌هایی را به معادله  $y = x^2 + px + q$  که سه نقطه برخورد با محورهای مختصات به‌وجود می‌آورند، در نظر بگیرید. دایره گذرنده از این سه نقطه را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دایره‌ها از یک نقطه ثابت می‌گذرند.
- اعداد طبیعی  $a$  و  $b$  به‌صورتی هستند که  $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$  عددی صحیح است. نشان دهید بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  از  $\sqrt{a+b}$  بزرگ‌تر نیست.
- فرض کنید  $G$  مرکز ثقل مثلث  $ABC$  باشد. ثابت کنید که اگر  $AB + GC = AC + GB$  آن‌گاه مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

## حل مسائل

- اگر قدرنسبت دنباله حسابی  $d$  و جمله اول آن را  $a_1$  در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = S_{100} = \frac{100}{2} [2a_1 + 99d] = 1$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 99d = \frac{1}{50} \Rightarrow 100a_1 + 4950d = 1$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + 99d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + (1+3+5+\dots+99)d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + \frac{50}{2} [2+99 \times 2]d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + 2500d = 1 \Rightarrow \begin{cases} 100a_1 + 4950d = 1 \\ 100a_1 + 5000d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{50}, a_1 = -\frac{49}{50} \Rightarrow a_n = -\frac{49}{50} + (n-1)\frac{1}{50}$$

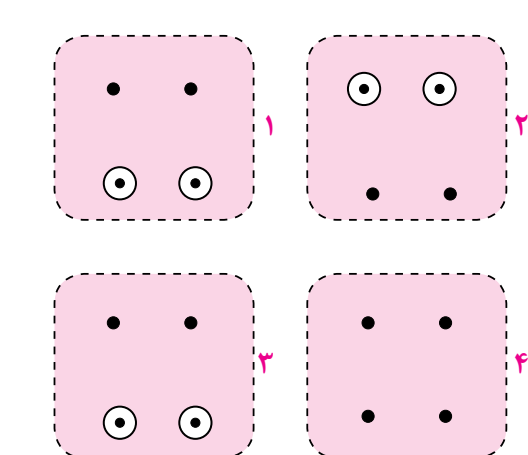
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{50}n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2 = \sum_{i=1}^{100} \left( \frac{1}{50}i - 1 \right)^2 = \sum_{i=1}^{100} \left( \frac{1}{2500}i^2 - \frac{2}{50}i + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2500} \sum_{i=1}^{100} i^2 - \frac{2}{50} \sum_{i=1}^{100} i + 100$$

$$= \frac{1}{2500} \times \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - \frac{1}{25} \times \frac{100 \times 101}{2} + 100$$

$$= \frac{6767}{50} - 102 = 33 \frac{34}{50}$$



مطابق شکل، در سه طبقه از این طبقات، در هر یک دو نقطه را جدا کرده‌ایم. اکنون به‌راحتی می‌توان دید که هر یک از نقاط طبقه چهارم را که علامت بزنییم، با دو نقطه از نقاط علامت زده یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین تشکیل

می دهد (آن ها را خودتان مشخص کنید). بنابراین حداکثر شش نقطه را می توان از مجموعه A مشخص کرد که این ویژگی را داشته باشند. در حالت های دیگر هم می توان به همین صورت استدلال کرد.

۳. طبق فرض:  $\sqrt{k^2 - pk} \in \mathbb{Z}$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 - pk} = m &\Rightarrow k^2 - pk = m^2 \Rightarrow k^2 - pk - m^2 = 0 \\ \Rightarrow \Delta = p^2 + 4m^2 = t^2 &\Rightarrow t^2 - 4m^2 = p^2 \\ \Rightarrow (t - 2m)(t + 2m) = p^2 \end{aligned}$$

اکنون حالت های زیر را می توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} t - 2m = p \\ t + 2m = p \end{cases} \quad \begin{cases} t - 2m = 1 \\ t + 2m = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t - 2m = p^2 \\ t + 2m = 1 \end{cases}$$

از دستگاه اول نتیجه می شود که  $t = p$  و  $m = 0$  و از آنجا نتیجه می شود:

$$k^2 - pk = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } k = p$$

و از دستگاه دوم نتیجه می شود:

$$m = \frac{p^2 - 1}{4} \text{ و } t = \frac{p^2 + 1}{2}$$

و از آنجا نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= p^2 + 4\left(\frac{p^2 - 1}{4}\right)^2 \\ &= p^2 + \frac{(p^2 - 1)^2}{4} = \frac{(p^2 - 1)^2 + 4p^2}{4} = \left(\frac{p^2 + 1}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow k = \frac{p \pm \frac{p^2 + 1}{2}}{2} \\ &\Rightarrow k_1 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2, k_2 = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

از دستگاه سوم نیز همین جواب ها به دست می آیند. پس مجموعه جواب های k عبارت اند از:

$$\left\{0, p, \left(\frac{p+1}{2}\right)^2, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$$

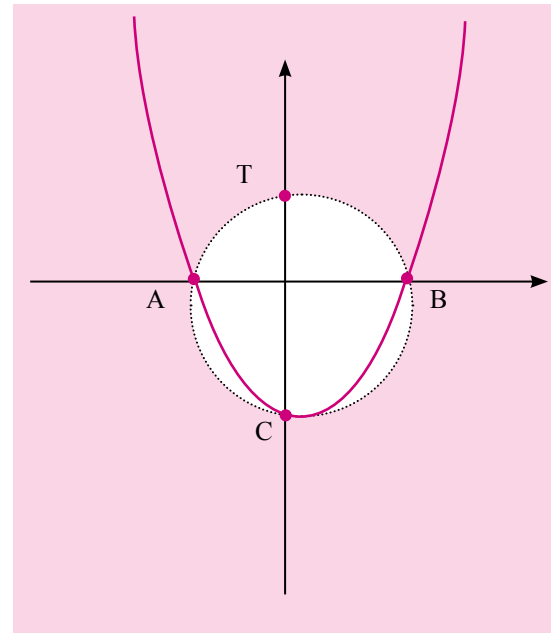
۴. مطابق شکل، اگر سهمی مزبور محور xها را در

نقاط A و B و محور yها را در نقطه C قطع کند، مختصات

نقاط A و B به صورت  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  و  $B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  خواهد بود که  $x_1$  و  $x_2$

ریشه های معادله  $x^2 + px + q = 0$  هستند. بنابراین

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p \text{ و } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q \text{ و مختصات C به}$$



صورت  $C \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$  است.

اگر معادله دایره گذرنده از این سه نقطه به صورت  $y^2 + x^2 + ax + by + c = 0$  باشد، با جای گذاری مختصات

A، B و C در این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + c = 0 \\ x_2^2 + ax_2 + c = 0 \\ q^2 + bq + c = 0 \end{cases}$$

از کم کردن دو طرف معادله های اول و دوم نتیجه می شود:

$$x_1^2 - x_2^2 + a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + a) = 0$$

و چون:  $x_1 \neq x_2$  (چرا؟) پس:

$$a = -(x_1 + x_2) = p$$

$$c = -x_1^2 - ax_1 = -x_1^2 + x_1(x_1 + x_2) = x_1 x_2 = q$$

و با جای گذاری c در معادله سوم نتیجه می شود:

$$b = -q - 1$$

و از آنجا معادله دایره به صورت زیر نوشته می شود:

$$x^2 + y^2 + px - (q+1)y + q = 0$$

$$\Rightarrow q(1-y) + px + (x^2 + y^2 - y) = 0$$

حال اگر سه معادله  $x = 0$ ،  $1 - y = 0$  و  $x^2 + y^2 - y = 0$

با هم برقرار باشند، معادله فوق به ازای جميع مقادیر p و q

برقرار است. اما مقادیر  $x = 0$  و  $y = 1$  هر سه معادله را برقرار

می کنند، لذا نقطه  $T(0,1)$  که در شکل هم مشخص شده، نقطه

ثابتی است که این دایره به ازای همه مقادیر p و q همواره از

آن می گذرد.

۵. فرض می کنیم:  $(a, b) = d$ . بنابراین:  $a = dq$  و  $b = dq'$  و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} &= \frac{dq+1}{dq'} + \frac{dq'+1}{dq} \\ &= \frac{dq^2 + q + dq'^2 + q'}{dqq'} \Rightarrow dqq' \mid dq^2 + q + dq'^2 + q' \\ &\Rightarrow d \mid dq^2 + dq'^2 + q + q' \Rightarrow d \mid q + q' \\ &\Rightarrow d^2 \mid dq + dq' \Rightarrow d^2 \mid a + b \Rightarrow d^2 \leq a + b \\ &\Rightarrow d \leq \sqrt{a + b} \end{aligned}$$

۶. با توجه به قضیه میانه ها داریم:

$$\begin{aligned} MB &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \\ NC &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \quad (AB = c, AC = b, BC = a) \\ \Rightarrow GB &= \frac{2}{3} BM = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \\ GC &= \frac{2}{3} NC = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} + c &= \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + b \end{aligned}$$

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه اول: جدول ریاضی دانان ایرانی و خارجی

ف	ا	پ	ا	پ	و	س	ا	م	ر	ف
ا	ی	ک	ا	ن	ت	و	ر	ل	ی	ت
ر	ل	ب	ک	ن	ت	ا	ا	ل	د	ل
ا	گ	ر	و	ح	پ	گ	ت	ل	پ	ا
ب	ا	ن	ر	ن	ی	ر	ی	ز	ی	ک
ی	ت	و	ر	ا	ا	ق	ل	ی	د	س
ر	ر	ل	ل	ک	ب	چ	ی	م	ه	ا
و	ا	ی	د	ا	ن	ر	ی	ش	ی	پ
ن	ت	ا	ل	س	گ	و	ی	ج	ر	ک
ی	م	ز	ر	ا	و	خ	ر	ل	و	ا
د	ن	ا	گ	ر	و	م	د	ک	ف	ک

در جدول واژه های به هم ریخته مقابل، نام های تعدادی از ریاضی دانان قدیم ایران و جهان آمده است. این نام ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. همه نام ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می ماند. از ترکیب این حرف ها نام یکی از ریاضی دانان ایرانی معاصر به دست می آید. نام و زندگی نامه مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه ای مناسب بگیرید!



نام های ریاضی دانان:  
اقلیدس، فارابی، نیریزی،  
فیثونچی، برنولی،  
گالوا، تار تاگلیا، بیرونی،  
دکارت، خوارزمی، تالس،  
دمورگان، کرونکر، اولر،  
فوریه، کرجی، پاسکال،  
والیس، گاوس، کپلر،  
کانتور، نپر، پاپوس، فرما،  
تیلر.





# مصیبت ابراهیم دارابی، معلم و نویسنده پیش کسوت ریاضی

## اشاره

در روز معلم، مجله «رشد برهان متوسطه» میزبان یکی از معلمان رشته ریاضی بود که سال‌های مدیدی را با این رشته زیسته است. در این نشست کوشیدیم تجلی از استاد ابراهیم دارابی صورت گیرد و با او درباره همه چیز سخن گفته شود، چرا که دارابی چهره‌ای چندوجهی است و علاوه بر ریاضیات، در عرصه شطرنج و تألیف و ترجمه آثار ادبی هم ید طولایی دارد. همان‌طور که خواهید خواند، این مصاحبه با وجهه شطرنجی استاد آغاز می‌شود و بعد به عرصه ریاضیات و زندگی شخصی و ادبی وی پرداخته می‌شود. آن روز، حمیدرضا امیری، سردبیر رشد برهان متوسطه، میرشهرام صدر و هوشنگ شرقی، مدیران داخلی سابق و فعلی مجله، به همراه محمد هاشم رستمی و سید محمد رضا هاشمی موسوی حضور داشتند.

## اول سؤالات را برای خودم حل می‌کردم، بعد به کلاس می‌رفتم

### در صفحه شطرنج

شرقی: امروز سه‌شنبه ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، روز معلم، در خدمت استاد ابراهیم دارابی هستیم؛ همراه با اعضای هیئت تحریریه مجله رشد برهان متوسطه. ما ابراهیم دارابی را به عنوان دبیر ریاضی، مؤلف کتاب‌های ریاضی به‌ویژه برای علاقه‌مندان رشته ریاضی و داوطلبان شرکت در المپیادها، مترجم کتاب‌های ریاضی و پیش‌کسوت این رشته می‌شناسیم. اما از این‌ها مهم‌تر، شخصیت چندبعدی و چندوجهی ایشان است که من می‌خواهم در این مصاحبه به یکی از آن‌ها اشاره کنم. در بخشی از کتاب شاهنامه، میراث عظیم فرهنگی ایران زمین و یادگار حکیم ابوالقاسم فردوسی، حکایتی هست در مورد کاروان هدایایی که از کشور هند به ایران ارسال شده و هدیه ویژه‌ای نیز در میان هدایاست. شاهنامه می‌آورد:

بیاورد پس نامه‌ای بر پرند  
نیشته به نوشیروان رای هند  
یکی تخت شطرنج کرده به رنج  
تهی کرده از رنج شطرنج گنج

وگر نام‌داران ایران گروه

چنین داد پیغام، هندی ز رای  
که تا چرخ باشد تو بادی به جای  
کسی کو به دانش برد رنج بیش  
بفرمای تا تخت شطرنج پیش  
نهند و ز هر گونه رای آورند  
که این نغز بازی به جای آورند  
بدانند هر مهره‌ای را به نام  
که چون بایش راند و خانه کدام  
پیاده بدانند و پیل و سپاه  
رخ و اسب و رفتار فرزین و شاه  
گر این نغز بازی برون آورند  
به داندگان بر فزون آورند  
و در ادامه حکایت می‌کند که اگر ایرانیان در این بازی نتواند بر هندی‌ها غلبه یابند، نباید از آنان تقاضای خراج و مالیات کنند. بعد از آنکه همه درباریان در این بازی نمی‌توانند مهارت کسب کنند، بزرگمهر حکیم، وزیر شاه، بعد از یک روز تعمق در بازی موفق می‌شود در آن تبحر بیابد و نماینده هندیان را در این بازی مغلوب کند. در این منظومه، فردوسی از زبان فرستنده هندیان شطرنج را دانش می‌خواند:

شرقی: چه سالی بود؟

دارابی: سال ۱۳۵۴. در مقدمه کتاب، این داستان برای بچه‌ها گفته می‌شود:

پادشاهی می‌خواست به کشور همسایه حمله کند. همه پیرمردها را صدا می‌کند و می‌پرسد: من چه کنم تا در این جنگ پیروز شوم؟ یکی از پیرمردها تخته شطرنجی را به شاه نشان می‌دهد و می‌گوید: اگر می‌خواهید پیروز شوید، قبل از اینکه خون‌ریزی شود، بیایید و با من شطرنج بازی کنید. اگر مرا مغلوب کردید، به جنگ بروید. شاه عصبانی می‌شود و با پا می‌زند تخته شطرنج را داغان می‌کند. بعد هم به جنگ می‌رود و شکست می‌خورد و برمی‌گردد. هنگام برگشتن باز هم با همان پیرمرد روبه‌رو می‌شود. شاه می‌گوید: پیرمرد دیدی چه شد؟! پیرمرد می‌گوید: من که اول به شما گفتم. شما برای این که در جنگ پیروز شوید، اول باید فرماندهی یک جنگ بدون خون‌ریزی را یاد بگیرید، و بعد اقدام کنید.

اما از نظر من، شطرنج با زندگی تقریباً یکی است. همان‌طور که اگر شما در زندگی اشتباه کنید امکان برگشت نیست، در شطرنج هم اگر مهره‌ای را حرکت دادید، دیگر نمی‌توانید برگردانید. بنابراین اگر ما بچه‌ها را عادت بدهیم که شطرنج یاد بگیرند، به نظر من زندگی را بهتر یاد می‌گیرند. از این نظر، شطرنج بهترین آموزش زندگی برای کودکان است. در کشور ما گویا بچه‌های پنج ساله را آموزش نمی‌دهند، ولی در شوروی (روسیه فعلی) مدارس شطرنج بود. در آنجا بچه‌ها براساس علائق خود، یا

موسیقی می‌آموزند، یا شطرنج و یا...

شرقی: شما به جز کتابی که به آن اشاره کردید، دیگر چه کتاب‌هایی در زمینه شطرنج تألیف و ترجمه کرده‌اید؟

دارابی: کتاب دیگری که در زمینه شطرنج ترجمه کرده‌ام، اثر کاکا بلانکا و برای بزرگسالان است. آخرین کتاب هم در این زمینه «مدرسه شطرنج» است که «انتشارات مبتکران»، چاپ کرده است.

شرقی: شما خودتان هم شطرنج بازی می‌کنید؟

دارابی: بله، علاقه دارم، ولی استاد شطرنج نیستم (با خنده).

شرقی: ترویج فرهنگ شطرنج را برای تقویت دانش ریاضی جوانان و نوجوانان کشورمان چه‌قدر مؤثر می‌دانید و در این صورت چه توصیه‌ای برای ما دارید؟ آیا حاضری در این زمینه کاری برای مجله برهان انجام دهید؟

دارابی: من در مورد قسمت اول سؤال شما گفتم که اگر واقعاً شطرنج در مدارس ما تدریس شود، برای دانش‌آموزان افق‌های جدیدی باز می‌کند و می‌توانند زندگی را بهتر ببینند و بشناسند. اما در زمینه همکاری مجله، اگر حدود و زمینه‌اش مشخص شود، می‌شود کاری کرد.

شرقی: مثلاً رابطه ریاضی و شطرنج را زمینه خوبی می‌دانید؟

دارابی: بله، در معماها و مسائل ریاضی، می‌توان به این موضوع هم پرداخت.



ابراهیم دارابی

امیری: من همین چند وقت پیش در کلاس درس به موضوعی برخورددم. شما در ماتریس‌ها بخشی دارید که در مورد ویژگی‌های دترمینان بدون بسط است. من داشتم این موضوع را درس می‌دادم و می‌گفتم ما باید این سه عدد را صفر کنیم. حالا اگر بخواهیم این را صفر کنیم، در مرحله بعدی آن یکی خراب می‌شود. پس ستونی عمل نمی‌کنیم. یکی از بچه‌ها گفت: چه‌قدر این کاری که شما می‌کنید شبیه شطرنج است. یعنی ما باید همیشه یکی دو حرکت جلوتر را حدس بزنیم. من هم گفتم دقیقاً حرف خوبی زدی. خیلی هم تشویقش کردم.

شرقی: در شطرنج اصطلاح معروفی هست که می‌گویند باید تا هفت حرکت آینده را پیش‌بینی کنی. این تفکر، افق خلاقیت را خیلی باز می‌کند و با ریاضیات هم ارتباط نزدیکی دارد.

دارابی: معماهایی هم در زمینه شطرنج وجود دارند؛ مثل حرکت با اسب در همه خانه‌های صفحه شطرنج بدون اینکه اسب بیش از یک‌بار در هر خانه نشسته باشد.

### در باب ترجمه

شرقی: حالا به یک جنبه دیگر از توانایی‌های آقای دارابی می‌پردازیم. شما ترجمه‌های نسبتاً زیادی از زبان روسی به زبان فارسی دارید. زبان روسی را از کجا آموختید؟ در مدتی که به این کار مشغول بودید، چه



حمیدرضا امیری

تجربه‌هایی از فرهنگ و دانش ریاضی شوروی سابق و روسیه فعلی دارید؟ آیا به روسیه سفر کرده‌اید؟ همچنین درباره ترجمه‌هایتان از زبان روسی و باکوئی بفرمایید.

**دارابی:** اولین تألیف من یک کتاب هندسه فضایی بود همراه با آقای فردادی که الان در رشت هستند. من در دوره‌ای که دانشجو بودم، در «دبیرستان دهخدا» تدریس می‌کردم. همکاری هم داشتیم که در «دبیرستان باباطاهر» تدریس می‌کرد. او که با دانش آموزان اختلاف پیدا کرده بود برگشت به مدرسه دهخدا و آقای صدر، رئیس مدرسه باباطاهر مرا به آنجا برد. آنجا یک کلاس چهارم و یک پنجم ریاضی داشت. بچه‌هایش خیلی فعال بودند و دفترداری هم داشتند که خیلی به ریاضی علاقه داشت. او مسائلی را به بچه‌ها می‌داد تا به کلاس ببرند و معلمان را در آمپاس بگذارند. بچه‌ها مسئله‌ای را هم به من دادند که دیدم اصلاً با مسائل کتاب‌های ما جور در نمی‌آید. گفتم که حل می‌کنم و می‌آورم. رفتم خانه و خیلی کار کردم. بالاخره راه‌حلی پیدا کردم، ولی طولانی بود.

هم‌زمان آقایان فیض‌اللهی و توکل در آموزش و پرورش برای دانشجویانی که خارج می‌رفتند، امتحاناتی برگزار می‌کردند. مرا با یک معلم دیگر دعوت کردند. سه سؤال من طرح کردم، سه سؤال هم او طرح کرد. گمان می‌کنم دانشجویان می‌خواستند به ژاپن بروند. فردای آن روز رفتم که برگه‌ها را تصحیح کنم. قبل از اینکه به آنجا بروم، خودم مسائل را حل کردم. برای مسئله لگاریتم راه‌حل من حدود یک صفحه بود. ولی وقتی ورقه‌ها را تصحیح می‌کردم، دیدم دانش‌آموزی در دو خط به جواب رسیده است. فکر کردم تقلب کرده است. ورقه دیگر، ورقه دیگر، دیدم نه، مسئله‌ای هست که من نمی‌دانم. ورقه‌ها را جمع کردم و تحویل دادم. گفتم فردا می‌آیم تصحیح می‌کنم.

نبش خیابان اکباتان یک کتاب‌فروشی

بود. دیدم یک کتاب جلد آبی دارد از استاد شهریاری به نام کنکورهای شوروی. کتاب را خریدم و در راه که می‌رفتم ورق زدم و دیدم بله، همان مسئله آنجا هست. رفتم خانه و دیدم مسائلی هم که در مدرسه آن دفتردار به من می‌دهد، نظایر آن‌ها همه در این کتاب هست. آنجا من تصمیم گرفتم که زبان روسی را یاد بگیرم، چون می‌دانستم که استاد شهریاری هم در زندان روسی را یاد گرفته است. رفتم انجمن ایران و شوروی اسم نوشتم.

**فرجی:** چه سالی بود این ماجرا؟

**دارابی:** سال ۱۳۴۸. من اسم نوشتم و سه سال در آنجا زبان روسی خواندم. در «ساکو» که کتاب‌های روسی می‌آورد، کتاب کنکورهای شوروی که استاد شهریاری ترجمه کرده بود، به زبان روسی موجود بود. آن را خریدم. چند مجله هم به زبان آذربایجانی درباره ادبیات خریدم. آدمم و کتاب استاد شهریاری را گذاشتم در مقابل اصل روسی آن. صفحه‌ها را تطبیق کردم و آن واژه‌هایی را که در زبان ریاضیات به کار می‌روند، یاد گرفتم. جلد دوم کنکورهای شوروی را من ترجمه کردم و «انتشارات گوتنبرگ» چاپ کرد. برای این ناشر کتاب‌های «کاربرد ریاضیات» و «هندسه پرگار» را هم ترجمه کردم. بعد فهمیدم استاد شهریاری هم هندسه پرگار را ترجمه کرده است. برای همین ناشر کتاب «القبای شطرنج» را هم ترجمه کردم.

**شرقی:** شما خودتان هم به روسیه سفر کرده‌اید؟

**دارابی:** من به روسیه نرفته‌ام، ولی باکو رفته‌ام.

**شرقی:** کتاب‌هایی که از زبان آذربایجانی ترجمه کرده‌اید، چگونه بوده‌اند؟ زبان آن‌ها با ترکی ما فرق می‌کند؟

**دارابی:** عیناً با ترکی ما یکی است، منتها اصطلاحات ریاضی را باید بلد باشیم.

**شرقی:** خطشان سیریل است؟

**دارابی:** بله، ولی حالا آن را عوض

کرده‌اند.

### دارابی در دنیای ادبیات

**شرقی:** یکی دیگر از جنبه‌های کاری آقای دارابی علاقه به ترجمه رمان و داستان است. نخستین کتاب ادبی که ترجمه کردید چه نام داشت و چه سالی بود؟

**دارابی:** بگذارید اول توضیحی بدهم. من دانشجو که بودم، آهونه مجله ریاضیات در مدرسه به زبان روسی بودم. از این مجله هم برای ترجمه‌هایم استفاده کرده‌ام. اما در مورد کتاب ادبی، من اولین کتابی که خودم نوشتم «درخت سیب و پسرک فقیر» بود. کتاب کوچکی بود که دو داستان داشت. این کتاب را «انتشارات دنیا» چاپ کرد.

**شرقی:** چه سالی بود؟

**دارابی:** حوالی سال ۱۳۵۰ بود. در مجلات آن موقع نوشتند که دارابی از صمد بهرنگی تبعیت می‌کند. این اولین کار من بود.

**شرقی:** قیمت کتاب چه قدر بود؟

**دارابی:** شاید یک تومان.

**شرقی:** حق‌التألیف چه طور بود؟

**دارابی:** عملاً حق‌التألیف نگرفتم. بنا بود به جایی کمک شود. من گفتم با این پول به آنجا کمک کنید.

**شرقی:** ترجمه‌هایتان را از کی شروع کردید؟

**دارابی:** همان سال من ۱۶ کتاب کوچک برای کودکان و نوجوانان ترجمه کردم. مثل «شبی در میلاد» ماکسیم گورکی، «کشمش بازی» از میرزا جلیل قلی‌زاده. حالا تعدادی از این‌ها تحت عنوان «گنجشک ژولیده» در یک مجموعه چاپ شده‌اند. کتاب «دده قورقود» را هم ترجمه کردم. از نریمان نریمانف کتاب «درخت نظر کرده» را ترجمه کردم. یک کتاب هم در سال‌های منتهی به انقلاب ترجمه کردم به اسم «ایبیش» که آن را خمیر کردند و نگذاشتند چاپ شود. ولی بعد از انقلاب در شمارگان ۳۰ هزار نسخه

چاپ شد.

**شرقی:** کتاب ایبیش برای خود من خاطرات بسیاری به همراه دارد. به یاد دارم اولین باری که این کتاب را خواندم، سال ۱۳۵۸ بود. یکی از دوستانم در مدرسه راهنمایی این کتاب را به من داد. تأثیری که ایبیش روی من گذاشت، توصیف‌کردنی نیست. ترجمه‌ای بود از سلیمان ولی‌اف. داستانش هم درباره یک کارگر مستضعف و محروم در آذربایجان شوروی است و بچه کارگری که به خانواده‌اش کمک می‌کند. در عین حال هم خیلی مبارز است و دست آخر به دست یک بچه مالک کشته می‌شود. فوق‌العاده قشنگ و اثرگذار است. این کتاب چه‌طور به دست شما رسید؟ چه شد که تصمیم به ترجمه‌اش گرفتید و ناشرش که بود؟

**دارابی:** این کتاب را من از ساکو گرفتم. اسم اصلی‌اش «جولوت گوشی» بود. هرچه ما در فرهنگ لغت گشتیم، معنای جولوت را پیدا نکردیم (جولوت نام یک پرنده است). این کتاب را آقای فرنود مدیر «انتشارات معلم» چاپ کرد. اول کتاب را به یک ناشر دیگر داده بودم که او می‌خواست کتاب را سانسور کند. آقای فرنود گفت بده به من که بدون سانسور چاپ کنم.

**امیری:** بالاخره فهمیدید جریان اسم آن پرنده چه بود؟

**دارابی:** نخیر، هنوز هم نمی‌دانم. در باکو معادن نفتی بود و نفت به برکه‌های آب نشست می‌کرد. بچه‌ها می‌رفتند و پارچه‌ای را روی آب پهن می‌کردند. نفتش را پارچه جذب می‌کرد. بعد پارچه را می‌چلانند و نفتی را که به‌دست می‌آمد، می‌فروختند. در این برکه پرنده‌ها هم بودند. ایبیش می‌رود برای خواهرش از برکه پرنده بگیرد که پسر مالک او را غرق می‌کند.

**شرقی:** شما نویسنده این کتاب را دیدید؟

**دارابی:** نخیر، ندیدم. رفتم آذربایجان

ولی متأسفانه نتوانستم ایشان را ببینم.

**محسن فرجی:** شما در حوزه داستان هم رمانی به اسم «اشک سبلان» دارید.

این کتاب چه سالی منتشر شد؟

**دارابی:** فکر می‌کنم تقریباً پنج سالی باشد که منتشر شده است. رمانی دوجلدی است.

**شرقی:** در تابستان سال ۱۳۸۵ در آمده است.

**امیری:** اشک سبلان رمان تاریخی است؟

**دارابی:** بله، رمان تاریخی است که از شکست فرقه دموکرات در اردبیل شروع می‌شود و بعد می‌آید تهران و مسائل ۳۰ تیر، ۲۸ مرداد و انقلاب را تعریف می‌کند.

### استاد دارابی و ریاضیات

**شرقی:** حالا می‌رسیم به ریاضیات که بحث اصلی ماست. یکی از فعالیت‌های ماندگار شما در زمینه ریاضی، عضویت در هیئت تحریریه «مجله رشد ریاضی» در دهه ۱۳۶۰ است. چه شد که برای عضویت در هیئت تحریریه انتخاب شدید؟

**دارابی:** من با آقای لطفی در آبادی فامیل یا در واقع آشنای خیلی نزدیک هستم. «درآباد» روستای کوچکی است نزدیک اردبیل که به آن باکوی کوچک می‌گویند؛ به‌خاطر اینکه حدود ۸۰-۷۰ درصد از ساکنان آن مهاجرانی هستند که از باکو آمده‌اند. آقای لطفی که معاون دفتر برنامه‌ریزی و مؤلف کتاب‌های ریاضی بود مرا به این‌جا دعوت کرد.

**شرقی:** مجله رشد ریاضی آن زمان با مجله رشد ریاضی امروز چه تفاوت‌هایی دارد؟

**دارابی:** وقتی مقایسه می‌کنم می‌بینم این مجلات رشد با دوره‌ای که ما کار می‌کردیم، خیلی فرق دارند. به‌نظر من آن موقع عمق ریاضیات بیشتر بود و الان دیگر بیشتر فرمول ریاضی نیست و گفتاری شده است؛ یعنی توصیفی است.

**امیری:** در واقع بحث آموزش ریاضی

قوی‌تر شده است؟

**دارابی:** بله.

**شرقی:** نخستین کتاب ریاضی که شما ترجمه یا تألیف کردید، چه کتابی بود؟

**دارابی:** ترجمه، همین «کنکورهای شوروی» بود. تألیف هم کتاب درسی «ریاضیات بازرگانی» بود.

**شرقی:** چند کتاب ریاضی ترجمه و تألیف کرده‌اید؟

**دارابی:** حدود ۳۵ کتاب.

**شرقی:** شما ناشران کمک‌آموزشی

امروز را چه‌طور ارزیابی می‌کنید؟

**دارابی:** بیشتر سوق پیدا کرده‌اند به تست که من مخالف آن بوده‌ام. تست، ابتکار و انسجام فکری دانش‌آموز را می‌گیرد.

**امیری:** اگر تست را سر جلسه کنکور به دانش‌آموز بدهند، همین که شما می‌گویید درست است. چون دانش‌آموز مجبور است در یک دقیقه و نیم مسئله‌ای را حل کند. اما تست به عنوان ابزار سنجش یک موضوع، فی‌نفسه بد نیست. مثلاً آزمون‌های مقدماتی یا مرحله اول المپیاد تست پنج گزینه‌ای هم دارد. به‌خاطر اینکه بحث احتمالی‌اش را کم کنند. زمانی هم که برای هر تست گذاشته‌اند، نزدیک به هفت دقیقه است. بنابراین اگر به تست به عنوان یک مسئله با راه‌حل کوتاه نگاه کنیم، بد هم نیست؛ اگر بشود از گزینه‌هایش خوب استفاده کرد. ولی اگر بحث کنکور باشد، من صددرصد با شما هم عقیده‌ام. چون خلاقیت و عمق را از دانش‌آموز می‌گیرد.

**دارابی:** الان در روسیه تست هم رایج شده است، منتهی در مرحله اول. در مورد تست من دیده‌ام که معلمان سر کلاس فرمول‌هایی برای حل آن‌ها ارائه می‌دهند؛ بدون این‌که دانش‌آموز به عمق این فرمول‌ها واقف باشد. یعنی سلسله مراتب پیدایش فرمول در ذهن او وجود ندارد.

**امیری:** ما در آسانسور که داشتیم می‌آمدیم، فرمودید که قبلاً هم برای مجله مقاله داده‌اید. چرا دیگر مقاله



هوشنگ شرقی







رستمی

ندادید؟

● **دارابی:** ارتباط من با آقای شرقی قطع شد و نشد که دیگر مقاله بدهم (با خنده).  
● **امیری:** پس همین جا از شما قول بگیریم که باز هم به ما مقاله بدهید و در خدمت شما باشیم.

● **فرجی:** معمولاً درس ریاضی برای اکثر بچه‌ها دشوار است و برخی از دانش‌آموزان از این درس می‌گریزند. شما در کتاب‌هایی که تألیف کردید یا در شیوه تدریس‌تان چه روشی را پیش می‌گرفتید که ریاضی برای بچه‌ها به درسی شیرین و دوست‌داشتنی تبدیل بشود؟

● **دارابی:** من هر روز قبل از این که به کلاس بروم، شب قبل عنوان درس را نگاه می‌کردم. خودم کاغذ و قلم برمی‌داشت‌م و برای خودم مسائل درس را حل می‌کردم. یادم نمی‌آید که بدون این کار سر کلاس رفته باشم. این طوری که می‌رفتم سر کلاس، موفق هم بودم. یعنی بچه‌ها راضی بودند. من غالباً در جنوب شهر درس داده‌ام.  
● **امیری:** منطقه چند بودید.

● **دارابی:** منطقه ۱۴.  
● **امیری:** از همین منطقه هم بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** بله، مدرسه ابوریحان.  
● **رستمی:** کدام خیابان بود؟  
**دارابی:** نزدیک میدان خراسان.

● **فرجی:** از شاگردان آن دوره کسی را به‌خاطر دارید یا کسانی هستند که هنوز با شما در تماس و ارتباط باشند؟  
● **دارابی:** بله، هستند. می‌آیند سر می‌زنند. اتفاقاً هفته پیش یکی از دانش‌آموزانم از کانادا آمده بود و به من سر زد.

## زندگی شخصی همراه با تدریس

**فرجی:** در فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتاب «اشک سبلان»، سال تولد شما را ۱۳۱۰ نوشته‌اند. این درست است؟  
● **دارابی:** نه متولد ۱۳۱۴ هستم. اشتباه نوشته‌اند.

● **فرجی:** کجا متولد شدید؟

● **دارابی:** اردبیل.

● **فرجی:** درباره اولین مواجهه خودتان با درس ریاضی و شطرنج بفرمایید.  
● **دارابی:** خانواده ما یک خانواده فرهنگی بود. پدر و مادرم که ایرانی بودند و در باکو زندگی می‌کردند، سال ۱۳۰۴ به اردبیل برگشتند. آن‌ها با خودشان فرهنگ آنجا را هم آوردند: نقاشی، گرامافون، موسیقی و شعر بود. شطرنج آن موقع نبود. دایی من، هم نقاش بود هم مهندس راه و ساختمان. ما بیشتر تحت تأثیر دایی‌مان بودیم. مادرم هم همیشه برای ما شعر می‌خواند. شطرنج را من بعدها در دبیرستان از دوستی که الان در آلمان است، یاد گرفتم. در کلاس هفتم بودم و در «دبیرستان ابوریحان» درس می‌خواندم.

● **فرجی:** یعنی تهران بودید؟

● **دارابی:** بله.  
● **فرجی:** چه سالی به تهران آمدید؟  
● **دارابی:** وقتی دوره ابتدایی را تمام کردم، در سال ۱۳۳۰ به تهران آمدم. البته پنج ساله بودم که مادرم فوت کرد و ما تحت سرپرستی دایی‌ام بزرگ شدیم. البته پدرم هم بود، ولی چون مادرم با زن دایی‌ام خیلی نزدیک بود، زن دایی‌ام مثل یک مادر از ما پرستاری کرد.  
● **فرجی:** از سال‌های به تهران آمدن بگویید

● **دارابی:** من در تهران به دبیرستان ابوریحان رفتم که در خیابان دلگشا بود؛ پایین‌تر از نیروی هوایی. آقای **دیوسالار**، مدیر این مدرسه بود. برادری هم داشت به اسم **فرهنگ** که با پسردایی من در بانک سپه همکار بود. با معرفی ایشان در آنجا اسم نوشتم و تا کلاس دهم درس خواندم.  
● **فرجی:** استاد نگفتید که اولین مواجهه شما با درس ریاضی چگونه بود؟

● **دارابی:** همان‌طور که گفتم، دایی‌ام مهندس بود. یک پسر دایی هم داشتم که شاید آقای **رستمی** بشناسد، **داوود بابایی**. ایشان مسائل ریاضی طرح می‌کرد و بین خانواده‌ها رد و بدل می‌شد. مثلاً سه مرد

و سه زن می‌خواستند از رودخانه‌ای رد شوند و... من ۱۰-۹ ساله که بودم این مسائل را می‌شنیدم. روی این اصل به ریاضیات علاقه‌مند شدم.

● **فرجی:** دبیرستان چه سالی تمام شد و ورودتان به دانشگاه کی بود؟

● **دارابی:** دبیرستان در سال ۱۳۳۷ تمام شد. دانش‌سرای عالی شبانه تازه در سیدخندان به راه افتاده بود. من به آنجا رفتم.  
● **فرجی:** از معلمان دوران دبیرستان کسی خاطراتان هست؟

● **دارابی:** بله، آقای **کهن** که معلم رسم و نقاشی ما بود. آقای **وطن‌شناس** بود که شیمی درس می‌داد. این‌ها بیشتر روی من اثر گذاشتند.

● **فرجی:** ورود به دانش‌سرا چه سالی بود؟

● **دارابی:** فکر می‌کنم سال ۱۳۳۸ بود. من در رشته‌های فیزیک و ریاضی قبول شده بودم، ولی به ریاضی علاقه داشتم و به این رشته رفتم.

● **فرجی:** خاطره‌ای از آن دوران دارید؟  
● **دارابی:** استادان جالبی داشتیم. مثلاً استاد ریاضی داشتیم آنالیز را درس می‌داد و اگر در ورقه امتحان اشتباه می‌کردیم، به آن سؤال نمره منفی می‌داد. یا دکتر **هشترودی** بود که می‌گفتند شاید درسش را خوب درک نکنید، ولی از شخصیتش استفاده کنید. همه عاشق او بودیم. دکتر هشترودی هفته‌ای یک بار می‌آمد و بیشتر از پیشرفت‌هایی که در شوروی صورت گرفته بود، برای ما حرف می‌زد. مثلاً در آنجا پنبه رنگی می‌کارند یا سیبی کاشته‌اند اندازه یک هندوانه.

● **میرشهرام صدر:** اگر آن موقع اینترنت بود و شما خودتان این اخبار را می‌گرفتید، دیگر دکتر هشترودی برای شما جذابیتی نداشت؟

● **دارابی:** چرا، خودش هم شخصیت جالبی داشت. مثلاً اگر آن استاد منفی دو می‌داد، ایشان نمره ۲۲ می‌داد! چنین روحیه‌ای داشت. یا سؤال را می‌داد و خودش می‌رفت. کسی را هم رد نمی‌کرد.

**رستمی:** دکتر هشترودی استاد ما هم بود. ایشان دو ویژگی داشت: یکی این که دستی هم در ادبیات داشت و می‌گفتند شعر هم می‌گوید. علاوه بر این، خودش در آنچه که تعریف می‌کرد، شرکت داشت. مثلاً می‌گفت محاسبات مربوط به مدار قمر مصنوعی شوروی را من و چند نفر دیگر در مسکو انجام دادیم. خود این موضوع به ما احساس لذت می‌داد که فردی از ایران در چنین جایگاهی قرار گرفته است.

● **فرجی:** گفته شد که استاد هشترودی به ادبیات هم علاقه و توجه داشت. گرایش شما به ادبیات از همین جا و دوران دانش‌سرا آغاز شد؟

● **دارابی:** بیشترین تأثیر ادبی را مادرم بر من گذاشت که در دوران کودکی ما برایمان شعر می‌خواند. آن‌ها از باکو که آمده بودند دو صندوق کتاب ادبی و ریاضی آورده بودند. مثلاً اولین کتابی که تألیف کردم، یعنی «درخت سیب و پسرک فقیر» نام داشت. خود درخت سیب شعری بود که مادرم برای من می‌خواند. من این درخت سیب را در داستانم در یک شیب قرار دادم که اختلاف طبقاتی را نشان بدهد. سیب بالا بود و یک کاج پایین. من صحبت‌های این دو را کتاب کردم.

● **فرجی:** اجازه بدهید که به دوران دانش‌سرا برگردیم. بعد از این که فارغ‌التحصیل شدید، چه کار کردید؟

● **دارابی:** سال اول را در دبیرستان باباطاهر بودم که برایتان تعریف کردم، دانش‌آموزان زرتگی داشت. سالی که من دانش‌سرا بودم، فقط دو سه نفر فارغ‌التحصیل داشت: از جمله یکی من بودم و یکی هم آقای به اسم **علی بلندی** و آقای **رخشنده**. ما باید می‌رفتیم شهرستان. ولی من آن سال را تهران ماندم. بعد هم حکم مرا نوشتند و فرستادند رشت. یک سال و نیم رشت بودم، ولی وسط سال نماندم و به تهران آمدم.

● **فرجی:** چرا؟

● **دارابی:** یکپو باران شدید می‌آمد؛ مثلاً ۲۱ روز. من دیدم که واقعاً نمی‌توانم بمانم.

آدم تهران و دیگر نفرتم. بعد از ۳۰-۲۰ روز، آمدم سراغم؛ چون گفته بودم مریض هستم. واقعاً هم مریض بودم. این بار مرا فرستادند قزوین. آقای **رجایی** را دستگیر کرده بودند و کلاس‌هایش خالی بود.

● **فرجی:** این چه سالی بود؟

● **دارابی:** باید سال‌های ۴۴-۱۳۴۳ باشد. من آنجا در یک دبیرستان و یک هنرستان درس می‌دادم. به هر حال من یک سال در قزوین ماندم. بعد به تاکستان رفتم. آقای به اسم **حاجی‌زاده** که آمد سراغ من و گفت که ما در تاکستان یک کلاس شش‌طبیعی داریم. یک نفر را می‌خواهیم که هم ریاضیات و هم فیزیکش را تدریس کند. قبول کردم، به شرطی که دو روز بروم و یک روز به جای من یک نفر دیگر تدریس کند و من حق التدریس او را بپردازم. با این شرط رفتم تاکستان و هفت سال آنجا تدریس کردم.

● **فرجی:** در آن موقع ازدواج کرده بودید؟

● **دارابی:** من در سال ۱۳۴۹ ازدواج کردم. حالا یک پسر و یک دختر دارم، هر دو مهندس هستند.

● **فرجی:** بعد از دوره تاکستان چه اتفاقی افتاد؟

● **دارابی:** من در آنجا برای بچه‌ها کتاب می‌بردم. یک‌بار مرا به ساواک احضار کردند. البته این در قزوین بود. یک نفر آمد و خیلی مؤدب با من صحبت کرد. گفت ما شنیده‌ایم که در آنجا عده‌ای دارند شلوغ می‌کنند. شما به ما گزارش بدهید. گفتم من هفته‌ای دو روز می‌روم تاکستان و اصلاً کسی را آنجا نمی‌شناسم. طرف که دید چیزی از من در نمی‌آید، دیگر چیزی نگفت. من برگشتم تاکستان. تاکستانی‌ها دو طایفه هستند: **رحمانی** و **طاهرخانی**. آن‌ها یک ریش سفید داشتند که مرد قدبلندی بود. او مرا صدا کرد و گفت: پسر، تاروزی که توی تاکستان هستی، نمی‌گذارم کسی دست به تو بزند. ولی این بچه‌ها آن‌طور هم که تو فکر می‌کنی، نیستند. تو با آن‌ها صحبت می‌کنی و می‌روند و یک حرف‌های

دیگر می‌زنند. گفتم: پس من دیگر از تاکستان باید بروم. رفتم سر کلاس و گفتم می‌خواهم بروم. بچه‌ها ناراحت شدند.

● **فرجی:** چه سالی این اتفاق افتاد؟

● **دارابی:** ۱۳۵۳ بود. به تهران و به دبیرستان ابوریحان برگشتم.

● **امیری:** همان دبیرستانی که خودتان در آن درس خوانده بودید؟

● **دارابی:** بله، ولی جایش عوض شده بود.  
● **امیری:** کجا آمده بود؟

● **دارابی:** دوره قدیم، خیابان دلگشا بود و دوره جدید، نزدیک میدان خراسان.

● **فرجی:** با خانواده کلاً برگشتید تهران؟  
● **دارابی:** خانواده‌ام تهران بودند. من ساعت چهار صبح سوار اتوبوس می‌شدم و قبل از هشت به تاکستان می‌رسیدم. خود معلم‌ها دیرتر از من می‌آمدند. مدیری داشتم که به آن‌ها می‌گفت این دارایی از تهران آمده و الان سر کلاس است، شما هنوز نیامده‌اید. من بعد از ظهرها هم ساعت ۴ برمی‌گشتم به تهران. البته هفته‌ای دو روز بود. بین راه هم زبان روسی مطالعه می‌کردم. بعد هم به کلاس زبان می‌رفتم.  
● **فرجی:** در تهران تعاملتان با دانش‌آموزان چگونه بود؟

● **دارابی:** بچه‌ها نمی‌دانستند که من کتاب هم نوشته‌ام و وقتی می‌فهمیدند، علاقه‌شان بیشتر می‌شد.

● **فرجی:** چه سالی بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** سال ۱۳۶۴ بود و به دفتر تألیف کتب درسی رفتم. ۱۱ سال هم این‌جا بودم.

● **فرجی:** خیلی ممنون استاد. فکر می‌کنید این امکان وجود دارد که تجربیات ارزنده خودتان را در حوزه آموزش ریاضی به شکل کتاب یا در قالب مقالاتی برای مجله برهان ریاضی منتشر کنید؟

● **دارابی:** من یکی از انبوه معلمان هستم و استادان بزرگ‌تر از من هم وجود دارند. ولی در حدی که در مجله برهان جا داشته باشد، بله آماده‌ام که این کار را انجام دهم.



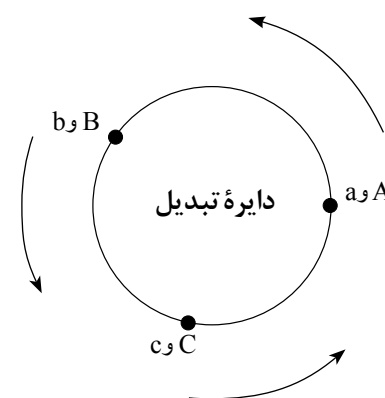
میرشهرام صدر



# دایره تبدیل و کاربرد آن در ساده کردن عبارتهای جبری

**کلیدواژه‌ها:** دایره تبدیل، ساده کردن کسرها

اگر روی پیرامون یک دایره، سه نقطه به نامهای  $a, b, c$  یا  $A, B, C$  مانند شکل ۱ در نظر بگیریم و در جهت دایره مثلثاتی روی پیرامون دایره حرکت کنیم، از  $a$  به  $b$  و از  $b$  به  $c$  و از  $c$  به  $a$  می‌رسیم.



از این خاصیت، هم در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث در مثلثات و هندسه استفاده می‌کنیم و هم در ساده کردن کسرهایی تبدیلی. برای مثال، در مثلث  $ABC$  به اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  داریم:

حال اگر در این فرمول به جای  $a$  و  $b$  و  $c$  به جای  $a, b, c$  و به جای  $a, c$  قرار دهیم خواهیم داشت:

اینک اگر در این فرمول  $a$  را به  $b$  و  $b$  را به  $c$  و  $c$  را به  $a$  تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**تذکر:** از این خاصیت در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث، چه در هندسه و چه در مثلثات می‌توان استفاده کرد؛ مثل فرمول‌های سه ارتفاع و فرمول‌های سه میانه.

## کاربرد دایره تبدیل در ساده کردن کسرها

**مسئله ۱:** حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a + b} + \frac{2a^2 + c^2 + 3bc - ba - ca}{b + c} + \frac{2c^2 + a^2 + 3ca - cb - ab}{c + a}$$

**حل:** اگر برای یافتن حاصل عبارت فوق مخرج مشترک بگیریم، عبارت صورت، خیلی مفصل، و احتمال اشتباه هم زیاد خواهد شد. وقت زیادی را هم خواهد گرفت. اگر توجه کنیم، کسر دومی تبدیل کسر اولی و کسر سومی تبدیل کسر دومی است. بنابراین فقط کسر اولی را ساده و جواب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{کسر اول} &= \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a + b} \\ &= \frac{2a^2 + 2ab + b^2 + ab - ac - bc}{a + b} \\ &= \frac{2a(a + b) + b(a + b) - c(a + b)}{a + b} \\ &= \frac{(a + b)(2a + b - c)}{a + b} = 2a + b - c \end{aligned}$$

چون کسر دومی تبدیل کسر اولی است، پس جواب کسر

دومی هم تبدیل جواب کسر اولی است. به همین ترتیب، چون کسر سومی تبدیل کسر دومی است، در نتیجه جواب کسر سومی هم تبدیل جواب کسر دومی است.

$$\begin{aligned} \text{حاصل کسر اولی} &= 2a + b - c \\ \text{حاصل کسر دومی} &= 2b + c - a \\ \text{حاصل کسر سومی} &= 2c + a - b \\ \Rightarrow \text{مجموع سه کسر} &= 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c) \end{aligned}$$

**مسئله ۲:** اگر  $a + b + c = 0$ ، ولی  $a, b$  و  $c$  مخالف صفر باشند، ثابت کنید:

$$\begin{aligned} &\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) \\ &+ \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) = 0 \end{aligned}$$

**حل:** با کمی دقت متوجه می‌شویم، عبارت دومی تبدیل عبارت اولی و عبارت سومی تبدیل کسر دومی است. پس ابتدا کسر اولی را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 0 \Rightarrow b + c = -a \\ \text{کسر اولی} &= \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) = \frac{-a}{bc}((b+c)^2 - 2bc - a^2) \\ &= \frac{-a}{bc}((-a^2) - 2bc - a^2) = \frac{-a}{bc}(a^2 - 2bc - a^2) \\ &= \frac{-a}{bc}(-2bc) = 2a \end{aligned}$$

چون کسر دوم تبدیل یافته کسر اول است، پس جواب کسر دوم  $2b$  و جواب کسر سوم  $2c$  خواهد شد. بنابراین:

$$2a + 2b + 2c = 2(a + b + c) = 2(0) = 0$$

**مسئله ۳:** اگر  $a, b$  و  $c$  مخالف صفر، و  $a + b + c = 0$  باشد، آن‌گاه حاصل عبارت  $P$  را بیابید.

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$$

**حل:** در این مسئله هم کسر دوم تبدیل کسر اول و کسر سوم تبدیل کسر دوم است، پس:

$$\begin{aligned} \text{کسر اول} &= \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}, a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \\ \text{کسر اول} &= \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab - c^2} = \frac{1}{(-c)^2 - 2ab - c^2} \\ &= \frac{1}{c^2 - 2ab - c^2} = \frac{1}{-2ab} \\ \text{کسر اول} &= \frac{-1}{2ab} \\ \text{کسر دوم} &= \frac{-1}{2bc} \\ \text{کسر سوم} &= \frac{-1}{2ca} \\ \Rightarrow \text{مجموع سه کسر} &= \frac{-1}{2ab} + \frac{-1}{2bc} + \frac{-1}{2ca} = \frac{-c-a-b}{2abc} \\ &= \frac{-(a+b+c)}{2abc} = 0 \end{aligned}$$





# دنباله ها

## دنباله های حسابی و هندسی

**کلیدواژه ها:** دنباله حسابی، دنباله هندسی، قانون دنباله، جمله عمومی، دنباله بازگشتی، قدرنسبت، واسطه حسابی، واسطه هندسی



### ● حل:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 q^4 = 80 \\ a_9 = a_1 q^8 = 1280 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_9}{a_5} = \frac{1280}{80} \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow a_1 = 5$$

پس دو دنباله با این ویژگی وجود دارد:

$$\begin{cases} 5, 10, 20, \dots \\ 5, -10, 20, \dots \end{cases}$$

و جمله بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$$a_{21} = a_1 q^{20} = 5 \times 2^{20}$$

◀ **مثال ۲.** ثابت کنید هیچ دنباله هندسی وجود ندارد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملاتی از آن باشند.

● **حل:** اگر چنین باشد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملات  $a_m$ ،  $a_n$  و  $a_p$  یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$a_m = a_1 q^{m-1} = 11, a_n = a_1 q^{n-1} = 12, a_p = a_1 q^{p-1} = 13$$

و از تقسیم دویه دوی این تساوی ها نتیجه می شود:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} = \frac{11}{12}, \frac{a_n}{a_p} = q^{n-p} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow q = \left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{1}{n-p}} \Rightarrow \left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{1}{n-p}} = \left(\frac{12}{13}\right)^{m-n}$$

$$\Rightarrow 11^{n-p} \times 13^{m-n} = 12^{m-p}$$

و این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

### دنباله هندسی

دنباله ای که هر جمله آن از ضرب مقداری ثابت در جمله مقابل به دست آید، «دنباله هندسی» نامیده می شود؛ یعنی:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

مقدار ثابت (q) را قدرنسبت دنباله می نامیم. بدیهی است که اگر  $q > 1$  باشد، دنباله صعودی و اگر  $0 < q < 1$  دنباله نزولی است. اگر  $q = 1$  باشد، دنباله ثابت است. اگر هم  $q < 0$  باشد، جمله ها یک در میان مثبت و منفی اند. دنباله های زیر مثال هایی از دنباله های هندسی هستند:

$$2, 6, 18, 54, \dots \quad (q = 3)$$

$$3, -6, 12, -24, \dots \quad (q = -2)$$

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots \quad (q = \frac{1}{2})$$

$$3, 3, 3, \dots \quad (q = 1)$$

$$3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots \quad (q = -\frac{1}{3})$$

شبهه روش استقرایی که در مورد دنباله حسابی دیدیم، در مورد دنباله هندسی نیز می توان نوشت:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (\text{جمله عمومی دنباله هندسی})$$

◀ **مثال ۱.** یک دنباله هندسی تشکیل دهید که جمله پنجم آن ۸۰ و جمله نهم آن ۱۲۸۰ باشد. جمله بیست و یکم این دنباله چیست؟

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه دوم: لطف های ریاضی

و دوستش ادامه داد: «خُب سر همین شرط می بندیم.» وقتی پیش خدمت آمد، بعد از سفارش غذا، ریاضی دان ها از او پرسیدند: «آیا می دانی حاصل  $(a+b)^2$  چه می شود؟» او بی درنگ جواب داد: «معلوم است:  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ » و بعد از کمی مکث ادامه داد: «البته در صورتی که a و b ضد تعویض پذیر باشند!»

در مورد پاسخ پیش خدمت باید کمی توضیح بدهیم تا ظرافت موضوع روشن شود. در یک عمل دوتایی (مانند جمع، ضرب و...) بین دو متغیر a و b، عمل را تعویض پذیر گوئیم هرگاه:  $a * b = b * a$ . یعنی خاصیت جابه جایی داشته باشد. مثلاً عمل جمع تعویض پذیر است. در مقابل عمل را تعویض ناپذیر گوئیم اگر چنین نباشد. اما عمل را «ضد تعویض پذیر»<sup>۱</sup> گوئیم هرگاه  $a * b$  و  $b * a$  قرینه هم باشند:  $a * b = -b * a$ . یعنی جمع آن ها مساوی صفر (یا عضو خنثای عمل) باشد. با این شرط می توان نوشت:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underbrace{ab+ba}_{=0} + b^2 = a^2 + b^2$$

و می بینیم که پیش خدمت درست پاسخ داده است!

● این داستان واقعی است: در یک آزمون دبیرستانی در کشور انگلستان، پرسشی به صورت زیر آمده است:

**سؤال:** شما چند بار می توانید عدد ۷ را از ۸۳ کم کنید، تا جواب مثبت بماند؟ نتیجه نهایی چه خواهد بود؟ جواب یکی از دانش آموزان به این صورت بود: «من هر چند بار که بخواهم می توانم این عمل تفریق را انجام دهم و جواب همیشه مساوی ۷۶ خواهد بود!»

فلسفه، بازی با مفاهیم عینی است و نه قواعد. ریاضیات بازی با قواعد است و نه مفاهیم عینی. «یان الیس»

● این حکایت را به جان فن نویمان (۱۹۵۷-۱۹۰۳)، ریاضی دان مشهور و معاصر مجاری - که به تعبیری پدر علم سبیرنتیک محسوب می شود - نسبت داده اند. می گویند روزی نویمان با سرعت می رفت تا به کلاس درس خود در «دانشگاه ام آی تی» برسد. در راهروی منتهی به کلاس دانشجویی با شتاب خود را به او رساند و به او که با عجله می خواست وارد کلاس شود گفت: «استاد ببخشید یک سؤال کوچک داشتیم!»

استاد با بی حوصلگی گفت: «ببینم چیست.» دانشجو ورقه ای را که در دست داشت و روی آن مسئله ای درباره محاسبه یک انتگرال معین بود، به استاد داد. نویمان با عجله نگاهی به آن انداخت و گفت: «خُب این که معلوم است، می شود  $\frac{2\pi}{5}$ »

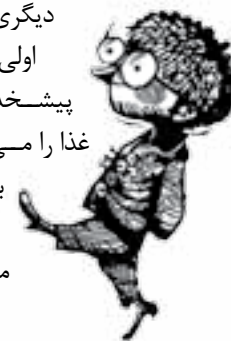
دانشجو گفت: «می دانم استاد، جواب زیر همین صفحه نوشته شده است. راه حل را می خواهم!»

استاد کمی فکر کرد و پس از قدری مکث گفت: «آره... آره خُب، بگذار ببینم ... بله بله، می شود  $\frac{2\pi}{5}$ !»

دانشجو گفت: «بله استاد می دانم! ولی راه حل آن چیست؟»

و استاد گفت: «خُب من از دو راه متفاوت آن را حل کردم!»

● دو ریاضی دان برای صرف شام با هم به یک رستوران رفته بودند. یکی از آن ها به دیگری رو کرد و گفت: «بیا شرطی ببندیم که هر کس بازنده شد، پول شام را بدهد!» دیگری گفت: «خُب چه شرطی؟» اولی دوباره گفت: «فکر می کنی پیش خدمتی که برای ما فهرست غذا را می آورد، حاصل  $(a+b)^2$  را بداند؟!» دیگری گفت: «بعید می دانم!»



پی نوشت .....  
1. Anti commutative

### شرط تشکیل دنباله هندسی

مشابه آن چه که در مورد دنباله حسابی دیدیم، اگر  $a, b, c$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، می توان نوشت:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q \Rightarrow b^2 = ac$$

و این شرط آن است که سه عدد متوالی  $a, b, c$  تشکیل دنباله هندسی بدهند. همچنین،  $b = \sqrt{ac}$  را واسطه (میانگین) هندسی  $a$  و  $c$  می نامند. مثلاً عدد ۶ واسطه هندسی ۴ و ۹ است.

**مثال ۳.**  $m$  را طوری بیابید که سه عدد  $m, m+4, m$  و  $9m$  دنباله هندسی تشکیل دهند.

**حل:**  
 $m(9m) = (m+4)^2 \Rightarrow 9m^2 - 8m - 16 = 0$   
 $\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$  یا  $m = 2$

### واسطه های هندسی بین دو عدد

مشابه آن چه که در مورد دنباله حسابی دیدیم، اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $m$  عدد (واسطه هندسی) قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنباله هندسی دهند، از دستور  $q = \frac{m+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$  قدرنسبت را به دست می آوریم.

**مثال ۴.** بین دو عدد ۹ و ۷۲، دو واسطه هندسی درج کنید

**حل:**  
 $q = \sqrt[3]{\frac{72}{9}} = 2 \Rightarrow 9, \underbrace{18, 36}, 72$   
واسطه های هندسی

### مجموع جملات دنباله هندسی

روشی که برای تعیین مجموع  $n$  جمله نخست یک دنباله هندسی وجود دارد آن است که پس از نوشتن  $S_n, qS_n$  را تشکیل دهیم و طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم.

**مثال ۵.** مجموع  $n$  جمله نخست دنباله زیر را به دست آورید:

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

**حل:**  
$$\begin{aligned} - \left\{ \begin{aligned} S_n &= 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n \\ 2S_n &= 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n + 2^{n+1} \end{aligned} \right. \\ \hline S_n &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

در حالت کلی با همین روش برای هر دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  و جمله نخست  $a_1$  داریم:

**مثال ۶.** مجموع ۱۰۰ جمله نخست دنباله زیر را به دست آورید:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

حداقل چند جمله از دنباله فوق را با هم جمع کنیم تا مجموع از  $1/999$  تجاوز کند؟

**حل:**  
$$S_{100} = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{100}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{100} - 1}{2^{99}} = \frac{2^{100} - 1}{2^{99}}$$
  
$$= 2 - \frac{1}{2^{99}}$$
  
$$S_n = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} > 1/999$$
  
$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^{n-1} > 1000 \Rightarrow \min(n-1) = 10$$
  
$$\Rightarrow \min(n) = 11$$
 (باید حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.)

**مثال ۷.** یک دنباله هندسی تشکیل دهید که مجموع هشت جمله اول آن ۶۵۶۰ و مجموع چهار جمله اول آن ۸۰ باشد.

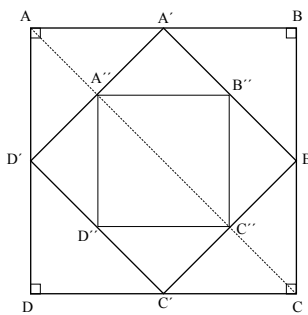
**حل:**

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_8 = a_1 \frac{1-q^8}{1-q} = 6560 \\ S_4 = a_1 \frac{1-q^4}{1-q} = 80 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{6560}{80} = 82 \\ \Rightarrow \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{(1-q^4)} = 82 \Rightarrow q^4 + 1 = 82 \\ \Rightarrow q^4 = 81, q = \pm 3 \Rightarrow (q=3, a_1=2) \text{ یا } (q=-3, a_1=-4) \end{aligned}$$

یعنی دو دنباله عددی با ویژگی های فوق به صورت زیر وجود دارد:

$2, 6, 18, \dots$  و  $-4, -12, -36, \dots$

**مثال ۸.** وسط های اضلاع مربعی به ضلع واحد را به هم وصل می کنیم تا مربعی دیگر به دست آید. وسط های اضلاع این مربع را نیز به یکدیگر وصل می کنیم و...  
الف) اگر این عمل را ۱۰ بار تکرار کنیم، مجموع مساحت ها و مجموع محیط های این مربع ها را به دست آورید.  
ب) این عمل را چند بار تکرار کنیم تا مجموع مساحت های مربع های داخلی از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود؟



**حل: الف)** مطابق شکل، مربع ABCD به ضلع واحد مفروض است. اگر وسط های اضلاع این مربع را به هم وصل کنیم، مربع  $A'B'C'D'$  به دست می آید که مطابق شکل، اضلاع آن موازی قطر های مربع اصلی و طول آنها نصف طول قطر AC است. (چرا؟) بنابراین داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A'B' = C'D' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی طول ضلع مربع  $A'B'C'D'$  مساوی  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و لذا مساحت آن  $\frac{1}{2}$  است. به همین ترتیب اگر وسط های اضلاع مربع  $A'B'C'D'$  را به یکدیگر وصل کنیم، مربع  $A''B''C''D''$  به دست می آید که طول ضلع آن مساوی  $\frac{1}{2}$  و مساحت آن  $\frac{1}{4}$  است. بنابراین مساحت ها به صورت زیر یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{2}$  تشکیل می دهند:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

مجموع مساحت های ۱۰ مربع از این مربع ها برابر است با:

$$S_{10} = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}$$

و محیط های مربع ها نیز یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  تشکیل می دهند:

$$4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \dots$$

مجموع ۱۰ جمله این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = 4 \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{31(2 + \sqrt{2})}{8}$$

ب) مساحت های مربع های داخلی، جملات یک دنباله

هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{2}$  و جمله نخست  $\frac{1}{2}$  هستند:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$



برای آنکه مجموع آنها از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود، باید داشته باشیم:

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} > 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow \min(n) = 7$$

### مسائل ترکیبی از دنباله‌ها

۱. اگر  $\frac{1}{a+b}$ ،  $\frac{1}{a+c}$  و  $\frac{1}{b+c}$  جملات متوالی از یک دنباله حسابی باشند، ثابت کنید  $a^2$ ،  $b^2$ ،  $c^2$  نیز جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند.

● حل: طبق فرض داریم:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$ . از این فرض و با عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$$

$$\Rightarrow 2(ab+ac+b^2+bc) = (a^2+2ab+ac+ac+2bc+c^2)$$

$$\Rightarrow 2ab+2ac+2b^2+2bc = a^2+2ab+2ac+2bc+c^2$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2$$

و این نشان می‌دهد که  $a^2$ ،  $b^2$ ،  $c^2$  دنباله حسابی تشکیل می‌دهند.

۲. هرگاه به چهار جمله متوالی یک دنباله حسابی به ترتیب اعداد ۵، ۶، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم، یک دنباله هندسی به دست می‌آید، دنباله حسابی را بنویسید.

● حل: اگر  $a$ ،  $a+d$ ،  $a+2d$  و  $a+3d$  جملات یک دنباله حسابی باشند،  $a+5$ ،  $a+6+d$ ،  $a+9+2d$  و  $a+15+3d$  جملات دنباله هندسی هستند. بنابراین داریم:

$$(a+2d+9)^2 = (a+3d+15)(a+d+6)$$

$$\text{و } (a+d+6)^2 = (a+5)(a+2d+9)$$

$$\begin{cases} d^2+2d-2a=9 \\ d^2-3a+3d=9 \end{cases} \text{ می‌رسیم. با کم کردن رابطه بالا از پایین}$$

$$\text{نتیجه می‌شود: } -d+a=0 \Rightarrow a=d$$

با جای گذاری در رابطه اول خواهیم داشت:

$$a^2+2a-2a=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

از آنجا داریم:  $d=\pm 3$  و دو دسته جواب برای دنباله حسابی به دست می‌آید:

$$3, 6, 9, 12, \dots \text{ و } -3, -6, -9, -12, \dots$$

۳. در یک دنباله هندسی مجموع  $2n$  جمله اول، سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

● حل: با توجه به فرض مسئله داریم (جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $q$  است):

$$3(a+aq^2+aq^4+\dots+aq^{2n-2})=a+aq+aq^3+\dots+aq^{2n-1}$$

$$\Rightarrow 3a \frac{q^{2n}-1}{q^2-1} = a \frac{q^{2n}-1}{q-1} \Rightarrow \frac{3}{q^2-1} = \frac{1}{q-1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{q+1} = 1 \Rightarrow q=2$$

۴. مجموع همه اعداد سه رقمی را که باقی‌مانده تقسیم آنها بر ۵ مساوی ۲ می‌شود، به دست آورید.

حل: همه این عددها به صورت  $5k+2$  هستند که اولین آنها  $5 \times 2 + 2 = 12$ ، یعنی ۱۲، و آخرین آنها  $5 \times 199 + 2 = 997$ ، یعنی ۹۹۷ است. عددهای این عددها هم مساوی  $1 + 20 - 99 = 180$  یعنی ۱۸۰ عدد است. لذا مجموع آنها برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{180}{2}(12 + 997) = 98910$$

۵. مجموع  $n$  جمله نخست از دنباله زیر را به دست آورید:

$$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{1111\dots 1}_{n \text{ رقم}}$$

● حل: می‌توان نوشت:

$$\underbrace{111\dots 1}_{n \text{ رقم}} = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^{n-1}$$

مجموع فوق، مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۱۰ است. بنابراین:

$$\underbrace{111\dots 1}_{n \text{ رقم}} = 1 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

و از آنجا مجموع  $n$  جمله نخست دنباله اصلی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{n \text{ رقم}} &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9} \\ &= \frac{10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n}{9} = \frac{10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} \end{aligned}$$

۶. در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد:

$$\text{(الف) } 1, 5, 9, \dots \quad \text{(ب) } 4, 7, 10, \dots$$

(امتحان نهایی حسابان - خرداد ۸۹)

● حل: دنباله‌های فوق دارای قدرنسبت ۳ و ۴ هستند و جمله‌های عمومی آنها به ترتیب  $a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$  و  $a'_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$  است.

بنابراین از حل نامعادله‌های  $a_n \geq 100$  و  $a'_n \geq 100$  می‌توان اولین عدد سه رقمی دو دنباله را به دست آورد:

$$4n - 3 \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{103}{4} \Rightarrow n \geq 26$$

$$3n + 1 \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{99}{3} \Rightarrow n \geq 33$$

$$\begin{cases} a_n : 101, 105, 109, 113, \dots \\ a'_n : 100, 103, 106, 109, \dots \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که اولین جمله مشترک سه رقمی دو دنباله، ۱۰۹ است. چون ک.م.م قدرنسبت‌ها ۱۲ می‌شود، پس کافی است دنباله‌ای با شروع از ۱۰۹ و قدرنسبت ۱۲ بنویسیم که جملات آن همگی عددهای سه رقمی باشند:

$$109, 121, \dots, a''_n = 109 + (n-1)12 = 12n + 97 \leq 999 \Rightarrow n \leq 75$$

یعنی ۷۵ جمله مشترک سه رقمی در دو دنباله وجود دارد.

۷. برای محافظت در برابر تابش مضر مواد پرتوزا، لایه‌های محافظتی ساخته شده‌اند که تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(امتحان نهایی حسابان - خرداد ۸۹)

● حل: اگر میزان پرتوهای مضر را پس از عبور از اولین، دومین، سومین و... لایه محافظ (به نسبت کل اشعه) بنویسیم، دنباله هندسی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

که جمله عمومی آن به صورت  $a_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^n}$  است. برای آنکه شدت تابش پرتوها، پس از عبور از  $n$  لایه، ۹۹ درصد کاهش یابد، باید میزان اشعه حداکثر ۱ درصد میزان اولیه باشد؛ یعنی داریم:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow \min(n) = 7$$

پس حداقل باید از هفت لایه استفاده کرد که در آن صورت میزان اشعه عبور کرده مساوی  $\frac{1}{128}$  مقدار اولیه می‌شود و بیشتر از ۹۹ درصد آن کاهش می‌یابد.

## تمرین

۱. یک دنباله هندسی بنویسید که تفاضل جمله سوم و اول آن ۹ و تفاضل جمله پنجم و سوم آن ۲۶ باشد (جواب:  $a_1 = -3$  و  $q = \pm 2$ ).

۲. جمله عمومی یک دنباله هندسی را بنویسید که مجموع ۶ جمله اول آن ۲۵۲ و مجموع سه جمله اول آن ۱۲۸ باشد (جواب:  $a_n = 2^{n+1}$ ).

۳. ثابت کنید  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{7}$  نمی‌توانند جملاتی از یک دنباله حسابی یا هندسی باشند.

۴. بین دو عدد ۳ و ۱۹۶۸۳، هفت واسطه هندسی درج کنید.

۵. وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری حاصل شود. این کار را ادامه می‌دهیم. چند بار این عمل باید تکرار شود تا مجموع مساحت‌های مثلث‌های به دست آمده از  $1/333$  برابر مساحت مثلث اولیه بیشتر شود؟ (جواب: ۶ بار)

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه سرمه یک مسئله دو دروازه

در شماره قبل یک مسئله درباره چند معامله و سود و زیان حاصل از آن‌ها و سه جواب متفاوت درباره سود نهایی داشتیم که پاسخ و تحلیل آن را در این شماره و در انتهای این بخش آورده‌ایم. در این شماره می‌خواهیم یک مسئله دیگر از این دست مطرح کنیم:

مسئله: میمونی روی یک ستون ایستاده است. پسر بچه بازیگوشی هم روبه‌روی

او ایستاده است و چشم در چشم او دارد. ناگهان پسر بچه تصمیم می‌گیرد که با میمون کمی شوخی کند! سپس شروع می‌کند به دور او چرخیدن. اما میمون بازیگوش نیز هم‌زمان با او شروع به چرخیدن به دور خودش (در همان بالای ستون) می‌کند. در همان حال به چشمان پسر بچه نگاه می‌کند! تا این که پسر بچه یک دور کامل دور ستون می‌زند. آیا پسر بچه دور میمون هم چرخیده است؟! روشن است که پاسخ آری یا نه (شاید هم بله یا خیر!) است، اما کدام یک پاسخ صحیح است؟ منتظر پاسخ شما و دلایل درستی آن‌ها هستیم.

در شماره ۷۸ پاسخ‌ها را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

ریاضیات نوعی سوءاستفاده قاعده‌مند از نام‌گذاری‌های پیشرفته برای رسیدن به اهداف معین است!

«پل - هنینگ کمپ»





کلیدواژه‌ها:

شریل برگر، دکتر مهدی بهزاد، نغمهٔ ثمینی، اویلر، کونیگسبرگ، کلود برج، دکتر مهدی رجبعلی‌پور

# افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان

حل برخی ظرف ده‌ها سال گاهی رخ نموده و دل برده، اما به سادگی تسلیم نشده است.

یکی از برکات فرعی افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان، طرح مسائل تازهٔ بسیاری است که احتمالاً حل بعضی، ذهن زیبای ریاضی‌دانان قَدَر را طلب خواهد کرد و نیازمند ده‌ها سال صرف وقت خواهد بود.

اما اهمیت این کتاب تنها در معرفی نظریهٔ گراف‌ها و کاربرد آن نیست، بلکه از این جهت است که مطلب آن به صورت نمایش‌نامه‌ای شیرین تنظیم شده است تا هرچه دلنشین‌تر باشد، و به قول سعدی در «گلستان»: «داروی تلخ نصیحت به شهاد ظرافت برآمیخته، تا طبع ملول ایشان از دولت قبول محروم نماند.» [کلیات سعدی، تصحیح محمدعلی فروغی]

مطالب آن، به شیوهٔ بحث سقراطی به صورت نمایش‌نامه‌ای درآمده است که خوانندهٔ جوان را گاهی تا آن سوی صحرای خدا<sup>۱</sup> می‌برد و به قول استاد شفیعی کدکنی نقشی آورده که به کجاها که نمی‌بردش<sup>۱</sup>. باز به قول سعدی در «بوستان»، معماهای مهم و مطرح ریاضی را:

«به پرویزن معرفت بیخته

به شهد ظرافت درآمیخته» [پیشین].

باری همان‌طور که گفتیم، کتاب به صورت نمایش‌نامه تنظیم شده است. ما در این مختصر نمی‌توانیم حق مطلب را ادا کنیم، اما به عنوان مشتی نمونهٔ خروار، پاره‌ای از آغاز و قسمتی از میان و در آخر هم، مطلب پایانی کتاب را همراه قسمت‌هایی از سه تفریظ از سه استاد ارجمند ریاضی در ستایش این اثر، می‌آوریم، و خواننده را به خود کتاب حواله می‌دهیم و به خدایش می‌سپاریم.

اما آغاز نمایش‌نامه

دو جارچی با لباس‌های مضحک در حالی که یکی بر طبل

می‌کوبد و دیگری بر سنج، دوسوی صحنه ایستاده‌اند.

جارچی اول: به هوش و به گوش!

جارچی دوم: به گوش و به هوش!

جارچی اول: ای جنبنده‌ها، خزنده‌ها، پرنده‌ها، چرنده‌ها...

جارچی دوم: ای دکان‌دارها، منصب‌دارها، زمین‌دارها، خانه‌دارها...

جارچی اول: ای گاری‌چی‌ها

جارچی دوم: ای کالسکه‌چی‌ها...

جارچی اول: ای درباری‌ها و ای رعیت‌ها...

جارچی دوم: همه به گوش و همه به هوش...

جارچی اول: که سلطان سلطان‌ها، پدر در پدر سلطان

جارچی دوم: پدر جد در پدر جد هم سلطان...

جارچی اول: خلاصه صد پشت آن طرف‌تر هم سلطان...

جارچی دوم: فخر زمین و آسمان...

جارچی اول: پرنورتر از خورشید تابان...

جارچی دوم: پرزورتر از رستم پهلوان...

جارچی اول: پادشاه قدر قدرت سرزمین پرشوکت ما...

جارچی دوم: محبوب همهٔ قلب‌ها...

جارچی اول: عزیز همهٔ جان‌ها...

جارچی دوم: بر لحاف منت گذارده و به خواب عمیق

فرورفته ...

جارچی اول: پس مبدا که صدایی از کسی برخیزد و

نفسی از کسی برآید.

جارچی دوم: مبدا سرفه یا عطسه...

جارچی اول: مبدا راه رفتن و جم زدن...

جارچی دوم: همه به کنج خانه‌ها، بی‌سروصدا...

جارچی اول: و زیر لبی دعا برای پادشاه که به خورشید

رخصت غروب داده و به رعیت و درباری فرصت خواب...

جارچی دوم: آهای به هوش و به گوش!

جارچی اول: به گوش و به هوش!

و بعد تکه‌ای از میانه‌های اثر

پادشاه: خانهٔ علم دیگر چه‌جور جایی است؟ تو میدانی

وزیر اعظم؟

وزیر اعظم: چند فقره سیاهچال دارد و خزانه دارد و...

پادشاه: این که می‌شود همین پایتخت خودمان. تو

می‌دانی زبیده خاتون؟

زبیده خاتون: سرورم از خود بحرالعلوم بپرسید.

پادشاه: ما کسر شأنمان می‌شود چیزی از بحرالعلوم

بپرسیم، شما بپرسید...



بحرالعلوم: خانهٔ علم جای بحث و فحص علمی است. نه برج دارد و نه بارو، چون دشمن ندارد که بخواهد حمله کند با هزار ترفند و نارو. پادشاه خانهٔ علم، علم است و ریاضیات و نجوم. پس جان مردمان دانش دوست، می‌شود بارگاهش. در چنین مکانی نیست حتی یک سیاهچال، زیرا که کسی توطئه نمی‌کند از برای علم و کمال. ثروت دانش است در دارالعلم که هرچه ببخشی بیشتر می‌شود. پس خزانه ندارد با چهل قفل و چهل رمز و چهل نگهبان! این است ای پادشاه، دارالعلمی که من می‌خواهم تا پس از دفع بلا، بسازیدش بی‌خلف وعده.

و این هم پایان کتاب (پس از طرح و حل معماها و بقیهٔ ماجراها):

میدان شهر، جشن و شادمانی برپاست. مردم پایکوبی می‌کنند و شعر می‌خوانند. زبیده و وزیر هم در میان آن‌ها هستند. ساززن‌ها ساز می‌زنند. جوان‌ها با حرکات نمایشی پیش می‌آیند و بحرالعلوم را با خود به میان جمع می‌برند. پادشاه عصبی در گوشه‌ای تنها نشسته است و فقط می‌خورد. روح پدربزرگ خندان پیش می‌آید و می‌رود به طرف بحرالعلوم. بحرالعلوم: به جمع ما خوش آمدید شاه شاهان. اگر به خواب نوه‌تان نمی‌آمدید، ما در سیاهچال می‌مردیم. چه خبر از عالم غیب؟

روح پدربزرگ: من در عالم برزخم. کار حساب و کتابم تمام نشده هنوز نگران این نوهٔ ابلهم بودم که آن هم به خیر گذشت.

بحرالعلوم: شما مرا به فکر تعمیم و تجرید معمای



سه گاف<sup>۱۱</sup> انداختید. حالا بی نهایت معما در آستین دارم.

**روح پدربزرگ:** چندتاش را هم بفرست ما در آن دنیا حل کنیم، بلکه زمان زودتر بگذرد.

**بحرالعلوم:** قصد کرده ایم اسم محل جدید کارمان را بگذاریم دارالعلم پدربزرگ! بلکه گاهی به خواب من و اهل علم هم بیایید و ما را راهنمایی کنید.

**روح پدربزرگ:** اسم منو نگذارید هم، به خوابتون می یام. دیگر باید برگردم. خداحافظ.

**بحرالعلوم:** (با صدای بلند) بی کار شدید، معمای سه آدم و سه آدم خوار و همچنین، معمای سه شوهر حسود را حل کنید. نمی گذارند حوصله تان سر برود.

**روح پدربزرگ می آید به جلوی صحنه و رو به جمعیت می ایستد.**

**روح پدربزرگ:** قصه ما عجالتاً همین جا به سر رسید... باقی اش را می آیم به خوابتان، برایتان تعریف می کنم. شایدم با هم این معماهای پیشنهادهی بحرالعلوم را حل کردیم و... تعمیشتان هم دادیم... پس وعده ما تو خواب شما! نوای شادمانی به اوج می رسد. نور می رود.

**و اما قسمت هایی از سه تفریض استادان ریاضی**

۱. **تفریض دکتر امیدعلی شهینی کرمزاده، استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز:** «این اثر بی شک در نوع خود بی نظیر است؛ یک اثر نمایشی موزون با ماهیت ریاضی با یک بحث ریاضی با زبان نمایش. گامی است شگفت در راستای عمومی کردن ریاضی و همه فهم کردن آن و حتی بهتر فهماندن آن به اهل ریاضی. اولین نکته ظریف در این نمایش نامه پی بردن به بی پیرایه بودن دانش ریاضی و عدم وجود تبعیض در ماهیت آن است. به جنبه های کاربردی ریاضی پرداخته شده است. پیوند خوردن سر نوشت یک شکل چندوجهی با یک دانش یا یک دانشمند به سبکی زیبا به تصویر کشیده شده است.»

۲. **تفریض دکتر رحیم زارع نهندي، استاد دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران:** «یکی از آرزوهای ریاضی دانان دستیابی به روش هایی است که بتوانند مفاهیم ریاضی را به صورتی ملموس و قابل فهم برای مخاطبین عمومی و غیرمتخصص بیان کنند. بی سبب نیست که اتحادیه بین المللی ریاضی دانان در پیام تاریخی خود به مناسبت سال جهانی ریاضی، عمومی کردن ریاضیات را به عنوان یکی از وظایف کلیدی جامعه جهانی ریاضی در ورود به هزاره سوم میلادی اعلام کرد.

نمایش نامه با خواب پریشان پادشاهی مغرور و کم شعور و اطرافیانی که هر کدام در مدح و چاکری پادشاه گوی سبقت را از دیگری می رباید، شروع می شود. بلایی در راه است و باید بزرگان پایتخت به طرف دیگر رودخانه مرزی شهر منتقل شوند. به توصیه وزیر اعظم، پادشاه دستور می دهد سراغ دانشمندی بروند که در زندان است و از وی می خواهند چاره جویی کند و بدون بیم تباری قدرت مداران در غیبت پادشاه، برای حل مسئله انتقال آن ها با کشتی، راه حلی ارائه کند. شرط دانشمند برای حل مشکل، تأسیس دارالعلم است که پادشاه از روی ناچاری مجبور به قبول آن می شود. دانشمند که بحرالعلوم نام دارد، بی درنگ پس از آزادی از زندان، شاگردانی دور خود جمع می کند و کلاس درسی برپا می کند و مسائل جالبی را در نظریه گراف مطرح می کند و شاگردان خود را برای تفکر روی مسائل و تعمیمدادن آن ها و ارائه راه حل، به چالش می کشد و به شکل استادانه ای آن ها را به سمت مسئله ای که معضل پادشاه حالت خاصی از آن است، هدایت می کند و محفلی فرهیخته و شکوفا فراهم می سازد.»

۳. **تفریض دکتر مهدی رجبعلی پور، استاد ریاضی دانشگاه کرمان:** «جنبه ادبی کتاب با مشاورت ویراستار، نویسنده و مترجم توانایی هم چون خانم منیژه جوادی، همسر نویسنده اول کتاب، عاری از نقص است و می تواند در میان کتاب های ریاضی - ادبی ایران جاودانه بماند. جنبه هنری کتاب نیز عالی است، و گر نه همکاری هنرشناس توانایی هم چون خانم دکتر ثمینی نقض غرض می بود. این دو جنبه، همراه با طنزی لطیف که زاییده همکاری یک ریاضی دان و یک هنرشناس بوده و بر سراسر کتاب حکم فرماست، معجون گوارایی فراهم آورده است که ساعت ها می تواند پیر و جوان را سرگرم و راضی نگه دارد.»

**پی نوشت**  
۱. استاد ریاضیات و دانشمند سال ۲۰۰۹ میلادی - غرب استرالیا  
۲. استاد ریاضیات و رئیس سابق انجمن ریاضی ایران  
۳. عضو هیئت علمی پردیس هنرهای زیبا، دانشگاه تهران  
۴. Albrecht Beutelspacher (استاد ریاضیات و رئیس خانه ریاضیات - آلمان)  
۵. Euler (ریاضی دان بزرگ سوئیسی)  
۶. Konigsberg (شهری آلمانی که به واسطه معمای مربوط به پل هایش معروف است)  
۷. Konig  
۸. Claude Berge  
۹. تعبیر از اخوان ثالث است: تا خدا وان سوی صحرای خدا رفتیم.  
۱۰. به کجا می برد این نقش به دیوار مرا.  
۱۱. معمای سه گاف همان معمای گرگ و گوسفند و گیاه است. رجوع کنید به متن کتاب.

# مسائل مسابقه ای رشد



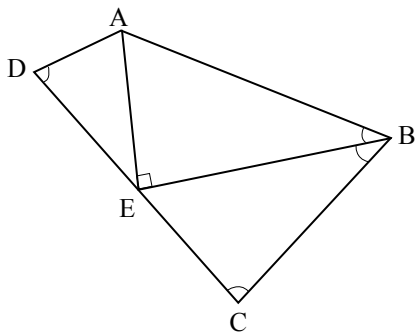
۱. ثابت کنید اگر  $x, y, z$  و  $z$  چنان در نظر گرفته شوند که:

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq 2, \text{ آنگاه: } \cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}.$$

۲. ثابت کنید هرگاه اندازه های زوایای یک  $n$  ضلعی محدب، جملاتی از یک دنباله حسابی باشند، آنگاه یا یکی از زوایا مقدار ثابتی دارد و یا همه زوایا را می توان به صورت تعدادی جفت دسته بندی کرد؛ به طوری که مجموع همه جفت ها مقدار ثابتی باشد. از آنجا نتیجه بگیرید که هرگاه اندازه های زوایای یک چهارضلعی محدب جملات یک دنباله حسابی باشند، چهارضلعی، محاطی است. آیا عکس این موضوع هم درست است؟

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می دانیم:  $\hat{D} = \hat{C}$  و نیم سازه زاویه B، CD را در نقطه E قطع کرده است و  $BE \perp AE$ .

ثابت کنید:  $AB = BC + AD$ .



۴. قطار مسافری تهران - مشهد، تهران را رأس ساعت  $x$  و  $y$  دقیقه ترک کرد و رأس ساعت  $y$  و  $z$  دقیقه وارد مشهد شد. این مسافت  $z$  ساعت و  $x$  دقیقه طول کشید. همه مقادیر ممکن برای  $x, y$  و  $z$  را به دست آورید.



۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی  $x (x \neq k\pi)$  حاصل این عبارت همواره مقداری ثابت است:

$$y = x - \pi \left[ \frac{x}{\pi} \right] + \operatorname{tg}^{-1}(\cot gx)$$

حل: با فرض  $\operatorname{tg}^{-1}(\cot gx) = \alpha$  نتیجه می‌شود:  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  و  $\operatorname{tg} \alpha = \cot gx$  از آنجا داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -k\pi - \pi < -x < -k\pi$$

$$\Rightarrow k\pi < x < (k+1)\pi \Rightarrow k < \frac{x}{\pi} < k+1 \Rightarrow \left[ \frac{x}{\pi} \right] = k$$

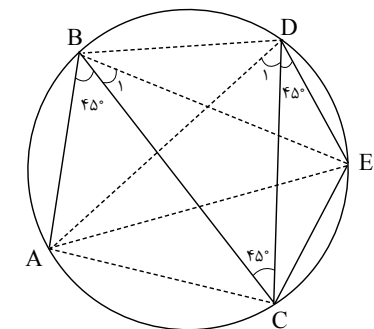
$$\Rightarrow y = x - k\pi + \alpha = x - k\pi + k\pi + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2}$$

۲. در شکل زیر زاویه بین وترهای متوالی مساوی  $45^\circ$  است:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45^\circ$$

ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$



حل: مطابق شکل A را به D و A و B را به E وصل می‌کنیم:

با توجه به برابری زوایای محاطی مقابل به یک کمان داریم:  $\hat{D}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ, \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle ADE = 90^\circ$  و از آنجا با توجه به قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AB^2 + BE^2 = AD^2 + DE^2 = AE^2 (*)$$

اما طبق این قضیه که کمان‌های محدود بین وترهای موازی، مساوی‌اند، خواهیم داشت:

$$\angle ABC = \angle BCD = 45^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD} \Rightarrow AC = BD$$

در نتیجه، دوزنقه ABDC متساوی‌الساقین است و قطرهای آن با هم برابرند:  $AD = BC$ . به طریق مشابه نیز نتیجه می‌شود:  $BE = CD$ .

لذا با جای گذاری این دو مقدار در تساوی (\*) خواهیم داشت:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$

۳. مجموعه S و عمل \* روی آن را با قاعده زیر تعریف می‌کنیم:

$$a, b \in S : (a * b) * a = b$$

$$a * (b * a) = b$$

ثابت کنید: با تعویض نقش a و b در رابطه فرض خواهیم داشت:  $(b * a) * b = a$

و با جای گذاری عبارت سمت چپ تساوی اخیر به جای a در عبارت سمت چپ حکم نتیجه می‌شود:

$$a * (b * a) = \underbrace{[(b * a) * b]}_m * \underbrace{(b * a)}_m = (m * b) * m = b$$

(تساوی آخر نیز با توجه به فرض نتیجه شده است).

۴. در کشوری کوچک، همه مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور می‌شود. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آن‌ها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آن‌ها را A، B و C می‌نامیم. در دادگاه قاضی از A پرسید:

آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ و B یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می‌دانم چه کسی جاسوس است! با ذکر دلیل، بگویید جاسوس کیست.

حل: ما نمی‌دانیم A و B چه جوابی دادند. چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم:

۱. A و B هر دو گفتند بله.

۲. A گفت نه و B گفت بله.

۳. A گفت بله و B گفت نه.

۴. هر دو گفتند نه.

اکنون این حالت‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم:

حالت ۱. آن‌ها هر دو گفتند بله: چون A می‌گوید که او جاسوس است، پس او یا سرباز است و یا جاسوس (زیرا یک شوالیه هرگز به دروغ ادعای جاسوس بودن نمی‌کند). اگر A سرباز باشد، آنگاه او دروغ گفته است. پس B که گفته است A راست می‌گوید، دروغ گفته است. پس B شوالیه نیست و چون A سرباز است، پس B باید جاسوس باشد و در نتیجه C شوالیه است.

حال فرض کنید A جاسوس باشد. پس او درست جواب داده است، لذا B با درست شمردن جواب A، درست جواب داده است. یعنی B باید شوالیه باشد و در نتیجه C سرباز است. این دو حالت را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

	A	B	C
۱a	سرباز	جاسوس	شوالیه
۱b	جاسوس	شوالیه	سرباز

حالت ۲. A گفت نه و B گفت بله: اگر به همان صورت بحث کنیم، به جدول حالت‌های زیر می‌رسیم:

	A	B	C
۲a	شوالیه	جاسوس	سرباز
۲b	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۳. A گفت بله و B گفت نه:

	A	B	C
۳a	سرباز	شوالیه	جاسوس
۳b	سرباز	جاسوس	شوالیه
۳c	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۴. A گفت نه و B گفت نه:

	A	B	C
۴a	شوالیه	سرباز	جاسوس
۴b	شوالیه	جاسوس	سرباز
۴c	جاسوس	شوالیه	سرباز

حال با توجه به این چهار جدول، به ما گفته شده که بعد از جواب‌های A و B به سؤال‌های قاضی، قاضی فهمید که C جاسوس نیست. اگر حالت ۳ اتفاق افتاده بود، آن‌گاه قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که C جاسوس یا شوالیه است. اگر حالت ۴ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست بفهمد که C جاسوس یا سرباز است. پس این دو حالت رخ نداده و در نتیجه یکی از حالت‌های ۱ یا ۲ اتفاق افتاده است. حالا قاضی می‌داند که A درست گفت (وقتی که گفت C جاسوس نیست)، پس او می‌داند که A سرباز نیست (در نتیجه شوالیه یا جاسوس است). اگر حالت ۲ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که A شوالیه است یا جاسوس. بنابراین او نمی‌توانست بفهمد که جاسوس کیست. پس حالت ۱ رخ داده است و قاضی می‌داند که A نمی‌تواند سرباز باشد (چون او یک جمله درست گفته است). پس A باید جاسوس باشد.







# ایران ریاضی مجلات تاریخچه

**کلیدواژه‌ها:** عبدالحسین مصحفی، مجلهٔ ریاضی یکان، نمودار ساقه و برگ، محسن هشترودی، حساب‌های تانسوری، نظریهٔ التصاق‌ها، ارشمیدس

در بیست و سومین شمارهٔ مجله، میرشهرام صدر به هیئت تحریریه آمده است.

در مقالهٔ «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» از استاد شهریار، راهنمایی‌هایی برای حل مسئله‌ها آمده است. این مقاله چنین آغاز می‌شود: «برای حل یک مسئلهٔ ریاضی - اگر مضمونی تازه داشته باشد و در ردیف تمرین‌های سادهٔ پایان یک درس نباشد - نمی‌توان روش یا روش‌های کلی پیدا کرد. در زندگی روزانه و ضمن فعالیت‌های اجتماعی هم، غالباً به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برایمان تازگی دارند و برای انتخاب مسیر حرکت آیندهٔ خود، نمی‌توانیم بر «نمونه‌های» آزمایش شده تکیه کنیم. در این‌گونه موردها، اغلب به یاری دیگران هم نمی‌توانیم متکی باشیم، چرا که «دشواری» مربوط به خود ماست و تنها خودمان هستیم که از زیر و بم آن آگاهیم و دلیل‌های پیدایش آن را می‌شناسیم. بنابراین، چاره‌ای جز این نداریم که با تکیه بر تجربهٔ زندگی، آگاهی‌های علمی، مقایسه و تجزیه و تحلیل راه‌های گوناگون، و به‌کار گرفتن اندیشه، خرد و استعداد خود، راه و روش بهینه را بیابیم. برای حل مسئله‌های ریاضی هم، باید از همین راه رفت و نباید منتظر «دستورها» و «نسخه‌های شفابخش» بود. چنین دستورها و نسخه‌هایی که بتوان به یاری آن‌ها از عهدهٔ حل هر مسئله برآمد وجود ندارد

(ص ۱۷۸).

«در باغ تجربه‌ها» مصاحبه‌ای است با یکی از دبیران ریاضی. در مصاحبهٔ این شماره به سراغ استاد عبدالحسین مصحفی رفته‌اند. استاد در شرح حال خود چنین می‌گوید: «در اسفند ۱۳۰۳ در شهر کرمان، در خانه‌ای از محلهٔ مسجد گنج به دنیا آمده‌ام. در کودکی خواندن قرآن را آموختم و پس از تحصیلات رسمی (شش سال دورهٔ ابتدایی و سه سال سیکل اول متوسطه)، امتحان نهایی سیکل اول متوسطه را در سال ۱۳۲۰ گذراندم. در همان سال در همان مدرسهٔ ملی که از آن فارغ‌التحصیل شده بودم، به معلمی گمارده شدم. این مدرسهٔ ملی که دبیرستان شهاب نام داشت، از نخستین مدرسه‌هایی به‌شمار می‌آمد که برای آموزش به روش جدید در کرمان تأسیس شده بود و از یک دبستان شش کلاسی و از یک سیکل اول متوسطهٔ سه کلاسی تشکیل می‌شد. چند سالی را به تناوب با معلمی در آن مدرسه یا به شغل صحافی و کتاب‌فروشی گذراندم. در سال ۱۳۲۷ امتحان نهایی پنجم متوسطه را به صورت داوطلب گذراندم و با وجود تکفل خانواده، داوطلب خدمت نظام وظیفه شدم. شش ماه در دانشکدهٔ افسری تهران و یک سال با درجهٔ ستوان دوم توپخانه خدمت کردم. محل خدمتم بنا بر نمره‌هایی که آورده بودم، مشهد افتاد که آن را با «خاش» معاوضه کردم. ضمن خدمت

افسری، درس‌های سال ششم ریاضی را نزد خودم آموختم و در سال ۱۳۳۰ امتحان نهایی دیپلم ریاضی را به صورت داوطلب در تهران گذراندم. در همان سال در امتحان ورودی رشتهٔ ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران و رشتهٔ دبیری دانش‌سرای عالی ایران پذیرفته شدم. در سال ۱۳۳۳ گواهی‌نامهٔ لیسانس این دو مؤسسهٔ عالی را دریافت داشتم و برای خدمت دبیری، یزد را برگزیدم.

هشت سال در دبیرستان‌های شهرستان یزد و در دانش‌سرا و در کلاس‌های تربیت معلم آن‌جا به تدریس ریاضیات اشتغال داشتم. در سال ۱۳۴۱ به تهران منتقل شدم. سمت‌های رسمی که داشته‌ام چنین بوده‌اند:

- ۱۳۴۱ تا ۱۳۴۴: دبیر دبیرستان‌های ناحیهٔ چهار تهران.
- ۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷: کارشناس ریاضی برنامه‌ها در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش‌وپرورش.
- ۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲: نمایندهٔ وزارت آموزش‌وپرورش در شرکت چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
- ۱۳۵۲ تا بهمن ۱۳۵۷: کارشناس مسئول ریاضی در سازمان کتاب‌های درسی ایران.
- اسفند ۱۳۵۷ تا آبان ۱۳۵۸: مدیرکل سازمان کتاب‌های درسی ایران و سرپرست ادارهٔ کل تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.
- آبان ۱۳۵۸: بازنشسته بنا به درخواست شخصی.»

**مصحفی** در مورد تأسیس «مجلهٔ یکان» چنین می‌گوید: «در سال ۱۳۴۱ امتیاز انتشار مجله‌ای ریاضی را درخواست کردم. به دنبال آن در جلسهٔ آبان ۱۳۴۲ کمیسیون مطبوعات وزارت کشور با امتیاز **مجلهٔ ریاضی یکان** به نام من موافقت کرد. نخستین شمارهٔ این مجله در بهمن ماه ۱۳۴۲ منتشر شد که بیش از حد انتظار با استقبال روبه‌رو و سه بار تجدید چاپ شد. پس از آن هم این مجله به‌طور مرتب تا ۱۱۸ شمارهٔ ماهانه و هر سال همراه با شماره‌ای ویژهٔ امتحان‌های نهایی و کنکور و همراه با شماره‌ای برای دانش‌آموزان سال آخر سیکل اول متوسطه انتشار یافت. سرانجام در سال ۱۳۵۶ از ادامهٔ انتشار آن بازماندم. دربارهٔ این مجله و اثرش در گسترش ریاضیات در ایران و دربارهٔ تحولی که در آموزش ریاضی در ایران به‌وجود آورد، صاحب‌نظران بسیار سخن گفته‌اند و آن را در ترازوی سنجش قرار داده‌اند.

مجلهٔ یکان بدون هیچ وابستگی و بدون دریافت هرگونه کمک مادی منتشر می‌شد و هزینهٔ سنگین آن کلاً از راه تک‌فروشی و حق اشتراک تأمین می‌شد. دلیل توقف انتشار آن هم تنها این بود که دیگر توانایی ادامهٔ کار را نداشتیم. پس از انقلاب به توصیهٔ

مؤکد شهید رجایی و به تشویق بعضی از ریاضی‌دوستان، تقاضای تجدید امتیاز مجله را کردم که تصویب هم شد، اما باز هم توانایی لازم برای دنبال کردن کار را نداشتم.»

در این شماره، مقاله‌ای داریم از **دکتر عین‌الله پاشا**، از دانشگاه تربیت معلم، با عنوان **ساقه و برگ**. در این مقاله آمده است: «نمودارها نقشی اساسی در درک مفاهیم دارند و فهم عمیق‌تر و روشن‌تری از شرایط موجود به ما می‌دهند. نمودارها و حالت کلی‌تر آن‌ها، یعنی شکل‌ها، در واقع نوعی زبان ابتدایی برای برقراری ارتباط و انتقال مفاهیم هستند. به همین سبب است که معمولاً ارائهٔ هر مفهومی با شکل و نمودار آغاز می‌شود و کم‌کم که مفاهیم جای خود را در ذهن باز کردند، مطالعه و تحقیق به صورت مجردتر ادامه می‌یابد. در مبحث آمار، برای روشن‌تر شدن ساختمان داده‌ها و در نهایت تجسم توزیع جامعه از نمودار استفاده می‌کنیم. هر یک از انواع نمودارها ویژگی‌هایی دارند و حتی برخی از آن‌ها برای موارد خاص مناسب‌ترند. در مباحث مقدماتی آمار با نمودارهایی از قبیل چند بر فراوانی، مستطیلی، میله‌ای و دایره‌ای آشنا شده‌ایم. این نمودارها در یک نگاه می‌توانند ایده‌هایی کلی دربارهٔ جامعه در اختیار بیننده بگذارند. رسالت بیشتر نمودارهای رایج در همین‌جا به پایان می‌رسد. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری دربارهٔ جامعه و یا نمونه به‌دست آوریم، لازم است محاسباتی روی داده‌ها و جدول فراوانی انجام دهیم. در این نوع نمودار سعی شده است که با حفظ رسالت‌های نمودارهای رایج (مثلاً میله‌ای) بتوان از نمودار استفاده‌های دیگری نیز برد. در واقع، در این نوع نمودار، داده‌ها کنار گذاشته نمی‌شوند، بلکه به نوعی سامان‌دهی می‌شوند که هم کار نمودارها را انجام می‌دهند و هم برای برخی محاسبات دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند» (ص ۱۹۴).

در مقالهٔ «**تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**» مطلبی می‌خوانیم دربارهٔ **کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که در آن چنین آمده است: «مجلهٔ یکان مقالاتی دارد با عنوان **خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که نویسندهٔ آن‌ها دکتر **محسن هشترودی** است. در این شماره، مرحوم هشترودی یادی از کنگرهٔ مسکو در سال ۱۹۳۵ کرده است و طی آن می‌نویسد: این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان قبل از جنگ جهانی دوم بود. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و ووپولوژی، **کارتان فکید (الی کارتان بزرگ) واسخوتن (Schow-ten)** که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی آمستردام است)، **هرمان وایل (Hermann Weyl)** و دسته‌ای از محققین در حساب‌های تانسوری و نظریهٔ التصاق‌ها گفت‌وگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گویی



متمرکزند. وایل فقید این سؤال را مطرح کرد که: آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیک‌های آن (ا قصر فاصله، در این جا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیک‌ها و خطوط مستقیم برهم منطبق نیستند، یعنی بین دو نقطه، یک خط مستقیم و یک منحنی اقصر فاصله وجود دارد که از هم متمایزند) همه متمرکز باشند؟»

آن شب، پس از جدا شدن این عده از هم، اسخوتن شبانه این التصاق را پیدا کرد که هم‌اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی به التصاق اسخوتن معروف است. عجیب است که در ممالک غربی، گاهی این التصاق را به نام التصاق مسکو می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش، خواص محرض این التصاق را تعیین کرد و مقارن همان زمان، **آندره لیشنروویچ**، استاد **کلژدوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهایی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یک امتداد یا با نقطه و یک سطح)، تنها فضایی که به سیستم‌های غیرهلنوم مکانیک تحلیلی مرتبط است، همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه‌متقارن می‌نامند، زیرا به پیچش فضا از روی یک حامل تنها و به کمک تانسور اصلی معین می‌شود. (بدیهی است که این فضا فضایی عادی نیست، یعنی دارای انحناست. پیچش فضا انحنای مربوط به انتقال مبدأ مختصات است.)

نظیر این امر در بسیاری از کنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسئله‌ای در جلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی در خارج از جلسه مطرح شده و یکشنبه توسط یکی از ریاضی‌دانان مقتدر حل شده است.»

مقالهٔ «آموزش مفهوم حد در دبیرستان» از پرویز شهریاری چنین آغاز شده است: «از زمانی که با محاسبهٔ محیط و مساحت دایره (جسم دوار)، مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آن‌ها، دآوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها و روندهای بی‌پایانی که بی‌نهایت ادامه دارد، مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهوم‌های دقیق دانش و استدلالی کردن آن‌ها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به همین مناسبت، مفهوم حد و روش‌های حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهوم‌های مربوط به آن دشواری‌هایی پدید می‌آید، خود را وارد کتاب‌های درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به‌ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد  $\pi$ ) و محاسبهٔ سطح و حجم جسم‌های دوار، از مفهوم حد، بدون این‌که نامی از آن برده شود و بدون این‌که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده

است. ارشمیدس که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به جای محیط دایره، محیط چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره را در نظر گرفت و حد  $\pi$  را به تقریب برابر با  $\frac{1}{3} \times 3$  به‌دست آورد. **جمشید کاشانی** هم در کتاب **رساله المحیطیه** همین راه را دنبال می‌کند! و  $3 \times 3$  ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید  $n$  را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای  $6000$  برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور  $n$  را برابر  $28$  می‌گیرد. در این صورت تعداد ضلع‌های چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی برابر  $306368 \times 80$  می‌شود و عدد  $\pi$  را تا  $17$  رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

در مقالهٔ «**تاریخچه و نقش مجله‌های آموزشی ریاضی**» که به قلم **حمیدرضا امیری و میرشهرام صدر** است، چنین آمده: «بنا به گفتهٔ پژوهشگر تاریخ ریاضیات، آقای پرویز شهریاری، قدیمی‌ترین نشریهٔ ریاضی **حل المسائل ریاضی** است که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی بوده و با رهنمودهای آقای **ناصر هورفر** انتشار می‌یافته است. ناگفته نماند که ما قدیمی‌تر از این مجله را نیافته‌ایم. جلد اول این مجله در ۱۵ دی‌ماه ۱۳۰۶ شمسی، در مطبعهٔ **نهضت شرق تهران** به چاپ رسید و در اول و پانزدهم هر ماه منتشر می‌شد. در ضمن، در این مجله بعضی از مسائل امتحانات نهایی ایران و اروپا و... درج می‌شد. این مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ زرین خط است. در این مجله با اسامی افراد معروفی نظیر، **تقی هورفر، محمدعلی مجتهدی، غلامحسین مصاحب، محمود مهران و محسن هشترودی** روبه‌رو می‌شویم.»

در «ادب ریاضی» این شماره مطلبی می‌خوانیم از **پی یر روسو** در کتاب «**تاریخ علوم**» وی، دربارهٔ **مونژ**. در بخشی از آن چنین آمده است: «کشور فرانسه هنگام انقلاب در خطر هجوم خارجی بود و مادر وطن با حالی خسته و مجروح فرزندان خود را به کمک می‌طلبید. فریاد برآمد که باید توپ ساخت! باید باروت تهیه کرد! باید شوره از زمین استخراج کرد! و در حالی که لازار کارنو مشغول تهیهٔ تشکیلات **فتح نظامی** بود، **گاسپار مونژ** فتح علمی را تدارک می‌دید. این مرد که فرزند فروشندهٔ دوره‌گردی بود و هندسهٔ ترسیمی را اختراع کرد، مانند وطن‌پرست پرشوری فعالیت کرد. وی طبق منویات کنوانسیون، درصدد تجهیز لشکری مرکب از ۳۰۰ هزار نفر برآمد و حال آن‌که تمام قورخانه‌ها خالی و انبارها از شوره تهی بود و این ماده را تا آن وقت از هندوستان وارد می‌کردند.

برنز لازم برای تهیهٔ توپ را از کجا باید تهیه کرد؟ مونژ فریاد

برآورد: زنگ‌ها و ناقوس‌ها را آب کنید! شوره از کجا به‌دست آوریم؟ از زمین بکنید و آن وقت ما ظرف سه روز تمام توپ‌های شما را پر خواهیم کرد!

مونژ روزها اوقات خود را برای بازرسی قورخانه‌ها و توپ‌ریزی‌ها صرف می‌کرد و شب‌ها کتاب **فن تهیهٔ توپ** را می‌نوشت.»

در مقالهٔ «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**»، از **غلامرضا یاسی‌پور** دربارهٔ «هندسهٔ آفین» و چندضلعی‌ها چنین می‌خوانیم: «به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگی‌های هندسی‌ای سروکار دارد که **ناوردای آفین** (affine invariant) هستند، که بدین معنی است که تحت تبدیل‌های آفین (یعنی، تبدیل‌های خطی ناتکین ترکیب شده با انتقال‌ها) ناوردا (یا تغییرناپذیر) هستند. از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به صورت دوران‌ها، تقارن‌ها، انتقال‌ها و برش‌ها، یا هر ترکیبی از این‌ها در نظر گرفت. نسبت‌های طول‌های واقع بر خطوط موازی و نسبت‌های سطح‌ها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و در نتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، در حالی که طول‌ها، زاویه‌ها و سطح‌ها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق اند، اما به‌طور واضح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.»

بد نیست که بررسی این شماره را با قسمت «عبرت‌آموز» **ادب ریاضی** خاتمه دهیم. در این ادب ریاضی چنین آمده است: «آورده‌اند که وقتی در یکی از شهرهای آدمان، حاکمی می‌زیست که از لحاظ درستی ضرب‌المثل بود. دزدان و رهزنان از او ترس بسیار داشتند، و مردان شرافتمند به او صمیمانه احترام می‌گذاشتند. اما روزی اهالی شهر به رازی صاعقه‌آسا پی بردند از این قرار که: حاکم هر شب لباس مبدل می‌پوشد، طپانچه‌ای در جیب می‌گذارد، آهسته و بی‌سروصدا از خانه خارج می‌شود و مردم را لخت می‌کند! داستان ریاضی در اواخر قرن نوزدهم نیز چنین بود. از ۲۰ قرن پیش تااین زمان، مردم در مقابل ریاضیات سر تعظیم فرود می‌آوردند و به آن ایمان فوق‌العاده داشتند. اما ناگهان اصل **اقلیدس** ضعف گریه‌آوری از خود نشان داد و مفهوم قدیمی اتصال با سروصدای بسیار فرو ریخت و نابود شد. قلمرو آشنای اعداد معمولی توسط بهمینی از اعداد اصم و اندازه‌نگرفتنی خرد شد و بنایی که این‌قدر مورد احترام و پرستش بود، ترک‌ها و شکاف‌های بزرگ داشت. و اما فقط بنای معظم ریاضیات نبود که گرفتار خرابی ویرانی می‌شد، تمام قصر بزرگ علوم به این حال دچار بود.»

\*\*\*

شمارهٔ ۲۴ مجلهٔ ریاضی برهان را ورق می‌زنیم. این شماره در

سال هفتم آن، در بهار ۱۳۷۷، به مبلغ ۲۰۰۰ ریال انتشار یافته است. مجله، علاوه بر مقالات متعارف خود که دربارهٔ کتاب‌های دبیرستانی است، مقالات نظری و تاریخی و گفت‌وگو را نیز شامل می‌شود.

در مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» از **پرویز شهریاری**، دربارهٔ **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** چنین آمده است: **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و اخترشناسان ایرانی است که در زمان حکومت تیموریان می‌زیست و به خواست **الغ بیگ**، **نوهٔ تیمور**، به سمرقند رفت و با یاری چند ریاضی‌دان و اخترشناس دیگر، رصدخانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاد.

نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی مانده‌اند که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسئله‌های ریاضی به خوبی نشان می‌دهند. هم‌چنین، نامه‌ای از کاشانی به‌دست آمده که از سمرقند به پدرش در کاشان نوشته و یکی از پرارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید از **بدرالدین** نامی، به عنوان یکی از ریاضی‌دان‌ها یاد کرده که پسرش جمشید در پاسخ او چند سطرى نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان سادهٔ امروزی درآوریم، چنین گفته است: اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستوره‌های ریاضی را بداند و نتواند مسئله‌های تازهٔ ریاضیات و یا حالت‌های کاربردی آن را که در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضی‌دان نیست. ریاضی‌دان کسی است که از عهدهٔ حل مسئله‌های تازه برآید.»

مقالهٔ «**در باغ تجربه‌ها**» گفت‌وگویی دارد با آقای **میرزا جلیلی**، مؤلف و دبیر با سابقهٔ ریاضی. در این مقاله از قول استاد جلیلی چنین می‌خوانیم: «میرزا جلیلی هستم و در اول اردیبهشت‌ماه ۱۳۱۲ در بوشهر متولد شدم. تحصیلات ابتدایی را در دبستان فردوسی و متوسطه را در دبیرستان سعادت آن شهر به پایان رساندم. پس از گذراندن دورهٔ دانش‌سرای مقدماتی شیراز، از دانش‌سرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. ۲۰ سال در شهرستان کازرون تدریس کردم. یک دورهٔ یک‌سالهٔ آموزش ریاضی را در انستیتوی تربیتی دانشگاه لندن گذراندم و به دریافت دیپلم نائل آمدم که بعدها از طرف وزارت علوم فوق‌لیسانس شناخته شد. یک دورهٔ شش ماههٔ برنامه‌ریزی را هم در دانشگاه تکراس در آستین گذراندم و پایان‌نامهٔ آن دوره را دریافت کردم. از سال ۱۳۵۰، در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی مشغول به کار هستیم. با این همه، کار تدریس را هیچ‌گاه رها نکرده‌ام و با معلمان ریاضی کشور در تمام دوره‌های تحصیلی، مرتب در تماس بوده‌ام و با جؤ آموزش کشور کاملاً آشنا هستم. برنامه‌ریزی چندین دوره تحصیلی را، از ابتدایی، راهنمایی







و دبیرستان تا دانش‌سرای مقدماتی، و مراکز تربیت معلم کارگردانی کرده‌ام و کتاب‌های درسی آن‌ها را به تألیف رسانده‌ام که همگی کتاب‌های موفق ریاضی در مدارس بوده‌اند. در دو برنامه‌ریزی دبیرستان (از ۱۳۶۲ تا ۱۳۶۴ و از ۱۳۶۸ تا ۱۳۷۰) شرکت کردم و از مؤلفان کتاب‌های ریاضیات جدید دبیرستان هستم که برای اولین بار در ایران با همکاری کارشناسان، مفاهیم جدید و به‌روز ریاضی جهان را در سطح فهم دبیرستان، با زبان ساده و دانش‌آموزی، وارد کتاب‌های ریاضی کردیم. هم‌چنین، در تألیف کتاب‌های ریاضی ۱ تا ۴ نظام جدید نیز همکاری داشته‌ام. سال‌ها مدیر داخلی مجله رشد آموزش ریاضی و جزو هیئت تحریریه آن بوده‌ام.

در کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی در استرالیا، هم‌چنین در دو کنفرانس ریاضی در زمینه آموزش ریاضی در سوتمتون و هلند، حضور داشتم و در توکیو و مسکو پای صحبت کارشناسان و مؤلفان و برنامه‌ریزان ریاضی نشسته‌ام و از آن رهنمود برنامه‌ریزی گرفته‌ام.

مجله مقاله‌ای دارد با عنوان «**رابطه بین آموزش ریاضی و فرهنگ**» که در مقدمه آن چنین آمده است: «یکی از موضوعات مهم در جوامع پیشرفته که آموزش آن مشکل به نظر می‌رسد، ریاضیات است. ریاضیات موضوعی است که خود را به شدت انتزاعی نشان می‌دهد، به‌طوری که کودکان هیچ‌گونه ارتباط منطقی بین آن با دنیای واقعی بیرون کلاس برقرار نمی‌کنند. به همین علت آن را بی‌معنا و بی‌هوده می‌پندارند. در نتیجه، کودکان در سراسر جهان، خود را در رشته‌های ریاضی مغلوب می‌دانند و حتی والدین آنان نیز ریاضیات را درک نمی‌کنند و معلمینشان ریاضیات را موضوعی سخت برای درک و فهم قلمداد می‌کنند.

اگر امروزه به مردم بگویم، من به آموزگاران کودکان شما ریاضی آموزش می‌دهم، آنان تصور بدی درباره من خواهند داشت و به من به مانند یک موجود عجیب نگاه خواهند کرد. اگر هم بگویم، من از ریاضیات لذت می‌برم، مردم فکر می‌کنند من دیوانه شده‌ام و اگر بگویم من آماده هستم آنان را به ریاضیات علاقه‌مند کنم، مردم به حرف‌های من گوش نخواهند کرد و حرف‌هایم را باور نمی‌کنند! نیمی از مردم از ریاضیات رنج می‌برند و آن را نوعی شکنجه روحی می‌دانند! حتماً فکر خواهید کرد که آنان مایل هستند از برنامه آموزشی ریاضیات خلاصی پیدا کنند، اما این‌طور نیست. آنان ریاضیات را خیلی مهم می‌دانند و همه کودکان مدرسه‌ای باید آن را مطالعه کنند؛ حتی اگر از آن خوششان نیاید، چرا که ریاضیات برای آنان مفید است!»

همین مقاله مطلبی دارد درباره «اهمیت تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی» که در آن چنین می‌خوانیم: «دومین پژوهش

در ریاضی بومی، از تحقیقات تاریخی حاصل می‌شود که بیش از اندازه به آن پرداخته شده است و آموزشگران به اندازه کافی با آن آشنا هستند. در حال حاضر، اکنون **انجمن پژوهش تاریخی**، مسئول جمع‌آوری اسناد تاریخی مختلف درباره ریاضی در قسمت‌های گوناگون دنیاست. نمونه‌ای از تحلیل‌های جدید در کتاب **جوزف** (۱۹۹۱) «تاج رنگارنگ ریشه‌های غیروپایی ریاضی» آمده است که به ذکر تنوع فرهنگ‌هایی که در اندوخته جهانی اندیشه‌های ریاضی غنی سهم دارد، مربوط می‌شود. برای مثال، تاریخ فرهنگی ایران و جهان اسلام مملو از اندیشه‌های ریاضی است؛ گرچه اکثر این روایات به دانش‌پژوهان معروف اسلامی ایران مربوط می‌شود. ما از تاریخ ریاضیات مسلمانان موارد زیر را یاد گرفته‌ایم:

- قوانین وراثت؛
- طراحی مساجد و کاشی‌کاری آن‌ها؛
- تعیین قیله و تعیین حرکت مکه در قسمت‌های مختلف دنیا؛
- نجوم؛
- گسترش براهین هندسی برای قضایای جبری؛
- آثار ریاضی‌دانانی مانند **خوارزمی**، **ثابت بن قره**، **کاشانی** و **خیام**.

با وجود اختلافات مشهودی که در بعضی از موضوع‌های ریاضی، مانند دستگاه‌های شمار و روش‌های محاسبه‌ای مختلف ریاضی دیده می‌شود، پژوهش‌های تاریخی، شباهت‌های جالبی را مانند علاقه‌مندی انسان به اثبات قضیه فیثاغورس نشان می‌دهد. این قضیه مشهور قبل از ریاضی‌دانان یونانی مورد علاقه چینی‌ها (رونان، ۱۹۸۱) و آفریقایی‌ها (جروس، ۱۹۹۵) بوده است. هم‌چنین، **ثابت بن قره**، به قضیه فیثاغورس پی برده بود. مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

- دنباله/احمد قندهاری
- آموزش ترجمه متون ریاضی/حمیدرضا امیری
- تجزیه چندجمله‌ای‌ها/میرشهرام صدر
- مصاحبه با یک عدد/کریم احمدی دلیر
- جزء صحیح/علی حسن زاده ماکویی
- طرح و حل مسائل اساسی/غلامرضا یاسی‌پور
- $n-1$  یا  $n$ /عین‌الله پاشا
- مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان/غلامرضا یاسی‌پور
- در حاشیه تابع/حمیدرضا امیری
- مکان هندسی/محمدهاشم رستمی
- اثبات اتحاد مزدوج/سیدمحمدرضا هاشمی موسوی



# بامخاطبان

باز هم نامه‌ها و رایانامه‌هایی از دوستان مجله داشته‌ایم که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- همکار گرامی، آقای **قاسم حسین قنبری**، از دانشگاه فرهنگیان شهرستان سمنان، با سپاس از مطالب ارسالی، از یکی از دو مقاله‌تان در این شماره استفاده کرده‌ایم. مطلب ارسالی‌تان در بحث تشابه مثلث‌ها، ساده، همه فهم و کاملاً به دردبخور بود. با تشکر از شما می‌خواهیم که ما را از مطالب خوبتان محروم نفرمایید.
- همکار گرامی، خانم **صدیقه بابایی**، با تشکر از ایمیل ارسالی، منتظر کارهای دیگرتان هستیم.
- همکار گرامی، آقای **مصطفی دیداری**، مطلب ارسالی‌تان را در یکی از شماره‌های آتی به چاپ می‌رسانیم. باز هم با مجله خودتان در ارتباط باشید.
- همکار گرامی سرکار خانم **مریم شفیعی**، از پژوهش‌سرای رازی شهرری، از مطلبی که از کارهای گروهی دانش‌آموزان آن مجموعه برایمان فرستاده‌اید، تشکر می‌کنیم. ان‌شاءالله بتوانیم در آینده‌ای نزدیک گزارشی مستند از فعالیت‌هایتان تهیه و منعکس کنیم.
- آقای دکتر **سعید علیخانی**، از دانشکده علوم دانشگاه صنعتی شیراز، ضمن سپاس از مطلب ارسالی‌تان با عنوان «زندگی در بعد چهارم»، متذکر می‌شویم که: البته استفاده از چنین مطالبی در مجله ما (یا هر مجله ریاضی دیگر)، گهگاه لازم است (و در یکی از شماره‌های آینده به آن می‌پردازیم). ولی اگر بتوانید مطالبی در خور استفاده مخاطبان اصلی مجله (دانش‌آموزان در درجه نخست و سپس معلمان ریاضی) برای ما بفرستید، بهتر است و سپاس‌گزارتان خواهیم بود. با ما در ارتباط باشید.
- همکار گرامی جناب آقای **رحمان کیومرثی**، با تشکر فراوان از مقاله ارسالی‌تان، از شما دعوت می‌کنیم که ضمن حفظ ارتباط خود با ما، در صورت امکان به مطالب پایه‌ای‌تر در ریاضیات توجه کنید و در ارتباط با آن‌ها برای ما مطلب بفرستید.
- همکار عزیز سرکار خانم **فاطمه صاحبی**، از گروه ریاضی منطقه ۱۱، مطلبی که فرستاده‌اید تکراری است و در بسیاری از منابع اصلی و کتاب‌های کمک درسی ریاضی گسسته آمده است. ضمن تشکر از توجهتان به مجله برهان، از شما می‌خواهیم مطالب مرتبط با تجربیات شخصی خودتان و نیز در صورت امکان مطالبی در ارتباط با ریاضیات پایه (و البته غیرتکراری!) برای ما بفرستید تا از آن‌ها استفاده کنیم.
- دوست دانش‌آموز آقای **علیرضا نمکی** از تهران، منطقه ۱، کشف روابط عددی یکی از جنبه‌های زیبای ریاضیات (و شاخه‌ای به‌خصوص از آن به نام نظریه عددها) است که از دیرباز مورد توجه انسان‌ها و به‌خصوص ریاضی‌دانان و علاقه‌مندان رشته ریاضی بوده است. تلاش شما البته قابل تقدیر است، ولی اولاً بیشتر این گونه روابط قبلاً کشف شده‌اند، ثانیاً سعی کنید نوشته‌هایتان مرتب و ساده باشند تا برای هر کس که برای نخستین بار آن‌ها را می‌خواند، به راحتی قابل درک باشند.

# ثبات‌های کوتاه‌تر بر قضایای کوتاه‌تر

## مقدمه

قضایای

تشابه در کتاب

هندسه (۱) بیان و

اثبات شده‌اند. اما اثبات

این قضایای کمی طولانی است و

دانش‌آموزان معمولاً به آن روی خوش

نشان نمی‌دهند. در این مختصر سعی شده

است اثبات‌های کوتاه‌تری برای این قضایا ارائه

شود. آنچه که در این شکل ارائه قضایا بیشتر جلوه

می‌کند، تکیه بیشتر بر «قضیه تالس» است.

تشابه دو مثلث در این کتاب به این صورت بیان شده است:

تعریف: دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در

آنها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشند.

اگر مثلث‌های متناظر را با نمادهای  $A'B'C'$  و  $ABC$

نشان دهیم، دو مثلث در صورتی متشابه هستند که:

$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \\ \angle C = \angle C' \end{cases}$$

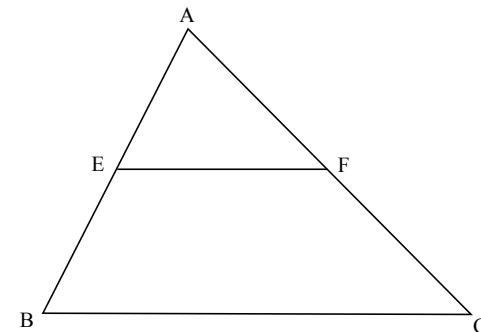
ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم که نتیجه‌ای مهم از قضیه

تالس است.

لم: در مثلث  $ABC$ ، اگر  $E$  و  $F$  دو نقطه روی  $AC$  و  $AB$

باشند، به‌طوری که  $EF \parallel BC$ ، آنگاه دو مثلث  $ABC$  و  $AEF$

متشابه هستند.



کلیدواژه‌ها: تشابه، قضیه تالس، مثلث‌های متشابه

## برهان:

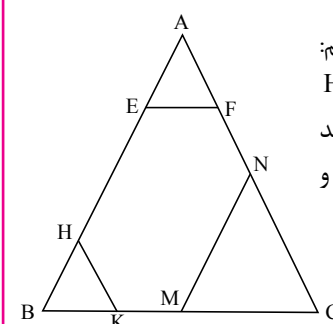
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \quad (1)$$

قضیه خطوط

$$EF \parallel BC \Rightarrow \angle E = \angle B, \angle F = \angle C, \angle A = \angle A \quad (2)$$

موازی و مورب

$$(1), (2) \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$



مثال: در مثلث  $ABC$  داریم:

$HK \parallel AC$ ،  $MN \parallel AB$

و  $EF \parallel BC$ . ثابت کنید

مثلث‌های  $MNC$ ،  $BHK$  و

$AEF$  با هم متشابه

هستند

## اثبات:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF$$

$$MN \parallel AB \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CMN$$

$$HK \parallel AC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BHK$$

بنابراین هر سه مثلث با مثلث  $ABC$  متشابه‌اند. در نتیجه هر سه با هم متشابه هستند.

**قضیه ۱.** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، دو مثلث متشابه هستند.

**اثبات:** چون دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر هستند، پس زاویه سوم دو مثلث نیز با هم برابرند.

یعنی در دو مثلث  $ABC$ ،  $A'B'C'$  داریم:

$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$$

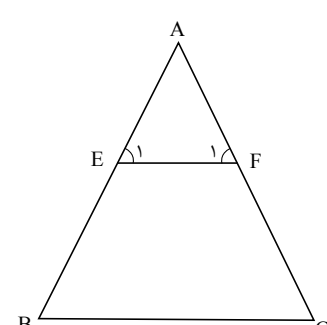
$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (\hat{B}' + \hat{C}') = \hat{A}'$$

روی ضلع  $AB$  نقطه  $E$  را طوری در نظر می‌گیریم که:

$AE = A'B'$ . از این نقطه خطی موازی  $BC$  رسم می‌کنیم تا

$AC$  را در نقطه  $F$  قطع کند. با توجه به لم داریم:

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC$$



اگر ثابت کنیم مثلث‌های

$AEF$  و  $A'B'C'$

هم‌نهشت‌اند، اثبات

کامل می‌شود.

$$EF \parallel BC \Rightarrow \hat{E} = \hat{B}, \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{E} = \hat{B}'$$

$$\hat{A} = \hat{A}', AE = A'B' \Rightarrow \triangle AEF \cong \triangle A'B'C' \quad (\text{ض.ز})$$

$$\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

**قضیه ۲.** اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

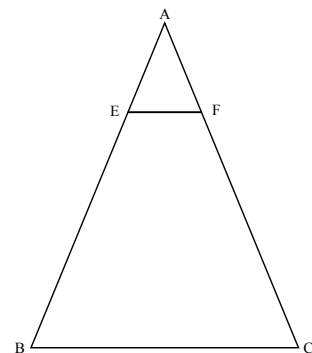
$$\text{فرض: } \angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

**اثبات:** دو نقطه  $E$  و  $F$  را روی  $AC$  و  $AB$  طوری انتخاب

می‌کنیم که:  $AE = A'B'$  و  $AF = A'C'$ . بنابراین دو

مثلث  $A'B'C'$  و  $AEF$  در حالت (ض.ض) با هم هم‌نهشت

هستند (۱).



اگر ثابت کنیم  $EF$  و  $BC$

موازی‌اند، اثبات کامل

می‌شود. اما داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, A'B' = AE \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

عکس

$$\Rightarrow EF \parallel BC \quad (2)$$

قضیه تالس

با توجه به (۱) و (۲)، دو مثلث  $A'B'C'$  و  $ABC$  متشابه هستند. ■

**قضیه ۳.** اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند، آنگاه دو مثلث متشابه هستند.

**فرض:** در مثلث‌های  $A'B'C'$

و  $ABC$  داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

**اثبات:** دو نقطه  $E$  و  $F$  را

روی  $AC$  و  $AB$  طوری انتخاب

می‌کنیم که:  $AF = A'C'$  و

$AE = A'B'$  بنابراین

داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

اکنون اگر نشان دهیم دو مثلث  $A'B'C'$  و  $AEF$  هم‌نهشت

هستند، اثبات کامل می‌شود. به این منظور می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}, \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC},$$

$$A'B' = AE, A'C' = AF \Rightarrow B'C' = EF$$

پس دو مثلث  $A'B'C'$  و  $AEF$  در حالت سه ضلع

هم‌نهشت هستند و اثبات کامل است. ■

هر چند این‌ها، اثبات‌های کاملاً جدیدی نیستند، ولی به

هر حال از روشی متفاوت برخوردارند که نسبت به روش کتاب

درسی کوتاه‌تر است.

منبع

هندسه ۱، زهرا گویا، سهیلا غلام آزاد و...، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران، ۱۳۷۵.





## کاربرد قدرمطلق در یک ضابطه‌ای کردن توابع

در نتیجه داریم:

$$y = \begin{cases} (x^2 + 2x - 3) - (x - 1) & (x \leq -3) \\ -(x^2 + 2x - 3) - (x - 1) & (-3 \leq x \leq 1) \\ (x^2 + 2x - 3) + (x - 1) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -2x + 2 & (x < 1) \\ 4 & (-1 \leq x \leq 2) \\ 2x - 2 & (x > 2) \end{cases} \quad \text{ب)}$$

به مثال دیگری توجه کنید (این مسئله از کتاب «قدرمطلق» استاد پرویز شهریاری و با راه حل متفاوت از منبع مذکور است):

و با توجه به جدول تعیین علامت زیر:

X	-3	1
$X^2 + 2X - 3$	+	-
$X - 1$	-	+

با استفاده از مفهوم قدرمطلق، می‌توان تابع  $y$  را به صورت زیر نوشت:

$$y = |x^2 + 2x - 3| + |x - 1|$$

**تمرین:** تابع با ضابطه‌های زیر داده شده است:

$$y = \begin{cases} x^2 - 7x + 10 & (x \leq 2) \\ -10 + 7x - x^2 & (2 \leq x \leq 4) \\ x^2 - 5x + 6 & (x \geq 4) \end{cases}$$

مانند مثال فوق عمل کنید و تابع را به تابع یک ضابطه‌ای تبدیل کنید.

**مثال:** تابع با ضابطه‌های زیر مفروض است.

$$y = \begin{cases} x^2 + x - 2 & (x \leq -3) \\ 4 - 3x - x^2 & (-3 \leq x \leq 1) \\ x^2 + 3x - 4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

با استفاده از علامت قدرمطلق،  $y$  را برحسب  $x$  به کمک تنها یک رابطه نشان دهید.

**حل:** با توجه به این که تابع در  $x = -3$  و  $x = 1$  تغییر ضابطه می‌دهد، هر ضابطه را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد و نوشت:

$$y = \begin{cases} x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) & (x \leq -3) \\ = (x - 1)(x + 3) - (x - 1) & \\ = (x - 1)(x + 3) - (x - 1) & \\ 4 - 3x - x^2 = -(x - 1)(x + 4) & (-3 \leq x \leq 1) \\ = -(x - 1)(x + 3) + 1 & \\ = -(x - 1)(x + 3) - (x - 1) & \\ x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4) & (x \geq 1) \\ = (x - 1)(x + 3) + 1 & \\ = (x - 1)(x + 3) + (x - 1) & \end{cases}$$

حال به مثال زیر توجه کنید:

$$\text{مثال: تابع } f(x) = \begin{cases} -2 & (x < -2) \\ x & (-2 \leq x \leq 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases} \text{ را در نظر}$$

بگیرید. ابتدا این تابع را به صورت زیر درآورده‌ایم:

$$f(x) = \begin{cases} -2 = -\frac{1}{4}(x + 2) + \frac{1}{4}(x - 2) & (x < -2) \\ x = \frac{1}{4}(x + 2) + \frac{1}{4}(x - 2) & (-2 \leq x \leq 2) \\ 2 = \frac{1}{4}(x + 2) - \frac{1}{4}(x - 2) & (x > 2) \end{cases}$$

حال به سادگی می‌توان دید که:

$$f(x) = \frac{1}{4}|x + 2| - \frac{1}{4}|x - 2|$$

**تمرین:** توابع زیر را به صورت یک ضابطه‌ای درآورید:

$$y = \begin{cases} 1 & (x < 1) \\ -2x + 3 & (1 \leq x \leq 2) \\ -1 & (x > 2) \end{cases} \quad \text{الف)}$$

**کلیدواژه‌ها:** قدرمطلق، تابع چندضابطه‌ای

**اشاره**

اغلب دانش‌آموزان با تبدیل توابع قدرمطلق به توابع چندضابطه‌ای آشنایی دارند. در اینجا قصد داریم با استفاده از مفهوم قدرمطلق به عکس این موضوع بپردازیم.

**قضیه:** اگر  $a < b$ ، هر تابع چند ضابطه‌ای به صورت:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a + b & (x < a) \\ b - a & (a \leq x \leq b) \\ 2x - a - b & (x > b) \end{cases}$$

را می‌توان به صورت:

$$f(x) = \begin{cases} -(x - a) - (x - b) & (x < a) \\ (x - a) - (x - b) & (a \leq x \leq b) \\ (x - a) + (x - b) & (x > b) \end{cases}$$

نوشت که با استفاده از خواص قدرمطلق، تابع  $f$  به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

# مسائل ریاضی ۱

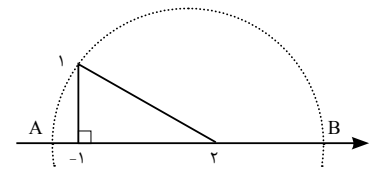
مصطفی دیداری

۱. جاهای خالی را با استفاده از اعداد گویای مناسب پر کنید.  
 $-\frac{4}{5} < \dots < -\frac{2}{3}$

۲. درآمد آقای خواجوی در هر ماه ۵۵۰/۰۰۰ تومان است. او  $\frac{1}{5}$  این درآمد را صرف پرداخت اجاره و  $\frac{7}{11}$  باقی مانده آن را نیز صرف هزینه های جاری در ماه می کند.  
 الف) او در هر ماه چه مقدار می تواند پس انداز کند؟

ب) او بعد از چند ماه می تواند کالایی به قیمت ۴۰۰/۰۰۰ تومان بخرد؟

۳. در شکل زیر، دو نقطه A و B نشان دهنده چه اعدادی هستند؟



۴. مقدار تقریبی عبارت  $\frac{\sqrt{8/9 + 3/0.12}}{\pi - \sqrt{4/1}}$  را به دست آورید.

۵. عبارت  $|1 - \sqrt{2}| + |\pi - 3|$  را بدون قدرمطلق بنویسید.

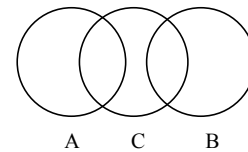
۶. عبارت «الف» را به ریاضی و عبارت «ب» را به فارسی بنویسید.  
 الف) اگر مربع هر عدد را با یک جمع کنیم، حاصل مثبت است.  
 ب) اگر:  $a < 0$ ، آنگاه:  $a^4 > 0$ .

۷. حاصل این عبارت را به دست آورید.

$$-2^2 + 0.4 \div 1 \frac{3}{5} - (3/0.1 - 0.7)$$

۸. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $B = \{-1, 0, 2, 6\}$  و  $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  حاصل  $(A \cup B) - (A \cap C)$  را به دست آورید.

۹. حاصل  $(A \cup B) \cap C$  را روی شکل هاشور بزنید.



۱۰. برای عبارت  $A \subset B \not\subset C$  یک شکل بکشید.

۱۱. عضوهای مجموعه  $A = \{2x - 1 \mid -1 < x^2 \leq 4, x \in \mathbb{N}\}$  را بنویسید.

۱۲. مجموعه  $\{0/2, 0/0.2, 0/0.2, \dots\}$  را به زبان ریاضی بنویسید.

۱۳. نماد علمی عدد  $\frac{1}{4000}$  را بنویسید.

۱۴. حاصل  $\frac{(3^2)^2 \times 8^{-2} \times 7^2}{18^{-4} \times 2^3}$  را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

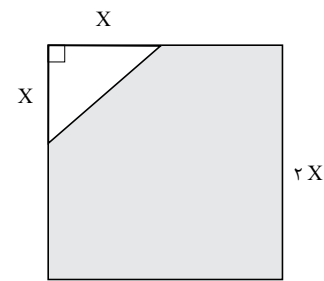
۱۵. اگر a و b دو عد مثبت باشند، عبارت  $\sqrt{a^2 b^2} \times \sqrt{18 a^5 b}$  را ساده کنید.

۱۶. حاصل  $\frac{1}{5} \sqrt{40} + \sqrt{3^2 + 1} - 2\sqrt{10}$  را به دست آورید.

۱۷. مخرج کسر  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3a}}$  را گویا کنید.

۱۸. قرینه معکوس کسر  $\frac{-xz}{y}$  را بنویسید.

۱۹. مساحت ناحیه رنگی را با یک عبارت جبری نمایش دهید. ضرب عددی و درجه عبارت جبری را مشخص کنید



۲۰. اگر  $A = 1 + x + x^2$  و  $B = 1 - x^2$  باشد، حاصل  $AB - 2(A + B)$  را به دست آورید.

۲۱. حاصل عبارت الف و ب را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$\text{الف) } (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2}) + (x^2 - 1)^2$$

$$\text{ب) } (2a - 3)^2$$

۲۲. جاهای خالی را با استفاده از اتحادها پر کنید.

$$\text{الف) } (\dots + \dots)(\dots + 4) = 4x^2 - 2x + \dots$$

$$\text{ب) } (\dots + 2)(x^2 - \dots + \dots) = \dots + 8$$

۲۳. تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 6x^2 + 5x$$

$$\text{ب) } \frac{x^2}{y^4} - 16$$

۲۴. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} = 5x$$

۲۵. اگر دو معادله  $x-1=2$  و  $ax+1=3$  هم ارز باشند، a چیست؟

۲۶. شمعی با طول اولیه ۳۰ cm در حال سوختن است، به طوری که در هر دقیقه ۳ cm از طول آن کاسته می شود.  
 الف) جدولی بکشید که طول شمع را در هر دقیقه ارائه کند و نمودار آن را رسم کنید.

ب) رابطه بین زمان (x) و طول شمع (y) را بنویسید.

۲۷. فاصله دو نقطه  $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

# مسائل ریاضی ۲

مصطفی دیداری

۱. جمله عمومی دنباله ای  $a_n = \frac{2n+3}{n-3}$  است:

الف) جمله پنجم دنباله را به دست آورید.

ب) کدام جمله برابر با پنج است؟

۲. جاهای خالی را طوری پر کنید که اعداد به دست آمده دنباله حسابی تشکیل بدهند.

$$\dots, -2, \dots, \frac{5}{4}, \dots$$

۳. m را طوری بیابید که سه جمله  $m-2$ ،  $m+4$ ،  $m+2$  و  $5m+2$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند (از چپ به راست). اگر دنباله کاهشی باشد، کدام m مورد قبول است؟

۴. دنباله تقریبات اعشاری  $\frac{5}{11}$  را تا سه رقم اعشار بیابید. این جملات به چه عددی نزدیک می شوند؟ با تشکیل دنباله تفاضلات حدس خود را بیازمایید.

۵. عدد  $\sqrt[5]{3 \times \sqrt[3]{3^2}}$  را با توان گویا بنویسید

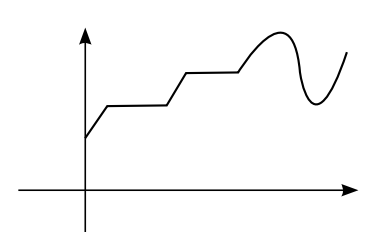
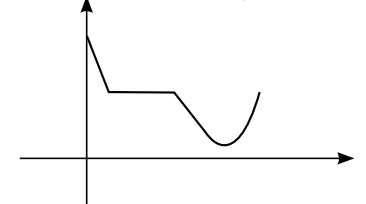
۶. مقدار عبارت  $\frac{(\sqrt[3]{3})^{5-\sqrt{5}} (\sqrt[3]{3})^{5+\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{9}}$  را به دست آورید.

۷. a و b را به گونه ای بیابید که رابطه  $R = \{(-2, 1), (a+1, 5), (a+2, b+1), (-2, a+5), (1, -2)\}$

تابع شود. دامنه و برد تابع را مشخص کنید

۸. تابعی بنویسید که ثابت و دارای دامنه نامتناهی باشد.

۹. کدام یک از نمودارهای زیر می توانند نشان دهنده میزان دما در یک سال باشند؟ چرا؟

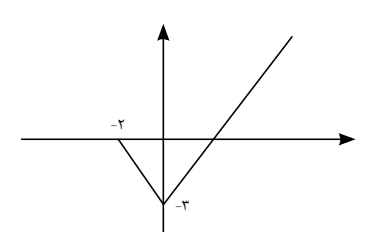


۱۰. ورودی یک شهر بازی ۲۰۰۰ تومان و هزینه استفاده از هر وسیله ۴۰۰ تومان است. تابعی بنویسید که هزینه را نسبت به تعداد وسایلی که هر فرد بازی کرده است، ارائه کند. دامنه تابع چه مجموعه ای می تواند باشد؟

۱۱. در تابع خطی (f) داریم:  $f(1) = 3$  و  $f(2) = 6$ . ضابطه تابع را به دست آورید.

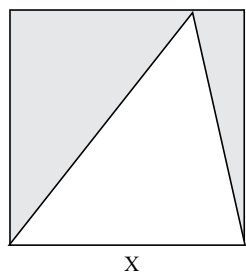
۱۲. ضابطه معکوس تابع  $2x - 3y = 6$  را به دست آورید. نمودار تابع و معکوس آن نسبت به کدام خط قرینه اند.

۱۳. دامنه و برد تابع با نمودار زیر را با استفاده از بازه ها نمایش دهید.



۱۴. اگر داشته باشیم:  $f(x) = \sqrt{2x-3}$  و  $g(x) = \frac{3x+1}{x+1}$  و  $g(f(2))$  و  $f(x+1)$  را به دست آورید.

۱۵. مساحت قسمت رنگی در مربع را به صورت تابعی از ضلع آن بیان کنید. اگر مساحت ناحیه رنگی ۸ باشد، طول ضلع چه قدر است؟



۱۶. نمودار تابع با ضابطه  $y = -(x-1)^2 + 2$  را با استفاده از انتقال رسم کنید (مراحل آن جداگانه رسم شود).

۱۷. دامنه توابع زیر را به دست آورید.  
 الف)  $y = \frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{x}{x-3}$

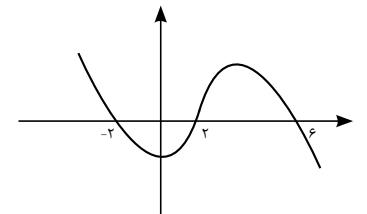
$$\text{ب) } y = \sqrt{\frac{4-x^2}{x(x+1)}}$$

۱۸. نامعادله  $\frac{x}{x-1} \geq \frac{1}{x+2}$  را حل کنید.

۱۹. a را طوری بیابید تا  $x^2 + ax + 1$  همواره مثبت باشد.

۲۰. اگر نمودار f به صورت زیر باشد، الف) دامنه تابع  $y = \frac{1}{f(x)}$  را به دست آورید.

ب) دامنه تابع  $y = \sqrt{f(x)}$  را به دست آورید.



۲۱. نمودار تابع  $y = (\frac{1}{2})^x$  را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار تقریبی  $(\frac{1}{2})^{-1/8}$  را با استفاده از نمودار به دست آورید.

ب) نمودار  $y = (\frac{1}{2})^{x-1} + 3$  را با انتقال رسم کنید.



# مسائل هندسه ۱

هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید نیمسازهای دو زاویه متقابل به رأس در امتداد یکدیگرند.

۲. نیمسازهای دو زاویه مجاور، با یکدیگر زاویه  $50^\circ$  می‌سازند. اگر اندازه یکی از دو زاویه سه برابر دیگری باشد، زاویه کوچک‌تر چند درجه است؟

۳. خط  $d$  از وسط پاره‌خط  $AB$  می‌گذرد. ثابت کنید  $A$  و  $B$  از  $d$  به یک فاصله‌اند.

۴. ثابت کنید هر مثلثی که در آن یک نیمساز و یک میانه برهم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ )، نیمساز زاویه  $A$ ،  $AC$  را در نقطه  $D$  قطع می‌کند. اگر  $AD = BD$  باشد، اندازه‌های زوایای مثلث  $ABC$  را به‌دست آورید.

۶. در شکل زیر داریم:  $BN = BM$  و  $CM = CP$ .

اگر  $\angle NMP = 32^\circ$ ، اندازه زاویه  $A$  را به‌دست آورید.



۷. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، ضلع  $AB$  دو برابر ضلع  $AD$  است. از نقطه  $M$  وسط ضلع  $AB$  به نقاط  $C$  و  $D$  وصل می‌کنیم. ثابت کنید  $MC$  و  $MD$  نیمسازهای دو زاویه  $C$

و  $D$  هستند.

۸. در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  داریم:  $AB = AC = 8$  و  $BC = 4$ . طول ارتفاع  $BH$  را به‌دست آورید.

۹. مساحت دوزنقه متساوی‌الساقینی را به‌دست آورید که محیط آن  $32$  سانتی‌متر، طول قاعده بزرگ آن  $6$  سانتی‌متر بیشتر از طول قاعده کوچک آن و طول قطر آن  $\sqrt{137}$  باشد.

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH$  را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:  $AH^2 = AB^2 + AC^2$ .

۱۱. قطرهای دوزنقه‌ای آن را به چهار مثلث تفکیک کرده‌اند. اگر مساحت دو مثلثی که دو ضلع موازی دارند،  $4$  و  $9$  واحد باشد، مساحت دوزنقه را به‌دست آورید.

# مسائل هندسه ۲

هوشنگ شرقی

۱. در مثلث  $ABC$  نیمساز زاویه  $A$ ،  $BC$  را در نقطه  $D$  قطع کرده است. ثابت کنید:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ . سپس طول‌های  $BD$  و  $CD$  را برحسب طول‌های سه ضلع مثلث به‌دست آورید.

۲. اولاً ثابت کنید هر سه عدد طبیعی متوالی و مخالف ۱ می‌توانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند. ثانیاً طول‌های اضلاع چنین مثلثی را بیابید؛

در صورتی که نیمساز بزرگ‌ترین زاویه آن، روی ضلع مقابل دو پاره‌خط ایجاد کند که پاره‌خط مجاور به کوچک‌ترین ضلع مثلث مساوی  $\frac{4}{3}$  سانتی‌متر باشد.

۳. طول قطرهای  $AC$  و  $BD$  از متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  به ترتیب مساوی  $6$  cm و  $12$  cm است. اگر  $M$  وسط  $BC$ ،  $DM = 9$  cm و نقطه برخورد  $DM$  و  $AC$  نقطه  $P$  و  $O$  مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، محیط مثلث  $ODP$  چه‌قدر است؟

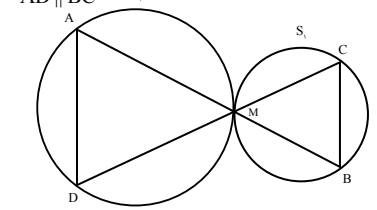
۴. در مثلث  $ABC$  می‌دانیم:  $AB > AC$  و میانه  $AM$  را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \angle AMC &< 90^\circ \\ \text{ب)} \quad \angle MAB &< \frac{\hat{A}}{2} \end{aligned}$$

۵. ثابت کنید مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

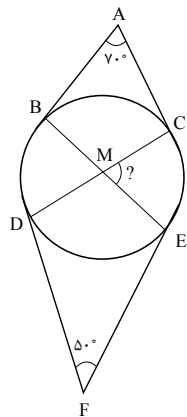
۶. مثلث  $ABC$  را با داشتن طول‌های  $AB = c$  و  $AC = b$  و میانه  $AM = m_a$  رسم کنید.

۷. در شکل زیر دایره‌های  $S_1$  و  $S_2$  در نقطه  $M$  برهم مماس‌اند. ثابت کنید:  $AD \parallel BC$



۸. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره متخارج در یک نقطه هم‌رأس‌اند.

۹. مثلث  $ABC$  و دایره محاطی آن مفروض‌اند. اگر دایره فوق در نقطه  $M$  بر  $AC$  مماس باشد، ثابت کنید:  $AM = p - a$  ( $p$  نصف محیط مثلث و  $CB = a$  است).



۱۰. در شکل بالا اندازه زاویه  $M$  را بیابید.

# مسائل جبر و احتمال

معین کتابچی

۱. به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید:  $3 \times 8^{n+2} - 17 \times 5^{n+1}$ .

۲. اگر  $\sqrt{5}$  عددی گنگ باشد، ثابت کنید  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$  عددی گنگ است.

۳. به کمک استدلال بازگشتی ثابت کنید:  $a^5 + b^5 \geq a^4b + ab^4$  ( $a, b \geq 0$ ).

۴. اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی متوالی باشند، ثابت کنید  $m^2 + n^2 + m^2n^2$  مربع کامل است.

۵. در یک نمایشگاه خودرو، ۳۳ دستگاه در سه مدل ب ام و، تندر و پژو در رنگ‌های قرمز، فیلی و زرد وجود دارند. حداقل چند خودروی یک رنگ و یک مدل وجود خواهد داشت؟

۶. آیا می‌توان یک جدول  $10 \times 10$  را با اعداد ۱، ۰ و ۱- طوری پر کرد که

مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر دو قطر جدول همگی متمایز باشند؟

۷. هرگاه  $A \cup B \subseteq A - B$  باشد،  $P(P(P(B)))$  چند عضو دارد؟

۸. اگر تساوی روبه‌رو برقرار باشد،  $X$  را به‌دست آورید؟

$$[X \cap (B' \cap C')] \cup [X \cap (B \cup C)] = A$$

۹. درستی تساوی‌های زیر را اثبات کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad A \subseteq B &\Rightarrow A \cup (B - A) = B \\ \text{ب)} \quad (A \cup B) &= A \cup C, A \cap B = A \cap C \\ &\Rightarrow B = C \\ \text{ج)} \quad B \subseteq A &\Rightarrow A \cup B' = U \end{aligned}$$

۱۰. اگر داشته باشیم:  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \log_2 x^2 + 4 = 2\}$ ،  $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m, 2^m \leq 1\}$ ، نمودار  $C = \{x \mid x \leq 2\}$ ،  $(B \times A) \cap (A \times C)$  را رسم کنید.

۱۱. نمودار رابطه زیر را رسم کنید:  $\begin{cases} R: Z \rightarrow Z \\ xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2 \end{cases}$

۱۲. اگر داشته باشیم  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$ ، آنگاه  $A^2 - B^2$  را رسم کنید.

۱۳. رابطه  $R$  روی  $\mathbb{R} - \{1\}$  به صورت زیر تعریف شده است. هم‌ارزی بودن  $R$  را بررسی کنید.  $xRy \Leftrightarrow x + y - xy \leq 1$

# مسائل حسابان

سیدعباس موسوی

عددی را جمع کنیم تا حاصل عددی بین  $240$  و  $1080$  شود؟

۲. باقی‌مانده تقسیم  $x^9 + 3x^8 + x^5 + x + 1$  بر  $ax + b$  به‌صورت  $(x^2 + 2)(x + 2)(x^2 + 4)$  است.  $a + b$  را به‌دست آورید.

۳. در بسط  $(\sqrt{x} + \frac{1}{2x})^9$ : الف) جمله مستقل از  $x$  را به‌دست آورید؛ ب) تعداد جملات و مجموع ضرایب بسط را به‌دست آورید.

۴. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x + 1 = 0$  باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش  $\frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta}$  باشند.

۵. آلیاژی از دو فلز به نسبت ۱ به ۲ و آلیاژ دیگر از همان فلزات با نسبت ۲ به ۳ ساخته شده است. با چه نسبتی این دو آلیاژ را با هم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۱۷ به ۲۷ به‌دست آید.

۶. معادلات زیر را حل کنید: الف)  $\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{12}$  ب)  $4 + \sqrt{x - 3} = \sqrt{16 - \frac{5}{\sqrt{x}}}$

۷. به روش هندسی تعداد و علامت ریشه‌های معادله  $\sqrt{-xe^{-x}} = 1$  را به‌دست آورید ( $e \approx 2.71$ ).

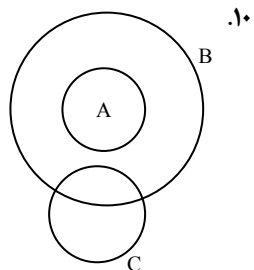
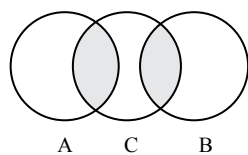
۸. نقاطی روی محور  $y$ ها مشخص کنید که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه به عرض ۱- و ۲ روی محور  $y$ ها، کمتر از ۳ نباشد.

۹. دامنه و برد تابع  $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$  را به‌دست آورید.

۱۰. اگر نمودار تابع  $f$  به‌صورت مقابل باشد،



$$\begin{aligned} 8. \quad A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 6\} \\ A \cap C &= \{1, 2\} \\ (A \cup B) - (A \cap C) &= \{3, 4, 5, -1, 6\} \end{aligned}$$



$$17. \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3a}} \times \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{6a}}{3a}$$

$$18. \quad \frac{y}{xz}$$

$$19. \quad (2x)^2 = 4x^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مساحت هاشور} = 4x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{7}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} 20. \quad AB &= (1+x+x^2)(1-x^2) \\ &= 1-x^2+x-x^2+x^2-x^4 \\ &= 1+x-x^2-x^4 \end{aligned}$$

$$A+B=1+x+x^2+1-x^2=2+x$$

$$\begin{aligned} AB-2(A+B) &= 1+x-x^2-x^4-4-2x \\ &= -3-x-x^2-x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \quad (3x-\sqrt{2})(3x+\sqrt{2}) &+ (x^2-1)^2 \\ &= 9x^2-2+x^2-1=10x^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } (2a-3)^2 &= (2a)^2-2(2a)(3)+3^2 \\ &= 4a^2-12a+9 \end{aligned}$$

$$22. \quad (2x-5)(2x+4) = 4x^2-2x-20$$

$$(x^2+2)(x^2-2x^2+4) = x^4+8$$

$$x = -\frac{1}{5}\sqrt{3}$$

## حل مسائل ریاضی ۱

$$1. \quad \frac{-4 \times 3}{5 \times 3}, \frac{-2 \times 5}{3 \times 5}$$

$$\frac{-12 \times 2}{15 \times 2}, \frac{-10 \times 2}{15 \times 2}$$

$$\frac{-24}{30}, \frac{-20}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{5} < \frac{-23}{30} < \frac{-22}{30} < \frac{-20}{30}$$

$$2. \quad \frac{1}{5} \times 550 / \dots = 110 / \dots$$

$$550 / \dots - 110 / \dots = 440 / \dots$$

$$\frac{7}{11} \times 440 / \dots = 280 / \dots$$

$$110 / \dots + 280 / \dots = 390 / \dots$$

$$550 / \dots - 390 / \dots = 160 / \dots$$

$$\text{ب) پس از سه ماه چون:}$$

$$3 \times 160 / \dots = 480 / \dots > 400 / \dots$$

$$3. \quad A: 2 - \sqrt{10}$$

$$B: 2 + \sqrt{10}$$

$$4. \quad \frac{\sqrt{8/9} + 3/0.12}{\pi - \sqrt{4/1}} \approx \frac{\sqrt{8/9} + 3}{\pi - \sqrt{4}} = \frac{2+3}{\pi-2} = 6$$

$$5. \quad \left| \frac{1-\sqrt{2}}{-} \right| + \left| \frac{\pi-3}{+} \right|$$

$$= -(1-\sqrt{2}) + \pi - 3 = \sqrt{2} + \pi - 4$$

$$6. \quad \text{الف) } a^2 + 1 > 0$$

$$\text{ب) اگر } a \text{ عددی منفی باشد، توان چهارم آن مثبت است.}$$

$$7. \quad 3/0.1 - 0/7 = 3/0.1$$

$$-2^2 = -4$$

$$0.4 \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{-1257}{200}$$

به دست آورید.

۱۳. اگر نمودار

$$f(x) = \log(\Delta x + \sqrt{1 + \Delta x^2})$$

مختصات متقارن باشد، a و b را طوری

$$y = |x+a| + |x+b|$$

به دست آورید که تابع زوج باشد.

۱۴. حدود b و a را طوری به دست

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & : x < 1 \\ x^2 + b & : x \geq 1 \end{cases}$$

آورید که تابع معکوس پذیر باشد. سپس ضابطه

معکوس را برای a=b=1 به دست آورید.

۱۵. نمودار تابع مقابل را رسم کنید و

موارد زیر را پاسخ دهید:

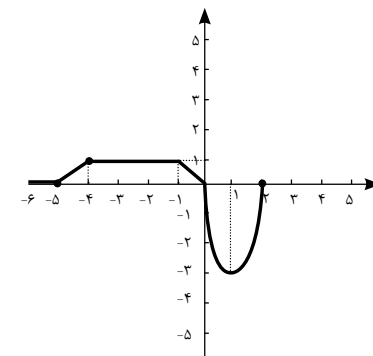
$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{x}{2} \right] & : -2 < x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & : -1 < x \leq 0 \\ \left[ \frac{x}{2} \right] & : 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & : 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{x}{2} \right] & : -2 < x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & : -1 < x \leq 0 \\ \left[ \frac{x}{2} \right] & : 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & : 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{x}{2} \right] & : -2 < x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & : -1 < x \leq 0 \\ \left[ \frac{x}{2} \right] & : 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & : 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{x}{2} \right] & : -2 < x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & : -1 < x \leq 0 \\ \left[ \frac{x}{2} \right] & : 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & : 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{x}{2} \right] & : -2 < x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & : -1 < x \leq 0 \\ \left[ \frac{x}{2} \right] & : 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & : 2 \leq x < 4 \end{cases}$$



الف) نمودار تابع با ضابطه  $-3f(2x+2)$

را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع  $-3f(2x+2)$  را

به دست آورید.

۱۱. اگر داشته باشیم:  $f(x) = \sqrt{x^2} + x$

و  $g(x) = x^2$  دامنه و ضابطه  $\text{gof}$  را

به دست آورید.

۱۲. اگر داشته باشیم  $f(x) = x - \frac{1}{x}$

و  $\text{gof}_{(x)} = x^2 + \frac{1}{x^2}$  ضابطه  $g(x)$  را

به دست آورید.

۱۳. اگر داشته باشیم:  $f(x) = \sqrt{x^2} + x$

و  $g(x) = x^2$  دامنه و ضابطه  $\text{gof}$  را

به دست آورید.

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!

• این یکی هم جالب است: کاوه و شهریار را که یادتان هست؛ دو برادر دوقلو را می گویم! آن ها هر کدام یک ساعت شماطه دار داشتند که هر دوی آن ها، سر هر ساعت به تعداد آن ساعت، زنگ می زدند، ولی ساعت کاوه سریع تر زنگ می زد! به این صورت که در مدت زمانی که ساعت کاوه سه زنگ می زد، ساعت شهریار فقط دو زنگ می زد. یک روز سر ساعت معینی، هر دو ساعت هم زمان شروع کردند به زنگ زدن. بعد از آن که زنگ زدن ساعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

۱= ۵

۲= ۵۵

۳= ۵۵۵

۴= ۴۴۴۴

۵= ؟

جواب را در انتهای همین بخش

ببینید

نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده قرار می گیرند که شما نمی دانید درباره چه چیزی باید صحبت کنید!

• این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می دهم که آن را برای خیلی ها تعریف می کنید!

با فرض در ست بودن همه تساوی ها، در





## حل مسائل ریاضی ۲

$$x^2 - 6x^2 + 5x = x(x^2 - 6x + 5) = x(x-1)(x-5)$$

$$\frac{x^2}{y^2} - 16 = \left(\frac{x}{y} - 4\right)\left(\frac{x}{y} + 4\right)$$

$$\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} = 5x$$

$$\frac{4(x-1) - 3(2x+1)}{12} = 5x$$

$$4x - 4 - 6x - 3 = 60x$$

$$-2x - 7 = 60x \Rightarrow -62x = 7$$

$$x = -\frac{7}{62}$$

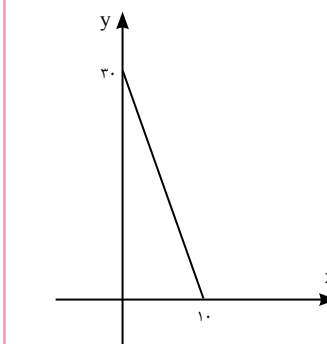
۲۳. هم‌ارز بودن دو معادله به معنی یکسان بودن جواب‌هاست.

بنابراین:  $x-1=2$  و لذا  $x=3$ .  
پس  $x=3$  جواب معادله دیگر هم باید باشد.  
 $3a+1=3 \Rightarrow 3a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

۲۴.

دقیقه (x)	۰	۱	۲	۳	...	۱۰
طول شمع (y)	۳۰	۲۷	۲۴	۲۱	...	۰

$y = 30 - 3x$



$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$



۱. الف)  $a_5 = \frac{2(5)+3}{5-3} = \frac{13}{2}$   
ب)  $\frac{2n+3}{n-3} = 5 \Rightarrow 2n+3=5n-15 \Rightarrow 3n=18 \Rightarrow n=6 \Rightarrow a_6 = 5$

۲.  $a_2 = -2 \Rightarrow a_1 + d = -2$   
 $a_5 = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 + 4d = \frac{5}{2}$   
 $3d = \frac{9}{2} \Rightarrow d = \frac{3}{2}$   
 $\Rightarrow -\frac{7}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}$

۳.  $(m+4)^2 = (m-2)(5m+2)$   
 $\Rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0$   
 $\Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-1 \end{cases} \Rightarrow 27, 9, 3$   
 $\Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-1 \end{cases} \Rightarrow -3, 3, -3$   
قابل قبول است.  $m=5$

۴. 
$$\begin{array}{r} 50 \\ 44 \overline{) 11} \\ \underline{44} \phantom{0} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 0 \end{array}$$
  
$$\begin{array}{r} 55 \\ 50 \overline{) 11} \\ \underline{50} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$
  
$$\begin{array}{r} 50 \\ 44 \overline{) 11} \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 0 \end{array}$$

۰/۴, ۰/۴۵, ۰/۴۵۴, ...  
 $\frac{5}{11} - \frac{4}{10} = \frac{50-44}{110} = \frac{6}{110}$   
 $\frac{5}{11} - \frac{45}{100} = \frac{500-495}{1100} = \frac{5}{1100}$   
 $\frac{5}{11} - \frac{454}{1000} = \frac{5000-4994}{11000} = \frac{6}{11000}$

دنباله تفاضلات به سمت صفر و بنابراین دنباله تقریبات اعشاری به سمت  $\frac{5}{11}$  می‌رود.

۵.  $\sqrt[4]{3 \times 3^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[4]{3^{1+\frac{4}{3}}} = \sqrt[4]{3^{\frac{7}{3}}} = 3^{\frac{7}{12}} = 3^{\frac{7}{12}}$

۶.  $\frac{\sqrt[4]{3^5-3^5}(\sqrt[4]{3^5}+\sqrt[4]{3^5})}{\sqrt[4]{9}} = \frac{(\sqrt[4]{3^5})^2(\sqrt[4]{3^5}+\sqrt[4]{3^5})}{\sqrt[4]{9}}$   
 $= \frac{(\sqrt[4]{3^5})^3}{\sqrt[4]{9}} = \frac{3^{\frac{15}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{13}{4}} = 3^{\frac{13}{4}}$

۷.  $a+5=1 \Rightarrow a=-4$   
قرار می‌دهیم  $\rightarrow \{(-2,1), (-3,5), (-2,b+1), (-2,1), (1,-2)\}$

$\Rightarrow b+1=1 \Rightarrow b=0$   
دامنه  $\{-2, -3, 1\}$   
برد  $\{1, 5, -2\}$

۸.  $f: N \rightarrow N$   
 $f(n)=1$

۹. الف) با توجه به دما در چهار فصل سال.

۱۰.  $y = 2000 + 400x$   
 $D = \{1, 2, \dots\}$

۱۱.  $f(x) = ax + b$   
 $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b = 3 \\ f(2) = 2a + b = 6 \end{cases}$   
 $a = 3$   
 $b = 0$   
 $f(x) = 3x$

۱۲.  $2x - 3y = 6 \Rightarrow 2x = 3y + 6$   
 $\Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} \Rightarrow y = \frac{2x-6}{3}$   
نمودار تابع معکوس و اصلی نسبت به خط  $y=x$  قرینه‌اند.

۱۳.  $D = (-2, +\infty)$   
 $R = [-3, +\infty)$

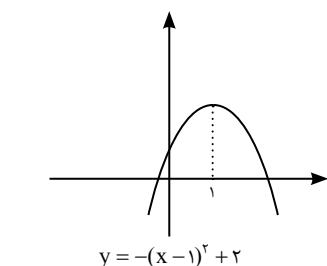
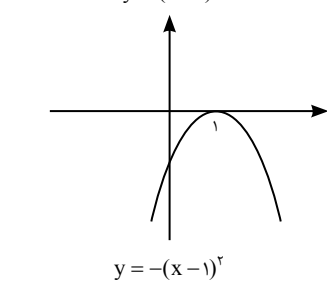
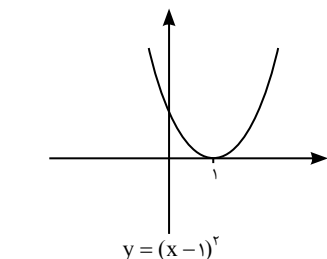
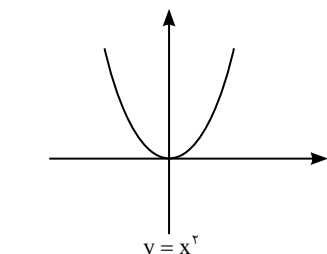
۱۴.  $f(2) = \sqrt{4-2} = 1 \Rightarrow g(f(2))$   
 $= g(1) = \frac{1}{2} = 2$   
 $f(x+1) = \sqrt{2(x+1)-2} = \sqrt{2x}$

۱۵.  $S_{\text{مربع}} = x^2$

$S_{\text{مثلث}} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$

$S_{\text{هاشور}} = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$   
 $\frac{x^2}{2} = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

۱۶.  $y = x^2$



۱۷. الف)  $\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \\ x-2 = 0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$   
 $D = R - \{0, 2, 2\}$

ب)  $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$   
 $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

x	-2	-1	0	1	2
$4-x^2$	-	+	+	+	-
$ x $	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
	+	-	+	+	-

$D = (-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 2]$

۱۸.  $\frac{x}{x-1} \geq \frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+2} \geq 0$   
 $\frac{x(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

x	-2	1
$x^2+x+1$	+	+
$x-1$	-	-
$x+2$	-	+
	+	-

جواب  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

۱۹.  $\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4 < 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) < 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$

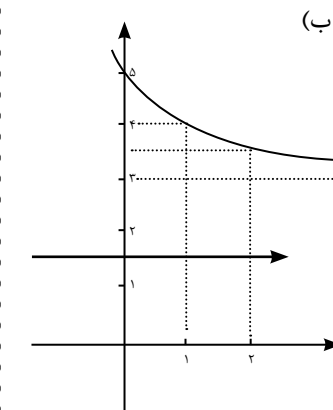
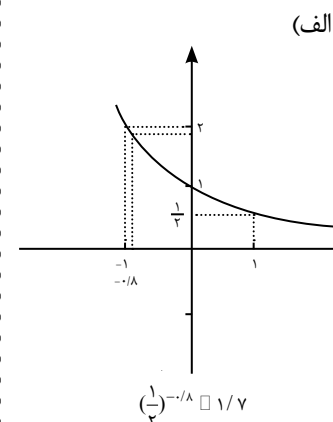
a	-2	1
$a^2-4$	+	-

$a \in (-2, 2)$

۲۰. الف)  $f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 2, 6$   
 $\Rightarrow D = R - \{-2, 2, 6\}$

ب)  $f(x) \geq 0 \Rightarrow D = (-\infty, -2] \cup [2, 6]$   
بالای محور xها

x	0	1	-1	2
y	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$



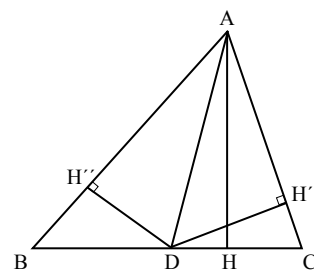
چهار نقطه به‌دست آمده را یک واحد به راست و ۳ واحد به بالا می‌بریم.

## حل مسائل هندسه ۱

۱. مطابق شکل، زوایای متقابل به رأس xOy و zOt را در نظر می‌گیریم. با توجه به برابری دو زاویه و ویژگی نیم‌سازها داریم OF و OS نیم‌سازهای این دو زاویه هستند.

# حل مسائل هندسه ۲

۱. نیم‌ساز AD و ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. مثلث ABD و ADC است. مساحت‌های این دو مثلث را با این ارتفاع می‌نویسیم و برهم تقسیم می‌کنیم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AH}{\frac{1}{2} CD \cdot AH} = \frac{BD}{CD} \quad (I)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس:  $DH' = DH$ .

بنابراین بار دیگر داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \cdot AB}{\frac{1}{2} DH' \cdot AC} = \frac{AB}{AC} \quad (II)$$

و از مقایسه روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

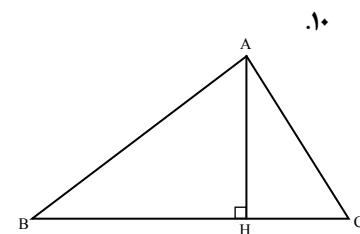
از ترکیب تناسب فوق در صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{AB+AC}{AC} &= \frac{BD+CD}{CD} = \frac{BC}{CD} \\ \Rightarrow CD &= \frac{AC \cdot BC}{AB+AC} \\ \Rightarrow BD &= BC - CD = BC - \frac{AC \cdot BC}{AB+AC} \\ \Rightarrow BD &= \frac{AB \cdot BC}{AB+AC} \end{aligned}$$

$$S = \frac{\lambda + 14}{2} \times 4 = 44, AH = 4$$

و از جواب دوم:

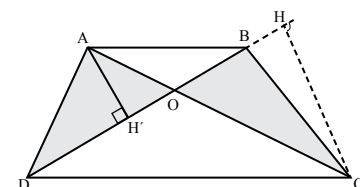
$$S = \frac{2 + \lambda}{2} \times \sqrt{12} = 20\sqrt{3}, AH = \sqrt{12}$$



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \\ \Rightarrow AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow AH^2 \cdot BC^2 &= AB^2 \cdot AC^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{AH^2} &= \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \\ &= \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} \\ \Rightarrow AH^2 &= AB^2 + AC^2 \end{aligned}$$

۱۱. مطابق شکل داریم:

$$S_{OAB} = 4, S_{CDO} = 9$$



ولی مثلث‌های ADC و BDC هم مساحت‌اند (چرا؟).

بنابراین: (چرا؟)  $S_{AOD} = S_{BOC}$

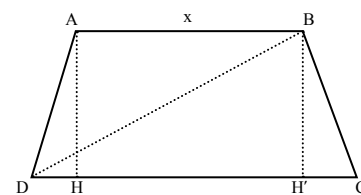
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} OD \cdot AH' &= \frac{1}{2} OB \cdot CH = S \\ \Rightarrow S^2 &= \frac{1}{4} OD \cdot AH' \cdot OB \cdot CH \\ &= \left(\frac{1}{2} OD \cdot CH\right) \cdot \left(\frac{1}{2} OB \cdot AH'\right) \\ &= S_{OCD} \cdot S_{OAB} = 9 \times 4 = 36 \\ \Rightarrow S &= 6 \Rightarrow S_{ABCD} = 9 + 4 + 6 + 6 + 25 \end{aligned}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BH \times 8 = 4\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{15}$$

۹. ارتفاع‌های دوزنقه را رسم می‌کنیم. واضح است که مثلث‌های ADH و BCH' هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:



$$\begin{aligned} DH &= CH', HH' = AB \\ \Rightarrow DH &= CH' = \frac{CD - AB}{2} \end{aligned}$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} AB &= x, CD = y, AD = BC = z, \\ x + y + 2z &= 32, \\ y - x &= 6 \Rightarrow DH = CH' = \frac{y - x}{2} = 3 \\ \Rightarrow DH' &= x + 3 \\ \Delta BDH' : BD^2 &= BH'^2 + DH'^2 \\ \Rightarrow 137 &= (BC^2 - CH'^2) + DH'^2 \\ \Rightarrow z^2 - 9 + (x + 3)^2 &= 137 \\ \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + z^2 &= 137 \\ \begin{cases} x^2 + z^2 + 6x = 137 \\ x + y + 2z = 32 \\ y - x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات بالا، به صورت زیر،  $x, y, z$  و از آنجا مساحت دوزنقه را می‌یابیم. ابتدا طرفین دو معادله دوم و سوم را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x + y + 2z) - (y - x) &= 26 \\ \Rightarrow 2x + 2z &= 26 \Rightarrow x + z = 13 \\ \Rightarrow z &= 13 - x \end{aligned}$$

سپس نتیجه را در معادله اول قرار می‌دهیم:

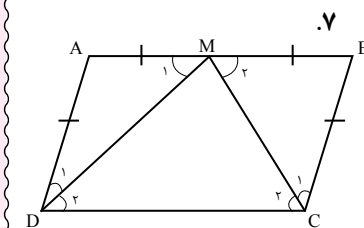
$$\begin{aligned} x^2 + (13 - x)^2 + 6x &= 137 \\ \Rightarrow 2x^2 - 20x + 32 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 16 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 8)(x - 2) &= 0 \Rightarrow x = 8 \text{ یا } x = 2 \end{aligned}$$

با توجه به معادلات دیگر دو دسته جواب به صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (I) \quad x &= 8, y = 14, z = 5 \quad \text{یا} \\ (II) \quad x &= 2, y = 8, z = 11 \end{aligned}$$

از جواب اول نتیجه می‌شود:

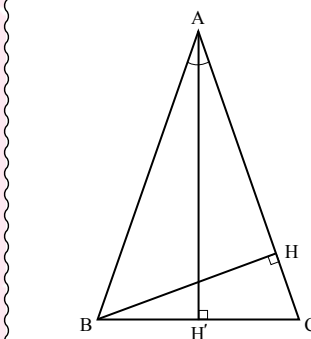
$$\begin{aligned} BM = BN &\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \\ \Rightarrow \Delta BNM : \hat{M}_1 &= \frac{180 - \hat{B}}{2} \\ CM = CP &\Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{P}_1 \\ \Rightarrow \Delta CMP : \hat{M}_2 &= \frac{180 - \hat{C}}{2} \\ \hat{M}_1 + \hat{M}_2 + 32^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 &= 148^\circ \\ \Rightarrow \frac{180 - \hat{B}}{2} + \frac{180 - \hat{C}}{2} &= 148^\circ \\ \Rightarrow 180 - \hat{B} + 180 - \hat{C} &= 296^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 64^\circ &\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 116^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= 2AD, MA = MB \\ \Rightarrow MA &= MB = AD = BC \\ MA = AD &\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1, AM \parallel CD, \text{مورب MD} \\ \Rightarrow \hat{M}_1 &= \hat{D}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{aligned}$$

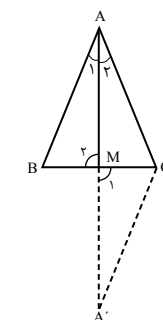
به همین ترتیب ثابت می‌شود که:  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و لذا MC و MD نیم‌سازهای زوایای C و D هستند.

۸. ارتفاع AH' را که میانه هم هست، رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:



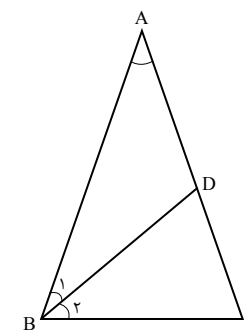
$$\begin{aligned} BH' &= CH' = \frac{BC}{2} = 2 \\ \Delta AH'B : AH'^2 + BH'^2 &= AB^2 \\ \Rightarrow AH'^2 &= AB^2 - BH'^2 = 8^2 - 2^2 = 60 \\ \Rightarrow AH' &= \sqrt{60} = 2\sqrt{15}, S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH' \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15} \end{aligned}$$

۴. مطابق شکل، میانه AM از مثلث ABC، نیم‌ساز زاویه A هم هست؛ یعنی:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $BM = MC$ . میانه AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد می‌دهیم و A' را به C وصل می‌کنیم.

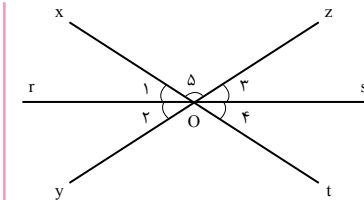
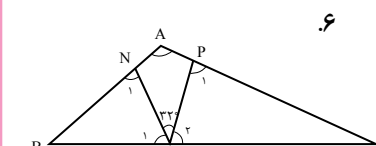


$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} AM &= A'M \\ MB &= MC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta A'MC \quad (\text{ض.ض.}) \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \\ \Rightarrow A'C &= AB, \hat{A}' = \hat{A}_1, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \Rightarrow \hat{A}' &= \hat{A}_2 \\ \Rightarrow A'C &= AC \Rightarrow AB = AC \end{aligned}$$

۵.

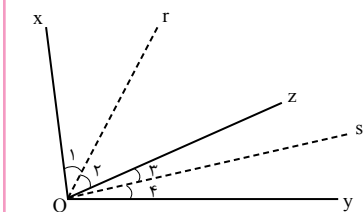


$$\begin{aligned} AD = BD &\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \alpha \\ AB = AC &\Rightarrow \hat{C} = \hat{B} = 2\alpha \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \\ \Rightarrow 5\alpha &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} &= 36^\circ, \hat{B} = \hat{C} = 72^\circ \end{aligned}$$



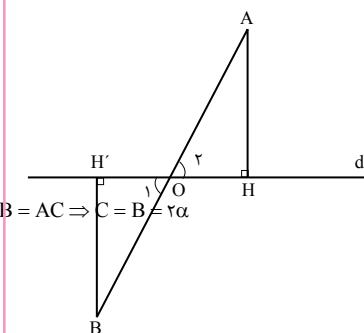
$$\begin{aligned} \hat{o}_1 + \hat{o}_2 &= \hat{o}_3 + \hat{o}_4 \Rightarrow 2\hat{o}_1 + 2\hat{o}_2 \\ \Rightarrow \hat{o}_1 &= \hat{o}_2 = \hat{o}_3 = \hat{o}_4 \\ \hat{o}_2 + \hat{o}_3 + \hat{o}_4 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{o}_2 + \hat{o}_2 + \hat{o}_1 = 180^\circ \\ r\hat{o}s &= 180^\circ \Rightarrow \text{OS و OR در یک امتدادند.} \end{aligned}$$

۲. طبق فرض مسئله داریم:



$$\begin{aligned} \hat{o}_1 &= \hat{o}_2, \hat{o}_2 = \hat{o}_3, \hat{o}_3 + \hat{o}_4 = 50^\circ \\ \Rightarrow 2\hat{o}_2 + 2\hat{o}_2 &= 50 \times 2 \\ \Rightarrow \hat{o}_1 + \hat{o}_2 + \hat{o}_3 + \hat{o}_4 &= 100^\circ \\ \Rightarrow x\hat{o}y = 100^\circ &\Rightarrow x\hat{o}z + z\hat{o}y = 100^\circ, \\ x\hat{o}z &= 2z\hat{o}y \\ \Rightarrow 4z\hat{o}y &= 100^\circ \Rightarrow z\hat{o}y = 25^\circ, x\hat{o}z = 75^\circ \end{aligned}$$

۳. خط d از وسط AB می‌گذرد (OA = OB) و فاصله A و B از d طول عمودهایی است که از A و B بر d رسم می‌شود (AH' و BH'). به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های OAH و OBH' حکم را ثابت می‌کنیم:



$$\begin{aligned} OA &= OB \\ \hat{o}_1 &= \hat{o}_2 \\ \hat{H} &= \hat{H}' = 90^\circ \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \quad (\text{وتر و یک زاویه}) \\ \Rightarrow AH &= BH' \end{aligned}$$



و از جمع روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\sqrt{BD} + \sqrt{EC} = 240^\circ \Rightarrow \sqrt{BD} + \sqrt{CE} = 120^\circ$$

$$\hat{M} = \frac{\sqrt{BD} + \sqrt{CE}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

## حل مسائل جبر و احتمال

۱.

$n = 1 \Rightarrow 5^7 - 3 \times 8^7 = 17q (q = -83)$   
 فرض:  $n = k \Rightarrow 5^{7k+1} - 3 \times 8^{k+2} = 17q'$   
 حکم:  $n = k+1 \Rightarrow 5^{7k+2} - 3 \times 8^{k+3} = 17q''$   
 طرفین فرض را در  $5^2$  ضرب می‌کنیم:

$$5^{7k+2} - 75 \times 8^{k+2} = 25 \times 17q'$$

$$\Rightarrow 5^{7k+2} - (17+8) \times 3 \times 8^{k+2} = 25 \times 17q'$$

$$\Rightarrow 5^{7k+2} - 3 \times 8^{k+2} = 17 \times 8^{k+2} \times 3 + 25 \times 17q'$$

$$+ 25 \times 17q' = 17(8^{k+2} \times 3 + 25q')$$

$$q''$$

۲. اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$  عددی گویا باشد:

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{7} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{7} = \frac{m}{n} - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{7})^2 = \left(\frac{m}{n} - 2\sqrt{5}\right)^2$$

$$63 = \frac{m^2}{n^2} + 20 - \frac{4m}{n}\sqrt{5}$$

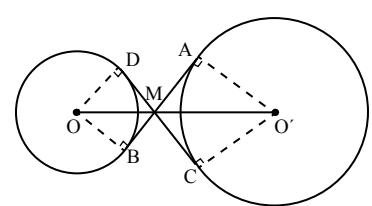
$$\Rightarrow \frac{4m}{n}\sqrt{5} = \frac{m^2}{n^2} - 43$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{\frac{m^2}{n^2} - 43n}{4m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{m^2 - 43n^2}{4mn} = \frac{m'}{n'}, m', n' \in \mathbb{Z}$$

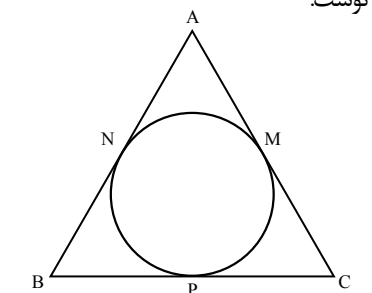
$$\Rightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{Q} \text{ (تناقض)}$$

اگر از M به O و O' وصل کنیم، چون شعاع بر مماس عمود است، داریم:



$OD = OB = R, O'A = O'C = R$   
 بنابراین O از MB و MD به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز زاویه DMB قرار دارد. به همین ترتیب، O' هم روی نیم‌ساز زاویه AMC واقع است. پس OM و O'M نیم‌سازهای دو زاویه متقابل به رأس AMC و DMB هستند و در یک راستا قرار دارند. یعنی OO' از M (نقطه برخورد AB و CD) می‌گذرد.

۹. با توجه به برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره، می‌توان نوشت:



$$AM = AN, CM = CP, BN = BP$$

$$\Rightarrow AM + AN = 2P - (CM + CP + BP + BN) = 2P - (2CP + 2BP)$$

$$\Rightarrow 2AM = 2P - 2(CP + BP)$$

$$\Rightarrow 2AM = 2P - 2BC$$

$$\Rightarrow AM = P - BC = P - a$$

۱۰. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BDEC} - \widehat{BC}}{2}$$

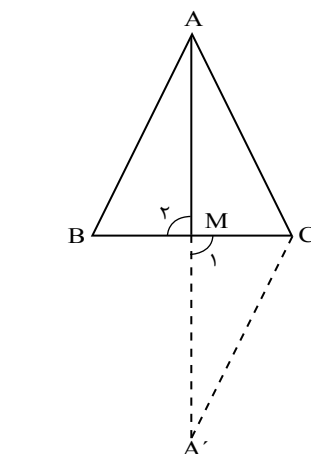
$$= \frac{\widehat{BD} + \widehat{DE} + \widehat{EC} - \widehat{BC}}{2} = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{DE} + \widehat{EC} - \widehat{BC} = 140^\circ \text{ (I)}$$

$$\hat{F} = \frac{\widehat{DBCE} - \widehat{DE}}{2}$$

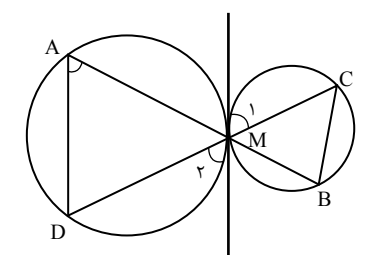
$$= \frac{\widehat{BD} + \widehat{BC} + \widehat{CE} - \widehat{DE}}{2} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{BC} + \widehat{CE} - \widehat{DE} = 100^\circ \text{ (II)}$$



طریقه رسم: ابتدا پاره‌خط AA' را به طول معلوم  $2m_a$  رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع b و به مرکز A' و به شعاع c، کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد دو کمان نقطه C است. از C به M (وسط AA') وصل می‌کنیم و به نقطه B برسیم. A را به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.

۷. مماس مشترک دو دایره را در نقطه M رسم می‌کنیم. به کمک زوایای محاطی و ظلّی داریم:



$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{MC}}{2}, \hat{B} = \frac{\widehat{MC}}{2} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}$$

$$\hat{M}_2 = \frac{\widehat{MD}}{2}, \hat{A} = \frac{\widehat{MD}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{A}, \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

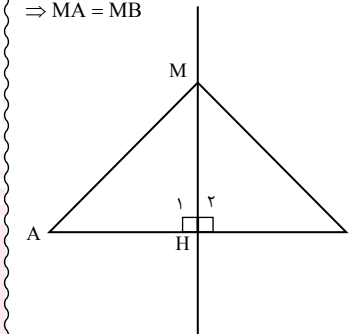
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow AD \parallel BC$$

(عکس قضیه خطوط موازی و مماس)

۸. مماس مشترک‌های داخلی دو دایره به مراکز O و O' مطابق شکل در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. حال

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ AH = BH \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAH \cong \triangle MBH$$

$$\Rightarrow MA = MB$$

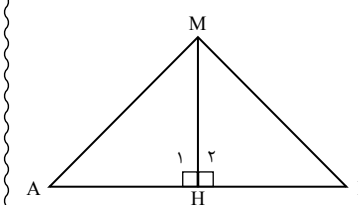


ثانیاً ثابت می‌کنیم اگر M از A و B به یک فاصله باشد، M روی عمودمنصف AB قرار دارد. از M به وسط AB وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ HA = HB \\ MH = MH \end{array} \right\} \text{ (ض‌ض)} \Rightarrow \triangle MAH \cong \triangle MBH$$

$$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2, \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow MH \perp AB$$



یعنی M روی عمودمنصف AB است.

۶. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. میانه AM را به اندازه خودش تا نقطه A' ادامه می‌دهیم و A' را به C وصل می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} AM = A'M \\ MB = MC \end{array} \right\} \text{ (ض‌ض)} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle A'MC$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$\Rightarrow A'C = AB, AA' = 2AM$$

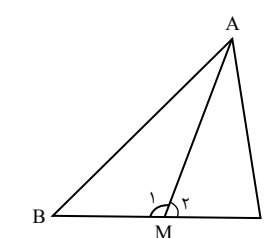
پس مثلث ACA' با داشتن طول‌های سه ضلع آن  $AA' = 2m_a, A'C = c, AC = b$  قابل رسم است و از آنجا به سادگی می‌توان مثلث ABC را رسم کرد.

۴. الف)

$$\left. \begin{array}{l} AM = AM \\ BM = CM \\ AB > AC \end{array} \right\} \text{ عکس قضیه لولا} \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{M}_2$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{M}_2 > 2\hat{M}_2$$

$$\Rightarrow 2\hat{M}_2 < 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_2 < 90^\circ$$



ب) میانه AM را از طرف M به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} AM = A'M \\ MB = MC \end{array} \right\} \text{ (ض‌ض)} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle A'MC$$

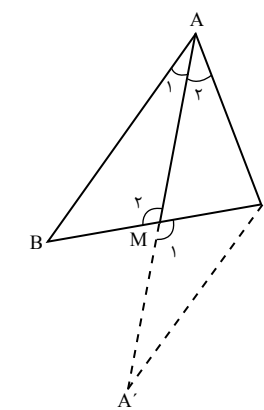
$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$\Rightarrow AB = A'C, \hat{A}_1 = \hat{A}'$$

$$AB > AC \Rightarrow A'C > AC$$

$$\triangle AA'C: A'C > AC \Rightarrow \hat{A}_r > \hat{A}' \Rightarrow \hat{A}_r > \hat{A}_1$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r > 2\hat{A}_1 \Rightarrow 2\hat{A}_1 < \hat{A} \Rightarrow \hat{A}_1 < \frac{\hat{A}}{2}$$



۵. اولاً ثابت می‌کنیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی با فرض این‌که مطابق شکل خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB و نقطه‌ای دل‌خواه روی d است، ثابت می‌کنیم:  $MA = MB$  می‌توان نوشت:

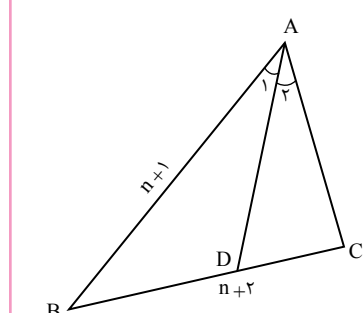
۲. اولاً، اگر این سه عدد را  $a = n+2, b = n+1, c = n$  در نظر بگیریم، کافی است ثابت کنیم که مجموع هر جفت از این عدد، از سومی بزرگ‌تر است (نامساوی مثلثی):

$$a + b = 2n + 3 > n(n + 2 > 0) \Rightarrow a + b > c$$

$$a + c = 2n + 2 > n(n + 2 > 0) \Rightarrow a + c > b$$

$$b + c = 2n + 1 > n + 2(n > 1) \Rightarrow b + c > a$$

ثانیاً، مطابق شکل اگر AD نیم‌ساز وارد بر بزرگ‌ترین ضلع  $(BC = n+2)$  باشد، طبق نتیجه مسئله ۱ داریم:



$$CD = \frac{BC \cdot AC}{AB + AC} = \frac{(n+2)n}{2n+1} = 4/2$$

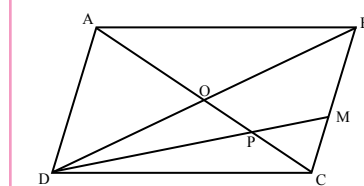
$$\Rightarrow n^2 + 2n = 8/2n + 4/2$$

$$\Rightarrow n^2 - 6/2n - 4/2 = 0$$

$$\Rightarrow (n-7)(n+1/2) = 0 \Rightarrow n = 7$$

یعنی طول‌های اضلاع این مثلث ۷، ۸ و ۹ سانتی‌متر هستند.

۳. در مثلث BDC، OC و DM دو میانه مثلث هستند. پس مرکز ثقل مثلث است و از آنجا داریم:



$$DP = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

$$OP = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AC = 1, OD = 6$$

$$\Rightarrow \text{محیط } \triangle ODP = 6 + 6 + 1 = 13$$

۳.

$$\begin{aligned} a^5 - a^4b + b^5 - ab^4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^4(a-b) - b^4(a-b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(a^4 - b^4) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2 + b^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

که با توجه به مثبت بودن  $a$  و  $b$  درستی نابرابری آخر واضح است.

۴.

$$\begin{aligned} m &= x, n = x+1 \\ \Rightarrow m^2 + n^2 + m^2n^2 &= x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 \\ &= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2(x^2 + 2x + 1) \\ &= 2x^2 + 2x + 1 + x^4 + 2x^3 + x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2 \end{aligned}$$

۵. با توجه به اصل ضرب،  $9 = 3 \times 3$  نوع خودرو از نظر رنگ و مدل داریم. پس لاقبل به اندازه  $1 + \left[ \frac{23-1}{9} \right] = 4$  خودرو از یک رنگ و یک مدل داریم.

۶. اگر همه اعداد یک سطر یا ستون یا قطر ۱ باشند، مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و اگر همه ۱- باشند، مجموع آن‌ها ۱۰- خواهد بود. پس مجموع عددهای سطرها، ستون‌ها و قطرهای یکی از اعداد مجموعه  $\{-1, -9, \dots, 9, 1\}$  است و در نتیجه ۲۱ حالت متفاوت دارند. اما ده سطر، ده ستون و ده قطر، یعنی ۲۲ عدد در مجموع داریم. پس طبق «اصل لانه کبوتر»، لاقل دوتا از این مجموعه‌ها باید برابر باشند و پاسخ سؤال منفی است.

۷.

$$\begin{aligned} (A \cup B) &\subseteq A \cap B' \\ \Rightarrow B \cap (A \cup B) &\subseteq B \cap (A \cap B') \\ \Rightarrow B &\subseteq (B \cap B') \cap A \Rightarrow B \subseteq \emptyset \\ \Rightarrow B &= \emptyset \end{aligned}$$

پس  $P(B)$  یک عضو دارد و  $P(P(B))$  دو عضو و  $P(P(P(B)))$  ۴ عضو دارد.

۸.

$$\begin{aligned} X \cap [(B' \cap C') \cup (B \cup C)] &= A \\ \Rightarrow X \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] &= A \\ \Rightarrow X \cap U &= A \Rightarrow X = A \end{aligned}$$

۹.

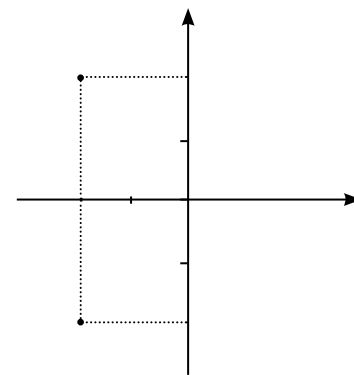
$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap A') \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A') = A \cup B = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad B &= B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C = C \cap (A \cup C) = C \end{aligned}$$

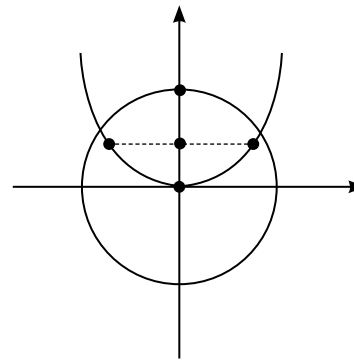
$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad B \subseteq A &\Rightarrow A \cup B = A \\ \Rightarrow B' \cup (A \cup B) &= B' \cup A \\ \Rightarrow (B' \cup B) \cup A &= B' \cup A \\ \Rightarrow B' \cup A &= U \end{aligned}$$

۱۰.

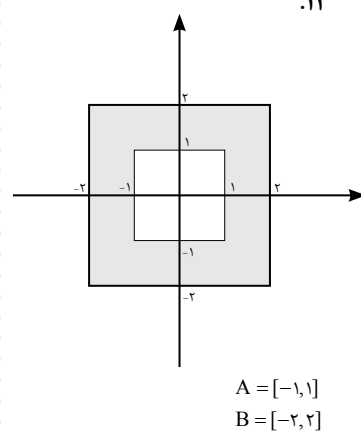
$$\begin{aligned} A: x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^2 = 4, x = \pm 2 \\ \Rightarrow A = \{-2, 2\} \\ B: \{-2, -1, 1\}, C = [-2, 2] \\ B \times A = \{(-2, -2), (-2, 2), (-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2)\} \\ A \times C = \{(-2, \alpha), (2, \beta) \mid -2 \leq \alpha, \beta \leq 2\} \\ \Rightarrow (B \times A) \cap (A \times C) = \{(-2, -2), (-2, 2)\} \end{aligned}$$



۱۱. فقط پنج نقطه با مختصات صحیح که در شکل نشان داده شده‌اند، نمودار رابطه با مشخص می‌کنند.



۱۲.



$$\begin{aligned} A &= [-1, 1] \\ B &= [-2, 2] \end{aligned}$$

۱۳.

$$\begin{aligned} xRx: x + x - x^2 &\leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &\geq 0 \\ \text{خاصیت بازتابی وجود دارد.} \\ xRy &\Leftrightarrow yRx: x + y - xy \leq 1 \\ \Rightarrow y + x - yx &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{خاصیت تقارنی وجود دارد.} \\ xRy, yRz &\Rightarrow xRz \\ \begin{cases} x + y - xy \leq 1 \\ y + z - yz \leq 1 \end{cases} &\Rightarrow x + z - xz \leq 1 \\ \begin{cases} x(1-y) + y - 1 \leq 0 \\ y(1-z) + z - 1 \leq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (1-y)(x-1) \leq 0 \\ (1-z)(y-1) \leq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (y-1)(x-1) \geq 0 \\ (y-1)(z-1) \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow (y-1)^2(x-1)(z-1) \geq 0 \\ \Rightarrow (x-1)(z-1) \geq 0 &\Rightarrow xz - x - z + 1 \geq 0 \\ \Rightarrow x + z - xz &\leq 1 \end{aligned}$$

خاصیت تعدی وجود دارد  
R هم ارزی است.



## حل مسائل حسابان

۱.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ \Rightarrow S_n &= \frac{n}{2}(-6 + (n-1)6) = 3n(n-2) \\ 240 < 3n^2 - 6n < 1080 \\ \Rightarrow 80 < n^2 - 2n < 360 \\ \Rightarrow \begin{cases} n^2 - 2n - 80 > 0 \\ n^2 - 2n - 360 < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (n-10)(n+8) > 0 \Rightarrow n > 10 \\ (n+18)(n-20) < 0 \Rightarrow -18 < n < 20 \end{cases} \\ \Rightarrow 10 < n < 20 \Rightarrow n = 11 \text{ یا } 12 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2)(x^2+4) &= 0 \\ x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 &= 16 \\ R(x) &= x(16)^2 + 3(16)^2 + x(16) + x + 1 \\ &= 272x + 769 \Rightarrow a = 272, b = 769 \\ a + b &= 1041 \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{9}{k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ \Rightarrow \frac{9-k}{2} - k &= 0 \Rightarrow k = 3 \\ \text{جمله دوم مستقل از } x &\text{ است.} \end{aligned}$$

بسط دارای ۱۰ جمله و مجموع ضرایب به ازای  $x=1$  به دست می‌آید؛ یعنی:  $\left(\frac{3}{2}\right)^9$ .

۴. راه اول: چون  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند. بنابراین:  $\beta^2 + 3\beta + 1 = 0$  و با ضرب در  $\beta$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta^2 + 3\beta^2 + \beta &= 0 \Rightarrow \beta^2 + 3\beta^2 = -\beta \\ \Rightarrow \frac{1}{\beta^2 + 3\beta^2} &= \frac{1}{-\beta}, \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{جدید } S = x'_1 + x'_2 = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{S}{P} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{جدید } P = x'_1 x'_2 = \frac{-1}{\alpha} \cdot \frac{-1}{\beta} = +\frac{1}{P} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

راه دوم: ریشه‌های معادله جدید عکس قرینه معادله قبل است. یعنی جای  $a$  و  $c$  عوض و ضریب  $x$  قرینه می‌شود:  $x^2 - 3x + 1 = 0$ .

۵. اگر نسبت دو آلیاژ جدید  $\frac{x}{y}$  باشد، از فلز اول  $\frac{x}{3} + \frac{2}{5}y$  و از فلز دوم  $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}$  در آن موجود است. لذا:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} &= \frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} \\ \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} &= \frac{3y}{5} - \frac{2y}{5} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \end{aligned}$$

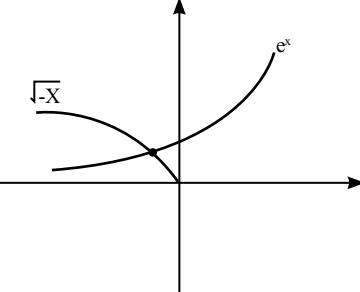
یعنی از آلیاژ اول ۹ و از آلیاژ دوم ۳۵ قسمت موجود باشد.

۶.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad x^2 + 2x &= a \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{12} \\ \Rightarrow 12a + 12 - 12a &= a^2 + a \\ a^2 + a - 12 &= 0 \Rightarrow (a-3)(a+4) = 0 \\ \begin{cases} a = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ a = -4 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

طرف راست کمتر از ۴ و طرف چپ بیشتر (ب)  
معادله ریشه ندارد  $\Rightarrow$  یا مساوی ۴

۷.



$$\begin{aligned} \sqrt{-x}e^{-x} &= 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{e^{-x}} \Rightarrow \sqrt{-x} = e^x \\ \text{یک ریشه منفی دارد.} \end{aligned}$$

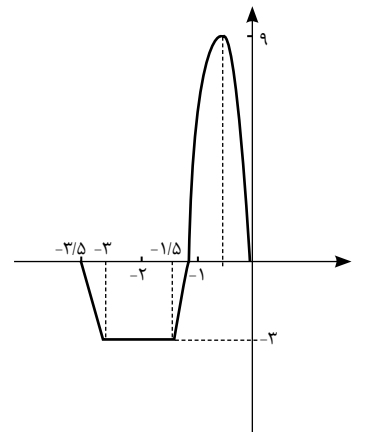
۸.

$$\begin{aligned} |y-2| + |y+1| &\geq 3 \Rightarrow \\ \text{تمام نقاط دارای این خاصیت اند!} \\ \text{زیرا با توجه به نامساوی مثلثی داریم:} \\ |y-2| + |y+1| &\geq |2-y+y+1| \\ \Rightarrow |y-2| + |y+1| &\geq 3 \end{aligned}$$

۹.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow 4x - x^2 \geq 0 \\ \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f &= [0, 4], y \geq x \\ y - x &= \sqrt{4x - x^2} \\ \Rightarrow y^2 + x^2 - 2xy + x^2 - 4x &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 - (2y+4)x + y^2 &= 0 \\ \Delta \geq 0 \Rightarrow 4y^2 + 16 + 16y - 8y^2 &\geq 0 \\ -4y^2 + 16y + 16 &\geq 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 4 \leq 0 \\ y_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ \text{با توجه به} &\rightarrow y \leq 2 + 2\sqrt{2} \\ y \geq x &\text{ شرط اولیه} \end{aligned}$$

۱۰. الف) ابتدا  $f(2x)$  را رسم می‌کنیم. یعنی تابع  $f$  را با نسبت  $\frac{1}{2}$  منقبض و بعد تابع را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و در انتها خروجی را  $(-3)$  برابر می‌کنیم. حاصل چنین است:



$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad D_f: -6 \leq x \leq 2 &\Rightarrow -6 \leq 2x + 2 \leq 2 \\ \Rightarrow -8 \leq 2x &\leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 0 \\ R_f: -3 \leq y \leq 1 &\Rightarrow -3 \leq f(2x+2) \leq 1 \\ \Rightarrow -3 &\leq -3f(2x+2) \leq 9 \end{aligned}$$





## پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه همین شماره

- معمای اول: هنوز دارید فکر می کنید؟! این که کاری ندارد! وقتی  $۱=۵$  باشد، حُب  $۵=۱$  است!!
- معمای دوم: یک پاسخ اشتباه که خیلی ها می دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار هم زمان می شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می زند.

۱۱.

$$\begin{aligned} D_g &= R \\ D_f &= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ g \circ f &= g(f(x)) = (\sqrt{x^2 + x})^2 = x^2 + x \\ D_{g \circ f} &= \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} \\ \Rightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 0), \sqrt{x^2 + x} &\in R \\ \Rightarrow D_{g \circ f} &= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

دقت: اگر دامنه را با تشکیل ضابطه محاسبه می کنیم، باید قبل از ساده سازی دامنه را بیابیم؛ یعنی زیر رادیکال  $\sqrt{x^2 + x}$  را نامنفی قرار دهیم.

$$\begin{aligned} 12. \quad g \circ f(x) &= x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2 \\ \Rightarrow g(f(x)) &= f^2(x) - 2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2 \end{aligned}$$

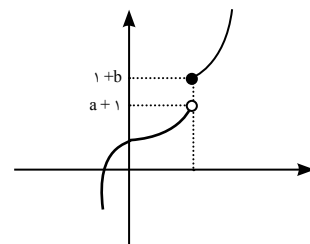
۱۳.

$$\begin{aligned} f: f(-x) + f(x) &= 0 \text{ فرد است} \\ \log(\Delta x + \sqrt{1 + \Delta x^2}) + \log(-\Delta x + \sqrt{1 + \Delta x^2}) &= 0 \\ \Rightarrow \log(1 + \Delta x^2 - \Delta x^2) &= 0 \\ \Rightarrow 1 + \Delta x^2 - \Delta x^2 &= 1 \Rightarrow a = 2\Delta \\ y = |x + 2\Delta| + |x + b| \\ f(-2\Delta) &= f(2\Delta) \\ \Rightarrow 0 + |b - 2\Delta| &= \Delta + |b + 2\Delta| \Rightarrow b = -2\Delta \end{aligned}$$

۱۴. بدیهی است اگر  $a < 0$  باشد، تابع یک به یک نخواهد بود و این با رسم شکل به خوبی مشخص می شود. هم چنین،

باید  $a+1$  پایین تر از  $1+b$  واقع شود و یا مساوی آن باشد.

$$a+1 \leq b+1 \Rightarrow 0 < a \leq b$$

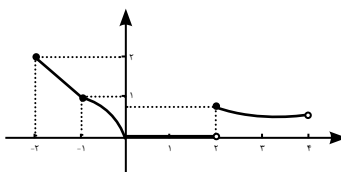


$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1: x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \\ \Rightarrow x^2 + 1 < 2 \\ x^2 + 1: x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \\ \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1} \\ y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1} \end{cases} \\ \downarrow \\ \text{با توجه به دامنه غیر قابل قبول است.} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{y-1}: x < 2 \\ \sqrt{1-x}: x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

۱۵.

$$\begin{aligned} -2 < x < -1 &\Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] &= -1 \Rightarrow x \left[\frac{x}{2}\right] = -x \\ < x < 2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$



(الف)

$$(-2, 0] \leftarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$$(-2, 2) \leftarrow \text{نزولی}$$

$$[2, 4) \leftarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$(0, 2) \leftarrow$  هم صعودی، هم نزولی (تابع ثابت)

(ب) برد:  $[0, 2]$

(ج) خیر زیرا یک به یک نیست.

(د) نه زوج، نه فرد

(ه)  $(0, 4)$

۱۶.

$$\begin{aligned} f(-19/84) &= f(-20 + 0.16) = f(0.16) \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.16}} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \end{aligned}$$

چون  $T = 5$  دوره تناوب است، پس هر مضربی از  $T$  در محاسبه  $f$  بی تأثیر خواهد بود.

۱۷.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{تابع فرد}} \\ \sqrt{x} &= \underbrace{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{-x}}{2}}_{\text{تابع فرد}} \end{aligned}$$



## پاسخ های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی برهان شماره ۷۵

### ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب

گفتیم که یک فروشنده ابزارهای دست دوم و کار کرده، وسیله کار کرده ای را به قیمت ۱۰ هزار تومان به فروشنده دیگری فروخت. کمی بعد فروشنده دوم چون نیازی به آن نداشت، آن را به فروشنده اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشنده دیگری آمد و آن را از همان فروشنده به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشنده اول چه قدر سود برد؟

سه پاسخ متفاوت به این سؤال را مطرح کردیم که اولی می گفت سه هزار تومان، دومی می گفت هزار تومان و سومی می گفت دو هزار تومان! نظرات متفاوتی را از

### ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی

پاسخ جدول محمدبن حسن کرجی، ریاضی دان بنام ایرانی بود. شرحی از زندگی او را به قلم زنده یاد استاد پرویز شهریاری در همین شماره آورده ایم.

### تولید ملی، حمایت از کار و سرمایه ایرانی برگ اشتراک مجله های رشد

نحوه اشتراک:

شما می توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۹۶۴۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سمرازه آزادی کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست از دو روش زیر مشترک مجله شوید:

۱- مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.

۲- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه دارید).

♦ نام مجلات دو خواستی:

♦ نام و نام خانوادگی:

♦ میزان تحصیلات:

♦ تاریخ تولد:

♦ تلفن:

♦ نشانی کامل پستی:

♦ استان:

♦ شماره فیش:

♦ پلاک:

♦ در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده اید، شماره اشتراک خود را ذکر کنید:

امضا:

• نشانی: تهران، مستشرق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۵۵/۱۱  
• وبگاه مجلات رشد: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
• شماره مجله: ۱۴-۷۷۳۳۹۷۱۳/۷۷۳۳۹۷۱۳-۳۱-۷۷۳۳۹۷۱۳

♦ هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۱۲۰۰۰۰ ریال  
♦ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۸۰۰۰۰ ریال

سؤال‌شونده	شهریار - دروغ‌گو	شهریار - راستگو	کاوه - دروغ‌گو	کاوه - راستگو
پاسخ	بله	بله	نه	نه

پس در پاسخ به این سؤال، شهریار همواره پاسخ بله و کاوه همواره پاسخ نه می‌دهد و از آنجا به راحتی می‌توان کاوه را شناسایی کرد.

**معمای سوم:** چون برادر دوم گفته است که من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم، پس او نمی‌توانسته راست‌گو باشد (زیرا راست‌گو کارت سیاه به همراه ندارد). یعنی او دروغ‌گوست و لذا جملهٔ او نادرست است. پس او کاوه نیست یا این‌که کارت سیاه به همراه ندارد. ولی چون او دروغ گفته است، پس کارت سیاه دارد، لذا باید کاوه نباشد، پس او شهریار است.

سخن آخر: یک پارادوکس

**سؤال:** آیا پاسخ این سؤال نه است؟

منظور از این سؤال، همان سؤال است! اگر بگوییم

آری، پس پاسخ سؤال نه است و در نتیجه نباید بگوییم

آری!! اگر هم بگوییم نه، پس یعنی باید بگوییم آری!!



شما دریافت کردیم، اما شاید پاسخ دقیق چنین باشد: ما نمی‌توانیم بگوییم سود فروشندهٔ اول چه‌قدر بوده، مگر آن‌که بدانیم ابتدا برای خرید آن چه‌قدر پول داده است! سود عبارت است از اختلاف بین مقداری که از فروش یک محصول دریافت می‌شود و مقداری که بابت آن پرداخت شده است. فروشندهٔ ما ۱۱ هزار تومان به‌دست آورده است: او نخست ۱۰ هزار تومان به‌دست آورده، سپس هشت هزار تومان داده، پس دو هزار تومان می‌ماند، آنگاه نه هزار تومان دیگر گرفته که در مجموع می‌شود یازده هزار تومان. ولی معلوم نیست ابتدا برای این جنس چه‌قدر پول داده است تا بتوان سود او را از مجموع این معاملات به‌دست آورد. پس هیچ‌یک از پاسخ‌ها درست نیست!

## ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی

**معمای اول:** هفت ایستگاه!

**معمای دوم:** از یکی از آن‌ها می‌پرسیم: «آیا کاوه دروغ‌گوست؟»

پاسخ به این سؤال در جدول زیر و در چهار حالت تجزیه و تحلیل شده است: سؤال‌شونده ممکن است کاوه باشد و راست‌گو، یا کاوه باشد و دروغ‌گو. شهریار باشد و راست‌گو یا شهریار باشد و دروغ‌گو (توجه داشته باشید که اگر کاوه راست‌گو باشد، شهریار دروغ‌گوست و برعکس).



### با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

#### مجله‌های دانش‌آموزی

**(به صورت فصلنامه و هفت‌شماره هر سه سال تحصیلی منتشر می‌شوند) :**

#### لایف بوک

(برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه اول دوره دبستان)

#### لایف بوک

(برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره دبستان)

#### لایف ریاضت‌آموز

(برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره دبستان)

#### لایف نویز

(برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)

#### لایف

(برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

#### مجله‌های بزرگسال عمومی

**(به صورت ماه‌نامه و هشت‌شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند) :**

♦ **رشد آموزش ابتدایی** ♦ **رشد آموزش راهنمایی تحصیلی** ♦ **رشد تکنولوژی آموزشی**

♦ **رشد مدرسه فرد** ♦ **رشد مدیریت مدرسه** ♦ **رشد معلم**

#### مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

**(به صورت فصلنامه و چهارشماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند) :**

♦ **رشد برهان** (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی) ♦ **رشد برهان متوسطه** (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه) ♦ **رشد آموزش قرآن** ♦ **رشد آموزش معارف اسلامی** ♦ **رشد آموزش زبان و ادب فارسی** ♦ **رشد آموزش هنر** ♦ **رشد آموزش مشاور مدرسه** ♦ **رشد آموزش تربیت بدنی** ♦ **رشد آموزش علوم اجتماعی** ♦ **رشد آموزش تاریخ** ♦ **رشد آموزش جغرافیا** ♦ **رشد آموزش زبان** ♦ **رشد آموزش ریاضی** ♦ **رشد آموزش فیزیک** ♦ **رشد آموزش شیمی** ♦ **رشد آموزش زیست‌شناسی** ♦ **رشد آموزش زمین‌شناسی** ♦ **رشد آموزش فنی و حرفه‌ای** ♦ **رشد آموزش پیش‌دستانی**

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

♦ **نشانی:** تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

♦ **تلفن و نمابر:** ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸



# مربع های جادویی



## دنیایی از رمز و راز اعداد

### چکیده

در این مقاله سعی شده است به طور خلاصه مربع های جادویی تشریح شوند. ابتدا تاریخچه ای درباره خواستگاه مربع های جادویی بیان شده است. پس از تعریف اصلی مربع جادویی و ثابت جادویی، به معرفی چند مربع جادویی شناخته شده می پردازیم. در میان این مربع ها بیشتر مطالب به مربع وفقی و ویژگی های آن اختصاص داده شده است. آن چه اهمیت دارد آن است که بتوان به راحتی مربع وفقی تولید کرد. در ادامه، روشی کلی برای تولید مربع های وفقی مرتبه فرد و دو روش مجزا برای ساخت مربع های وفقی مرتبه ۷ آورده شده است. در انتها ارتباط مربع وفقی با «فنگ شویی»، نظم بخشیدن به همه چیز، به طور خلاصه آمده است، زیرا جنبه های ریاضی آن در مربع وفقی بررسی شده است.

**کلیدواژه ها:** مربع جادویی، مربع وفقی، سودوکو، مربع لوشو، مربع لاتین، بازی ریاضی

### مقدمه

بشر از دیرباز مجذوب نیروی شگفت آور اعداد بوده، به طوری که یکی از سرگرمی های او بازی با اعداد بوده است. از میان اعداد، اعداد طبیعی بیشتر از سایر اعداد مورد بررسی قرار گرفته اند و سرگرمی های متفاوتی را تولید کرده اند. به مرور زمان اعداد از حالت بازی خارج شدند و جنبه سحر و جادو به خود گرفتند. عده ای عوام فریب برای پیشبرد اهداف خود از

اعداد استفاده می کردند. حتی برخی از شعرها و نویسندگان نامی جهان نیز در آثار بی نظیر خود از اعداد سود جسته اند. از جمله گوته، شاعر بزرگ آلمانی، در شاهکار فناناپذیر خود «فاوست»، صحنه ای را به ساختن اکسیر جوانی با فرمول مربع وفقی اختصاص داده است. قدر مسلم او با مربع های وفقی آشنایی داشت، زیرا بارها از تابلوی «افسردگی» نقاش بزرگ آلمانی، آلبرشت دیورر<sup>۱</sup>، سخن گفته و به نکات علمی آن اشاره کرده است.

با گذشت زمان و با پیشرفت هایی که در علم ریاضی صورت گرفت، این بازی ها شکلی کاملاً علمی به خود گرفتند و حتی در برخی موارد به عنوان یک رشته مجزا به آن پرداخته می شود. در این زمینه می توان به مربع های لاتین اشاره کرد که با استفاده از میحث ترکیبیات، می توان مطلبی را به صورت رمز در آورد.

در میان انواع بازی ها با اعداد، مربع های جادویی همواره مقام بالاتری داشته اند. از آغاز پیدایش هندسه و جبر، ویژگی های ریاضی مربع های جادویی مورد توجه ریاضی دانان بوده است. مربع های جادویی مربع هایی هستند که از اعداد طبیعی پر می شوند و هر یک ویژگی خاص خود را دارند که در این مقاله به معرفی تعدادی از آن ها را معرفی می کنیم. طبق اسناد و مدارک موجود، می باید کشور چین را زادگاه مربع های جادویی جهان دانست. زیرا قدیمی ترین منبعی که از آن ها نام برده، کتابی است چینی که حدود پنج هزار سال پیش از میلاد مسیح نوشته شده است. مربعی که در این کتاب مطرح شده، مربعی ۹ خانه ای است که در آن اعداد فرد به صورت دایره های سفید و اعداد زوج به صورت دایره های مشکی ترسیم شده اند. با جای گذاری اعداد زوج و فرد به جای رنگ های مورد نظر، خواص جالبی در مربع دیده می شود. اما قدیمی ترین مربع جادوی اروپا در تابلوی افسردگی دیورر نقش بسته است که سال ترسیم آن ۱۵۱۴ میلادی است.



شکل ۱. مربع جادویی آلبرشت دیورر

مربع جادویی آلبرشت دیورر، حکاکی شده در «ملن کولیا»<sup>۲</sup> به نظر اولین مربع جادویی در اروپاست که بسیار شبیه مربع جادویی یانگ هوی<sup>۳</sup> است که ۲۵ سال قبل از دیورر در چین ساخته شده است. عدد جادویی این مربع برابر ۳۴ است. به این معنا حاصل جمع کلیه اعداد واقع بر سطرها و ستون ها و قطر ها و همچنین مربع چهار تایی وسط و مربع های چهار تایی چهار گوشه همگی برابر ۳۴ هستند.

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۲. مربع جادویی آلبرشت دیورر

از نکات قابل توجه این مربع دو عدد وسطی در سطر است که تاریخ کنده کاری را نشان می دهد و برابر ۱۵۱۴ است.

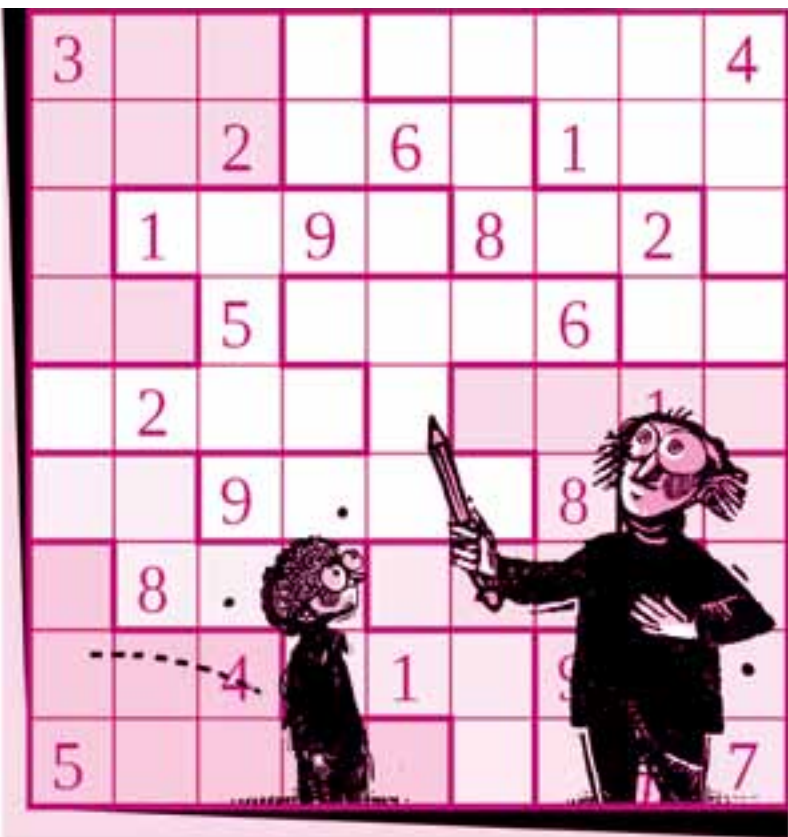
### ■ مربع جادویی چیست؟

مربع جادویی مرتبه n، جدولی n×n است که خانه های آن را با اعداد (معمولاً ۱ تا n<sup>۲</sup>) پر می کنند؛ به صورتی که ویژگی خاصی داشته باشد. برای مثال، مجموع همه سطرها یا ستون ها با هم برابر باشند یا در هر سطر یا هر ستون از هر عدد به کار رفته، تنها یکی وجود داشته باشد یا اعدادی که در کنار هم نوشته می شوند، برهم بخش پذیر نباشند و...

مربع های جادویی طی قرن ها برای انسان جذاب بوده اند و بیش از ۴۰۰۰ سال است که در فرهنگ های مختلف از جمله هند، اروپا و... دیده شده اند. این مربع بیشتر به صورت حکاکی شده روی سنگ یا فلز بوده اند و اکثر دانشمندان دوران باستان خصلت های سحر آمیزی را به آن ها نسبت می دادند.

### ■ تاریخچه مربع های جادویی

مربع های جادویی پایه های نجومی و پیشگویی داشته اند و از آن ها برای اندازه گیری طول عمر یا جلوگیری از بیماری استفاده می کردند. مثلاً یک مورد از آن ها در هندوستان، مربعی



۳×۳ به نام «کوبراکولام»<sup>۴</sup> است که آن را روی زمین به شکل ۳ می کشند و عدد جادویی آن ۷۲ است.

۲۳	۲۸	۲۱
۲۲	۲۴	۲۶
۲۷	۲۰	۲۵

شکل ۳. مربع جادویی کوبراکولام

یکی از ویژگی های این مربع جادویی آن است که همان مربع جادویی درجه ۳ شکل با عدد جادویی ۱۵ است که به هر یک از خانه های آن ۱۹ واحد اضافه شده است.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۴. مربع جادویی با عدد جادویی ۱۵

یک مربع جادویی بسیار شناخته شده دیگر در هندوستان در معبد «پارش راناس جین»<sup>۵</sup> وجود دارد. عدد جادویی آن

برابر ۳۴ است و در قرن ۱۰ میلادی بر دیوار معبد حکاکی شده است.

۷	۱۲	۱	۱۴
۲	۱۳	۸	۱۱
۱۶	۳	۱۰	۵
۹	۶	۱۵	۴

شکل ۵. مربع جادویی معبد پارش راناس چین

مربع‌های جادویی توسط اعراب به مغرب زمین انتقال یافتند. طی دوران رنسانس - دوران تحقیق وسیع - ریاضی‌دانی به نام کارنلینوس آگریپا روی مربعات جادویی که رتبه‌های آن‌ها بالاتر از ۲ بود، تحقیق کرد. مربع با رتبه ۱ بی‌معناست و می‌توان ثابت کرد که مربع جادویی با مرتبه ۲ وجود ندارد. آگریپا آن دسته از مربعات جادویی را تشکیل داد که رتبه‌های آن‌ها از ۳ تا ۹ بود و به آن‌ها مفهوم نجومی داد. آن‌ها را نمادی برای هفت جرم آسمانی (زحل، مشتری، مریخ، خورشید، زهره، عطارد و ماه) که تا آن زمان شناخته شده بودند، در نظر گرفت. اشکال مربعات روی چوب و موارد دیگر حک شدند و در خدمت سحر و جادو قرار گرفتند. حتی امروزه نیز در بخشی از مشرق زمین به‌خاطر این مقاصد از مربع‌های جادویی استفاده می‌شود. در قرن‌های ۱۶ و ۱۷ مردم بر این باور بودند که اگر مربع جادویی بر لوح نقره‌ای حک شود، آن‌ها را از آفت و بلا محفوظ می‌دارد.

ریاضی‌دانان ایرانی نیز با مربع‌های جادویی در ابتدای قرن ۱۷ آشنا شدند؛ یعنی زمانی که مسلمانان با فرهنگ هندی و آسیای جنوبی آشنا شدند و ریاضیات هندی و بعضی چیزهای دیگر ترکیببات و بخشی از نجوم را آموختند. البته این نظریه هم وجود دارد که آن‌ها با مربع‌های جادویی از طریق چین آشنا شدند. اولین مربع جادویی از درجه‌های ۵ و ۶ در یک دایره‌المعارف بغدادی در حدود سال ۹۸۳ میلادی توسط رسائل اینکوان الصفا<sup>۶</sup> آمده است و مربع‌های جادویی ساده‌تر قبل از آن توسط سایر ریاضی‌دانان ایرانی شناخته شده بودند. امام محمد غزالی، فیلسوف و دانشمند بزرگ ایرانی نیز در این باب رساله‌ای به زبان فارسی دارد.

از دیگر مربع‌های جادویی شناخته شده می‌توان به مربع جوزف سابیراچز اشاره کرد که مربعی از مرتبه ۴ است، و در کلیسای «ساگرادا فامیلیا»<sup>۷</sup> کنده‌کاری شده و عدد جادویی آن ۳۳ است. در حقیقت بسیار شبیه مربع جادویی دیورر است، اما مقدار ۵ تا از خانه‌ها را یکی کاهش داده است.

۴	۱۴	۱۴	۱
۹	۶	۷	۱۱
۵	۱۰	۱۰	۸
۱۵	۳	۲	۱۳

شکل ۶. مربع سابیراچز

۴	۱۵	۱۴	۱
۹	۶	۷	۱۲
۶	۱۰	۱۱	۸
۱۶	۳	۲	۱۳

شکل ۷. مربع دیورر



شکل ۸. مربع جادویی سابیراچز در کلیسای فامیلیا

در ادامه به معرفی چند مربع جادویی شناخته شده می‌پردازیم.

### ■ سودوکو

جدول اعدادی است که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای مختلف جهان به‌شمار می‌آید. سودوکو، مخفف عبارت ژاپنی «سوجی وادوکوشین نی گ اگیرو» است به معنی «ارقام باید تنها باشند». یک سودوکوی مرتبه  $n \times n$  است که با اعداد ۱ تا  $n$  به گونه‌ای پر می‌شود که در هر سطر و هر ستون آن از اعداد ۱ تا  $n$  فقط یک بار استفاده می‌شود. در شکل‌های ۹ و ۱۰ دو سودوکوی ۳ در ۳ و ۴ در ۴ نمایش داده شده‌اند.

۴	۲	۳	۱
۱	۳	۴	۲
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۲	۴

شکل ۹. سودوکوی مرتبه ۴

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شکل ۱۰. سودوکوی مرتبه ۳

هر چند این بازی برای اولین بار در یک مجله پازل آمریکایی در سال ۱۹۷۹ انتشار یافت، ولی انتشار آن به‌طور مستمر و پی‌گیر برای نخستین مرتبه به ژاپن در ۱۹۸۶ برمی‌گردد. از سال ۲۰۰۵ این سرگرمی به محبوبیت جهانی دست یافت و نخستین مسابقه ملی آن در سال ۲۰۰۸ در فیلادلفیای آمریکا برگزار شد. در ایران برای اولین بار «روزنامه همشهری» در سال

۱۳۸۵ به چاپ سودوکو به صورت روزانه دست زد.

از این مربع جادویی در بسیاری از مجلات سرگرمی و هوش استفاده می‌شود. نوع متداول سودوکو یک جدول ۹ در ۹ است که کل جدول هم به ۹ جدول کوچک‌تر ۳ در ۳ تقسیم شده است. در این جدول چند عدد به‌طور پیش فرض قرار داده شده‌اند که باید باقی اعداد را با رعایت سه قانون زیر یافت:

				۷				۵
			۱	۹	۵			۶
							۶	
				۸				۳
			۸		۳			۱
				۲				۶
	۶						۲	۸
			۴	۱	۹			۵
				۸			۷	۹

↓ پس از حل

۵	۳	۴	۶	۷	۸	۹	۱	۲
۶	۷	۲	۱	۹	۵	۳	۴	۸
۱	۹	۸	۳	۴	۲	۵	۶	۷
۸	۲	۶	۷	۵	۱	۴	۹	۳
۴	۵	۹	۸	۶	۳	۷	۲	۱
۷	۱	۳	۹	۲	۴	۸	۵	۶
۹	۶	۱	۵	۳	۷	۲	۸	۴
۲	۸	۷	۴	۱	۹	۶	۳	۵
۳	۴	۵	۲	۸	۶	۱	۷	۹

شکل ۱۱. سودوکوی ۹ در ۹ و حل آن

### ■ مربع وفقی

مربع وفقی مرتبه  $n$  جدولی  $n \times n$  است که خانه‌های آن با اعداد ۱ تا  $n^2$  به ترتیبی پر می‌شوند که مجموع اعداد هر ردیف افقی و یا هر ستون عمودی و یا هر قطر آن، عددی ثابت شوند.

۱۵	۱۵	۱۵			
↑	↑	↑			
۲	۷	۶	→	۱۵	
۹	۵	۱	→	۱۵	
۴	۳	۸	→	۱۵	
			↙		۱۵

شکل ۱۳. مربع وفقی مرتبه ۳

۴	۱۵	۶	۹
۵	۱۰	۳	۱۶
۱۱	۸	۳	۲
۱۴	۱	۱۲	۷

شکل ۱۲. مربع وفقی مرتبه ۴

عدد ثابت که به آن «ثابت جادویی» می‌گویند، از فرمول  $\frac{n(n^2+1)}{2}$  به دست می‌آید. برای مثال، ثابت جادویی برای مربع‌های مرتبه ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر است با ۱۵، ۳۴، ۶۵ و ۱۱۱.

### ■ مربع وفقی مرتبه ۳

یک نکته جالب در مربع وفقی مرتبه ۳ وجود دارد: عددی که در مربع وسط جدول ۳ در ۳ قرار دارد، عدد ۵ است. می‌دانیم که ثابت جادویی در مربع وفقی مرتبه ۳ عدد ۱۵ است. اعداد موجود در دو قطر اصلی و فرعی و سطرهای اول و سوم یک مربع وفقی ۳ در ۳ را با حروف، مانند جدول شکل ۱۴ مشخص می‌کنیم.

a	b	c
	d	
e	f	g

شکل ۱۴

واضح است که:  $\begin{cases} a+d+g=15 \\ c+d+e=15 \\ b+d+f=15 \end{cases}$  از جمله این سه رابطه

خواهیم داشت:  $a+b+c+3d+e+f+g=45$ . از طرف دیگر داریم:  $a+b+c=e+f+g=15$ . بنابراین:  $3d=15$  و لذا  $d=5$ .

نکته جالب دیگر در مورد مربع وفقی مرتبه ۳ آن است که  $a, c, e$  و  $b, d, f$  زوج‌اند. اگر  $a$  عددی فرد باشد، چون داریم:  $a+d+g=15$ ، لذا:  $a+g=10$  یا  $a-g=10$ . بنابراین  $g$  نیز عددی فرد است. بین اعداد ۱ تا ۹ بجز ۵ که وسط جدول قرار دارد، چهار عدد فرد ۱، ۳، ۷ و ۹ وجود دارند. لذا مکان‌های  $g$  و  $a$  یا با ۱ و ۹ پر می‌شوند یا با اعداد ۳ و ۷. فرض کنیم  $g$  و  $a$  با ۳ و ۷ پر شوند. بدون آن‌که به روند اثبات خللی وارد شود، فرض کنیم  $g=7$  و  $a=3$  باشند. بنابراین شکل ۱۵ را خواهیم داشت.

۳		
	۵	
		۷

شکل ۱۵

اعداد ۱ و ۹ باید در ۶ مربع باقی‌مانده قرار گیرند. در سطر و ستونی که عدد ۳ قرار دارد، نمی‌توانیم از عدد ۹ استفاده کنیم؛ زیرا:  $3+9=12$ . در نتیجه برای تولید عدد ۱۵ باید از عدد ۳ دوبار استفاده کنیم که این با طریقه ترسیم مربع وفقی تناقض





دارد. بنابراین عدد ۹ در یکی از دو مربع رنگی باید قرار گیرد. در این صورت در سطر یا ستونی که ۷ روی آن قرار دارد، عدد ۹ نیز قرار می گیرد که جمع این دو عدد ۱۶ خواهد شد که با ثابت جادویی تناقض پیدا می کند. پس  $g$  و  $a$  اعداد ۳ و ۷ نیستند. حال فرض کنیم  $g$  و  $a$  اعداد ۹ و ۱ باشند. باز هم بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض می کنیم:  $g = 9$  و  $a = 1$ . مانند حالت قبل ۳ نمی تواند در سطر و ستونی که عدد ۹ جزئی از آن است، قرار بگیرد. پس ۳ در دو مربع رنگی که در شکل ۱۶ مشخص شده اند، قرار خواهد گرفت.

۱		
	۵	
		۹

شکل ۱۶

در این صورت اگر در سطر یا ستونی که یکی از سلول هایش رنگ شده، عدد ۳ را قرار دهیم، برای تولید عدد ۱۵ عدد سوم باید ۷ باشد. بنابراین ۷ در سطر یا ستونی قرار خواهد گرفت که ۹ یکی از عناصر آن است که حاصل این دو عدد ۱۶ خواهد بود که باز تناقض ایجاد می شود. از این بحث نتیجه می شود که اعداد  $g$  و  $a$  فرد نیستند، پس زوج اند. به همین ترتیب می توان نشان داد که  $c$  و  $e$  نیز زوج اند.

با اثبات این نکته ظریف می توان همه مربع های افقی مرتبه ۳ را نوشت. هشت مربع افقی مرتبه ۳ وجود دارند که

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

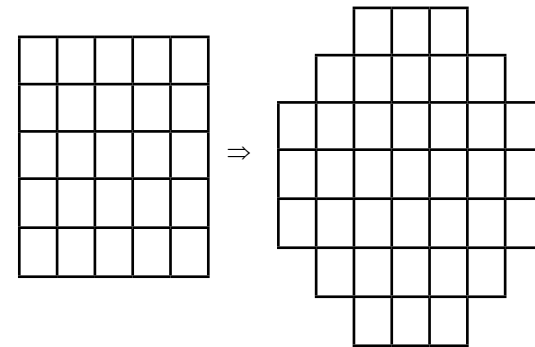
۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

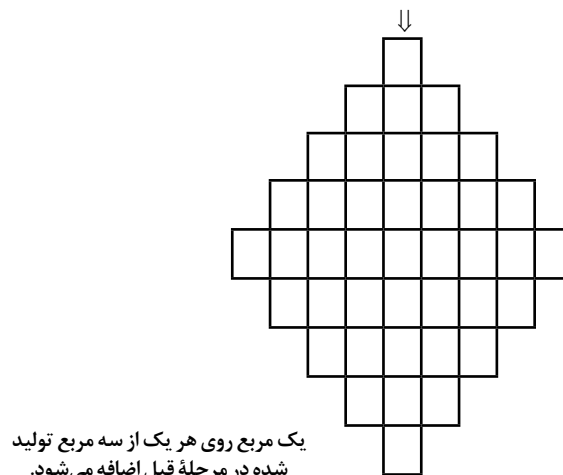
۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

شکل ۱۷. مربع افقی مرتبه ۳

**روش کلی برای ساختن مربع های افقی درجه فرد**  
فرض کنیم  $n$  عددی فرد باشد. ابتدا یک جدول  $n \times n$  رسم می کنیم. سپس روی ضلع مربع و از مربع میانی هر ضلع شروع می کنیم و به اندازه  $n - 2$ ، مربع جدید روی مربع های هر ضلع، مربع اضافه می کنیم و این کار را ادامه می دهیم تا آخرین ضلع فقط یک مربع تولید کند. برای آن که بهتر متوجه شوید، فرض کنیم:  $n = 5$ . مراحل زیر طریقه ساخت شکل مورد نظر را نشان می دهد.



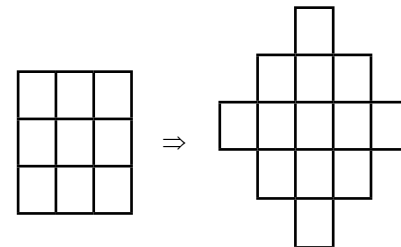
سه مربع روی اضلاع مربع اصلی رسم می شود



یک مربع روی هر یک از سه مربع تولید شده در مرحله قبل اضافه می شود.

شکل ۱۸. روش ساختن مربع افقی ۵×۵

یا برای  $n = 3$



شکل ۱۹. روش ساختن مربع افقی ۳×۳

برای  $n = 3$  می خواهیم مربع را رسم کنیم. اعداد ۱ تا ۹ را از سمت راست به چپ، یک در میان در قطر اصلی و قطرهای موازی با قطر اصلی مربع ها به صورتی که در شکل نشان داده شده است، می نویسیم.

	۱	
۴		۲
۷	۵	۳
	۸	۶
	۹	

شکل ۲۰

سپس اعدادی را که در خارج مربع  $n \times n$  اصلی قرار دارند، روی سطر یا ستونی که قرار گرفته اند به تعداد مرتبه مربع افقی (در این مثال ۳) با سه انتقال زیر مانند شکل ۲۱، به داخل مربع  $n \times n$  انتقال می دهیم.

۱. انتقال سطری به اندازه  $n$  خانه به چپ یا راست.
۲. انتقال ستونی به اندازه  $n$  خانه به بالا یا پایین.
۳. ترکیب انتقال ۱ با ۲ در صورتی که عددی با انتقال های ۱ یا ۲ به تنهایی وارد مربع نشود.

	۱	
۴		۲
۷	۵	۳
	۸	۶
	۹	

شکل ۲۱

در پایان مربع های اضافی را پاک می کنیم. به عنوان مثالی دیگر، برای — مربع افقی را به روش فوق رسم می کنیم.

	۱	
۶		۲
۱۱		۷
۱۶		۱۲
۲۱		۱۷
	۵	۱۳
	۱۰	۱۴
	۱۵	
	۲۰	
	۲۵	

↓

		۶		۲		
	۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳	
۱۶	۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶	۴
۲۱		۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
	۲۲	۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
		۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵
			۲۴		۲۰	
						۲۵

شکل ۲۱

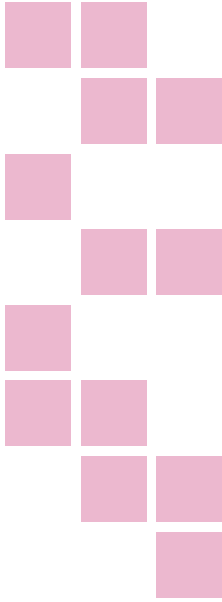
عدد جادویی مربع افقی مرتبه ۵ عدد ۶۵ است که در مربع بالا می توان به راحتی آن را بررسی کرد. ملاحظه می شود که در مرکز این مربع عدد ۱۳ قرار دارد. اکنون این سؤال مطرح می شود که: آیا در مربع های افقی مرتبه ۵ مانند مربع های افقی مرتبه ۳، عدد مرکزی ثابت است؟ با روش حرکت اسب شطرنج به راحتی به مربع افقی شکل ۲۲ می رسیم که عدد مرکزی آن ۱۳ نیست.

۱۱	۳	۲۰	۷	۲۴
۱۷	۹	۲۱	۱۳	۵
۲۳	۱۵	۲	۱۹	۶
۴	۱۶	۸	۲۵	۱۲
۱۰	۲۲	۱۴	۱	۱۸

شکل ۲۲

### روش هندی رسم مربع های افقی مرتبه ۷

علاوه بر روشی کلی که برای ترسیم مربع های افقی مرتبه فرد ذکر شد، از دو روش دیگر نیز می توان برای تولید مربع های افقی مرتبه ۷ استفاده کرد. در این روش، اعداد ۱ تا ۴۹ را به هفت دسته هفت تایی تقسیم می کنیم. اولین عدد از اولین دسته (عدد ۱) را زیر خانه مرکزی مربع، یعنی سطر پنجم و ستون چهارم، قرار می دهیم. اعداد هم دسته آن به ترتیب در خانه های موازی با قطر اصلی مربع جای می گیرند. اعدادی که بیرون مربع واقع می شوند، با انتقال های سه گانه ای که در بالا شرح دادیم، درون مربع جای می گیرند. قطر اصلی را با رنگ قرمز و قطر فرعی را با رنگ سبز نشان داده ایم.



						۴
۵						
	۶					
		۷				
			۱			
				۲		
					۳	

شکل ۲۳

پس از اتمام اعداد یک دسته، اولین عدد دسته بعد را دو خانه پایین‌تر از آخرین عدد نوشته شده، قرار می‌دهیم. این خانه به موازات قطر فرعی درست در گوشه پایین سمت چپ اولین عدد دسته قبل قرار دارد. اعداد بعدی دسته نیز همانند دسته قبل جای می‌گیرند.

				۱۰		
۵						
	۶					۱۲
۱۳		۷				
	۱۴		۱			
		۸		۲		
			۹		۳	

شکل ۲۴

با ادامه این روند، مربع کامل می‌شود.

۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۴۳	۳۷
۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۲۶	۲۰
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲	۴۵
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳۴	۲۸

شکل ۲۵

### روش سیامی رسم مربع‌های وقتی مرتبه ۷

در این روش که به روش سیامی مشهور است، ابتدا اعداد را در دسته‌های ۷تایی دسته‌بندی می‌کنیم. عدد ۱ را در مرکز ردیف اول (سطر اول و ستون چهارم) قرار می‌دهیم. اعداد هم

دسته ۱ به ترتیب به موازات قطر فرعی مربع جای می‌گیرند. اگر عددی خارج از مربع قرار گیرد، با انتقال‌های سه‌گانه که در مربعات مرتبه ۵ توضیح داده شد، وارد مربع می‌شود. پس از اتمام اعداد یک دسته، اولین عدد دسته بعدی درست زیر آخرین عدد نوشته شده قرار می‌گیرد. با ادامه این روند می‌توان مربع را کامل کرد.

۲۸	۱۹	۱۰	۱	۴۸	۳۹	۳۰
۲۹	۲۷	۱۸	۹	۷	۴۷	۳۸
۳۷	۳۵	۲۶	۱۷	۸	۶	۴۶
۴۵	۳۶	۳۴	۲۵	۱۶	۱۴	۵
۴	۴۴	۴۲	۳۳	۲۴	۱۵	۱۳
۱۲	۳	۴۳	۴۱	۳۲	۲۳	۲۱
۲۰	۱۱	۲	۴۹	۴۰	۳۱	۲۲

شکل ۲۶

### و این هم یک مربع وقتی مرتبه ۲۵

شکل ۲۷ (صفحه مقابل)

### مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس  $n \times n$  با درایه‌های ۱، ۲، ۳، ... و  $n$  به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشند. برای هر  $n$  داده شده می‌توان مربع لاتین ساخت. از مربع‌های لاتین مرتبه ۴ و ۵ که در زیر آمده است می‌توان به راحتی ایده کلی ساخت مربع لاتین را فراگرفت.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

شکل ۲۸. مربع‌های لاتین مرتبه ۴ و ۵

از ویژگی‌های این مربع می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:  
 ✓ ماتریسی متقارن است.  
 ✓ همه عناصر قطر فرعی برابر  $n$  است.  
 ✓ همه عناصر قطرهای موازی با قطر فرعی نیز یکسان هستند و از ۱ شروع و به  $n-1$  ختم می‌شوند.  
 ✓ اگر  $n$  زوج باشد، در قطر اصلی فقط اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ...

۱	۴۴۳	۲۳۵	۵۴۷	۳۳۹	۲۸۳	۱۰۰	۳۸۷	۱۷۹	۶۱۶	۵۶۵	۳۵۲	۴۴	۴۵۶	۱۴۸	۲۱۷	۵۰۹	۳۲۱	۱۱۳	۴۰۵	۴۹۹	۱۶۱	۵۷۸	۲۷۰	۵۷
۱۵۷	۵۹۹	۲۶۱	۵۳	۴۹۵	۴۳۹	۵۴۳	۳۳۵	۲۲	۹۱	۳۸۳	۲۰۰	۶۱۲	۲۷۹	۳۷۳	۴۰	۴۵۲	۱۴۴	۵۵۶	۵۰۵	۳۱۷	۱۰۹	۴۲۱	۲۱۳	
۳۱۳	۱۰۵	۴۱۷	۲۰۹	۵۲۱	۵۹۵	۲۵۷	۷۴	۴۸۶	۱۵۳	۲۴۷	۵۳۹	۳۳۶	۱۸	۴۳۵	۳۷۹	۱۹۱	۶۰۸	۳۰۰	۸۷	۴۷۳	۱۴۰	۵۵۲	۳۶۹	
۴۹۹	۱۳۱	۵۷۳	۳۶۵	۲۷	۴۱۳	۲۰۵	۵۱۷	۳۰۹	۲۵۳	۷۰	۴۸۲	۱۷۴	۵۸۶	۵۲۵	۳۴۷	۱۴	۴۲۶	۲۴۳	۱۸۷	۶۰۴	۲۹۱	۸۳	۴۰۰	
۶۲۵	۲۸۷	۷۹	۳۹۱	۱۳۷	۵۶۹	۳۵۶	۴۸	۴۶۵	۴۰۹	۲۲۱	۵۱۳	۱۱۷	۶۱	۴۷۸	۱۷۰	۵۸۲	۲۷۴	۳۴۳	۱۰	۴۴۳	۴۴۷	۲۳۹	۵۲۶	
۵۸۷	۲۵۴	۶۶	۴۸۳	۱۷۵	۲۴۴	۵۳۱	۳۴۸	۱۵	۴۲۷	۳۹۶	۱۸۸	۶۰۵	۲۹۲	۸۴	۲۸	۴۷۰	۱۳۲	۵۷۴	۳۶۱	۱۲۲	۴۱۴	۲۰۱	۵۱۸	
۱۱۸	۴۱۰	۲۲۲	۵۱۴	۳۰۱	۲۷۵	۶۲	۴۷۹	۱۶۶	۵۸۳	۵۲۷	۳۴۴	۶	۴۴۸	۲۴۰	۱۸۴	۶۲۱	۲۸۸	۸۰	۳۹۲	۴۶۱	۱۲۸	۳۵۷	۴۹	
۱۴۹	۵۶۱	۳۵۳	۴۵	۴۵۷	۴۰۱	۲۱۸	۵۱۰	۳۲۲	۱۱۴	۵۸	۵۰۰	۱۶۲	۵۷۹	۲۶۶	۳۴۰	۲	۴۴۴	۲۳۱	۵۴۸	۶۱۷	۲۸۴	۹۶	۱۸۰	
۲۸۰	۹۲	۳۸۴	۱۹۶	۶۱۳	۵۵۷	۳۷۴	۳۶	۴۵۳	۱۴۵	۲۱۴	۵۰۱	۳۱۸	۱۱۰	۴۲۲	۱۵۸	۶۰۰	۴۴۴	۲۳۱	۵۴۸	۶۱۷	۲۸۴	۹۶	۱۸۰	
۴۳۱	۲۴۸	۵۴۰	۳۳۷	۱۹	۸۸	۳۸۰	۱۹۲	۶۰۹	۲۹۶	۳۷۰	۳۲	۴۷۴	۱۳۶	۵۵۳	۵۲۲	۳۱۴	۱۰۱	۴۱۸	۲۱۰	۱۵۴	۳۵۹	۷۵	۴۸۷	
۴۲۳	۲۱۵	۵۰۲	۳۱۹	۱۰۶	۵۵	۴۹۲	۱۵۹	۵۹۶	۲۶۳	۳۳۲	۲۴	۴۳۶	۱۳۶	۵۵۳	۵۲۲	۳۱۴	۱۰۱	۴۱۸	۲۱۰	۱۵۴	۳۵۹	۷۵	۴۸۷	
۵۵۴	۳۶۶	۳۳	۴۷۵	۱۳۷	۲۰۶	۵۲۳	۳۱۵	۱۰۲	۴۱۹	۴۸۸	۱۵۵	۵۹۲	۲۵۹	۷۱	۲۰	۴۳۲	۲۴۹	۵۳۶	۳۸۸	۲۹۷	۸۹	۱۹۳	۶۱۰	
۸۵	۳۹۷	۳۹۷	۱۸۹	۶۰۱	۲۹۳	۳۶۲	۲۹	۴۶۶	۵۷۵	۵۱۹	۳۰۶	۱۱۳	۴۱۵	۲۰۲	۲۵۵	۵۸۸	۱۷۱	۲۵۵	۴۸۴	۴۲۸	۲۴۵	۵۲۲	۱۱	
۲۶۶	۵۲۸	۳۴۵	۷	۴۴۹	۳۹۳	۱۸۵	۶۲۲	۲۸۹	۷۶	۵۰	۴۶۲	۱۲۹	۵۶۶	۳۵۸	۳۰۲	۱۱۹	۴۰۶	۲۲۳	۵۱۵	۵۸۴	۲۷۱	۶۳	۴۸۰	
۲۶۷	۵۹	۴۹۶	۱۶۳	۵۸۰	۵۴۹	۳۳۶	۳	۴۴۵	۱۷۶	۶۱۸	۲۸۵	۹۷	۳۸۹	۴۵۸	۱۵۰	۵۲۲	۳۵۴	۴۱	۱۱۵	۴۰۲	۲۱۹	۵۰۶	۳۳۳	
۳۵۹	۴۶	۴۶۳	۱۳۰	۵۶۷	۵۱۱	۳۰۳	۱۲۰	۴۰۷	۲۲۴	۱۶۸	۵۸۵	۲۷۲	۶۴	۴۷۶	۴۵۰	۲۳۷	۵۲۹	۳۴۱	۸	۷۷	۳۹۴	۱۸۱	۲۹۰	
۳۹۰	۱۷۷	۶۱۹	۲۸۱	۹۸	۴۲	۴۵۹	۱۴۶	۵۶۳	۳۵۵	۳۲۴	۱۱۱	۴۰۳	۲۲۰	۵۰۷	۵۶۶	۳۶۸	۶۰	۴۹۷	۱۶۴	۳۳۳	۵۵۰	۳۳۷	۴۴۱	
۵۴۱	۳۳۳	۲۵	۴۳۷	۴۳۷	۴۲	۱۹۸	۶۱۵	۳۷۷	۹۴	۳۸۱	۴۵۵	۱۴۲	۵۵۹	۳۷۱	۳۸	۱۰۷	۴۲۴	۲۱۱	۵۰۳	۳۶۴	۵۱	۴۹۳	۵۹۷	
۷۲	۴۸۹	۱۵۱	۵۹۳	۲۶۰	۳۲۹	۱۶	۴۳۳	۲۵۰	۵۲۷	۶۰۶	۲۹۸	۹۰	۳۷۷	۱۹۴	۱۳۸	۵۵۵	۳۶۷	۳۴	۴۷۱	۴۲۰	۲۰۷	۵۲۴	۱۰۳	
۲۰۳	۵۲۰	۳۰۷	۱۲۴	۴۱۱	۴۸۵	۱۷۲	۵۸۹	۲۵۱	۶۸	۱۲	۴۲۹	۲۴۱	۵۲۳	۳۵۰	۲۴۴	۸۱	۳۶۸	۱۹۰	۶۰۲	۵۷۱	۳۶۳	۳۰	۱۳۴	
۱۹۵	۶۰۷	۲۹۹	۸۶	۳۷۸	۴۷۲	۱۳۹	۵۵۱	۳۶۸	۵۵۱	۱۰۴	۴۱۶	۲۰۸	۵۲۵	۳۱۲	۲۵۶	۷۳	۴۹۰	۱۵۲	۵۹۴	۵۳۸	۳۳۰	۱۷	۲۴۶	
۳۴۶	۱۳	۴۳۰	۲۴۲	۵۳۴	۶۰۳	۲۹۵	۸۲	۳۹۹	۱۸۶	۱۳۵	۵۷۲	۳۶۶	۲۶	۴۶۸	۴۱۲	۲۰۴	۵۱۶	۳۰۸	۱۲۵	۶۹	۴۸۱	۱۷۳	۲۵۲	
۴۷۷	۱۶۹	۵۷۱	۲۷۳	۶۵	۹	۴۴۶	۳۳۸	۵۳۰	۳۴۲	۲۸۶	۸۷	۳۹۵	۱۸۲	۶۲۴	۵۶۸	۳۶۰	۴۷	۴۶۴	۱۲۶	۲۲۵	۵۱۲	۳۰۴	۴۰۸	
۵۰۸	۳۴۵	۱۱۲	۴۰۴	۲۱۶	۱۶۵	۵۵۷	۲۶۹	۵۶	۴۹۸	۴۴۲	۲۲۴	۵۴۶	۳۳۸	۵	۹۹	۳۸۶	۱۷۸	۶۲۰	۲۸۲	۳۵۱	۴۳	۴۶۰	۵۶۴	
۳۹	۴۵۱	۱۴۳	۵۶۰	۳۷۲	۳۱۶	۱۰۸	۴۲۵	۲۱۲	۵۰۴	۵۹۸	۳۶۵	۵۲	۴۹۴	۱۵۶	۳۳۰	۵۴۲	۳۳۴	۲۱	۴۳۸	۳۸۲	۱۹۹	۶۱۱	۲۷۸	

شکل ۲۷. مربع وقتی مرتبه ۲۵

و  $n-1$  وجود دارند. برای  $n \geq 6$  این اعداد تکرار می‌شوند.  
 یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است. درایه‌های یک مربع لاتین ممکن است اطلاعاتی باشد که می‌خواهیم برای کسی بفرستیم. یک مربع لاتین  $n \times n$  از  $n^2$  اطلاع تشکیل می‌شود. با توجه به آخرین ویژگی بیان شده در مربع لاتین، کافی است  $\frac{1}{4}$  از اطلاعات را منتقل کنیم. شخصی که اطلاعات را دریافت کرده است، به صورت منحصر به فردی سایر اعداد را در مربع می‌نویسد و به اطلاعات مورد نظر می‌رسد.

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۱
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۵

شکل ۲۹. مربع لاتین مرتبه ۶

### مربع لوشو<sup>۸</sup>

همان مربع وقتی ۳ در ۳ است که احتمالاً باستانی‌ترین روش استفاده از «فنگ‌شویی» است. طبق افسانه‌های چینی، امپراتور «یو»، آن را بر لاک یک لاک‌پشت غول‌پیکر پیدا کرد! می‌توان چیدمان کل خانه یا ساختمان، اتاق، دفتر کار، میز و هر چیزی را براساس مربع لوشو و با در نظر گرفتن جدول عنصرها، جهت‌ها، رنگ‌ها و نمادها در فنگ‌شویی قرار داد تا



## ایستگاه چهارم: چند معمای خردگانی!

دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

● باز هم دوقلوها و باز هم شناسایی آن‌ها! یک بار دیگر در تشخیص دوقلوها از یکدیگر دچار مشکل شدم! این بار یکی از برادرها گفت: «ما دوتایی به آن اتاق می‌رویم و در آن‌جا چند کارت قرمز و سیاه داریم. سپس یکی از ما یک کارت در جیبش می‌گذارد و بیرون می‌آید و جمله‌ای به تو می‌گوید. از روی جمله او، تو باید تشخیص بدهی که او کیست.»

بعد یکی از دو برادر از اتاق خارج شد و روبه‌روی من ایستاد و گفت: «اگر من شهریار باشم، آنگاه کارت قرمز به همراه ندارم.»

او چه کسی بود؟ به یاد داشته باشید که هر کس که کارت قرمز به همراه داشته باشد، همواره راست می‌گوید و کسی که کارت سیاه داشته باشد، همواره دروغ می‌گوید.

**نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده**

**قرار می‌گیرند که شما نمی‌دانید درباره**

**چه چیزی باید صحبت کنید!**

## پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه همین شماره

● **معمای اول:** هنوز دارید فکر می‌کنید؟! این که کاری ندارد! وقتی  $1=5$  باشد، حُب  $1=5$  است!!

● **معمای دوم:** یک پاسخ اشتباه که خیلی‌ها می‌دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار هم‌زمان می‌شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می‌زند.

● **معمای سوم:** گوینده اذعان می‌کند که او شهریاری که کارت قرمز به همراه دارد، نیست. جمله او باید درست باشد، زیرا اگر او شهریار بود و کارت قرمز به همراه داشت، باید راست می‌گفت و نمی‌توانست بگوید شهریاری که کارت قرمز دارد، نیست. پس این درست است که او شهریاری همراه با کارت قرمز نیست. چون جمله او درست است، پس او باید در حقیقت کارت قرمز به همراه داشته باشد. پس او کاوه‌ای است که کارت قرمز همراه دارد.



● این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می‌دهم که آن را برای خیلی‌ها تعریف می‌کنید! با فرض درست بودن همه تساوی‌ها، در سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

$1=5$

$2=55$

$3=555$

$4=4444$

$5=?$

جواب را در انتهای همین بخش ببینید.

● این یکی هم جالب است: **کاوه و شهریار** را که یادتان هست؛ دو برادر دوقلو را می‌گوییم! آن‌ها هر کدام یک ساعت شش‌ساعته دار داشتند که هر دوی آن‌ها، سر هر ساعت به تعداد آن ساعت، زنگ می‌زدند، ولی ساعت کاوه سریع‌تر زنگ می‌زد! به این صورت که در مدت زمانی که ساعت کاوه سه زنگ می‌زند، ساعت شهریار فقط دو زنگ می‌زند. یک روز سر ساعت معینی، هر دو ساعت هم‌زمان شروع کردند به زنگ‌زدن. بعد از آن که زنگ‌زدن ساعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ

به زمین است (خانه‌های ۲، ۵، ۸). عناصر چوب و فلز از نظر قدرت متوسط هستند و هر کدام دو خانه دارند. خانه‌های ۳ و ۴ (شرق و جنوب شرقی) متعلق به چوب و خانه‌های ۶ و ۷ (غرب و شمال غربی) متعلق به فلز هستند. به ترتیب شمال غربی (خانه ۶) جای افراد کمک‌کننده است. شمال (خانه ۱) جایگاه شغل و حرفه است. شمال شرقی (خانه ۸) محل دانش و تحصیلات است. شرق (خانه ۳) مربوط به نیاکان و خانواده است. مرکز که بسیار مهم است (خانه ۵)، مربوط به سلامتی است. غرب (خانه ۷) مربوط به هر چیزی است که فرد به‌وجود می‌آورد. به همین خاطر خانه شماره ۷ را جایگاه خلاقیت و فرزندان می‌دانند. جنوب شرقی (خانه ۴) مربوط به پول و مسائل مالی است. جنوب (خانه ۹) جایگاه موفقیت و اعتبار فرد است. و در آخر، جنوب غربی (خانه ۲) مربوط به روابط دوگانه است که می‌تواند رابطه ناشویی یا شراکت باشد. اگر به دلیلی خانه به شکل مربع نباشد (مشکل اکثر خانه‌ها)، قسمتی از مربع لوشوی ما حذف می‌شود. مثلاً در شکل ۳۰، خانه‌های شماره ۶ و ۱ حذف شده‌اند و خانه شماره ۴ کمبود دارد که نشان می‌دهد افراد ساکن این خانه در شغل و حرفه خود مشکل دارند. هم‌چنین در زندگی کسی را ندارند که به خوبی آن‌ها را حمایت کند و در نتیجه، اوضاع مالی چشم‌گیری هم ندارند.

وقتی یک خانه یا هر محلی به هر ترتیب قسمتی را کم یا زیاد دارد، باعث به‌وجود آمدن عدم تعادل در آن محیط می‌شود. ما باید از تکنیک‌هایی استفاده کنیم و عدم تعادل انرژی را برطرف کنیم. باید اجازه دهیم انرژی به شکل صحیحی جریان پیدا کند. برای این کار می‌توان از نور، صورت، گیاه زنده، رنگ و چرخه عناصر استفاده کرد.

چون جنبه‌های ریاضی مربع لوشو بسیار کم است، از توضیح بیشتر درباره آن خودداری می‌کنیم.

- منابع .....
1. Jhon Lee. Folts, Magic square. (La. Sall, Illinois: open course, 1976).
  2. Eric W. Weisstein, Magic square at Math world
  3. Magic square museum, The first "Second Life museum about magic square" Volcano (89, 35, 25)
  4. W.S.Androws, Magic square and cubes. (New York: Dover, 1960), originally printed in 1917
  ۵. شوارتز، گئورگیا. راهنمای علمی و کاربردی فنگ‌شویی. ترجمه ملیندا اسکندری. انتشارات ققنوس. ۱۳۸۸.
  ۶. لائو، کوآن. فنگ‌شویی برای امروز. ترجمه محمد قراچه‌داغی. انتشارات آسیم. [بی‌تا].
  7. www.wikipedia.com

بهترین نتیجه را بدهد. در این صورت، هر بخش از خانه به یک حوزه زندگی انسان (مثلاً روابط، سلامتی، حرفه، ...) مربوط می‌شود.

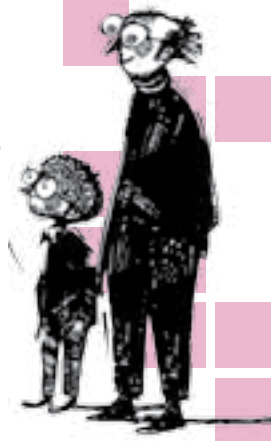
۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۲۹

فنگ‌شویی ترکیب واژه چینی «فنگ»<sup>۱</sup> به معنای «باد» است و «شویی»<sup>۲</sup> به معنای «آب». این دو واژه با هم تداعیگر مفهوم شکل‌دهنده و حرکت آفرین باد و آب است و نیز بیانگر تضاد این دو در عین همراهی موزونشان. فنگ‌شویی تعالیم «تائو» است برای زیستن در عین هماهنگی با طبیعت و محیط اطراف، چینی‌ها قرن‌هاست که به خرد کاربردی نهفته در این تعالیم دل داده‌اند و در چیدمان خانه‌هایشان، انتخاب دفتر کارشان و... آن را به کار بسته‌اند تا زندگی را موزون‌تر سازند. هدف فنگ‌شویی برگرداندن نظم، ترتیب و توازن به تمام زمینه‌های زندگی است. از مربع لوشو به چند روش متفاوت می‌توان استفاده کرد: در روش رایج داریم:  $1=$  دورنمای کاری / شغلی، منزلت شما از دیدگاه خودتان؛  $2=$  ارتباطات از هر نوع به خصوص ارتباط عاطفی، ازدواج، شراکت و همراهی طولانی مدت؛  $3=$  روابط خانوادگی، گذشته، نیاکان شما؛  $4=$  خوش‌بختی و سعادت؛  $5=$  سلامتی جسمی؛  $6=$  خدایان و ارواح، آن‌هایی که قادر به کمک به شما هستند؛  $7=$  کودکان، باروری، خلقت، علائق و اوقات فراغت و هدیه‌های جالب؛  $8=$  دانش و تحصیلات، نوآوری و خلاقیت؛  $9=$  شهرت، نام نیک و احترام برای شما.

چگونگی چیدمان این اعداد در مربع نشان‌دهنده برتری هر یک از اعداد بیان شده بر سایر اعداد است. هر محیطی را اعم از خانه، دفتر کار، کلاس، میز، خودرو و... به ۹ قسمت تقسیم می‌کنند. این ۹ قسمت به همین صورتی است که در شکل بالا دیدید. عناصری را که در بالا ذکر شد در این مربع به ترتیب خاصی پخش می‌کنند.

از بین پنج عنصر آب، فلز، خاک، چوب و آتش، چوب و آتش هر کدام یک خانه دارند. چون این و عنصر پر قدرت هستند، برای حفظ تعادل هر کدام یک خانه دارند. آب شمال است (پایین جدول، مربع شماره ۱) و مظهر کوه‌های پربرف. آتش جنوب است (خانه ۹). زمین عنصر مادر است و نیز از تمام عناصر ضعیف‌تر است، به همین خاطر ۳ خانه متعلق



- پی‌نوشت .....
1. Albrecht Dürer
  2. Melencolia J
  3. Yang Hui
  4. Kubera - kolam
  5. Parshanath Jain
  6. Rasa'il Inkwan al-safa
  7. sagrada Familia
  8. Lo Shu Square
  9. feng
  10. shui



**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...**

**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)