www.roshdmag.ir

دورهٔ بیست و سوم
شمارهٔ ۴ تابستان ۱۳۹۳
۶۴ صفحه ۸۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

برهان ریاضی

رشد ۵۲

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

- توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها
- ریاضیات ملکهٔ علوم است
- تاریخ ریاضی معاصر ایران
- ریاضی دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی
- استدلال ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات ملکهٔ علوم است

در جهان امروز، ریاضیات در تمامی علوم و سرتاسر زندگی بشر نقش بسزایی پیدا کرده و تأثیرات آن در پیشرفت، سازندگی و رشد بشر در همهٔ عرصه‌ها غیرقابل انکار است. کاربردهای ریاضیات در علوم پایه همچون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و نیز رشته‌های مهندسی بسیار مشهود و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، تا جایی که در رشته‌های مهندسی، درس «ریاضی مهندسی» از دروس اصلی و از نیازهای خیلی واجب به‌شمار می‌رود.

می‌دانید که پایه‌های این علم مادر، و به تعبیری ملکهٔ علوم، در دوران مدرسه و سال‌های تحصیل قبل از دانشگاه پی‌ریزی و مستحکم می‌شود. از این‌رو شما باید برای این علم، اهمیت ویژه‌ای قائل شوید و برای یادگیری درست آن برنامه‌ریزی داشته باشید. بدین منظور و از همه مهم‌تر، باید روش‌های صحیح مطالعه و فراگیری ریاضیات را بشناسید و با توجه به توانمندی‌ها و شناختی که از خودتان دارید، با لذت و آرامش به یادگیری دروس ریاضی خود بپردازید.

ان‌شاءالله در شماره‌های بعدی به معرفی، بررسی و چگونگی استفاده از این روش‌ها می‌پردازیم و البته پاسخگوی سؤالات و شنوای نظرات مفید و تجربه‌های خوب شما در این زمینه هستیم.

سردبیر

بخش اول

[redacted]

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تاریخ ریاضیات

دکتر فرید قاسملو*

کلید

[redacted]

اشاره

دکتر فرید قاسملو دانش‌آموختهٔ تاریخ و از محققان برجستهٔ بنیاد دایرةالمعارف اسلامی است. ایشان با همکاری دانشگاه آزاد اسلامی تحقیق جامعی دربارهٔ تاریخ ریاضی معاصر ایران انجام داده‌اند و در نهایت صمیمیت، چکیده‌ای از آن را در اختیار ما و خوانندگان مجلهٔ برهان قرار دادند. قسمت اول این تحقیق در پی می‌آید.

■ مقدمه

آیا پرداختن به تاریخ ریاضیات ایران در دوران معاصر یک ضرورت است؟ شاید عده‌ای این سؤال را از ریشه نادرست بدانند و براساس قاعدهٔ کلی «ضرورت پرداختن به تاریخ علوم»، طرح سؤالاتی از این دست را ضروری ندانند. و شاید عده‌ای دیگر نیز، دلایل چندی دربارهٔ «عدم اضطرار برای پرداختن به چنین بحثی» یا «لزوم پرداختن به ادوار کهن‌تر تاریخ ریاضیات در ایران» طرح کنند. اما پاسخ نهایی چیست؟

مؤلف این سطور بهتر می‌بیند در مقام پاسخ‌گویی به این پرسش، گزاره‌هایی را طرح کند تا با کنار هم نهادن آن‌ها بتواند پاسخی برای پرسش فوق بیابد:

الف. ریشه‌ها، نظریه‌ها و مهم‌ترین منابع مطالعه در تاریخ ریاضیات کهن در ایران و دیگر کشورهای تمدن اسلامی، یا دستپخت پژوهشگران فرنگی هستند، یا پژوهشگران [redacted] است برای درک بهتر ماجرای گسترش علوم در اروپا پس از رنسانس. به روایت دیگر، بررسی تاریخ علوم دورهٔ اسلامی دست‌کم روشنگر زوایای تاریک بخشی از تاریخ علوم اروپا است؛ از آنجا که در قرون وسطا ایران و دیگر سرزمین‌های اسلامی «صادر» کنندهٔ علوم بوده‌اند و ممالک غربی «مصرف کنندهٔ» این علوم، بهترین راهکار برای بررسی تطور علوم در سرزمین‌های غربی آن است که هرچه بهتر چگونگی این صدور و عناصر مهم آن را بشناسند.

اما در دوران معاصر ما دیگر صادرکنندهٔ علوم نبودیم و حرفی برای گفتن در جوامع غربی نداشتیم. بنابراین فکر باطلی است اگر گمان کنیم این‌بار نیز، در مطالعهٔ ماجرای ورود علوم نوین به ایران و دیگر کشورهای اسلامی، باز هم غرب می‌تواند راهگشا باشد و نظریه‌پردازی کند.

ب. اگر در بررسی علوم کهن، گذشت زمان باعث طرح نظریه‌ها، انتشار پژوهش‌های جدید و دست یافتن به منابع جدید است، در بررسی تکوین دانش‌های جدید در ایران، حداقل در بخشی از زمینه‌ها، گذشت زمان اثر معکوس می‌گذارد. یعنی در اثر گذشت زمان، یا بعضی منابع از بین می‌روند یا بخشی از صاحبان تاریخ، روی در نقاب خاک می‌کشند. هنوز هم کسانی در ایران هستند که بخشی از تکوین علوم جدید در ایران مرهون زحمات آنان است و با گذشت زمان، هر روز از تعداد آن‌ها کاسته می‌شود. بنابراین، اگر «اکنون» نجنبیم،

شاید فردا برای پرداختن به این عرصه دیر باشد.

ج. دست‌کم در بخشی از منابع نیز، تفاوتی ماهوی بین منابع مطالعه در علوم کهن و علوم نوین وجود دارد و آن، اهمیت تاریخ شفاهی در بررسی تاریخ علوم در ایران معاصر (و نیز دیگر کشورهای اسلامی) است. تاریخ شفاهی در کشور ما سابقهٔ زیادی ندارد و پرداختن به عرصهٔ علوم نیز، در حوزهٔ تاریخ شفاهی از آن هم جوان‌تر است. بر این اساس، اگرچه خوش‌بختانه آرام‌آرام حیطه‌های نظری پژوهش در تاریخ شفاهی جایگاه خود را یافته و آثار بسیار خوبی دربارهٔ چگونگی دست‌یابی به تاریخ شفاهی در حوزهٔ زبان فارسی در قالب کتاب و مقاله منتشر شده است و می‌شود. اما در عرصهٔ «علوم» راه بسیار زیادی برای رسیدن به مقصود وجود دارد و راه طی نشده هم دراز است و هم ناهموار[1].

امیدوار هستم طرح سه گزارهٔ فوق و گزاره‌هایی از این دست، پاسخی باشد بر پرسشی که در ابتدای سطور طرح کردم. اما علت اینکه مقدمه حاضر را با پرسشی آغاز کردم که اندکی «بدیهی» می‌نماید، بیش از هر چیز آن است که بکوشم اقدامی کرده باشم در محکومیت گذشتگان.

واقعیت این است که ابر و باد و مه و خورشید و فلک و عوامل بسیاری از این دست باید دست به‌دست هم دهند و پاسخی جامعه‌شناسانه به این پرسش دهند که «چرا» یک نسل گذشته از پژوهشگران این مُلک، عرصهٔ تاریخ علوم نوین را موردنظر قرار نداده و در پرداختن به آن کوتاهی کرده است و در نتیجه، در همین عرصهٔ تاریخ ریاضیات معاصر، ما فرصت ادراک افرادی از جنس **هشترودی**، **مصاحب**، **مصحفی** و **وصال** را برای تدوین تاریخ ریاضیات معاصر ایران و تهیهٔ آرشیوی شفاهی در این زمینه از دست دادیم؛ فرصتی سوخته که به‌نظر می‌رسد دیگر باز نمی‌گردد، مگر آنکه معجزه‌ای رخ دهد.

اغتنام فرصت تعریف یک طرح پژوهشی در معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی، این امکان را داد تا نویسندهٔ این سطور بخشی از این طرح را به تهیهٔ بخش کوچکی از تاریخ شفاهی ریاضیات در ایران اختصاص دهد. مؤلف این سطور، هیچ ادعایی در کامل، نهایی یا حتی متوسط بودن مجموعه‌های تهیه شده که در صفحات آینده تقدیم ارباب معرفت می‌شود، ندارد. فقط و فقط تأکید می‌شود که این مجموعه از دو منظر تهیه شده است: یکی آنکه در گزارشی که حاصل طرح پژوهشی فوق‌الاشاره است، به‌عنوان منبع به‌کار آمده و مورد استناد قرار گیرد، و دیگر آنکه گامی باشد نخستین برای پرداختن به این عرصه از تاریخ علوم در کشورمان، و نیز نگاهی با این امید که دیگران بکوشند تا فرصت از دست نرفته، مجموعه‌هایی کامل‌تر و نهایی از این متن را، نه در عرصهٔ تاریخ ریاضیات معاصر ایران، بلکه در تمامی عرصه‌های علوم فراهم آورند.

کوشش برای تهیهٔ آرشیو شفاهی تاریخ ریاضیات ایران،تنها به چهار مصاحبهٔ حاضر محدود نشده بود، اما عوامل بسیاری دست به دست هم دادند تا این مجموعه در حد و اندازه حاضر پدید آید. به‌عنوان نمونه، مرحوم استاد **منوچهر وصال** و مرحوم استاد **عبدالحسین مصحفی**، به‌خاطر کهولت از هرگونه مصاحبه معذور بودند. مصاحبه با مرحوم استاد پرویز شهریاری نیز، تنها با ارائهٔ کتبی پرسش‌ها میسر شد. در این میان، عدم همکاری مثال‌زدنی استادان گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم نیز، در تهیهٔ هرگونه مصاحبه و تهیهٔ هرگونه آرشیو شفاهی از این بزرگواران بسیار ستودنی بود!

مصاحبه با استاد دکتر **جواد بهبودیان**، به‌علت بعد مسافت محل درس و زندگی استاد، از طریق ارسال پرسش‌ها و در تابستان ۱۳۹۰ خورشیدی صورت گرفت. گفت‌وگو با استاد دکتر **زارع نهندی** در یک روز دل‌انگیز بهاری در سال ۱۳۹۰ در محل کار استاد در گروه ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران صورت پذیرفت. گفت‌وگو با استاد دکتر **بهزاد**، این معمار ریاضیات معاصر ایران هم در دو جلسهٔ مفصل، در پاییز ۱۳۹۰ در محل «معاونت پژوهشی سازمان مرکزی دانشگاه آزاد اسلامی» انجام شد.

به‌هیچ وجه نمی‌توان گفت‌وگوهای حاضر را نهایی پنداشت. این فقط آغاز راهی است که لاجرم روزی باید پیموده شود. باید امیدوار بود با گسترش سریع آموزش کلاسیک تاریخ علوم در کشورمان، گروهی از پژوهشگران جوان و با انرژی این عرصه علاقه، دانش و البته پایان‌نامه‌های خود را بر این بخش از تاریخ علوم کشورمان متمرکز سازند.

پدید آمدن مجموعهٔ حاضر حاصل همکاری افراد بسیاری است که منت بی‌پایانی بر مؤلف این سطور گذاشته‌اند. علاوه بر بزرگواری استادان پرویز شهریاری، مهدی بهزاد، رحیم زارع نهندی و جواد بهبودیان که پدیدآورندگان اصلی این مجموعه هستند، لازم است از اولیای وقت معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی، به‌خصوص جناب آقای **فریدون رهنمای رودپشتی**، معاونت محترم وقت پژوهشی، جناب آقای **مهندس نوروزیان**، ریاست محترم وقت «دفتر گسترش علم» دانشگاه، جناب آقای مهندس **نوید باصری**، سرکار **خانم فریبا پایروند ثابت**، سرکار خانم **بهاره منجمی**، سرکار خانم **سارا خسروی** و دیگر عزیزانی که این کمترین را در تهیهٔ مجموعه یاری دادند، تشکر و قدردانی نمایم.

عجیب‌تر از داستان

احسان یارمحمدی*

■ **اسم فیلم:** عجیب‌تر از داستان[1] ■ **کارگردان:** مارک فوستر[2]
■ **تهیه‌کننده:** لیندسِی دُران[3] ■ **فیلم‌نامه:** زاک هِلم[4]

فیلم عجیب‌تر از داستان دربارهٔ دوره‌ای از زندگی یک مأمور ممیز حسابداری ادارهٔ مالیات به‌نام **هارولد کِریک**[5] (ویل فِرِل) است که توانمندی‌های ویژه‌ای در انجام چهار عمل شمارش و امور محاسباتی دارد. فیلم با صحنه‌هایی دربارهٔ هارولد و ساعت مچی‌اش از زبان یک راوی به این صورت آغاز می‌شود: «داستان در مورد مردی به‌نام هارولد کِریک و ساعت مچی‌اش است. هارولد مرد شماره‌های بی‌نهایت و محاسبات بی‌پایان است. او برای دوازده سال، در هر روز هفته هر یک از ۳۲ دندانش را ۷۶ بار (۳۸ بار عقب و جلو و ۳۸ بار بالا و پایین) مسواک می‌زد. هر روز هفته برای دوازده سال به‌جای استفاده از گره دوبل برای کراواتش، از گره تَک استفاده می‌کرد و بنابراین ۴۳ ثانیه در وقت صرفه‌جویی می‌کرد. برای دوازده سال در هر روز هفته هارولد با سرعت ۵۷ قدم به ازای هر ساختمان و به مسافت شش ساختمان می‌دوید تا به زحمت و سختی به اتوبوس ساعت ۸:۱۷ به مقصد کرانکر برسد.»

اما روند و داستان فیلم با استفاده از پیوندی که میان چهار شخصیت هارولد کِریک، پروفسور **ژولز هیلبرت**[6] (داستین هافمَن)، **آنا پاسکال**[7] (مَگی گیلِنهال) و **کارِن آیفِل**[8] (اِما تامپسُن) ایجاد می‌شود، شکل می‌گیرد.

هارولد کِریک که تمام کارهای او مانند نهار خوردن، نوشیدن قهوه و... از نظم ریاضی‌وار خاصی تبعیت می‌کنند، یک روز چهارشنبه صداهایی را می‌شنود که در واقع انعکاسی هستند از کارهایی که او انجام می‌دهد. تداوم این صداها باعث ایجاد اختلال و عدم تمرکز در زندگی روزمرهٔ او می‌شود. حتی باعث می‌شود که در پاسخ‌گویی به حاصل ضرب ۶۷×۴۵۳ که توسط یکی از همکارانش مطرح شده است، با کمی درنگ و برخلاف همیشه جواب نادرست بدهد و سپس با کمی مکث پاسخ درست را به او ارائه کند.

هارولد با یکی از همکارانش به‌نام **دِیو** (تونی هِیل) موضوع را مطرح می‌کند. به دِیو می‌گوید صداهایی که می‌شنود از جانب زنی است که دارد داستانی را روایت می‌کند. در همین حین دِیو پروندهٔ مالیاتی یک نانوایی را برای بررسی و رسیدگی به تخلفات مالیاتی صاحب آن به هارولد می‌دهد. هنگامی که هارولد به نانوایی مراجعه می‌کند، با برخورد سرد و عجیب آنا پاسکال، صاحب نانوایی، مواجه می‌شود. هارولد در مراجعات بعدی به نانوایی و بررسی‌های لازم متوجه می‌شود که آنا پاسکال ۲۲ درصد تخلف مالیاتی دارد و به‌همین دلیل طبق قوانین او باید روانهٔ زندان شود. هارولد برای اینکه بفهمد صداهایی که می‌شنود، چه منشأ و دلیلی دارند، به روان‌پزشک مراجعه می‌کند. بعد از گفت‌وگوها و معاینات لازم، روان‌پزشک به هارولد می‌گوید که شما دچار «اِسکیزوفرنی»[9] شده‌اید. اما هارولد این موضوع را نمی‌پذیرد و او توسط روان‌پزشک به یک استاد ادبیات به‌نام پروفسور **ژولز هیلبرت** معرفی می‌شود. در ملاقاتی که بین هارولد و پروفسور هیلبرت رخ می‌دهد، بعد از اینکه هارولد ماجرا را تعریف می‌کند، پروفسور به او می‌گوید که من نمی‌توانم کمکت کنم. چون من متخصص دیوانگی نیستم و من متخصص

ادبیات هستم. در این بین هارولد جملهٔ: «شصتش هم خبر نداشت» را بیان می‌کند که باعث جلب توجه پروفسور می‌شود و پس از ارائهٔ توضیحاتی از جانب پروفسور هیلبرت، او در نهایت به هارولد می‌گوید که حاضر است در این زمینه به او کمک کند. در مراجعه‌های بعدی هارولد به نانوایی برای رسیدگی به امور مالیاتی، بین او و آنا گفت‌وگوهایی صورت می‌گیرد. هارولد از آنا می‌پرسد چه موقع تصمیم گرفتی که آشپز شوی؟ آنا جواب می‌دهد من به دانشکدهٔ حقوق دانشگاه هاروارد[10] رفتم و به سختی در آنجا پذیرفته شدم، اما تحصیلم را تمام نکردم. او ادامه می‌دهد که در آنجا من و هم‌کلاسی‌هایم برای مطالعهٔ دروس گاهی مجبور بودیم تمام شب را بیدار بمانیم. من آشپزی می‌کردم تا کسی گرسنه سرکلاس درس نرود و در مواقعی تمام بعدازظهر را در آشپزخانهٔ خوابگاه می‌گذراندم. آن‌ها عاشق دست‌پخت من بودند و من مدام دنبال به‌دست آوردن دستور پخت غذاها و خوراکی‌های جدیدتر بودم. در نهایت هم به‌علت عدم موفقیت در امتحانات رشته تحصیلی‌ام، از دانشگاه اخراج شدم.

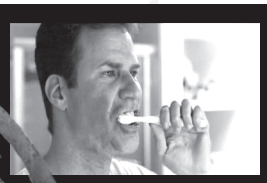
اما در ملاقات بعدی که بین هارولد و پروفسور هیلبرت روی می‌دهد، پروفسور نخست می‌پرسد در مسیری که آمدیم، آیا تعداد پله‌ها را شمارش کردی؟ آیا تعداد موزائیک‌ها را شمردی؟ سپس سؤالات دیگری مطرح می‌کند تا به ماهیت آنچه در ذهن هارولد می‌گذرد، پی ببرد. آن‌ها بعد از مدتی نتیجه می‌گیرند، صداهایی که او می‌شنود، از جانب **کارِن آیفِل**، رمان‌نویسی است که مشغول نگارش کتاب جدیدش براساس زندگی هارولد کِریک است. پروفسور هیلبرت به هارولد می‌گوید: صدایی که می‌شنوی به اعمالی که تو انجام می‌دهی، وابسته است.

در ادامه هارولد هنگامی که در اتاق کار پروفسور هیلبرت حضور دارد، متوجه مصاحبه‌ای مربوط به ۱۰ سال قبل می‌شود که مجدداً از یک شبکهٔ تلویزیونی بازپخش می‌شود. در آن مصاحبه، زنِ رمان‌نویسی حضور دارد که صدایش دقیقاً با صدایی که هارولد می‌شنود، مطابقت دارد. هارولد این موضوع را به پروفسور اطلاع می‌دهد، و هیلبرت برای هارولد اظهار تأسف می‌کند که کارِن آیفِل، نویسنده‌ای که در تلویزیون دیده است، در تمام رمان‌هایش شخصیت اصلی داستان را محکوم به مرگ می‌کند و تا به حال سابقه نداشته است که در رمان‌های او، شخصیت‌محوری کشته نشود. سرنوشت محتوم هارولد نیز مرگ است.

هارولد سعی می‌کند آدرسی از کارِن آیفِل به‌دست آورد و او را از فرجام

بدی که می‌خواهد برای شخصیت داستانش ـ یعنی خود او ـ رقم بزند، منصرف کند. در نهایت هارولد با مراجعه به بایگانی ادارهٔ مالیات، شمارهٔ تلفنی را از کارِن آیفِل به‌دست می‌آورد و با او قرار ملاقاتی می‌گذارد تا او را متقاعد سازد، اگر در مقام نویسندهٔ رمان دست به کشتن شخصیت بنیادی داستان بزند، در واقع حکم مرگ او را صادر کرده است. در نهایت، کارِل آیفِل پایان داستانش را تغییر می‌دهد و هارولد از مرگ حتمی نجات پیدا می‌کند.

اما اگر بخواهیم برداشت ژرف‌تر و ارزنده‌تری از این فیلم داشته باشیم، می‌باید نخست بیان کنیم که: زندگانی مؤثر و پویا، اصول بنیادینی دارد و افراد تنها در صورتی می‌توانند کامیابی راستین و خوش‌بختی ماندگار را تجربه کنند که این اصول را بیاموزند و آن را بخشی از منش اصلی خود قرار دهند. گاهی برای رسیدن به این اصول لازم است قدرت تغییر نگرش و برداشت را بالا برد. هرچند که ممکن است این تغییر، آنی باشد و یا فرایندی آهسته و سرشار از تعمق و تأمل داشته باشد. اما در نهایت منشأ دگرگونی عظیم و عجیبی خواهد شد که این می‌تواند با پرسیدن سؤالی یا آشکار ساختن نادانی در رسیدن به‌سر منزل مقصود آغاز شود؛ چون پذیرش نادانی نخستین گامی است که به‌سوی آموزش



برمی‌داریم. گاهی نیز می‌تواند در چارچوب پرهیز از عادات و امیال اعتیادآمیز مخرب و پرورش عادت‌هایی قرار گیرد که انسان را از برچسب‌های کهنه و محدودیت‌های تابلوگونه برهاند و روزنهٔ امید را برای اتخاذ تصمیم‌ها و توانمندی‌های مثبت گسترش دهد.

هارولد کِریک نمی‌تواند به‌تنهایی و با تمسک به زندگی منظم ماشینی و با استفاده از قوانین خشک مالیاتی، زندگی مناسبی داشته باشد. از این‌رو، زاک هِلم، در مقام فیلم‌نامه‌نویس فیلم عجیب‌تر از داستان، بر آن می‌شود که سرانجام نامیمون هارولد ریاضی پیشه و با نظم و ترتیب را از زبان کارِن آیفِل نویسنده به تصویر بکشد. هارولد حتی با موقعیت عاطفی که بین او و آنا پاسکال نانوا روی می‌دهد، منفعلانه برخورد می‌کند و در ابتدا از دیدگاه یک مأمور ادارهٔ مالیات و محدویت‌هایی که او در حین انجام وظیفه با آن‌ها روبه‌روست، سخن به میان می‌آورد. اما چرخشی به موقع و مؤثر در نقطه نظراتش که به واسطهٔ معاشرت و هم‌کلامی با شخصیت اجتماعی پروفسور ژولز هیلبرت ـ که حتی با اینکه یک استاد ادبیات است، اما به عنوان ناجی غریق در استخر نیز فعالیت می‌کند ـ ایجاد می‌شود، تأثیرات شگرفی در زندگی او پدید می‌آورد.

هارولد کریک در این فیلم فردی است که زندگی او با حساب و کتاب کامل و مبتنی بر اعداد و ارقام سپری می‌شود. انتخاب این سبک زندگی باعث شده است، تمامی اعمالی که او در زندگی روزمره‌اش به آن‌ها دست می‌زند، خشک، بی‌روح و غیرقابل انعطاف باشند. در نهایت کارگردان با انتخاب سرنوشت شومی که کارن آیفل رمان‌نویس برای او تداعی کرده است، می‌خواهد بیان کند که اتخاذ این‌گونه تصمیم‌ها و رفتارها در زندگی باعث سوق یافتن مسیر زندگی به‌سوی فاجعه و تباهی می‌شود. اما نقطهٔ مقابل او، سبک زندگی سرزنده و پرجنب‌وجوش آنا پاسکال است. در نخستین ملاقات‌های رسمی که بین هارولد و آنا رخ می‌دهد، آنا تضاد بین آن دو را مشخص می‌کند و می‌گوید سبک زندگی هارولد کریک هیچ جایگاهی در زندگی او ندارد. اما هنگامی که هارولد دست به انجام اصلاحات می‌زند، جریان زندگی او از روندی تأسف برانگیز به رویکردی پویا و شاد تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت، هر فردی در هر جایگاهی که باشد (مثلاً مانند هارولد کریک نابغهٔ اعداد باشد)، افکار و باورهایش موقعیت فعلی او را رقم زده‌اند و برای تغییر در این جایگاه می‌باید افکار و باورهایش را تغییر دهد تا موقعیت و آنچه را که هست تغییر دهد. در ضمن این شرایط و اوضاع نیست که پیروزی یا شکست فرد را تعیین می‌کند، بلکه عکس‌العمل فرد نسبت به اوضاع و شرایط است که در کامیابی یا شکست او مؤثر است.

پی‌نوشت‌ها

1. Stranger Than Fiction
2. Marc Foster
3. Lindsay Doran
4. Zach Helm

برای این فیلم، زاک هِلم نامزد دریافت جایزهٔ «ساترن» برای بهترین نویسندگی، نامزد دریافت «جایزهٔ انجمن منتقدان فیلم‌های نمایش داده شده» به‌عنوان بهترین نویسنده و نیز برندهٔ «جایزهٔ کمیتهٔ ملی مجلهٔ سینما» برای بهترین فیلم‌نامهٔ ابتکاری و غیراقتباسی شد.

5. Harold Crick
6. Jules Hilbert
7. Ana Pascal
8. Karen Eiffel
9. Schizophrenia

نوعی اختلال شدید روانی که از خصوصیات آن دوری شدید بیمار از واقعیت است. چون این بیماری با جنون همراه است و غالباً در دوران اولیه و جوانی زندگی افراد بروز می‌کند، به آن جنون جوانی هم می‌گویند.

10. Harvard University

دانشگاه هاروارد دانشگاهی خصوصی و بسیار ممتاز در شهر «کمبریج» ایالت ماساچوست ایالات متحدهٔ آمریکاست. نام آن در ابتدا «دانشکدهٔ نو» یا «دانشکده در شهرک نو» بود که بعداً در ۱۳ مارس ۱۶۳۹ به افتخار کشیشی به نام **جان هاروارد** که ۴۰۰ جلد کتاب و مبلغ ۷۷۹ پوند به این دانشگاه کمک کرده بود، نام‌گذاری شد. علاقه‌مندان می‌توانند برای آشنایی بیشتر با این دانشگاه به تارنمای آن به نشانی http://www.harvard.edu مراجعه کنند.

* ehsan.yarmohamadi @yahoo.com

آموزشی

راه‌حلی دیگر برای تمرینی از هندسه ۲

مهدی میرزافام
دبیر دبیرستان‌های
شهرستان عجبشیر
استان آذربایجان‌شرقی

کلیدواژه: چهارضلعی‌محیطی

چکیده

در اثبات عکس یک قضیه معمولاً از روش برهان خلف بهره می‌گیریم و در مسیر اثبات از خود قضیه نیز استفاده می‌کنیم. وقتی با دانش‌آموزان کلاس برای حل این تمرین وارد بحث شدیم، از ایشان خواستم که راه‌حل ارائه کنند. آن‌هایی که در منزل به تمرین فکر کرده بودند، تقریباً همه، راه‌حلی را که کتاب در راهنمایی خود ارائه داده است، پیشنهاد می‌کردند؛ ولی ناگهان متوجه شدیم که اگر تمرین ۶ را یک قضیه بدانیم، تمرین ۷ در واقع عکس این قضیه است. لذا می‌توانیم برای حل آن از روش برهان خلف استفاده کنیم.

مقدمه

در اینجا چند اصطلاح را که در متن اصلی احتمالاً برایتان ناشناخته است، تعریف می‌کنیم و یا توضیح می‌دهیم:

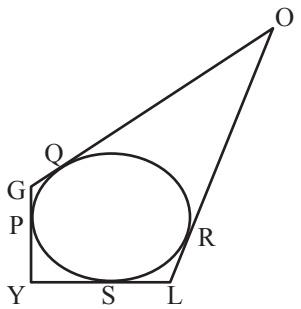
* **چندضلعی محدب:** یک چندضلعی را محدب گویند هرگاه پاره‌خطی که هر دو نقطهٔ دلخواه آن را به‌هم وصل می‌کند، کاملاً در داخل آن قرار بگیرد. در یک چندضلعی محدب نیمسازهای داخلی هر دو رأس مجاور متقاطعند.
* **قضیهٔ وجود مثلث:** اگر سه عدد حقیقی مثبت داشته باشیم و هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که اندازهٔ ضلع‌های آن این سه عدد باشند.
* **چندضلعی محیطی:** اگر همهٔ ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، آنگاه چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.

متن اصلی

در ادامه، تمرین‌های ۶ و ۷ موجود در صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی هندسه (۲)* را مشاهده می‌کنید که در اینجا سعی کرده‌ایم روشی غیر از روش پیشنهادی کتاب را برای حل آن‌ها به‌کار بگیریم:

۶. ضلع‌های چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماس‌اند (شکل ۱). ثابت کنید:

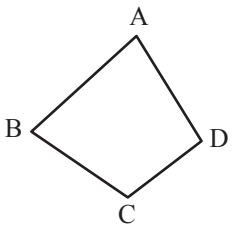
GO+LY = OL+GY



شکل ۱

۷. در چهارضلعی ABCD داریم: AB+CD = AD+BC. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.(شکل ۲).

راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط AM=AD و روی ضلع BC پاره‌خط CN=CD را جدا کنید. از ویژگی مثلث‌های متساوی‌الساقین استفاده کنید.

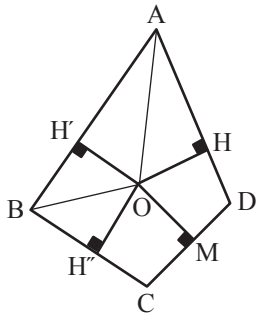


شکل ۲

اثبات: دو رأس مجاور دلخواه مانند A و B را انتخاب و نیم‌ساز داخلی آن‌ها را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. طبق ویژگی نیم‌ساز یک زاویه داریم:

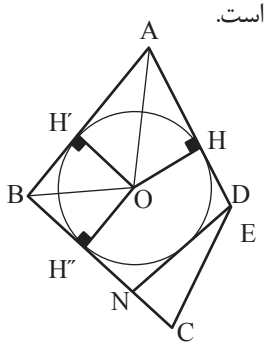
$OH = OH' = OH'' = r$

حال، اگر دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O رسم کنیم، سه ضلع AD، AB و BC به ترتیب در نقاط H، H′ و H″ بر دایره مماس خواهند شد. از نقطهٔ O عمود بر ضلع CD رسم می‌کنیم و محل فرود را M می‌نامیم. اگر $OM = r$ باشد، در این صورت دایرهٔ مذکور بر ضلع CD نیز مماس می‌شود و این یعنی چهارضلعی ABCD محیطی است و چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. حال اگر چنین نباشد، یعنی اگر $OM \neq r$ (برهان خلف) که در این صورت یکی از حالات زیر پیش می‌آید:



شکل ۳

حالت اول: اگر $OM > r$، در این صورت دایرهٔ گفته شده داخل چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس D مماسی بر دایره‌ای که گفته شد، رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با ضلع BC را N می‌نامیم. این، یعنی چهارضلعی ABND، محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۴

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$AD + BN = AB + DN$ (۱)

و طبق فرض داریم:

$AD + BC = AB + CD$ (۲)

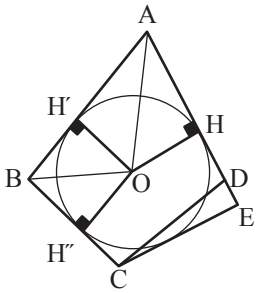
حال اگر طرفین رابطهٔ (۱) را از طرفین رابطهٔ (۲) کم کنیم، خواهیم داشت:

$BC - BN = CD - DN \Rightarrow CN = CD - DN$

$\Rightarrow CN + DN = CD$ (۳)

که رابطهٔ (۳) با قضیهٔ وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث DNC قابل تشکیل نیست). لذا $OM > r$ نمی‌تواند درست باشد.

حالت دوم: اگر $OM < r$ در این صورت قسمتی از دایرهٔ گفته شده بیرون از چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس C بر دایره، مماسی رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با امتداد ضلع AD را E می‌نامیم. چهارضلعی ABCE محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۵

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$AB + CE = BC + AE$ (۳)

و طبق فرض داریم:

$AB + CD = BC + AD$ (۴)

حال اگر رابطهٔ (۴) را از رابطهٔ (۳) کم کنیم، خواهیم داشت:

$CE - CD = AE - AD \Rightarrow CE - CD = DE$

$\Rightarrow CE = CD + DE$ (۵)

که رابطهٔ (۵) با قضیهٔ وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث CDE قابل تشکیل نیست). لذا $OM < r$ نمی‌تواند درست باشد. مشاهده می‌کنیم درهر دو حالت ما به تناقض رسیدیم. لذا فرض خلف باطل و حکم یعنی $OM = r$ برقرار است.

پی‌نوشت‌ها

* کتاب هندسه (۲)، ۲۵۸/۴، مؤلفان: جواد حاجی‌بابایی، محمدهاشم رستمی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد، زهرا گویا، جعفر نیوشا، بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، عزیزه رحمانی، اسدالله رضوی و مرتضی میرمحمدرضایی.

آموزشی

ریاضی، دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی

سیده صدیقه علوی*
کارشناس ارشد ریاضی محض
دبیرستان شاهد
ناحیه یک ساری

کلیدواژه: آموزش ریاضی، آموزش عمومی

چکیده

دانش ریاضی به دلیل اهمیت و کاربرد گسترده‌اش در ایجاد و گسترش تمدن بشری از دیرباز مورد توجه بوده و از زمانی که بشر درصدد آموزش نسل‌های جوان خود برآمده، در برنامهٔ درسی گنجانده شده است. در این مقاله تلاش شده است، آموزش این دانش در نظام آموزشی کشورمان و بازتاب‌های این آموزش و نتایجش بررسی شود و با جست‌وجوی رویکردهایی که نیاز به تغییر در آن‌ها احساس شده است، راه‌حل‌هایی ارائه شود.

■ مقدمه

آنچه پیش‌رو دارید دل‌نوشته‌ای است به زبان کسی که با دانش ریاضی از کودکی تا بزرگسالی دمساز بوده و از این هم‌نشینی خرسند، و از بی‌مهری‌هایی که با این عزیز می‌شود، دل‌نگران و رنجیده‌خاطر است. کم نبوده‌اند مقالات و سخنرانی‌های بس مبسوط و غرّا که در باب اهمیت ریاضیات، تأثیر ریاضیات، جهانی کردن ریاضیات، و لزوم آموزش ریاضی ارائه شده‌اند، ولی نتیجهٔ این همه چه بوده است؟ آیا آشتی با ریاضیات بوده است یا هنوز گریز از آن ادامه دارد؟ شاید به این مقوله کمتر پرداخته‌ایم!

آنچه در ادامه می‌آید، بررسی وضعیت کنونی درس ریاضی از دیدگاه کسی است که به‌نوعی با آن درگیر است. سپس به آنچه از این آموزش انتظار می‌رود، می‌پردازیم. در پایان نیز راه‌های برون‌رفت از وضعیت فعلی و حرکت به‌سوی آنچه باید باشد، ارائه شده است.

■ آنچه در آموزش عمومی ما ریاضیات دانسته می‌شود

اجازه بدهید از دیدگاه یک ریاضی‌خوان از ابتدایی تا دبیرستان حرکت کنیم و ببینیم، چه چیزهایی در ساعتی که با نام ریاضی و عنوان‌های منتسب به آن از اول ابتدایی تا چهارم دبیرستان می‌گذرانیم، قرار است بیاموزیم (تازه من شاگردی هستم که از اول ابتدایی تا چهارم دبیرستان این درس را ۲۰ می‌گیرم).

اول دبستان را به پایان رسانده‌ام. اکنون اعداد حسابی را تا صد می‌شمارم. می‌توانم جمع و تفریق اعداد را تا جایی که انگشتان دست و پایم اجازه دهند، انجام دهم. می‌توانم خط و منحنی باز و بسته بکشم. جمع تکراری را دیده‌ام. می‌توانم مداد، خودکار، کتاب و خیلی شانس بیاورم، پرتقال، سیب و نظایر آن را تا دست کم تا ۱۰۰ بشمارم.

می‌روم کلاس دوم. یک یادآوری، بعد جمع و تفریق که اول اسمش منها بود. کمی می‌گذرد و روش عجیبی به اسم قرض دادن و ده بر یک و شبیه این‌ها یاد می‌گیرم. خیلی بجنبم، کمی جلو می‌روم و شاید برخی سه رقمی‌ها را هم در نوشتن رسمی به‌کار ببرم و آرام‌آرام جمع و تفریق کنم. با گردی و چهارگوش و سه‌گوش هم آشنا می‌شوم.

می‌آیم به سوم دبستان این جمع و تفریق که ما را رها نمی‌کند! دائم بر رقم‌هایشان اضافه می‌شود. خیلی از قرض‌دادن و ده بر یک خوشمان، می‌آمد قطارش پر واگن‌تر شده است. تازه حالا جمع‌های تکراری هم باید سروسامان بگیرند. قبلش من باید در یک جان کندن حسابی، یک چهارگوش بزرگ ۱۰ در ۱۰ (حالا نامش به مربع تغییر یافته) را که جدول ضرب

نامیده می‌شود، مثل یک داروی تلخ قاشق‌قاشق بخورم تا آخرش ببینم چه خبر است.

روزهای شاد زندگی من سپری می‌شود و من با کابوس ریاضی چهارم و پنجم که همه از قبل می‌گفتند سخت است، شب‌ها را صبح می‌کنم و شاید خودم را بکشم برای رفتن به تیزهوشان که دیگر دارد می‌رود به سال بعد که قبلاً اول راهنمایی بود. بالاخره در ضرب دو رقمی در دو رقمی و سه رقمی در سه رقمی، اسم زاویه‌ها (گوشهٔ خودمان)، مثلث و مستطیل و دایره، تقسیم، مضرب، بخش‌پذیری، واحدها، تناسب، مساحت، حل مسئله و... سری توی سرها پیدا می‌کنم. می‌گویند به دورهٔ راهنمایی که برویم، معلم این درس با بقیهٔ درس‌ها فرق می‌کند. راستی چه‌طور می‌شود؟

در دورهٔ راهنمایی باز هم مفصل به پنج کلاس قبلی سری می‌زنیم و برمی‌گردیم. چیزهایی به اسم هندسه پیدا شده‌اند که یادش بخیر زیر سر همان سه‌گوش و چهارگوش و گردی خودمان است. شکل‌های شبیه هم که توی هر کدام به یک گوشه گیر می‌دهند و باید اندازه‌اش را پیدا کنیم. خط‌کش هست، ولی باید محاسبه کنیم! یک چیزی که ۲ سانتی‌متر است، می‌گویند ۲ کیلومتر است و از این شعبده‌بازی‌هایی که معلوم نیست چرا در کتاب این‌قدر زیادند. تازه برایمان گُل و ماشین می‌کشند و می‌شمارند. بعد چیزی که «ایکس» نام دارد، پیدا می‌شود. اینجا در این سه سال جذر می‌گیریم و تقریب می‌کنیم. مسئله‌ها، یادم رفته بود، از دوم ابتدایی تا اینجا ما را تعقیب کرده‌اند. مثل سایهٔ عذاب هر شب تا حلشان نکنیم، نمی‌توانیم بخوابیم.

به دبیرستان می‌رسم. وای نگویید!

یک اسم‌هایی که قبلاً بلد بودیم، حالا طور دیگری شده‌اند. فکر کنم همان موضوع گردی و دایره است. ما در راهنمایی معادلهٔ خط می‌نوشتیم، ولی حالا شیب، موازی، عمود، قرینهٔ معکوس، فاصلهٔ نقطه از خط و یک کشف جدید داریم؛ چیزی که آن را «مثلثات» می‌نامند. البته چیزهایی دربارهٔ ربطش به مثلث شنیده‌ام. آن خط‌های دوست داشتنی حالا بلای جان ما شده‌اند. پست‌های جدیدی مثل مماس و قائم داریم. خط‌خطی‌های دبستان یک شناس‌نامه‌هایی به نام معادله دارند و صحبت از وارون‌شدنشان و مساحت زیرشان است.

خلاصه می‌رسیم به ته کابوس آموزش عمومی و یک چیزهایی که حد و پیوستگی، مشتق و انتگرال نامیده می‌شوند. می‌گویند در فیزیک به‌درد می‌خورند، ولی ما این‌ها را یک‌جور دیگر می‌بینیم. شاید اگر برویم دانشگاه (وای کابوس بعدی کنکور)، آنجا به‌درد بخورند. ما که سال اول و دوم در فیزیک هرچه لازم داشتیم، معلم‌ها گفته‌اند و بعدش یک‌طور دیگر در ریاضی پیدایشان شد. ولی در فیزیک گویی بهتر بود، می‌شد با آن‌ها کنار آمد. اینجا نمایی‌ها و لگاریتم‌ها نفسمان را گرفته‌اند.

راستی در این دوازده سال ریاضی خواندیم که آخرش یاد بگیریم یک چیزی به اسم تابع را که به هیچ

صراطی مستقیم نیست، بکشیم و انتگرالش را حساب کنیم؟!

البته نویسنده منکر اهمیت مباحث مطرح شده در درس‌های جبر، ریاضیات گسسته، هندسه ۲ و هندسهٔ تحلیلی نیست. ولی در سال چهارم عملاً تمام این‌ها به‌دلیل آمادگی برای کنکور، به توصیهٔ همکاران غیررسمی در مراکز غیررسمی آموزشی کنار گذاشته می‌شوند و در نتیجه نمودی ندارند.

■ نگاه پیکرهٔ آموزش‌وپرورش، جز معلمان ریاضی به ریاضیات

از نگاه بخش اعظمی (حدود ۷۰ درصد) از همکاران، مدیران، معاونان مدارس تا مسئولان اداری در سطح معاونان و مدیران منطقه‌ای تا استانی، ریاضی یک چالش در نظام آموزشی است. دبیران ریاضی کمترین راندمان را دارند، دردسرهای آموزشی حاد مربوط به درس ریاضی است، عامل افت و مردودی درس ریاضی است و مخلص کلام، کاش روزی بیاید که درس ریاضی و معلمانش از نظام آموزشی کشور حذف شوند، تا دغدغه‌های آنان تمام شود.

■ معلمان ریاضی چه می‌گویند؟

کلاس‌هایمان پر از دانش‌آموزان بی‌انگیزه و بی‌حوصله‌اند که با همه‌چیز، جز حرف زدن و شیطنت قهرند. دغدغهٔ همه‌چیز را دارند جز درس و مدرسه. نظام آموزشی یک برنامهٔ تحمیلی دارد و برنامه و کتاب درسی را کس دیگری تدارک می‌بینند. ما، هم باید درس بدهیم و هم باید سپر بلای همهٔ مشکلات باشیم. آخر هم باعث همهٔ مشکلات ما هستیم که باید یک تنه پاسخ دهیم. مسئولان از ردهٔ مدرسه‌ای تا بالا دائم از وضعیت تدریس ریاضی ناراضی‌اند و مشکل را در تدریس آن‌ها جست‌وجو می‌کنند.

کل جامعه نسبت به ریاضیات و آموزش آن دید منفی دارد و ریاضیات به یک کابوس اجتماعی بین خانواده‌ها تبدیل شده است. ترس از ریاضی مانند ترس از مار آن‌قدر عمیق شده است که گاهی شک می‌کنیم نکند ارثی باشد! همه تلاش می‌کنیم دانش‌آموزان تا حدامکان در امتحانات پایان هر سال، نهایی و کنکور نتیجه بگیرند تا شاید کمی به احساس رضایت از کارمان برسیم و امیدی برای تدریس در سال آینده پیدا کنیم.

■ آموزش ریاضی آن‌طور که باید باشد

ارزش‌های آموزش ریاضی در مدرسه کدام‌اند؟

- اقتصاد ما وابسته به انسان‌هایی است که می‌توانند از مهارت‌های ریاضی خود در علوم، فناوری، مهندسی، تجارت و اقتصاد استفاده کنند.
- ریاضی یک حوزه از دانش منطقی است که ذهن انسان را به‌طور منطقی پرورش می‌دهد.
- ریاضی فعالیتی لذت‌بخش است.
- ریاضی بخشی از میراث فرهنگی ماست.
- ریاضی برای درک جهان واقعی و برای زندگی روزمره ضروری است (رفیع‌پور گتابی، ۱۳۹۰: ۶۲-۵۶).

دانش‌آموزان نباید به ریاضی به‌عنوان مجموعه‌ای از قواعد و رویه‌های دلخواه نگاه کنند. باید ریاضی را موضوعی ببینند که در آن اشیا به‌طور منطقی و بامعنا به‌هم مرتبط‌اند و لازم است به این باور برسند که قادر به فهمیدن آن هستند.

در هر پایهٔ تحصیلی، برنامهٔ درسی باید بر موضوعات محدودتری تمرکز کند و در عوض، برای آن‌ها وقت بیشتری صرف گردد و عمیق‌تر به آن‌ها پرداخته شود.

کتاب‌های درسی باید به سمت موضوعات تازه و پیشرفته‌تر بروند و به‌جای اینکه هر سال موضوعات زیادی را تکرار کنند، به ژرفا بپردازند (جرمی کیل، ۱۳۸۹).

■ نیازهایی که شاید ریاضیات پاسخ‌گوی بخشی از آن باشد

می‌دانیم که در دورهٔ متوسطه، دانش‌آموزان در مرحلهٔ نوجوانی و آغاز جوانی‌اند و به واقع در اوج انرژی دورهٔ زندگی خود قرار دارند. پس اگر آموزش بانشاط و هیجان‌انگیز باشد، مقبولیت بیشتری خواهد داشت. یکی دیگر از ویژگی‌های این دوره روحیهٔ حقیقت‌جویی و حقیقت‌طلبی است؛ یافتن دلیل پدیده‌ها و روحی که بر آن‌ها حاکم است. بچه‌ها مسلماً در سال‌های اول زندگی با مشکلات زیادی مواجه‌اند که ساختار شخصیت آن‌ها را تشکیل خواهد داد. اگر آن‌ها در جایی بتوانند نحوهٔ رویارویی با مشکلات را بیاموزند، به آرامش خواهند رسید.

■ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

● الف) تجزیه و تحلیل

دست‌پرورده‌های ما در نظام آموزشی، نیازهایی دارند که شاید در روند آموزش ما دیده نشده‌اند یا اگر هم مدنظر بوده‌اند، راهبرد مناسبی برای برآورده شدنشان اندیشیده نشده است یا در مرحلهٔ اجرا فراموش شده‌اند.

از سوی دیگر، در روند آموزش باورهای یاددهندگان و باورهای یادگیرندگان به شدت تأثیرگذارند. باورها از مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار در بروز رفتارهای آدمی هستند و به‌دلیل ساختار مجرد بخشی از ریاضیات، تأثیر آن‌ها در کیفیت رفتارهای مرتبط

کتاب‌های درسی باید به سمت موضوعات تازه و پیشرفته‌تر بروند و به‌جای اینکه هر سال موضوعات زیادی را تکرار کنند، به ژرفا بپردازند

با ریاضی افراد، عمیق‌تر است. مثلاً، باورهای یادگیرنده نسبت به خود، یادگیری، ریاضی و معلم آن، به‌عنوان قسمتی از دانش غیررسمی فرد، یکی از پایه‌های یادگیری و حل مسئلهٔ ریاضی وی را تشکیل می‌دهند (حسام، ۱۳۹۰: ۱۰-۴).

در چند دههٔ اخیر، مطالعات زیادی در حوزهٔ باورهای معلمان ریاضی انجام شده‌اند که مؤید تأثیر مستقیم باورها بر شیوهٔ تدریس‌اند. تلاش برای تغییر شیوهٔ تدریس معلمان، بدون تغییر باورهای آنان نشدنی است. بنابراین، برای بهبود آموزش ریاضی، توجه به باورهای معلمان حیاتی است. معلمان می‌توانند با تغییر باورهای خود نسبت به ماهیت ریاضی و یاددهی ـ یادگیری آن، نحوهٔ تعامل خود را با دانش‌آموزان از نو طراحی کنند (فدایی، ۱۳۹۱: ۲۱-۱۶).

● **ب) پیشنهادها**

دیدیم که اگر مشکلات را بپذیریم و در جهت رفع آن‌ها اقدام کنیم، ناچار از تغییر رویکردها و باورها هستیم. از این‌رو، پیشنهادهای زیر را مطرح می‌کنم:

۱. اول از همه با توجه به بار منفی که عنوان ریاضیات دارد و در عرف و لغت، همه آن را با ریاضَت مرتبط می‌کنند (هرچند که در لغت معنای ورزش هم می‌دهد و برخی با توجه به ورزشِ فکر، لغت ریاضی را برای این دانش مناسب می‌دانند)، پیشنهاد می‌کنم عنوان جدیدی به‌جای ریاضیات برگزیده شود. حساب را هم خیلی مناسب نمی‌دانم، زیرا تنها به یک بعد از این دانش می‌پردازد و سایر ویژگی‌های آن را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد.

۲. شاید به تغییر اساسی نگرش و دیدگاه‌ها نیاز داشته باشیم؛ مثلاً، در سه سال اول ابتدایی (در سیستم ۳-۳-۶ جدید)، کتابی برای هر سه پایهٔ تحصیلی در اختیار دانش‌آموزان گذاشت به‌نام **دانش (یا دانش‌های) پایه** که مسائلی کاربردی با رویکرد حل مسئله و آمیخته‌ای از دانش‌های فیزیک، ریاضی، شیمی و زیست‌شناسی، آن‌طور که به‌واقع در زندگی هم هست، مطرح کند و بتوان آن را با روش‌های آمیخته، مانند اکتشافی و فعال تدریس کرد (یک مثال ساده: کاشتن گل به‌صورت عملی، در باغچهٔ مدرسه، در یک مساحت معلوم، با نظم خاص، ریاضی‌اش تعداد گل‌ها و مکان آن‌ها، شیمی و فیزیکش ترکیبات خاک، تأثیر نور و...، زیست‌شناسی هم مراحل رشد. تازه مهارت‌های اجتماعی همکاری و مواجهه با مشکل و حل آن هم آموزش داده می‌شود). در این روش، هم دانش‌ها با آمیختگی واقعی‌شان ارائه می‌شوند، و هم دلچسب، کاربردی و دلپذیر هستند

۳. در پایه‌های بالاتر، به‌خصوص پایان متوسطهٔ عمومی و متوسطهٔ تخصصی، کلاس‌هایی که به آموزش دانش ریاضی فعلی اختصاص می‌یابند، به استفاده از مسائل کاربردی به‌معنای واقعی بپردازند. (نه مانند برخی مسائلی که در کتاب‌های فعلی مطرح می‌شوند و چند پهلو بودنشان، معلمان را روی منظور سؤال به چالش می‌کشد و از هدفش دور می‌شود). همچنین، با دادن آگاهی لازم و آموزش‌های عملی به همکاران در کلاس‌های ضمن‌خدمت، کلاس‌های مزبور به جلسات بحث و تبادل‌نظر حداقل سه جلسه در هر نیم‌سال تحصیلی در درس‌هایی با محتوای جبر، هندسه و حسابان فعلی (گسسته، تحلیلی و دیفرانسیل) تبدیل شوند. به این شکل که معلم موضوع، مسئله یا قضیه‌ای را مطرح کند و بعد به صحبت بچه‌ها در مورد درکشان از موضوع و راه‌حل‌های پیشنهادی گوش فرادهد. همهٔ دانش‌آموزان را، حتی آن‌ها را که ایده‌ای ندارند، وارد بحث کند و سپس بحث را سامان دهد و نتیجه‌گیری کند. نظرات دانش‌آموزانی را هم که قانع نمی‌شوند، کتبی دریافت و افکارشان را در تعامل هدایت کند. به این ترتیب، نوعی ارزشیابی پایانی در کلاس انجام می‌شود، مشارکت در تدریس برآورده می‌شود، کلاس نشاط پیدا می‌کند، و روحیهٔ حقیقت‌جویی بچه‌ها تقویت می‌شود و پرورش می‌یابد. در واقع از این طریق مراحل و فنون حل مسئله به‌کار برده و آموزش داده می‌شود. از همه مهم‌تر، انرژی دانش‌آموزان در این چانه‌زنی علمی به مصرف می‌رسد و کلاس هم بانشاط و زنده می‌شود.

۴. برای جشنوارهٔ الگوی برتر تدریس حداقل در دو کلاس از هر مدرسه دوربینی باشد و هر معلم به دلخواه خود در این‌گونه کلاس‌ها تدریس کند و در پایان هر جلسه فیلم را خودش تجزیه و تحلیل کند و تغییرات رویکردی که خودش صلاح می‌داند، در روش تدریس خود (هر کسی بهترین و منصف‌ترین قاضی برای خویش است) اعمال کند. هرگاه خودش احساس رضایت کرد، آن بخش را که مناسب می‌داند به مسئولان مدرسه ارائه کند تا در جشنواره مطرح شود. چون این تدریس‌ها در موقعیت واقعی و با تعداد واقعی دانش‌آموز انجام می‌شود، کاربردی خواهد بود.

در چند دههٔ اخیر، مطالعات زیادی در حوزهٔ باورهای معلمان ریاضی انجام شده‌اند که مؤید تأثیر مستقیم باورها بر شیوهٔ تدریس‌اند

*sedighehalavi54@gmail.com

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۳)

آموزشی

حمیدرضا امیری

یک مجموعه، گردایه‌ای نامرتب از اشیای دوبه‌دو متمایز است. ما از نماد $x\in S$ به‌معنی «x عضوی از S است» استفاده می‌کنیم و $x\notin S$ به‌معنی «x عضوی از S نیست» است. فرض کنیم X و Y دو زیرمجموعه از U باشند، می‌گوییم: «X زیرمجموعهٔ Y است» و می‌نویسیم: $X\subseteq Y$؛ اگر $x\in X$ نتیجه دهد که: $x\in Y$.

متقابلاً ممکن است ما Y را «اَبَرمجموعهٔ X» بگوییم. $X\subseteq Y$ و $Y\subseteq X$ به‌معنی یکی بودن آن‌هاست. می‌گوییم دو مجموعهٔ X و Y از U مساوی یکدیگرند، اگر: $X\subseteq Y$ و $Y\subseteq X$.

ما از آکولادها برای مشخص کردن مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم و زمانی که بخواهیم آن‌ها را برحسب (همراه با) اعضایشان نام‌گذاری کنیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۲,۴,۶,...\}$. هر مجموعهٔ دارای K عضو، یک K- مجموعه یا مجموعه‌ای با عدد اصلی K نامیده می‌شود. عدد اصلیِ مجموعهٔ A با نماد $|A|$ نشان داده می‌شود.

از آنجا که هر مجموعه، گردایه‌ای نامرتب از اشیای دوبه‌دو متمایز است، مجموعه‌های زیر همگی یک مجموعهٔ ۳ عضوی را توصیف می‌کنند:

$\{a,b,c\} = \{b,a,c\} = \{c,b,a\} = \{a,b,b,c,b\}$

■ اعداد اول و تاریخچهٔ آن‌ها

عدد صحیح $p>۱$ اول نامیده می‌شود هرگاه بر هیچ عدد صحیحی غیر از ۱ و ۱- و p و p- بخش‌پذیر نباشد. به بیان دیگر، عدد صحیح $p>۱$ اول است اگر نتوانیم آن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد صحیح کوچک‌تر از خودش بنویسیم.

عدد $n>۱$ که اول نباشد، مرکب نامیده می‌شود (عدد ۱ نه اول و نه مرکب در نظر گرفته می‌شود). بنابراین ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ اعدادی اول هستند، ولی ۲×۲=۴، ۲×۳=۶، ۲×۴=۸، ۲×۵=۱۰ اول نیستند.

■ اصطلاحات و لغات مهم

1. Set	مجموعه
2. Subset	زیرمجموعه
3. Unordered	نامرتب
4. Distinct	مجزا، دوبه‌دو متمایز
5. Notation	نماد
6. Equal	مساوی
7. Braces	آکولاد
8. Cardinlity	عدد اصلی
9. Collection	گردایه
10. Describe	توصیف کردن
11. Superset	اَبَرمجموعه

A set is an unordered collection of distinct objects. We use the notation $x\in S$ to mean "x is an element of S" and $x\notin S$ to mean "x is not an element of S." Given two subsets (subcollections) of U, X and Y, we say "X is a subset of Y," written $X\subseteq Y$, if $x\in X$ implies that $x\in Y$. Alternatively, we may say that "Y is a superset of X." $X\subseteq Y$ and $Y\subseteq X$ mean the same thing. We say that two subsets X and Y of U are equal if $X\subseteq Y$ and $Y\subseteq X$. We use braces to designate sets when we wish to specify or describe them in terms of their elements: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{2,4,6,...\}$. A set with k elements is called a k-set or set with cardinality k. The cardinality of a set A is denoted by $|A|$.

Since a set is an unordered collection of distinct objects, the following all describe the same 3-element set
$\{a,b,c\} = \{b,a,c\} = \{c,b,a\} = \{a,b,b,c,b\}$.

■ Primes and their history

An integer $p>1$ is called a prime if it is not divisible by any integer other than, 1, -1, p and -p. Another way of saying this is that an integer $p>1$ is a prime if it cannot by written as the product of two smaller positive integers. An integer $n>1$ that is not a prime is called composite (the number 1 is considered neither prime, nor composite). Thus 2,3,5,7,11 are primes, but 4=2.2, 6=2.3, 8=2.4, 9=3.3, 10=2.5 are not primes.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول فرهنگ و اندیشه

سرگرمی علمی

بهرام دستوریان

این یک جدول ۶×۶ با رمزی نهفته در آن است. هدف از حل جدول یافتن رمز آن است و شما باید آن را به‌دست آورید. به این منظور، راه‌حل زیر را قدم‌به‌قدم انجام دهید. نخست جدول را که یک جدول عددی است، حل کنید. عددهای یک‌رقمی یا دورقمی و یا سه‌رقمی را با توجه به توضیحات جدول، به‌دست آورید و آن‌ها را در ردیف‌های افقی و عمودی جدول، از چپ به راست، یا از بالا به پایین قرار دهید:

افقی:

۱. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ - تعداد ضلع‌های چندضلعی منتظمی که در دایرهٔ به شعاع R محاط شده و مساحت آن مساوی $3R^2$ است.

۲. تفاضل یک زاویهٔ داخلی یک پنج‌ضلعی منتظم از متمم زاویهٔ -85° عدد ۱۵۳۴ به پیمانهٔ ۵۲ با این عدد همنهشت است.

۳. حاصل $6x-4y+7z$ که x، y و x جواب‌های دستگاه معادلات $\begin{cases}3x+y+4z=9\\-x+y+2z=-1\\2x+y-3z=0\end{cases}$ هستند ـ عدد حسابی که طبیعی نیست.

۴. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$ - مقدار عددی a که در دو رابطهٔ $9^b=3^{(a-9)}$ و $2^a=8^{b+1}$ صدق می‌کند.

۵. واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b که در روابط $\log_{13}^{a}=\frac{1}{2}$ و $\log_{13}^{b}=\frac{3}{2}$ صدق می‌کنند ـ عدد سه رقمی با سه رقم متوالی (از راست به چپ) که مجموع آن و مقلوبش*، ۱۵۰ واحد از سه برابر تفاضل آن و مقلوبش کمتر است.

۶. با فرض $a^b=2$، حاصل $3a^{5b}$ ـ حاصل $\int_{-2}^{3}x[x]dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$

عمودی:

۱. کوچک‌ترین عدد اول دو رقمی ـ نسبت جملهٔ سیزدهم یک دنبالهٔ هندسی به جملهٔ اول آن، به شرطی که جملهٔ دهم آن $\sqrt{62}$ و جملهٔ چهارم آن $\sqrt{2}$ باشد.

۲. دو برابر نخستین عدد اول سه رقمی ـ سه برابر دومین عدد اول دو رقمی.

۳. در پرتاب دو تاس با هم، تعداد اعضای پیشامد تصادفی آن‌که مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگ‌تراز ۳ باشد ـ با فرض $x>0$ و $f(x)=\frac{x^2}{12}+\frac{11}{12}$ مقدار $(f^{-1})'(1)$.

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=?$ ـ اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ α که در رابطهٔ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin 37^\circ$ صدق می‌کند.

۵. $\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{5}n$ - دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ با طول‌های مساوی، به‌ترتیب با محور xها زاویه‌های ۸۵ و ۱۷ درجه می‌سازند. مکمل زاویه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ با محور xها می‌سازد، چند درجه است؟

۶. زاویهٔ بین دو بردار $2i$ و $i+\sqrt{3}j$. مقدار عددی a، به شرطی که چندجمله‌ای $x^9-3x^8+x^2+a$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

حال که جدول را حل کرده‌اید، آن را یک ماتریس $M_{6\times 6}$ فرض کنید. درایه‌های این ماتریس همان عددهای جدول هستند. مثلاً درایهٔ m_{23} یعنی عدد واقع در سطر دوم و ستون سوم جدول. بدیهی است درایه‌هایی که در جدول شامل خانهٔ سیاه هستند، وجود ندارند. مثلاً درایهٔ m_{13} وجود ندارد. حال با توجه به این موضوع، دوازده عدد زیر را بیابید و در خانه‌های جدول افقی زیر به‌ترتیب بچینید:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$m_{12}m_{23}$	$m_{11}m_{15}$	$m_{33}m_{14}$	$m_{35}m_{62}$	$m_{32}m_{26}$	$m_{41}m_{22}$	m_{21}	$m_{44}m_{65}$	$m_{45}m_{36}$	$m_{52}m_{55}$	$m_{51}m_{63}$	$m_{54}m_{56}$

توجه داشته که منظور از دو درایهٔ متوالی، عدد دو رقمی است که رقم‌های آن همان دو درایه هستند. مثلاً $m_{41}m_{22}$ یک عدد دو رقمی است که رقم یکان آن m_{22} و رقم دهگان آن m_{41} است.

حالا که جدول بالا را پر کرده‌اید، می‌توانید به‌سادگی رمز جدول را بیابید. ۳۲ حرف الفبای فارسی را با عددهای طبیعی ۱ تا ۳۲ به‌ترتیب متناظر کنید. مثلاً «الف» با عدد ۱، «ب» با عدد ۲ و... و «ی» با عدد ۳۲. حال حروف متناظر با دوازده عدد جدول فوق را بیابید و به‌همان ترتیب به‌هم وصل کنید تا رمز جدول را به‌دست آورید.

پی‌نوشت

* مقلوب هر عدد طبیعی، از وارونه کردن جای ارقام آن به‌دست می‌آید. مثلاً مقلوب ۴۲، ۲۴ و مقلوب ۱۳۹۳، ۳۹۳۱ است.

توپ‌ها در توزیع جعبه‌ها

مصطفی دیداری
کارشناس ارشد ریاضی

کلیدواژه توزیع توپ در جعبه‌ها، ترکیب با تکرار، افراز، جمعوند یک عدد

چکیده

در این مقاله، دسته‌های مهمی از مسئله‌های شمارشی که به بررسی تعداد روش‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها منجر می‌شوند، بررسی شده‌اند.

بسیاری از مسئله‌های شمارشی را می‌توان برحسب تعداد راه‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها بیان کرد. در این مقاله چهار مسئلهٔ اساسی توزیع‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم. این چهار مسئله عبارت‌اند از:

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متمایز
۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ متمایز
۳. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ یکسان
۴. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ یکسان

سه مسئلهٔ اول به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم در کتاب‌های درسی مطرح شده‌اند، در صورتی که از مسئلهٔ چهارم صحبتی به میان نیامده است.

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متمایز

مثال ۱. می‌خواهیم ۵ توپ با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۵ را در ۳ جعبه به رنگ‌های آبی، قرمز و زرد توزیع کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد: بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله $3^5=3\times3\times3\times3\times3$ است.

نتیجهٔ ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متفاوت برابر است با: k^n.

مثال ۲. چند تابع از مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ به مجموعهٔ $\{1,2,3\}$ وجود دارد؟

● **پاسخ:** عضو a می‌تواند به هر یک از عددهای ۱، ۲ و ۳ تصویر شود. بنابراین برای هر عضو از مجموعهٔ اول ۳ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با: 3^5.

مثال ۳. می‌خواهیم ۳ جایزهٔ متفاوت را بین ۵ نفر توزیع کنیم، به‌طوری که به هر کدام حداکثر یک جایزه برسد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جایزهٔ اول را می‌توانیم به هر کدام از ۵ نفر بدهیم. جایزهٔ دوم را نیز به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده و جایزهٔ سوم را نیز می‌توانیم به ۳ نفر دیگر بدهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، جواب مسئله $5\times4\times3$ است. این عدد را می‌توانیم به‌صورت $5\times4\times3\times\frac{2\times1}{2\times1}=\frac{5!}{2!}$ نیز بنویسیم.

نتیجهٔ ۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متفاوت $(k\geq n)$ که در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد، برابر است با:

$$P(k,n)=\frac{k!}{(k-n)!}$$

مثال ۴. شرکتی در نظر دارد برای هریک از شغل‌های نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه یک نفر را استخدام کند. ۴ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای مشاغل استخدام کند؟

● **پاسخ:** !۴.

نتیجهٔ ۳. تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ n عضوی به خودش برابر است با !n

نتیجهٔ ۴. تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ n عضوی به خودش برابر است با !n

مثال ۵. مثال قبلی را در نظر بگیرید، با این تفاوت که ۱۰ نفر برای استخدام داوطلب شده باشند. پرنمودن مشاغل به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** ابتدا باید ۴ نفر را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۱۰}{۴}$ روش امکان‌پذیر است. حال این ۴ نفر را می‌توان به !۴ طریق در مشاغل استخدام کرد. بنابراین جواب مسئله $\binom{۱۰}{۴}\times ۴! = \frac{۱۰!}{۶!}$ است (می‌توانستیم با استدلالی مشابه به عدد $۱۰\times۹\times۸\times۷$ برسیم).

نتیجهٔ ۵. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز $(k\le n)$ به‌طوری که در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد، برابر است با: $S(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

مثال ۶. شرکتی در نظر دارد برای چهار شغل نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه به‌ترتیب ۱، ۲، ۲ و ۳ نفر را استخدام کند. ده نفر متقاضی استخدام در این مشاغل شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند این افراد را استخدام کند؟

● **پاسخ:** ابتدا می‌توانیم ۳ نفر را انتخاب و آن‌ها را مسئول رایانه کنیم. در ادامه ۲ نفر از افراد باقی‌مانده را برای منشی‌گری در نظر می‌گیریم و به‌همین ترتیب سایر مشاغل را به افراد می‌دهیم. بنابراین جواب مسئله $\binom{۱۰}{۳}\times\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۱}$ است.

مثال ۷. می‌خواهیم ۵ توپ از رشته‌های ورزشی متفاوت را در سه جعبهٔ ۱، ۲ و ۳ به‌گونه‌ای قرار دهیم که در هر جعبه **حداقل** یک توپ قرار گیرد. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** صورت دیگر مسئله به این صورت است: تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ای ۵ عضوی به مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ را به‌دست آورید.

برای جواب دادن به این مسئله ناچاریم از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. ابتدا پیشامدهای نامطلوب را تعریف می‌کنیم:

$A_۱$: پیشامدهایی که در جعبهٔ اول توپی قرار نگیرد یا عدد ۱ تصویر هیچ عضوی از مجموعهٔ اول نباشد

$A_۲$: پیشامدهایی که در جعبهٔ دوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۲ تصویر هیچ عضوی از مجموعهٔ اول نباشد

$A_۳$: پیشامدهایی که در جعبهٔ سوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۳ تصویر هیچ عضوی از مجموعهٔ اول نباشد

تعداد کل حالت‌های نامطلوب برابر است با: $|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$. بنابراین:

$$|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=|A_۱|+|A_۲|+|A_۳|-|A_۱\cap A_۲|$$
$$-|A_۱\cap A_۳|-|A_۲\cap A_۳|+|A_۱\cap A_۲\cap A_۳|$$
$$=۲^۵+۲^۵+۲^۵-۱-۱-۱+۰=۳\times۲^۵-۳$$

دقت کنید که برای مثال، $|A_۱|$ را می‌توان به این صورت به‌دست آورد که تعداد حالت‌هایی که در جعبهٔ اول توپی قرار نگیرد، $۲^۵$ است، چون برای توزیع هر توپ دو جعبه

موجود است. برای به‌دست آوردن پاسخ نهایی مسئله باید کل روش‌های توزیع، یعنی 3^5 را از حالت‌های نامطلوب کم کنیم. بنابراین $3^5-(3\times 2^5-3)$ روش برای توزیع توپ‌ها با شرایط مسئله وجود دارد.

قضیهٔ ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت $(k\le n)$ (تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به k عضوی) به‌طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد، برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n=\binom{k}{0}k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}(k-k)$$

۲. توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ متمایز

برای بررسی این نوع از توزیع‌ها ابتدا لازم است قضیهٔ ۲ را یادآوری کنیم:

قضیهٔ ۲: تعداد جایگشت‌های n شیئی که n_1 تا از آن‌ها مانند هم، n_2 تا از آن‌ها نیز مانند هم و... n_k تا از آن‌ها مانند هم است که $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ برابر است با: $\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!\dots(n_k)!}$.

مثال ۸. با حروف کلمهٔ انتخابات چند کلمهٔ ۸ حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** با توجه به اینکه ۳ حرف الف و ۲ حرف ت وجود دارد، پاسخ $\frac{8!}{3!2!}$ است.

مثال ۹. با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** رقم صفر در اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد، بنابراین این رقم یا عدد ۲ و یا عدد ۳ است.

۲ _ $\underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{\frac{7!}{3!1!3!}=140}$: اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند.

۳ _ $\underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{\frac{7!}{2!2!3!}=210}$: اعدادی که با ۳ شروع می‌شوند.

بنابراین جواب مسئله ۳۵۰=۲۱۰+۱۴۰ عدد ۸ رقمی است.

مثال ۱۰. ضریب جملهٔ $x^2y^3z^4w$ در بسط $(x+y+z+w)^{10}$ چیست؟

● **پاسخ:** جملهٔ $x^2y^3z^4w$ از ضرب دو تا x، سه تا y و چهار تا z و یک w به‌دست می‌آید. بنابراین به تعداد جایگشت‌های این ده شیئی جمله $x^2y^3z^4w$ در بسط وجود دارد. بنابراین ضریب آن $\frac{10!}{2!3!4!1!}$ است.

به بحث اصلی این قسمت، یعنی توزیع توپ‌های یکسان به جعبه‌های متمایز برمی‌گردیم. فرض کنید n توپ یکسان در اختیار داشته باشیم و تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبهٔ اول را x_1، تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبهٔ دوم را x_2 و.. تعداد توپ‌های توزیعی در جعبهٔ kام را x_k بنامیم. واضح است که: $x_1+x_2+\dots+x_k=n$. از طرف دیگر هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نیز متناظر با یک روش توزیع است. بنابراین می‌توان گفت تعداد روش‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ متمایز برابر است با تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$\begin{cases}x_1+x_2+\dots+x_k=n\\ x_i\in Z\ ,\ x_i\ge 0\\ i=1,2,\dots,k\end{cases}.$$

مثال ۱۱. به چند روش می‌توان پنج توپ یکسان را در ۳ جعبه با رنگ‌های متفاوت توزیع کرد؟

● **پاسخ:** با توجه به توضیحات قبلی تعداد روش‌ها برابر است با جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=5$. به این منظور ۵ توپ و دو خط، ||OOOOO، در نظر می‌گیریم. هر جایگشت این هفت شیئی متناظر با یک جواب معادلهٔ فوق خواهد بود. برای مثال، جایگشت O|OOO|O متناظر با جواب $x_1=1$، $x_2=3$ و $x_3=1$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌ها یا همان تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\binom{7}{2}=\binom{5+3-1}{3-1}=\frac{7!}{5!2!}.$$

قضیهٔ ۳. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

مثال ۱۲. می‌خواهیم از بین ۳ نوع گل متفاوت، دسته‌گلی با ۱۰ شاخه گل درست کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد گل‌های نوع اول را x_1، نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 می‌نامیم. بنابراین: $x_1+x_2+x_3=10$ و لذا پاسخ $\binom{12}{2}$ است.

مثال ۱۳. می‌خواهیم ۱۰ سکه تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه به‌گونه‌ای توزیع کنیم که به نفر اول

حداقل ۳ سکه، به نفر دوم حداقل ۲ سکه و به نفر سوم حداقل یک سکه برسد. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر با جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1\geq 3, x_2\geq 2, x_3\geq 1 \end{cases}$ است. به این منظور ابتدا ۳ سکه به نفر اول، ۳ سکه به نفر دوم و ۱ سکه به نفر سوم می‌دهیم. بنابراین تعداد روش‌ها، برابر است با تعداد روش‌های توزیع ۴ سکه باقی‌مانده بین ۳ نفر که این تعداد برابر است با: $\binom{6}{2}=15$.

مثال ۱۴. می‌خواهیم ۱۲ سکهٔ تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه با شرایط زیر توزیع کنیم:

الف) به نفر اول بیشتر از ۳ سکه

ب) به نفر دوم حداقل یک و حداکثر ۳ سکه

ج) به نفر سوم حداکثر ۲ سکه

این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش‌ها برابر است با جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=12 \\ x_1>3, 1\leq x_2\leq 3, x_3\leq 2 \end{cases}$. برای از بین‌بردن شرط‌های بزرگ‌تری، ۴ سکه به نفر اول و یک سکه به نفر دوم می‌دهیم. بنابراین کافی است ۷ سکه باقی‌مانده را با شرایط $\begin{cases} y_1+y_2+y_3=7 \\ y_2\leq 2, y_3\leq 2 \end{cases}$ توزیع کنیم (دستگاه دوم) (y_1 برابر است با تعداد سکه‌هایی که به نفر اول از بقیهٔ سکه‌ها می‌رسد و...). برای از بین بردن شرط کوچک‌تری باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده نماییم. بنابراین پیشامدهای نامطلوب به‌صورت روبه‌رو

$A_1 = y_2>2$ تعداد جواب‌هایی که در آن‌ها

$A_2 = y_3>2$ تعداد جواب‌هایی که در آن‌ها

تعریف می‌شود.

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$
$$=\binom{4+3-1}{3-1}+\binom{4+3-1}{3-1}-\binom{1+3-1}{3-1}=27$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با: $\binom{7+3-1}{3-1}-27=9$

(چون کل جواب‌های دستگاه دوم را از حالت‌های نامطلوب کم می‌کنیم).

مثال ۱۵. تعداد جمله‌های بسط $(x+y+z+w)^{10}$ را به‌دست آورید.

● **پاسخ:** هر جملهٔ بسط فوق به‌صورت $x^a y^b z^c w^d$ است که در آن داریم: $a+b+c+d=10$. بنابراین هر جواب صحیح و نامنفی این معادله متناظر با یک جمله از بسط است و جواب مسئله $\binom{13}{3}$ است.

مثال ۱۶. چند سه‌تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc=3^{12}$؟

● **پاسخ:** واضح است که باید $a=3^x$، $b=3^y$ و $c=3^z$.

بنابراین: $3^{x+y+z}=3^{12}$ و لذا: $x+y+z=12$.

بنابراین به ازای هر جواب صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق دقیقاً یک سه‌تایی به‌دست می‌آید. در نتیجه پاسخ مسئله $\binom{14}{2}$ است.

مثال ۱۷. چند سه‌تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc=2^{10}\times 3^{12}$؟

● **پاسخ:** شکل کلی اعداد a,b,c باید به‌صورت $a=2^{x_1}\times 3^{y_1}$، $b=2^{x_2}\times 3^{y_2}$ و $c=2^{x_3}\times 3^{y_3}$ باشد.

بنابراین، با توجه به $abc=2^{10}\times 3^{12}$ باید داشته باشیم: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ y_1+y_2+y_3=12 \end{cases}$ که تمامی متغیرها صحیح و نامنفی‌اند. هر جواب دستگاه متناظر با یک سه‌تایی است، در نتیجه جواب مسئله $\binom{14}{2}\binom{12}{2}$ است.

قابل ذکر است که تعداد سه‌تایی‌های صحیح با شرایط مسئلهٔ فوق برابر است با: $\binom{14}{2}\binom{12}{2}\times 4$. (چرا؟)

۳. توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ یکسان

مثال ۱۸. می‌خواهیم از بین ۴ نفر، دو تیم دو نفره تشکیل دهیم تا با هم مسابقه دهند. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** فرض کنیم این چهار نفر را با مجموعهٔ {a,b,c,d} نمایش دهیم. هر انتخاب دو عضو از این چهار نفر، دو تیم را به‌وجود می‌آورد. بنابراین ممکن است گفته شود جواب مسئله $\binom{4}{2}$ است. اما باید دقت کرد که انتخاب دو عضو a و b تیم‌های

{a,b} و {c,d} و انتخاب دو عضو c و d نیز همان تیم‌بندی را به‌وجود می‌آورد. بنابراین پاسخ مسئله $\frac{1}{2!}\binom{4}{2} = 3$ است. این تیم‌بندی‌ها به این صورت است: {a,b} {c,d}، {a,c} {b,d} و {a,d} {b,c}.

مثال ۱۹. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** چهار توپ را با مجموعهٔ {a,b,c,d} نمایش می‌دهیم و توزیع‌ها را به چهار دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

الف) در تمامی جعبه‌ها توپ قرار گیرد.

ب) در سه جعبه توپ قرار گیرد و یکی خالی بماند.

ج) در دو جعبه توپ قرار گیرد و دو جعبه خالی بمانند.

د) در یک جعبه توپ قرار گیرد و بقیهٔ جعبه‌ها خالی بمانند.

واضح است بخش الف فقط دارای توزیع {a} {b} {c} {d} و بخش د نیز فقط دارای توزیع {a,b,c,d} است. برای به‌دست آوردن حالت‌های بخش ب می‌توان گفت: باید یک جعبهٔ دو عضوی و دو جعبهٔ یک عضوی داشته باشیم. بنابراین تعداد این توزیع‌ها (افرازها) برابر است با: $\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 6$ (مستقیماً حالت‌ها را بنویسید). تقسیم بر !۲ به‌دلیل وجود دو مجموعهٔ تک‌عضوی است که جابه‌جایی آن‌ها حالت جدیدی را به‌وجود نمی‌آورد. اما بخش ج. در این حالت یا دو جعبه هر کدام دارای دو توپ داریم که تعداد آن‌ها می‌شود: $\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} = 3$ و یا جعبه‌ای سه‌توپی و یک جعبهٔ یک‌توپی داریم که تعداد آن‌ها برابر است با $\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 4$ است. بنابراین به ۱۵=۴+۳+۶+۱+۱ روش می‌توان ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کرد.

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان برابر است با تعداد راه‌های افراز مجموعهٔ n عضوی به یک، دو، ...، k مجموعه.

مثال ۲۰. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر است با تعداد افرازهای مجموعهٔ {a,b,c,d} به یک یا دو یا سه مجموعه. این تعداد با توجه به مثال ۱۹ برابر است با ۱۴.

مثال ۲۱. ۱۲ نفر را به چند روش می‌توان در ۴ اتاق ۳ نفره اسکان داد؟

● **پاسخ:** $\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{4!}$. دقت کنید که در این تعداد، اتاق‌ها (جعبه‌ها) با یکدیگر تفاوتی ندارند.

در پایان این قسمت می‌خواهیم رابطه‌ای کلی برای به‌دست آوردن تعداد افرازها ارائه دهیم. فرض کنید $\left\{ {n \atop k} \right\}$ برابر با تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ یکسان بوده است، به‌طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. در واقع $\left\{ {n \atop k} \right\}$ همان تعداد راه‌های افراز مجموعهٔ n عضوی به k زیرمجموعهٔ ناتهی است. قابل ذکر است که اعداد $\left\{ {n \atop k} \right\}$ را «اعداد استرلینگ نوع دوم» نیز می‌نامند.

قضیهٔ ۴. $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$.

برهان: بنابر قضیهٔ ۱، $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$ تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متفاوت است به‌طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

این توزیع‌ها را به روشی دیگر نیز به‌دست می‌آوریم. ابتدا فرض می‌کنیم n شیء را در k جعبهٔ یکسان توزیع کرده‌ایم، به‌طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

حال می‌توانیم جعبه‌ها را به !k طریق با اعداد 1,2,...,k نام‌گذاری کنیم. بنابراین تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ متفاوت به‌طوری که هیچ‌کدام خالی نماند برابر است با: $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$ و حکم ثابت است.

مثال ۲۲. تعداد راه‌های توزیع ۵ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان به‌دست آورید، به‌طوری که جعبه‌ای خالی نماند.

● **پاسخ:**

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = \frac{1}{3!}\left(\binom{3}{0}(3-0)^5 - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 - \binom{3}{3}(3-3)^5\right) = \frac{1}{6}(3^5 - 3\times 2^5 + 3)$$

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبهٔ یکسان برابر است با: $\left\{ {n \atop 1} \right\} + \left\{ {n \atop 2} \right\} + \dots + \left\{ {n \atop k} \right\}$.

۴. توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ یکسان

مثال ۲۳. می‌خواهیم عدد ۵ را به‌صورت جمع اعداد طبیعی بنویسیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش‌ها را به پنج دسته زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

الف) جمع یک عدد ۵=۵

ب) جمع دو عدد ۵=۴+۱=۳+۲

ج) جمع سه عدد ۵=۳+۱+۱=۲+۲+۱

د) جمع چهار عدد ۵=۲+۱+۱+۱

هـ) جمع پنج عدد ۵=۱+۱+۱+۱+۱

بنابراین جواب مسئله ۷ روش است.

مثال ۲۴. می‌خواهیم ۵ توپ یکسان را در ۵ جعبهٔ یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** ۷ روش (چرا؟)

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان برابر است با تعداد حالت‌هایی که بتوان عدد n را به‌صورت جمع یک، دو، ... و k عدد طبیعی نوشت.

مثال ۲۵. به چند روش می‌توان ۷ توپ یک‌رنگ را در ۳ جعبهٔ یکسان قرار دارد، به‌طوری که هیچ‌کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** باید دید که به چند روش می‌توان عدد ۷ را به‌صورت مجموع ۳ عدد طبیعی نوشت:

۷=۵+۱+۱=۴+۲+۱=۳+۳+۱=۳+۲+۲

مثال ۲۶. به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در n-۱ جعبهٔ یکسان توزیع کرد، به‌طوری‌که هیچ‌کدام خالی نماند؟ (n≥۲)

پاسخ: یک روش

مثال ۲۷. به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در n-۲ جعبهٔ یکسان توزیع کرد، به‌طوری که هیچ‌کدام خالی نماند؟ (n≥۴)

● **پاسخ:** دو روش

مثال ۲۸. به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در دو جعبه توزیع کرد، به‌طوری که هیچ‌کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** $n = ۱ + (n-۱) = ۲ + (n-۲) + \dots$. بنابراین پاسخ مسئله $\left[\frac{n}{۲}\right]$ است.

شایان ذکر است که در حالت کلی فرمولی صریح برای تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبهٔ یکسان ارائه نشده است، اما در کتاب‌های ریاضی می‌توان رابطهٔ بازگشتی برای این مسئله پیدا کرد.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: سه معمای بامزه!

سرگرمی علمی

هوشنگ شرقی

من و دو دخترم دیشب برای شام تنها بودیم و مادر آن‌ها برای کاری واجب به منزل مادرش رفته بود! من که آشپزی بلد نیستم و نمی‌خواستم از غذاهای فست‌فودی استفاده کنم، تصمیم گرفتم که به غذاهای سادهٔ خانگی بسنده کنم و دخترها هم به‌همین رضایت دادند. در تهیهٔ این غذاها عامل زمان بسیار مهم بود، ولی متأسفانه تمام ساعت‌هایمان خوابیده بودند و تنها ابزارهای اندازه‌گیری زمان برای ما ساعت‌های شنی متفاوتی بودند که در اختیار داشتیم. در نتیجهٔ این موضوع به چند معمای جالب برخوردیم که آن‌ها را برایتان نقل می‌کنم.

✦ معمای اول: تخم‌مرغ‌های پخته!

اولین چیزی که تصمیم گرفتیم بخوریم، تخم‌مرغ آب‌پز بود (البته چیزهای دیگری هم داشتیم!) برای آنکه مطمئن شویم تخم‌مرغ‌ها کاملاً سفت و پخته می‌شوند، ۱۵ دقیقه باید در آب می‌جوشیدند و چون کمی گرسنه بودیم، می‌خواستیم بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه تخم‌مرغ‌ها را بخوریم. به کمک دو ساعت شنی که یکی ۷ دقیقه‌ای و دیگری ۱۱ دقیقه‌ای است، به هر زحمتی بود توانستیم زمان ۱۵ دقیقه را اندازه‌گیری کنیم و بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه، تخم‌مرغ‌هایمان هم آمادهٔ خوردن بودند. به‌نظر شما چه‌طور این ۱۵ دقیقه را اندازه گرفتیم؟

✦ معمای دوم: تخم‌مرغ‌های عسلی!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های پخته، باز هم گرسنه بودیم! تصمیم گرفتیم چند تخم‌مرغ عسلی هم بخوریم. برای پخته‌شدن تخم‌مرغ عسلی گذشت ۹ دقیقه وقت، لازم و کافی بود. پس باید ۹ دقیقه وقت را اندازه‌گیری می‌کردیم و این بار می‌خواستیم از یک ساعت شنی ۴ دقیقه‌ای و یک ساعت شنی ۷ دقیقه‌ای استفاده کنیم. چگونه توانستیم این کار را انجام دهیم به‌طوری که درست پس از ۹ دقیقه همهٔ تخم‌مرغ‌هایمان حاضر بودند؟

✦ معمای سوم: کتلت‌های خوشمزه!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های عسلی، باز هم گرسنه بودیم! ولی دختر بزرگم گفت: «عیبی ندارد بابا! سه تا کتلت در یخچال داریم که به هر کداممان یکی از آن‌ها می‌رسد. فقط باید کمی سرخ شوند، چون سرد و یخ‌زده هستند.»

حال باید هر طرف هر کتلت را یک دقیقه سرخ می‌کردیم. مشکل ما دیگر زمان نبود، چون با ساعت شنی یک دقیقه‌ای که داشتیم این کار را به سادگی می‌توانستیم انجام دهیم. مشکل این بود که یک ماهی‌تابهٔ کوچک برای سرخ کردن داشتیم که فقط گنجایش دو کتلت را داشت و ما می‌خواستیم سه دقیقهٔ بعد کتلت‌هایمان حاضر باشند! چه‌طور این کار را انجام دادیم؟

یادتان باشد که باید هر دو طرف هر سه کتلت سرخ شوند و هر طرف یک دقیقه طول می‌کشد تا سرخ شود و ماهی‌تابه برای دو کتلت جا دارد.

رشد آموزش ریاضی

شماره‌های ۱۷ تا ۲۰

غلامرضا یاسی‌پور*

کلیدواژه: جرج پولیا، المپیاد بین‌المللی ریاضی، قاعده تقسیم بر هفت و سیزده

شماره ۱۷

به سال پنجم انتشار «*رشد آموزش ریاضی*» رسیده‌ایم. بهار ۱۳۶۷ است و بهای مجله همچنان ۱۰۰ ریال. *مقالهٔ زیبایی در ریاضیات*، دومین مقالهٔ این شماره است و آغازی این‌چنین دارد:

«ما خیلی به ریاضیات می‌پردازیم و احکام آن را به‌خاطر زیبایی معنویشان تأیید می‌کنیم. زیرا اگر این شور و هیجان فراموش شود، ما دیگر ریاضیات را نمی‌فهمیم، مفاهیم آن از میان می‌پاشند و برهان‌ها استحکام خود را از دست می‌دهند. ریاضیات بی‌معنا می‌شود و در انبوهی از مکررگویی‌های پوچ فرو می‌رود» (مایکل پولانی، در کتاب معرفت شخصی).

گو اینکه انگیزهٔ پیدایش ریاضیات مسائل عملی بوده، ولی می‌توان گفت که در بسیاری از موارد نیز ریاضیات به‌خاطر زیبایی‌اش خلق و ابداع شده است و به‌خاطر آن به پیش می‌رود. وقتی یونانیان در چندین هزار سال پیش به بسط نظریهٔ مقاطع مخروطی پرداختند، هرگز تصور نمی‌کردند که این نظریه روزی کاربردی برای «تسخیر فضا» پیدا کند. البته منظور این نیست که کاربرد ریاضیات فراموش شود و یا کم‌اهمیت جلوه کند، بلکه مقصود این است که ریاضیات را نباید فقط به‌خاطر کاربرد آن مطالعه کرد. به قول **هیلبرت**، کاربرد نباید ملاک ارزش ریاضیات باشد. خوش‌بختانه هر دوی این‌ها مؤید یکدیگرند.

مقالهٔ بعدی به زندگی‌نامهٔ **جرج پولیا**، ریاضی‌دان برجستهٔ معاصر می‌پردازد که به ترجمه و اقتباس دکتر علیرضا مدقالچی است. مقاله می‌گوید:

«جرج پولیا در تاریخ ۱۳ دسامبر ۱۸۸۷ م در شهر بوداپست به‌دنیا آمد. پدرش **یاکوب** (۱۸۹۷-۱۸۴۴) و مادرش **آنا** (۱۹۳۹-۱۸۵۳) نام داشت. پدر او در یک شرکت بیمهٔ بین‌المللی در مجارستان سمت حقوقدان داشت. علاقهٔ اصلی یاکوب به اقتصاد و آمار بود. او در این راستا ادامه می‌داد تا جایگاهی آکادمیک در اقتصاد به‌دست آورد. از این‌رو تمام وقت خود را وقف تحقیق می‌کرد. در حالی‌که به‌وسیلهٔ وکالت امرار معاش می‌کرد، چندین کتاب و مقاله نوشت. او چندین زبان از جمله انگلیسی را به اندازهٔ کافی آموخت که کتاب «*ثروت ملل*» **آدام اسمیت** را به زبان مجارستانی ترجمه کرد. این ترجمه تا مدت‌ها کتاب درسی مدارس در مجارستان بود. اندکی قبل از فوتش موفق شد که به‌عنوان پریوات دوتسنت (استاد بدون کرسی) دانشگاه بوداپست انتخاب شود.

وقتی جورج ده ساله بود، پدرش فوت کرد و همسر و سه پسر و دو دختر از خود به‌جای گذاشت. برادر بزرگ‌تر در رشتهٔ پزشکی تحصیل کرد و جراحی برجسته و یکی از استادان جراحی دانشگاه شد. گرچه او یک روش جراحی معده که به‌نام او مشهور است ابداع کرد، اما به ریاضیات عشق می‌ورزید و همواره از انتخاب رشتهٔ پزشکی متأسف بود. چند سال بعد برادر کوچک‌تر جورج در جنگ جهانی اول کشته شد.

مادر او مُصر بود که جورج حرفهٔ پدرش را تعقیب کند. لذا او در سال ۱۹۰۵ در دانشگاه بوداپست در رشتهٔ حقوق ثبت‌نام کرد. ولی به‌علت بی‌علاقگی فقط یک نیم‌سال در این رشته ادامه داد. سپس در رشتهٔ زبان و ادبیات به مدت دو سال تحصیل کرد که این ادامه تحصیل به اخذ گواهی‌نامهٔ تدریس در دوره‌های دبیرستان انجامید؛ ولی او از این مدرک هیچ‌گاه استفاده نکرد. او که دوستدار ادبیات بود ـ در حالی‌که هنوز شاگرد دورهٔ اول دبیرستان بود، اشعار هاینه را به زبان مجارستانی

برگرداند ـ او به فلسفه هم علاقه‌مند بود. یکی از استادان فلسفه او را متقاعد کرد که مطالعهٔ ریاضیات و فیزیک او را در درک مسائل فلسفی یاری می‌کند. لذا مطالعهٔ جدی ریاضیات را شروع کرد؛ موضوعی که او در سال‌های اول تحصیلش چندان علاقه‌ای به آن نشان نداده بود.»

دیگر مقاله‌های این شمارهٔ مجله عبارت‌اند از «*بررسی معادلات درجهٔ دوم دومجهولی با استفاده از ماتریس*» از **هاشم پروانهٔ مسیحا**، «*اهمیت زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه در نظریهٔ اعداد*» از دکتر **ارسلان شادمان**، و «معرفی نشریات بین‌المللی ریاضی از دکتر **محمدحسن بیژن‌زاده**. دکتر بیژن‌زاده می‌نویسد:

«مجلهٔ «ماه‌نامهٔ ریاضی» از انتشارات «انجمن ریاضی آمریکا»ست که تقریباً هر ماه منتشر می‌شود. این مجله که قدمتی به اندازهٔ تاریخ تأسیس انجمن ریاضی آمریکا (یکصد سال) دارد، از جمله کثیرالانتشارترین نشریات این انجمن به‌شمار می‌آید. ماه‌نامهٔ ریاضی می‌کوشد مشوقی برای بسط گسترش ریاضیات به‌ویژه ریاضیات در سطح کالج (دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی) باشد. نظر هیئت تحریریهٔ مجله مبین آن است که مقالاتی مورد پذیرش قرار می‌گیرند که جنبهٔ توصیفی داشته و کاربرد ریاضیات در زندگی واقعی را مورد توجه قرار دهند. به‌علاوه، محبوبیت گسترده‌ای بین خوانندگان داشته باشند. مقالات هر شماره تحت این عنوان‌های زیر دسته‌بندی می‌شوند: مقالات اصلی؛ یادداشت‌های کوتاه؛ آموزش ریاضیات؛ مسائل و حل آن‌ها؛ بررسی کتاب‌های جدید؛ بررسی تلگرافی؛ نامه‌هایی به سردبیر. *مجله با حل مسائل پنجمین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزان کشور و نامه‌ها* پایان می‌پذیرد.

شماره ۱۸

***

شمارهٔ هجدهم رشد آموزش ریاضی در تابستان ۱۳۶۷ انتشار یافته است. مجله با «*گزارش وضعیت آموزش ریاضی در آموزش‌وپرورش*» آغاز و با *پاسخ به نامه‌ها* پایان می‌پذیرد. یکی از مقاله‌های جالب این شماره، مقالهٔ عدد طلایی و نسبت زیبایی و *قاعدهٔ تعیین‌کنندهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد صحیح بر اعداد ۷، ۱۳، ۲۷ و ۳۷، و اعداد صحیح ردیف شده*، است که چنین آغاز می‌شود:

«ما از عدد صحیح ردیف شده برداشت خاصی داریم که بهتر است این اصطلاح را تعریف کنیم.

تعریف: عدد صحیح مثبت را ردیف شده می‌نامیم، در صورتی که ارقام آن، در نمایش اعشاری، از چپ به راست نانزولی باشد.»

عنوان مقالهٔ بعدی «*گزارش سفر هیئت اعزامی ایران برای شرکت در بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی*»است. در قسمتی از این مقاله چنین آمده است:

«هیئت اعزامی ایران برای شرکت در بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ساعت ۸:۱۵ بعدازظهر روز چهارشنبه، ۱۵ تیرماه ۱۳۶۷ با بدرقهٔ مسئولین محترم وزارت آموزش‌وپرورش، از طریق پکن و توکیو عازم استرالیا شد. سرپرستی این هیئت را آقای دکتر **محمدعلی نجفی**، عضو هیئت علمی «دانشگاه صنعتی شریف» و سرپرستی دوم را آقای دکتر **علیرضا مدقالچی**، عضو هیئت علمی «دانشگاه تربیت معلم» عهده‌دار بودند. آقای **توفیق حیدرزاده** نیز از مجلهٔ *دانشمند* در این سفر همراه هیئت بودند. دانش‌آموزان شرکت‌کننده عبارت بودند از:

۱. علیرضا بیگدلی، سال چهارم از قم
۲. آرش حسیبی، سال چهارم از تهران
۳. حسام حمیدی تهرانی، سال چهارم از تهران
۴. محمدعلی خجسته‌پور، سال سوم از شیراز
۵. امیراعلم غضنفریان، سال چهارم از زنجان
۶. بهزاد نظری، سال چهارم از اصفهان

یادآوری می‌شود که اعضای این تیم از طریق دو آزمون استانی و نهایی انتخاب شده، و در یک اردوی دوهفته‌ای در مجموعهٔ ورزشی انقلاب تهران شرکت کرده بودند. در این اردو مسائل مختلف ریاضی، از جمله مسائل المپیادهای گذشته توسط استادان دانشگاه و دبیران مجرب مورد بحث و بررسی قرار گرفت. همهٔ امور مربوط به برگزاری مسابقات داخلی و انجام سایر مراحل اعزام با همت و مساعدت «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» انجام گرفت و

کمیتهٔ ویژه‌ای با عنوان «کمیتهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور» عهده‌دار نظارت بر اجرای مسابقات داخلی بود.

هیئت اعزامی با بدرقه و دعای خیر ریاست محترم سازمان و عده‌ای از مسئولین سازمان با دلی سرشار از امید و آرزو از طریق پاویون دولتی به‌سوی توکیو پرواز کرد. هواپیما در ساعت ۳ صبح به وقت تهران (ساعت ۷:۳۰ به وقت پکن) در فرودگاه پکن به زمین نشست، در ساعت ۹ پکن را به قصد توکیو ترک کرد، و در ساعت ۲:۰۷ بعدازظهر به وقت توکیو در فرودگاه ناریتای توکیو به زمین نشست. بالاخره ساعت ۶:۰۸ بعدازظهر از توکیو پرواز و در ساعت ۵:۲۰ صبح به وقت ژاپن در فرودگاه بین‌المللی سیدنی به زمین نشست. اختلاف ساعت پکن و تهران چهار ساعت و نیم و توکیو و سیدنی یک ساعت است. چین و ژاپن اختلاف ساعت ندارند.

در فرودگاه سیدنی، آقای **پیتر اوهلارن** (رئیس کمیتهٔ اجرایی بیست و نهمین المپیاد) از هیئت‌ها استقبال می‌کرد و راهنمایی‌های لازم را ارائه می‌داد. به‌هر حال هیئت اعزامی بعد از مسافرتی طولانی به اولین مقصد المپیاد رسید و از فرودگاه توسط سرویس دانشگاه به دانشگاه نیوساوت ویلز هدایت شد.

هیئت ما از اولین هیئت‌هایی بود که به سیدنی رسیده بود. در این دانشگاه هیئت‌ها در خوابگاه‌ها اسکان می‌یافتند. سیدنی شهر بزرگ و تمیزی است و حدود سه و نیم میلیون نفر جمعیت دارد. یکی از بناهای بسیار باعظمت شهر سیدنی، برج این شهر است. برج سیدنی بر ساختمانی تجاری و ۱۰ طبقه قرار گرفته و ارتفاع آن در حدود ۳۰۰ متر است که حقیقتاً ثمره‌ای از دانش و فناوری قرن بیستم محسوب می‌شود. در اوج این برج، ساختمانی مدور در چهار طبقه ساخته‌اند که در آن فروشگاه، رستوران و ایوانی مدور قرار دارد که مشرف بر تمامی نقاط شهر ساحلی سیدنی است.

روز یکشنبه نوزدهم تیرماه متوجه شدیم که عده‌ای از مسلمانان علیه حملهٔ آمریکا به هواپیمای ایرباس ۶۶۵ تظاهرات و راه‌پیمایی کرده‌اند و مراتب نفرت و انزجار خود را ابراز می‌دارند. جالب بود که عده‌ای از غیرمسلمانان نیز در این تظاهرات شرکت داشتند. خبر این تظاهرات به‌طور وسیع در رسانه‌های گروهی پخش شد. اعضای تیم ایران نیز در بخشی از این تظاهرات شرکت کردند.

روز دوشنبه بیستم تیرماه مراحل برگزاری المپیاد به‌طور رسمی شروع شد. در این روز سرپرستان اول هیئت‌ها برای شرکت در جلسات هیئت ژوری و طرح و انتخاب سؤال و سایر مراحل امتحان به شهر «کنبرا» اعزام شدند. اعضای هیئت‌ها همراه با سرپرست دوم در سیدنی ماندند. در این مدت، فرصت مناسبی پیش آمد تا با سرپرستان هیئت‌ها دربارهٔ موضوعات آموزش ریاضی، نحوهٔ انتخاب اعضای تیم‌هایشان و سایر مسائل علمی و آموزشی مذاکره کنیم.

آزمون مقدماتی در کشورهای مختلف حداقل در دو مرحله انجام می‌گیرد. مثلاً سرپرست دوم یوگسلاوی می‌گفت که یک آزمون بین ایالات مختلف و یک آزمون نهایی به‌عمل می‌آید و بعد از طی اردویی دوهفته‌ای، انتخاب نهایی انجام می‌گیرد. در کشورهای بلوک شرق، مدارس ویژه‌ای برای تأمین کادر فنی و علمی کشور وجود دارد که اعضای تیم‌های شرکت کننده در المپیادها نیز از این مدارس انتخاب می‌شوند. آزمون‌های مقدماتی بین همهٔ دانش‌آموزان به‌عمل می‌آید و لذا هر دانش‌آموز می‌تواند حتی سه یا چهار بار هم در المپیاد شرکت کند. در فرانسه و آلمان غربی هم المپیاد داخلی برگزار می‌شود که دومرحله‌ای است. سیستم انتخاب در آمریکا و انگلستان چندمرحله‌ای است. یعنی دانش‌آموزان طی چند مرحله آزمون تستی و تشریحی و گذراندن اردوهای مختلف انتخاب می‌شوند. آزمون اولیه در این دو کشور تستی است و بین تمام دانش‌آموزان انجام می‌گیرد.

در مجموع از نحوهٔ انتخاب اعضای تیم چنین برمی‌آید که در هریک از کشورهای شرکت‌کننده، کمیتهٔ ویژه‌ای مسئول برگزاری المپیادهای داخلی است. این کمیته‌ها برای تشویق و ترغیب جوانان به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی فعالیت می‌کنند و هر ساله جزواتی از مسائل گوناگون ابتکاری تهیه می‌کنند و در اختیار دانش‌آموزان می‌گذارند. برای انتخاب اعضای تیم چند مرحله گزینش انجام می‌گیرد و مراحل آماده‌سازی در اردوهای گوناگون به‌عمل می‌آید. در این اردوها، نه‌تنها مسائل ریاضی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند، بلکه مباحث درسی هم تدریس می‌شوند. مثلاً دانش‌آموزان رومانی اظهار می‌کردند که طی اردو، مسائل زیادی از مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی را حل کرده‌اند. رومانی جزو کشورهایی است که همواره در ردیف‌های بالا قرار دارد.»

بقیهٔ مقالات این شماره مانند شماره‌های قبل و ادامهٔ مقاله‌های پیشین هستند

شماره‌های ۱۹ و ۲۰

شماره‌های نوزده و بیست مجله که مربوط به سال پنجم انتشار آن است در سال ۱۳۶۷ به بهای ۲۰۰ ریال منتشر شد. مجله پس از مقاله‌های «*رشد آموزش ریاضی*» و «*ریاضیات دورهٔ اسلامی*»، به مقالهٔ «*معماهای ابوالهول*»، به ترجمهٔ **حسن نصیرنیا** می‌رسد. در این مقاله آمده

است: «دکتر **میتسو ماتسو**، مهندس پرآوازهٔ ژنتیک در جهان، توانسته است برای نخستین‌بار موجودات زندهٔ دوبعدی تولید کند. البته موجوداتی نه کاملاً بلکه تقریباً دوبعدی. مخلوق‌های او جان‌داران ذره‌بینی بلورمانندی هستند که در محیط‌های کشتِ شبیه به ورقه‌های بسیار بسیار نازک ـ به نازکی یک لایهٔ مولکول ـ پرورش می‌یابند.»

دکتر ماتسو، نام «rep-tile» (رپتایل) مرکب از دو واژهٔ «rep» و «tile» مخفف «replicate» به معنی تولیدمثل و تکثیر کردن و واژهٔ tile به مفهوم «آجر کاشی» (از این پس هر کجا نام رپتایل بیاید، به‌جای آن عبارت «موجود ذره‌بینی» را ذکر خواهیم کرد. م.) را بر این جانداران خود نهاده و دو دلیل هم آورده است: یکی اینکه آن‌ها بر اثر تولیدمثل تکثیر می‌شوند و دیگر اینکه شکل آن‌ها مانند آجرهای کاشی چندوجهی است. این جانوران آن‌قدر کوچک‌اند که جز با میکروسکوپ‌های الکترونی قوی دیده نمی‌شوند. آن‌ها به کمک مُژک‌های کناره‌های بدن خود در محیط کشت مایع ساخته می‌شوند، شنا می‌کنند و غذا را از راه «پوست» جذب می‌نمایند. شکل موجود ذره‌بینی ماتسو، هم‌گام با رشد و نمو بدن آن تغییر نمی‌کند، بلکه به همان صورت چندوجهی باقی می‌ماند. زمانی که حجم بدن موجود ذره‌بینی به مرحلهٔ حساس تکثیر رسید، برخلاف یک آمیب، به دو نیم نمی‌شود، بلکه به چهار قسمت هم‌ارز (چهار موجود ذره‌بینی کوچک مساوی که قابل انطباق بر یکدیگر باشند) تقسیم می‌شود که هر یک از نظر شکل و قیافه شبیه موجود ذره‌بینی مادر است.)

مقالهٔ دیگر در مورد «عاد کردن» و مطلب بعدی «*کاربرد نامساوی‌ها در تعیین ماکسیمم و مینیمم توابع چندمتغیره*» است. در مقالهٔ «*قواعدی ساده دربارهٔ قابلیت تقسیم بر اعداد اول*» چنین آمده است:

«در این مقاله برای تشخیص قابلیت تقسیم بر اعداد اول قواعدی ساده بیان شده است. در آغاز چند نمونه را با ذکر مثال ارائه می‌دهیم و سپس یک قضیهٔ کلی و سرانجام یک نمونه را به‌صورت تفکیکی ثابت می‌کنیم.

قاعدهٔ ۱. عددی بر هفت قابل قسمت است که اگر دو برابر رقم یکان آن را از بقیهٔ عدد (عدد بدون رقم یکان) کم کنیم، باقی‌مانده مضرب هفت باشد. چنانچه در این مرحله مضرب هفت بودن مشخص نباشد، عمل را در مورد عدد حاصل تکرار می‌کنیم.

مثلاً عدد ۱۲۱۱ بر هفت قابل قسمت است، زیرا:

۱۲۱-(۲×۱) =۱۱۹

۱۱-(۲×۹) =-۷=(-۱) ×۷

(توضیح: به‌جای کم کردن دو برابر رقم یکان از بقیهٔ عدد، می‌توان ۵ برابر رقم یکان را به بقیه افزود و عمل را ادامه داد.)

قاعدهٔ ۲. عددی بر ۱۳ قابل قسمت است که اگر ۴ برابر رقم یکان آن را با بقیهٔ عدد جمع کنیم حاصل، مضرب ۱۳ باشد و در صورت مشخص نبودن مضرب ۱۳، عمل را ادامه می‌دهیم.

مثلاً عدد ۶۳۷ مضرب ۱۳ است، زیرا:

۶۳+(۴×۷) =۹۱

۹+(۴×۱) =۱۳

توضیح: به‌جای افزودن ۴ برابر رقم یکان می‌توان ۹ برابر رقم یکان را از بقیه کم کرد.»

بقیهٔ مقاله را در همین شماره‌ها می‌توان خواند. عنوان مطلب بعدی «*یک مسئله از جبر خطی*» و مقالهٔ بعد «*محاسبهٔ یک حد و کاربرد آن*» است. «*پاسخ ششمین مرحلهٔ مسابقات دانش‌آموزی کشور*» عنوان یکی دیگر از مقالات است. در مقالهٔ «*اخبار ریاضی*» نیز با موارد زیر آشنا می‌شویم:

«شورای برنامه‌ریزی دورهٔ متوسطه: به منظور تدوین اهداف، برنامه‌ها و تألیف کتب ریاضی دورهٔ متوسطه با حضور استادان برجستهٔ ریاضی، دبیران باتجربهٔ ریاضی و کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات اولین جلسه خود را در دفتر وزیر محترم آموزش‌وپرورش با شرکت ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و مدیرکل محترم دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی و تألیف تشکیل داد. این جلسات به‌طور مستمر دو هفته یک‌بار در دفتر ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی با حضور اعضای شورا تشکیل می‌شود.»

چهارمین شمارهٔ «پیک ریاضی»، نشریه دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان، دومین شمارهٔ «جنگ ریاضی»، نشریهٔ جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، و سومین شمارهٔ «نشر ریاضی»، نشریهٔ مرکز نشر دانشگاهی منتشر شد.

به این ترتیب به پایان شمارهٔ بیستم مجله می‌رسیم و مطالعهٔ بیشتر آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

* aban_mehr@yahoo.com

پای تخته

آموزشی

محرم نژاد ایردموسی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «فصل‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، ۲۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در فصل‌نامه، برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

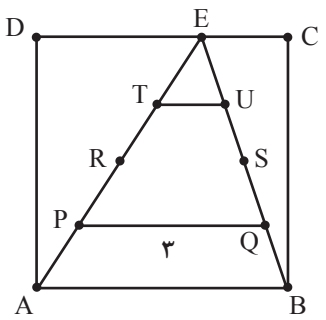
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۸۱. در یک نه‌ضلعی منتظم، همهٔ قطرها را رسم کرده‌ایم. چند مثلث متساوی‌الساقین در شکل حاصل وجود دارد که سه رأس هر یک، سه رأس از نه‌ضلعی مذکور است.

۸۲. اشکان در کشوی کمد خود ۱۰ لنگه جوراب آبی و تعدادی لنگه جوراب سفید دارد. اگر او بدون نگاه کردن به جوراب‌ها بخواهد تعدادی لنگه جوراب از کشو خارج کند، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب آبی در میان آن‌ها باشد، باید حداقل m لنگه جوراب از کشو خارج کند و در صورتی که بخواهد بدون نگاه کردن تعدادی لنگه جوراب بردارد، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب سفید در میان آن‌ها باشد، باید حداقل n لنگه جوراب از کشو خارج کند. می‌دانیم $m=2n$. چند لنگه جوراب سفید در کشو وجود دارد؟

۸۳. نقطهٔ E روی ضلع CD از مربع ABCD واقع است. پاره‌خط AE توسط نقاط P، R و T به چهار قسمت مساوی و پاره‌خط EB نیز توسط نقاط Q، S و U به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر طول پاره‌خط PQ برابر ۳ باشد، مساحت چهارضلعی PQUT را به‌دست آورید.



شکل ۱

۸۴. افسانه ۶ کارت دارد که روی هر کدام از آن‌ها یک عدد طبیعی نوشته شده است. او هربار سه کارت را انتخاب می‌کند و سه عدد روی آن سه کارت را با هم جمع می‌کند. بیست عدد حاصل می‌شود که ده‌تای آن‌ها برابر ۱۶ و ده‌تای دیگر برابر ۱۸ هستند. کوچک‌ترین عددی که روی کارت‌ها نوشته شده است چه عددی است؟

۸۵. اگر تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل‌ضرب رقم‌های هر یک برابر ۲۵ است، برابر a و تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل‌ضرب رقم‌های هر یک برابر ۱۵ است، برابر b باشد، $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۸۶. نیم دایره‌ای به قطر AB رسم کنید. همچنین، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری رسم کنید که نیم‌دایره را در دو نقطهٔ دیگر به‌جز A و B قطع کند. یک ناحیهٔ مشترک و سه ناحیهٔ غیرمشترک ایجاد می‌شوند. مجموع مساحت‌های سه ناحیهٔ غیرمشترک را بیابید، اگر بدانیم: AB=۱۲.

۸۷. مستطیلی با ابعاد صحیح به مربعات واحد افراز شده است. می‌دانیم تعداد مربعات واحدی که مجاور با ضلع‌های مستطیل هستند، با تعداد بقیهٔ مربعات برابر است. این مستطیل چند در چند است؟

۸۸. عمل ⊙ روی اعداد مثبت طوری تعریف شده است که داشته باشیم:

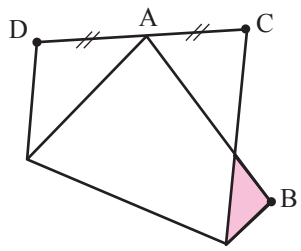
$$(۱)\ (۲x)\odot y=\frac{۱}{۲}+(x\odot y)$$

$$(۲)\ y^{۲}\odot x=x^{۲}\odot y$$

$$(۳)\ ۲\odot ۲=\frac{۳}{۲}$$

مقدار ۳۲⊙۸ را بیابید.

۸۹. کاغذی مربع شکل به ضلع ۸ سانتی‌متر داریم. اگر کاغذ را تا کنیم و رأس A را روی نقطهٔ وسط پاره‌خط DC قرار دهیم، مثلث کوچکی در رأس B ایجاد می‌شود (شکل ۲). مساحت این مثلث را بیابید.



شکل ۲

۹۰. کارتی با شمارهٔ ۱۲ به تو می‌دهم. با رعایت ۲ قاعدهٔ زیر می‌توانی کارت‌های دیگری نیز داشته باشی:

۱. اگر کارتی با شمارهٔ a داشتی، می‌توانی کارتی با شمارهٔ ۲a+۱ نیز داشته باشی.

۲. اگر کارتی با شمارهٔ b داشته باشی که b مضرب ۳ باشد، آن‌گاه مجاز هستی کارتی با شمارهٔ $\frac{b}{۳}$ هم داشته باشی.

الف. ثابت کن می‌توانی کارتی با شمارهٔ ۲۹ داشته باشی.

ب. ثابت کن می‌توانی کارتی با شمارهٔ $۲^{۲۰۱۲}-۱$ داشته باشی.

ج. ثابت کن نمی‌توانی کارتی با شمارهٔ ۱۰۰ داشته باشی.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۲۱. n عددی طبیعی است. ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی مانند a و b وجود ندارند، به‌طوری که $\frac{[a,b]}{a+b}=n$ ([a,b] همان کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b است).

حل: با فرض (a,b)=d، a=a´d و b=b´d، نتیجه می‌شود: (a´,b´)=۱. پس:

$$\frac{[a,b]}{a+b}=n \Leftrightarrow \frac{a'b'd}{(a'+b')d}=n \Leftrightarrow a'b'=n(a'+b')$$

از طرف دیگر، چون a' و b' نسبت به هم اول هستند، داریم: $(a',a'+b')=(b',a'+b')=1$ که نتیجه می‌دهد: $(a'b',a'+b')=1$. علاوه بر این داریم:

$$(a'b',a'+b')=(n(a'+b'),a'+b')=a'+b'$$

در نتیجه $a'+b'=1$ که با طبیعی بودن a' و b' تناقض دارد.

۲۲. ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{2009}(k+1)!(6^k(6k+11)-k-1)=2011!(6^{2010}-1)$$

حل: با فرض $a^n=(n+1)!(6^n-1)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{2009}(k+1)!(6^k(6k+11)-k-1)$$

$$=\sum_{k=0}^{2009}(a_{k+1}-a_k)=a_{2010}-a_0$$

$$=(2011)!(6^{2010}-1)-1!(6^0-1)=2011!(6^{2010}-1)$$

۲۳. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}}}{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}}-\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}}$$

حل: فرض کنید: $A=\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{\dots}}}$. در نتیجه: $A^2=30+A$. از حل این معادله به دو جواب $A=6$ و $A=-5$ می‌رسیم که با توجه به علامت A، ۵- غیرقابل قبول است. به‌همین طریق می‌توان ثابت کرد: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}=3$ و $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{\dots}}}=7$. در نتیجه مقدار خواسته شده برابر $\frac{6}{3}-7=-5$ خواهد بود.

۲۴. همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $16^x+1=2^x+8^x$ را بیابید.

حل: با تغییر معادله به‌صورت $(2^x-1)(8^x-1)=0$، خواهیم داشت: $2^x-1=0$ یا $8^x-1=0$ و تنها جواب معادله $x=0$ خواهد بود.

۲۵. f و g دو تابع حقیقی هستند، g تابعی فرد است، به ازای هر عدد حقیقی x داریم: $f(x)\le g(x)$ و به ازای هر دو عدد حقیقی x و y می‌دانیم: $f(x+y)\le f(x)+f(y)$. ثابت کنید f نیز تابعی فرد است.

حل: چون g فرد است، داریم: $g(-0)=-g(0)$ که نتیجه می‌دهد: $g(0)=0$. بنابراین: $f(0)\le 0$. از طرفی با فرض $x=y=0$، داریم: $f(0)\le 2f(0)$ که نتیجه می‌دهد: $f(0)\ge 0$. پس: $f(0)=0$. اکنون با فرض $y=-x$ در فرض داریم: $0=f(x-x)\le f(x)+f(-x)$ از طرف دیگر:

$$f(x)+f(-x)\le g(x)+g(-x)=g(x)-g(x)=0$$

در نتیجه: $f(x)+f(-x)=0$ که نشان می‌دهد $f(-x)=-f(x)$ و f فرد است.

۲۶. یک چندوجهی m+n وجه دارد که m تای آن‌ها به شکل چهارضلعی و n تای دیگر به شکل مثلث هستند. همچنین در هر رأس چندوجهی چهار وجه مشترک هستند. ثابت کنید: n=8.

حل: در هر چندوجهی داریم: $v+f-e=2$ که در آن v تعداد رئوس، f تعداد وجوه و e تعداد یال‌هاست. در نتیجه: $v+(m+n)-\frac{4m+3n}{2}=2$. از طرف دیگر داریم: $4v=2e$. در نتیجه: $v=m+\frac{3}{4}n$. با جای‌گذاری v در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$m+\frac{3}{4}n+m+n-2m-\frac{3}{2}n=2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4}=2 \Rightarrow n=8$$

۲۷. با فرض $E(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ مطلوب است حاصل $E(\frac{1}{1392})+E(\frac{2}{1392})+\dots+E(\frac{1391}{1392})$.

حل: فرض کنید $0\le x\le 1$، در نتیجه:

$$E(x)+E(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$$

$$=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\times 4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1$$

بنابراین:

$$E(\frac{1}{1392})+E(\frac{2}{1392})+\dots+E(\frac{1391}{1392})=\frac{1392}{2}\times 1=696$$

۲۸. a و b دو عدد حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2+b^2+6a-2b+10}+\sqrt{a^2+b^2-6a+2b+10}\ge 2\sqrt{10}$$

حل: می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطهٔ (a,b) و (m,n) برابر است با: $\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2}$.

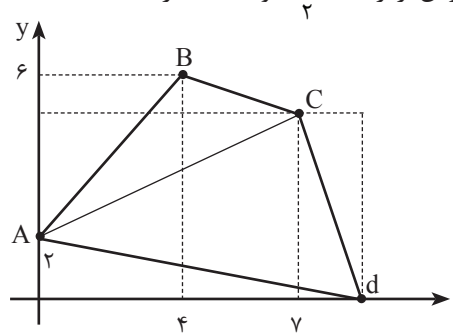
عبارت سمت چپ را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(a+3)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+1)^2}$ نوشت که بیان‌کنندهٔ مجموع فاصلهٔ نقطهٔ (a,b) از دو نقطهٔ (۳,-۱) و (-۳,۱) است. در نتیجه طبق نامساوی مثلثی، این مجموع از فاصلهٔ دو نقطهٔ (۳,-۱) و (-۳,۱) که همان $2\sqrt{10}$ است، بزرگ‌تر یا با آن مساوی خواهد بود.

۲۹. حداکثر چند مهرهٔ شاه را می‌توان در صفحهٔ شطرنج n×n قرار داد، به‌طوری که هیچ دوتایی همدیگر را تهدید نکنند؟

حل: اگر صفحهٔ شطرنج را به ۱۶ مربع دو در دو افراز کنیم، با توجه به اینکه در هر مربع حداکثر یک مهرهٔ شاه را می‌توان قرار داد، نتیجه می‌شود حداکثر تعداد مهره‌های شاه برابر است با ۱۶. با انتخاب خانهٔ گوشهٔ بالایی و سمت چپی از هر مربع ۲×۲، یک جواب خاص برای ۱۶ مهرهٔ شاه نیز مشخص می‌شود.

۳۰. مساحت چهارضلعی ABCD با رئوس A(۰,۲)، B(۴,۶)، C(۷,۵) و D(d,۰) برابر است با ۲۴. مقدار d را که عددی مثبت است بیابید.

حل: با مشخص کردن نقاط A، B، C و D در صفحهٔ مختصات (شکل ۳) می‌توان ابتدا مساحت مثلث ABC را یافت که برابر ۸ خواهد شد. در نتیجه، مساحت مثلث ACD برابر با ۱۶ باید باشد. اگر مساحت مثلث ACD را برحسب d بیابیم، مقدار آن برابر $\frac{3}{2}d+7$ خواهد شد. در نتیجه: d=۶.



شکل ۳

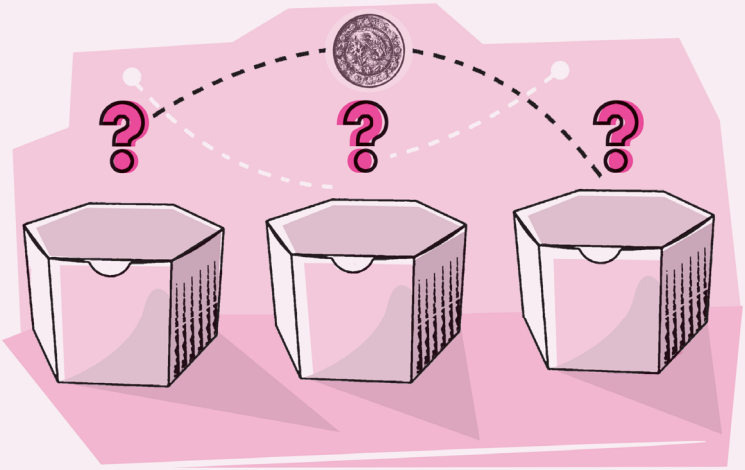
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم:

سرگرمی علمی

پارادوکس یا سفسطه؟!

حالا در این ایستگاه می‌خواهیم کمی بیشتر شما را به فکر فرو ببریم! یک پارادوکس زیبا از احتمال داریم. فرض کنید سه جعبهٔ A، B و C داریم که در یکی از آن‌ها یک سکه وجود دارد. اگر یکی از سه جعبه را به تصادف انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که سکه در آن جعبه باشد؟ حتماً می‌گویید $\frac{1}{3}$. اما این‌طور نیست! احتمال آن $\frac{1}{2}$ است! چرا؟



فرض کنید که شما جعبهٔ A را انتخاب می‌کنید. حالا سکه با احتمال برابر در یکی از سه جعبه است. پس اگر جعبهٔ B خالی باشد، شانس بودن سکه در جعبهٔ A، $\frac{1}{2}$ است. این‌طور نیست؟ همچنین، اگر جعبهٔ C خالی باشد، باز هم شانس بودن سکه در جعبهٔ A، $\frac{1}{2}$ است؛ درست است؟

ولی روشن است که لااقل یکی از دو جعبهٔ B یا C خالی هستند و دیدیم که هر کدام که خالی باشند، احتمال بودن سکه در جعبهٔ A، $\frac{1}{2}$ است. پس در هر حال احتمال بودن سکه در جعبهٔ A، $\frac{1}{2}$ است!

حالا این استنتاج درست است و ما گرفتار یک پارادوکس زیربنایی شده‌ایم، یا اینکه سفسطه است؟

استدلال‌های اشتباه‌آمیز در تعیین دامنهٔ توابع

احسان یارمحمدی

$D_f = ?!$

کلیدواژه: دامنهٔ توابع، توابع رادیکالی

ریاضی‌آموزان سال دوم دورهٔ دوم متوسطه با مفهوم «**دامنهٔ تابع**»[1] و تعیین دامنهٔ توابع در کتاب ریاضی ۲ آشنا می‌شوند و در سال‌های سوم و چهارم، بنابر رشتهٔ تحصیلی که در آن ادامهٔ تحصیل می‌دهند، با این مفهوم و موضوع‌های مرتبط با آن آشنایی‌های لازم و کافی را به‌دست می‌آورند. اما ملاحظه می‌شود که درک نادرست و نامناسب از این مفهوم در کتاب‌های ریاضی ۲ و حسابان، باعث ایجاد اختلال در یادگیری آن و موضوع‌های مرتبط با آن در سال‌های آتی تحصیلی برای ریاضی‌آموزان می‌شود. بنابراین آنچه که در این مقاله مورد بحث و کنکاش قرار خواهد گرفت، بررسی دامنهٔ چند نوع از «**توابع رادیکالی**»[2] است که در پاره‌ای از موارد، ریاضی‌آموزان و به‌ویژه ریاضی‌آموزان سال‌های دوم و سوم دبیرستان را دچار چالش و مشکل در تعیین دامنه آن‌ها می‌کند.

ابتدا به ارائهٔ مسئله‌ای متناظر با این‌گونه توابع، که در کتاب درسی ریاضی ۲ دورهٔ دوم آموزش متوسطه گنجانده شده است، می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم که با ارائهٔ مثال‌هایی مشابه آن‌ها، به تفصیل دربارهٔ آن‌ها به استدلال بپردازیم تا به این واسطه ریاضی‌آموزان در آینده در پاسخ‌گویی به این‌گونه پرسش‌ها از توانایی‌های جامع و مانع برخوردار باشند. البته در ارائهٔ مطالب در مقالهٔ حاضر سعی شده است مسائلی ملاک عمل قرار گیرند که ریاضی‌آموزان در برخورد با آن‌ها و در ارائهٔ پاسخ درست و درک چرایی و چگونگی راه‌حل انتخاب شده برای نیل به مقصود دچار چالش بیشتری می‌شوند.

در مسئلهٔ ۴ صفحهٔ ۸۴ کتاب ریاضی ۲ داریم: دامنهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید:

$$h(x)=\sqrt{x(x-3)^2} \quad \text{و} \quad i(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

با توجه به این مسئله اکنون در مورد تعیین دامنهٔ توابعی با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{a(x)b(x)}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{a(x)}{b(x)}}, b(x)\neq 0$ به بحث و بررسی می‌پردازیم (البته در هریک از منابع مقالهٔ حاضر که فهرستشان در پایان مقاله آمده است، برای هر یک از توابع $a(x)$ و $b(x)$، چندجمله‌ای‌هایی از درجه‌های اول و دوم در نظر گرفته شده‌اند. اما می‌توان این توابع را به‌صورتی مدنظر قرار داد که تنها به توابعی از درجه‌های اول و دوم برای متناظر کردن با توابع $a(x)$ و $b(x)$ اکتفا نکرد و برای درک بهتر ریاضی‌آموزان با این مقوله، از موارد متنوع‌تر و کاراتر نیز استفاده کرد.)

در ضمن با دقت در هر یک از موارد مسئله‌ای که در بالا بیان شده است، درمی‌یابیم قاعدهٔ کلی که برای دستیابی

به پاسخ درست در منابع مفروض استفاده و توصیه شده، بهره‌برداری از روش تعیین علامت است. اما حالا ببینیم، اگر ریاضی‌آموزی پرسشی را در قالب راه‌حل به ظاهر درست دیگری برای رسیدن به جواب به‌دست آمده مطابق با پاسخی که به روش تعیین علامت حاصل می‌شود، مطرح کند[۳]، و یا اگر در مورد این موضوع از ما سؤال کرد که چرا تنها می‌باید از روش تعیین علامت برای تعیین دامنهٔ این‌گونه از توابع استفاده کرد، آیا می‌توانیم با اتکا به آنچه که به‌عنوان استفاده از روش تعیین علامت از آن یاد شده است، پاسخی درست و درخور ملاحظه به وی بدهیم یا خیر. برای ارائهٔ راهکار دقیق و کارا فرض می‌کنیم که تمرین زیر به‌عنوان فعالیت برای ریاضی‌آموزان مطرح شده و از این ایشان خواسته شده است که راه‌حل یا راه‌حل‌های خود را در مورد آن ارائه کنند.

● **فعالیت ۱.** دامنهٔ هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.[۴]

۱. $a(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+6x+5}}$

۲. $b(x)=\sqrt{(16-x^2)(x^2-1)}$

۳. $c(x)=\sqrt{(x^2+x+1)(-x^2+3x-5)}$

۴. $d(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+2x-4}{-4x^2+5x-3}}$

۵. $e(x)=\sqrt{\dfrac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6}}$

۶. $f(x)=\sqrt{(x-4-x^2)(7x-6x^2-3)}$

راه‌حل‌هایی که از جانب ریاضی‌آموزان بیان شده‌اند، به‌صورت کلی در چارچوب استفاده از دو روش زیر قرار می‌گیرند:

● **روش اول:** تعدادی از آن‌ها، با استفاده از روابط $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ و $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, B\neq 0$، ضابطه‌های توابع مفروض را ساده کرده‌اند و سپس با تعیین مقادیر درست و مناسب برای x در هر یک از عبارات ساده شده در نهایت با تعیین مقدار x مشترک بین مقادیر موجود برای x، مقادیر مناسب را برای ضابطه‌های توابع مزبور به‌دست آورده‌اند.

● **روش دوم:** تعدادی دیگر از آن‌ها عبارت زیر رادیکال در هر دو تابع مفروض را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار داده‌اند و سپس با استفاده از تعیین علامت، مقادیر مناسب را برای x متناظر با ضابطهٔ هر تابع به‌دست آورده‌اند.

در ادامه به ارائهٔ راه‌حل‌های ریاضی‌آموزان کلاس درس مبتنی بر هر دو روش اول و دوم می‌پردازیم. (البته در هر دو روش سعی شده است، آنچه که از جانب ایشان به‌عنوان راه‌حل برای هر دو روش مطرح شده است، دارای تلخیص مناسب باشد تا آنچه را که نگارندهٔ مقاله به واسطهٔ این تلخیص بیان نکرده است، ریاضی‌آموزان مخاطب مقاله، خود مورد بررسی و تحلیل قرار دهند). پس:

■ پاسخ ریاضی‌آموزان به روش اول

۱.

$$a(x)=\sqrt{\frac{x^2+2x-8}{x^2+6x+5}}$$

$$\Rightarrow a(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{a_1}=[-4,2] \\ D_{a_2}=(-5,-1) \end{cases} \Rightarrow D_a=[-4,-1)$$

۲.

$$b(x)=\sqrt{(16-x^2)(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow b(x)=\sqrt{16-x^2}\times\sqrt{x^2-1}$$

$$=b_1(x)b_2(x)\Rightarrow \begin{cases} D_{b_1}=[-4,4] \\ D_{b_2}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_b=[-4,-1]\cup[1,4]$$

۳.

$$c(x)=\sqrt{(x^2+x+1)(-x^2+3x-5)}$$

$$\Rightarrow c(x)=\sqrt{x^2+x+1}\times\sqrt{-x^2+3x-5}$$

$$=c_1(x)c_2(x)\Rightarrow \begin{cases} D_{c_1}=R \\ D_{c_2}=\{\} \end{cases} \Rightarrow D_c=\{\}$$

۴.

$$d(x)=\sqrt{\frac{-3x^2+2x-4}{-4x^2+5x-3}}$$

$$\Rightarrow d(x)=\frac{\sqrt{-3x^2+2x-4}}{\sqrt{-4x^2+5x-3}}=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{d_1}=\{\} \\ D_{d_2}=\{\} \end{cases} \Rightarrow D_d=\{\}$$

۵.

$$e(x)=\sqrt{\frac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6}}$$

$$\Rightarrow e(x)=\frac{\sqrt{8x^2-x+5}}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\frac{e_1(x)}{e_2(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{e_1}=R \\ D_{e_2}=R \end{cases} \Rightarrow D_e=R$$

۶.

$$f(x)=\sqrt{(x-۴-x^۲)(۷x-۶x^۲-۳)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۴-x^۲}\times\sqrt{۷x-۶x^۲-۳}$$

$$=f_۱(x)f_۲(x)\Rightarrow\begin{cases}D_{f_۱}=\{\}\\D_{f_۲}=\{\}\end{cases}\Rightarrow D_f=\{\}$$

■ پاسخ ریاضی‌آموزان به روش دوم

۱. در تابع $a(x)=\sqrt{\frac{x^۲+۲x-۸}{x^۲+۶x+۵}}$ داریم:

$$\frac{x^۲+۲x-۸}{x^۲+۶x+۵}\geq ۰\Rightarrow D_a=(-\infty,-۵)\cup[-۴,-۱)\cup[۲,+\infty)$$

۲. در تابع $b(x)=\sqrt{(۱۶-x^۲)(x^۲-۱)}$ داریم:

$$(۱۶-x^۲)(x^۲-۱)\geq ۰\Rightarrow D_b=[-۴,-۱]\cup[۱,۴]$$

۳. در تابع $c(x)=\sqrt{(x^۲+x+۱)(-x^۲+۳x-۵)}$ داریم:

$$(x^۲+x+۱)(-x^۲+۳x-۵)\geq ۰\Rightarrow D_c=\{\}$$

۴. در تابع $d(x)=\sqrt{\frac{-۳x^۲+۲x-۴}{-۴x^۲+۵x-۳}}$ داریم:

$$\frac{-۳x^۲+۲x-۴}{-۴x^۲+۵x-۳}\geq ۰\Rightarrow D_d=R$$

۵. در تابع $e(x)=\sqrt{\frac{۸x^۲-x+۵}{x^۲+۴x+۶}}$ داریم:

$$\frac{۸x^۲-x+۵}{x^۲+۴x+۶}\geq ۰\Rightarrow D_e=R$$

۶. در تابع $f(x)=\sqrt{(x-۴-x^۲)(۷x-۶x^۲-۳)}$ داریم:

$$(x-۴-x^۲)(۷x-۶x^۲-۳)\geq ۰\Rightarrow D_f=R$$

اکنون اگر به پاسخ‌های ریاضی‌آموزان، با استفاده از هر دو روش و نتیجه‌ای که ایشان در پایان هر مورد از تمرین مفروض گرفته‌اند، بنگریم، ملاحظه می‌کنیم که در تعدادی از آن‌ها هر دو پاسخ یکسان است ولی در تعدادی دیگر، جواب‌ها با یکدیگر هماهنگی ندارند. معمولاً ریاضی‌آموزان در مواردی که دو پاسخ با یکدیگر برابر نباشند، متوجه این موضوع می‌شوند که در یکی از راه‌حل‌ها ایرادی نهفته است. بنابراین سعی می‌کنند که با تمسک به استدلال‌های درست و مناسب این مشکل را برطرف سازند. اما ایشان غالباً نسبت به تمرین‌هایی که هر دو روش حل باعث تولید جواب یکسان شده است، عکس‌العمل ویژه‌ای نشان نمی‌دهند و در نهایت برای ارائه راه‌حل مناسب و صحیح هر دو روش را می‌پذیرند.

اما اشتباه اساسی که ایشان ممکن است در کاربرد روش اول داشته باشند، استفاده از استدلال‌های ناقص و یا نیمه‌کاملی است که آن‌ها در حین انجام اعمال محاسباتی خود برای ارائهٔ راه‌حل از آن‌ها بهره می‌برند. در ضمن ممکن است که مدرسان در کلاس درس ریاضی به کاربران بدون ارائهٔ هیچ‌گونه دلیلی پیشنهاد کنند، هر زمان به چنین مسائلی برخوردند، تنها از روش دوم (روش تعیین علامت) استفاده کنند و در واقع نتوانند ریاضی‌آموزان را برای پذیرش روش تعیین علامت و یا روش دیگری برای حل این دسته از مسائل در حالت کلی متقاعد سازند. اما این موضوع سبب استفادهٔ ریاضی‌آموزان از استدلال‌های اشتباه‌آمیز می‌شود که حتی ممکن است ریاضی‌آموزان با آن‌ها به جواب‌های به ظاهر صحیح برسند. بنابراین اشاره به کاربرد مناسب و درست این روش‌ها ضرورت دارد. اکنون به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

۱. $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ و $A\geq ۰, B\geq ۰$

۲. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ و $A\geq ۰, B>۰$

درستی دو رابطهٔ بالا، هنگامی که A و B مقادیر حقیقی مناسبی را بنابر آنچه که به‌عنوان شرط برای مقادیر A و B در نظر گرفته شده است، اختیار می‌کنند، با استفاده از درک شهودی به سهولت قابل درک است. (هر چند که تعدادی از ریاضی‌آموزان در این زمینه از دقت و توجه کافی استفاده نمی‌کنند.) اما هنگامی که هریک از عبارت‌های A و B دربرگیرندهٔ عبارت‌های «**جبری**»[۵] و یا «**متعالی**»[۶] باشند، بهره‌گیری از روابط مزبور برای کاربران ریاضی موضوعی حداقل آسان نیست. بنابراین ممکن است که ریاضی‌آموزان بدون هیچ‌گونه توجه به شرایط گنجانده شده در روابط بالا برای مقادیر A و B، دست به استفاده از این روابط بزنند و در نتیجه به پاسخ‌های غلط برسند.

اکنون با آگاهی از این مطالب پاسخ‌هایی را که ریاضی‌آموزان با استفاده از روش اول یافته‌اند، بنابر آنچه که به‌عنوان استدلال اشتباه‌آمیز ملاک این مقاله است، مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم.

■ استدلال‌های اشتباه‌آمیز در روش اول

۱. در تابع $a(x)=\sqrt{\frac{x^۲+۲x-۸}{x^۲+۶x+۵}}$ داریم:

$$\begin{cases} x^2+2x-8\ge 0 \\ x^2+2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-4]\cup[2,+\infty) \\ x\in(-4,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+6x+5\ge 0 \\ x^2+6x+5<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty) \\ x\in(-5,-1) \end{cases}$$

این یعنی هر یک از عبارت‌های x^2+2x-8 و x^2+6x+5، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B>0$ و $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست نیست.

۲. در تابع $b(x)=\sqrt{(16-x^2)(x^2-1)}$ داریم:

$$\begin{cases} 16-x^2\ge 0 \\ 16-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[-4,4] \\ x\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x^2-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ x\in(-1,1) \end{cases}$$

این یعنی هر یک از عبارت‌های $16-x^2$ و x^2-1، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B\ge 0$ و $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست نیست.

۳. در تابع $c(x)=\sqrt{(x^2+x+1)(-x^2+3x-5)}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x\in R: x^2+x+1>0 \\ \forall x\in R: -x^2+3x-5<0 \end{cases}$$

این یعنی عبارت x^2+x+1 مقادیر مثبت و عبارت $-x^2+3x-5$ مقادیر منفی را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B\ge 0$ و $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست نیست.

۴. در تابع $d(x)=\sqrt{\frac{-3x^2+2x-4}{-4x^2+5x-3}}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x\in R: -3x^2+2x-4<0 \\ \forall x\in R: -4x^2+5x-3<0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $-3x^2+2x-4$ و $-4x^2+5x-3$ مقادیر منفی را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B>0$ و $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست نیست.

۵. در تابع $e(x)=\sqrt{\frac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6}}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x\in R: 8x^2-x+5>0 \\ \forall x\in R: x^2+4x+6>0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $8x^2-x+5$ و x^2+4x+6 مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B>0$ و $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ هم‌خوانی دارد. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست است.

۶. در تابع $f(x)=\sqrt{(x-4-x^2)(7x-6x^2-3)}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x\in R: -x^2+x-4<0 \\ \forall x\in R: -6x^2+7x-3<0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $-x^2+x-4$ و $-6x^2+7x-3$ مقادیر منفی را اختیار می‌کنند و این موضوع با $A\ge 0, B\ge 0$ و $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنهٔ تابع مزبور درست نیست.

با بررسی نحوهٔ استدلال درست در استفاده از روابط طلایی بالا برای شش تابع مزبور، ملاحظه می‌کنیم که در مورد ۵ (تابع $e(x)=\sqrt{\frac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6}}$) نه‌تنها پاسخ به‌دست آمده با استفاده از هر دو روش درست است، بلکه نحوهٔ استدلال برای به‌کارگیری رابطهٔ موردنیاز نیز اشتباه‌آمیز نیست و سرانجام به نتیجه‌گیری درست براساس استدلال درست منجر می‌شود.

در ادامه می‌کوشیم فعالیت دیگری را ارائه کنیم که ضابطهٔ توابع مفروض در آن، شرایط درست و مناسبِ استفاده از روابط کلیدی و کاربردی ارائه شدهٔ قبلی را داشته باشد. در نهایت با بهره‌گیری از این فعالیت ملاحظه خواهیم کرد، در پاره‌ای از موارد که ساختار و اجزای تشکیل‌دهندهٔ ضابطهٔ توابعی مفروض عباراتی دارد که برای تعیین دامنهٔ آن‌ها، استفاده از تشکیل یک نامعادله و حل آن با استفاده از روش تعیین علامت، راهکار آسان، کارا و موجزی نیست، با بهره جستن از همان روابط طلایی (با در نظر داشتن شرایط آن‌ها) که محور اصلی این مقاله هستند، می‌توانیم به تعیین دامنهٔ توابع مزبور بپردازیم.

● **فعالیت ۲.** دامنهٔ هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.[۷]

۱. $a(x)=\sqrt{(x^2+1+|6-x|-2x)\sqrt{|x|}}$

۲. $b(x)=\sqrt{\dfrac{|x^2-36|+|x+10|}{x^2-10x+25}}$

۳. $c(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3x^2+|x|+2}}{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}$

۴. $d(x)=\sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2-7|x|+5)\operatorname{sgn}(\sqrt{x^2-5x+8})}$

■ پاسخ‌ها

۱.

$$a(x)=\sqrt{(x^2+1+|6-x|-2x)\sqrt{|x|}}$$
$$\Rightarrow a(x)=\sqrt{(x^2-2x+1+|6-x|)\sqrt{|x|}}$$
$$\Rightarrow a(x)=\sqrt{((x-1)^2+|6-x|)\sqrt{|x|}}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\forall x\in R:(x-1)^2\ge 0\\ \forall x\in R:|6-x|\ge 0\\ \forall x\in R:\sqrt{|x|}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in R:(x-1)^2+|6-x|>0\\ \forall x\in R:\sqrt{|x|}\ge 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow \forall x\in R:((x-1)^2+|6-x|)\sqrt{|x|}\ge 0$$

بنابراین:

$$a(x)=\sqrt{((x-1)^2+|6-x|\sqrt{|x|}}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2+|6-x|}\times\sqrt{\sqrt{|x|}}=a_1(x)a_2(x)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}D_{a_1}=R\\ D_{a_2}=R\end{cases}\Rightarrow D_a=R$$

۲.

$$b(x)=\sqrt{\frac{|x^2-36|+|x+10|}{x^2-10x+25}}$$
$$\Rightarrow b(x)=\frac{\sqrt{|x^2-36|+|x+10|}}{\sqrt{(x-5)^2}}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\forall x\in R:|x^2-36|\ge 0\\ \forall x\in R:|x+10|\ge 0\\ \forall x\in R:\sqrt{(x-5)^2}\ge 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in R:|x^2-36|+|x+10|>0\\ \forall x\in R-\{5\}:\sqrt{(x-5)^2}>0\end{cases}$$
$$\forall x\in R-\{5\}:\frac{|x^2-36|+|x+10|}{\sqrt{(x-5)^2}}>0$$

بنابراین:

$$b(x)=\frac{\sqrt{|x^2-36|+|x+10|}}{\sqrt{(x-5)^2}}=\frac{\sqrt{|x^2-36|+|x+10|}}{\sqrt{(x-5)^2}}$$
$$=\frac{b_1(x)}{b_2(x)}\Rightarrow\begin{cases}D_{b_1}=R\\ D_{b_2}=R-\{5\}\end{cases}\Rightarrow D_b=R-\{5\}$$

۳.

$$c(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{3x^2+|x|+2}}{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}$$
$$\Rightarrow c(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{3x^2+|x|+2}}}{\sqrt{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}$$
$$\Rightarrow c(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{3x^2+|x|+2}}}{\sqrt{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}$$
$$\Rightarrow c(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{3x^2+|x|+2}}}{\sqrt{2x^2+5x+7+x-\lfloor x\rfloor}}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\forall x\in R:3x^2+|x|+2>0\\ \forall x\in R:2x^2+5x+7>0\\ \forall x\in R:0<x-\lfloor x\rfloor\le 1\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in R:3x^2+|x|+2>0\\ \forall x\in R:2x^2+5x+7+x-\lfloor x\rfloor>0\end{cases}$$
$$\Rightarrow \forall x\in R:\frac{\sqrt{3x^2+|x|+2}}{\sqrt{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}>0$$

بنابراین:

$$c(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{3x^2+|x|+2}}{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}$$
$$=\frac{\sqrt{\sqrt{3x^2+|x|+2}}}{\sqrt{2x^2-\lfloor x-7\rfloor+6x}}=\frac{c_1(x)}{c_2(x)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}D_{c_1}=R\\ D_{c_2}=R\end{cases}\Rightarrow D_c=R$$

۴.

$$d(x)=\sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2-7|x|+5)\operatorname{sgn}(\sqrt{x^2-5x+8})}$$

$$\Rightarrow d(x)=\sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2-7|x|+5)}\sqrt{\operatorname{sgn}(\sqrt{x^2-5x+8})}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\forall x\in R: 3x^2-7|x|+5>0\\ \forall x\in R: x^2-5x+8>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in R: \operatorname{sgn}(3x^2-7|x|+5)=1\\ \forall x\in R: \operatorname{sgn}(\sqrt{x^2-5x+8})=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x\in R: \sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2-7|x|+5)\operatorname{sgn}(\sqrt{x^2-5x+8})}=1$$

بنابراین:

$$D_d=R$$

چند تمرین

۱. با استفاده از هر دو روش بیان شده در این مقاله به بررسی و تعیین دامنهٔ توابع زیر بپردازید. سپس به تفصیل استدلال‌های خود را برای درستی یا نادرستی هر روش بیان کنید.

۱. $a(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+2x-4}{5x-3-4x^2}}$

۲. $b(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+5x+7}}$

۳. $c(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-x}}$

۴. $d(x)=\sqrt{(x^2-4)(81-x^2)}$

۲. دامنهٔ توابع زیر را تعیین کنید.

۱. $a(x)=\sqrt{(x^2+|x+7|)|25-x^2|}$

۲. $b(x)=\sqrt{\dfrac{|x+5|+|x-2|}{(x^2-6x+9)|x|}}$

۳. $c(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+|x+1|+4}{|x^2-9|+|x+5|}}$

۴. $d(x)=\sqrt{(\sqrt{|-x|}+|x^2-1|)(5-x)^4}$

۳. توابع $a(x)\ge 0, b(x)\ge 0$ و $f(x)=\sqrt{a(x)b(x)}$ و $a(x)\ge 0, b(x)>0$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{a(x)}{b(x)}}$ مفروض‌اند. آیا می‌توان استدلال کرد که: $D_f=R$ و $D_g=R$؟ چرایی و چگونگی استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

۴. توابع $a(x)\le 0, b(x)\le 0$ و $f(x)=\sqrt{a(x)b(x)}$ و $a(x)\le 0, b(x)<0$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{a(x)}{b(x)}}$ مفروض‌اند. آیا می‌توان استدلال کرد که: $D_f=\{\ \}$ و $D_g=\{\ \}$؟ چرایی و چگونگی استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Domain of function
2. Radical Functions

۳. این موضوع را می‌توانید در ادامه در مثال‌هایی که در این مقاله برای ریاضی‌آموزان بیان شده‌اند و در مورد راه‌حل درست و نادرست برای هر یک از آن‌ها که ریاضی‌آموزان نقطه‌نظرات و راهکارهای خود را پیشنهاد کرده‌اند، ملاحظه کنید.

۴. شما ریاضی‌آموزانی که مخاطب این مقاله هستید، می‌توانید قبل از پیگیری ادامهٔ مقاله و مطالعهٔ کامل آن، توانایی‌های خود را با حل این تمرین در بوتهٔ آزمایش قرار دهید.

5. Algebraic
6. Transcendental

۷. الف) تابع $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$ را تابع علامت می‌نامیم و با $\operatorname{sgn}(x)$ نمایش می‌دهیم.

ب) تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ را تابع جزء صحیح می‌نامیم (جزء صحیح هر عدد حقیقی x برابر است با: $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in Z|n\le x\}$).

منابع

۱. ایرانمنش، علی و محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ریاضیات ۲ (سال دوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تهران. ۱۳۹۲.

۲. اصلاح‌پذیر، بهمن و ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. حسابان (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تهران. ۱۳۹۲.

۳. بابلیان، اسماعیل و میرزا جلیلی، رضا شهریاری اردبیلی و علیرضا مدقالچی. ریاضیات ۲ (سال دوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تهران. ۱۳۸۵.

۴. بیژن‌زاده، محمدحسن و غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. حسابان (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تهران. ۱۳۸۷.

۵. رستمی، محمدهاشم، عبدالحمید عطوفی و محمد گودرزی. ریاضیات ۳ (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تهران. ۱۳۸۹.

استدلال ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای

فهیمه کلاهدوز*
کارشناس ارشد آموزش ریاضی
و دبیر ریاضی
شهرستان دهاقان

اشاره:

در ویژه‌نامه‌ای که در شمارهٔ ۷۵ مجله (مهرماه ۹۱) برای بزرگداشت زنده‌یاد پرویز شهریاری داشتیم، فراخوانی را برای شرکت دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی در مسابقهٔ مقاله‌نویسی با عنوان «مسابقهٔ بزرگ استاد پرویز شهریاری» اعلام کردیم. اگرچه استقبال خوانندگان مجله، در حدی که انتظار داشتیم نبود، اما از میان مقالات رسیده، مقالهٔ ارسالی خانم فهیمه کلاهدوز، نسبت به سایر مقالات از استحکام بیشتری برخوردار بوده و به‌عنوان مقالهٔ برگزیده انتخاب شد. اینک مقالهٔ فوق به خوانندگان مجله تقدیم می‌شود، با این امید که در یکی از شماره‌های آینده، گفت‌وگویی نیز با این همکار محترم داشته باشیم.

کلیدواژه
استدلال ریاضی، تفکر منطقی، ریاضیات مدرسه‌ای، آموزش ریاضی

چکیده

همان‌گونه که می‌دانیم، مهارت استدلال کردن از جمله مهارت‌هایی است که به‌طور کلی در زندگی روزانه و به‌طور خاص در آموزش ریاضی از جایگاه خاصی برخوردار است. به‌نظر می‌رسد که یکی از وظایف اصلی تعلیم‌وتربیت نیز پرورش مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان به منظور تصمیم‌گیری در مورد مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی است. علم ریاضیات به‌عنوان شاخه‌ای از علوم می‌تواند نقش مؤثری در توسعهٔ تفکر و قدرت استدلال افراد ایفا کند. لذا هدف این مطالعه که به روش تحلیلی ـ توصیفی انجام گرفته، آن است که براساس پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، به بررسی مفهوم استدلال ریاضی از دیدگاه محققان و آموزشگران ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای بپردازد.

مقدمه

فرایند استدلال یکی از اجزای اصلی علوم ریاضی است. این فرایند برای یادگیری ریاضیات مدرسه‌ای نیز ضروری و مهم است. متخصصان تعلیم‌وتربیت با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم‌وتربیت می‌دانند. بر این اساس آنان معتقدند که نظام آموزشی به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان فراهم آورد (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی حسین‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹).

کوهن[1] (۲۰۰۸) در کتاب «آموزش برای تفکر»[2]، با بیان سؤالاتی مرتبط با اهداف آموزش مدرسه‌ای، مخاطب را با چالش‌هایی مواجه می‌کند: کدام مهارت‌های فکری برای دانش‌آموزان ضروری است؟ برای دستیابی به این مهارت‌ها، لازم است با چه فعالیت‌هایی آشنا شوند و چه دانشی را کسب کنند؟ چرا برخی از مهارت‌ها بیش از بقیه اهمیت دارند و آن‌ها را شایستهٔ سرمایه‌گذاری می‌دانیم؟ و... کوهن در ادامه فرض می‌کند که به این پرسش‌ها پاسخ‌های منطقی داده شود و بهترین روش‌ها برای تسلط کافی دانش‌آموزان به مهارت‌های مورد نیاز، تعیین شود، اما او معتقد است که باز هم چالش دیگری باقی می‌ماند: آیا دانش‌آموزان این مهارت‌ها را آن‌قدر باارزش می‌دانند که با علاقه به تمرین آن‌ها بپردازند؟ آیا این مهارت‌ها را در زمان و مکان مناسب به‌کار می‌گیرند و دلیل

استفاده از آن‌ها را می‌دانند؟

راس[3] (۱۹۹۸) معتقد است که استدلال تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارتی اساسی در زندگی است و برای اینکه دانش‌آموزان آن را کسب کنند، معلمان باید ریاضی را به‌عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش مؤثری در آموزش مدرسه‌ای ایفا می‌کند، در نظر بگیرند. همچنین او بر این باور است که معلمان باید به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به‌صورت آرمانی درمی‌آورد، و هم از مفاهیم مجرد تفسیرهای کاربردی می‌سازد، توجه داشته باشند.

اعضای «شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا»[4] نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارند که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های متفاوت توسعه می‌دهد. همچنین آن‌ها بیان می‌دارند، افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به‌خوبی درک کنند.

بال و باس[5] (۲۰۰۳) معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبهٔ ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. آن‌ها در تحقیقات خود نتیجه می‌گیرند، دانشی که فاقد توجیه‌کردن است، به‌راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به‌عنوان یک علم مستدل به‌جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. آن‌ها بر این باورند که استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد، بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند.

برودیه[6] (۲۰۱۰) نیز بیان می‌دارد که استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به‌عنوان یک مجموعهٔ منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

وو[7] (۱۹۹۶) بر این باور است که ریاضیات می‌تواند موقعیتی را برای دانش‌آموزان فراهم آورد تا بین آنچه که درست است و آنچه که تنها درست به‌نظر می‌آید، تمایز قائل شوند و ضروری است که آن‌ها این مهارت‌ها را بیاموزند (نقل شده در: Varghese, 2007). لذا به‌دلیل اهمیت استدلال‌های منطقی، دانش‌آموزان باید از ابتدا به کمک ابزارها و زبان مناسب، با ارزش این استدلال‌ها آشنا شوند تا در ورود به مباحث پیرامون اثبات‌های رسمی با مشکل مواجه نشوند.

در ادامه به بررسی مفهوم استدلال در ریاضیات و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای خواهیم پرداخت.

■استدلال و جایگاه آن در ریاضیات

لیتون[8] (۲۰۰۳) به معنای گسترده، استدلال را به‌عنوان فرایند «هماهنگی»[9] شواهد، باورها و اندیشه‌ها برای نتیجه‌گیری در مورد آنچه درست است، تعریف می‌کند. علاوه بر این، او معتقد است استدلال کردن فرایندی است که به‌عنوان یک «میانجی»[10] و واسطه عمل می‌کند و اثرات و نشانه‌های خود را تقریباً در هر چیزی که ما انجام می‌دهیم و یا در مورد آن فکر می‌کنیم، برجای می‌گذارد؛ زیرا همهٔ این فرایندها شامل استنباط‌کردن و نتیجه‌گیری هستند. در واقع لیتون (۲۰۰۳) بر این باور است که همهٔ ما در انجام کارهای مختلف، برای مثال هنگام یادگیری مطالب، تحلیل، قضاوت، ارزیابی، کشف و یا بهینه‌سازی، در حال نتیجه‌گیری و استنباط از اطلاعات، عقاید و باورهایمان هستیم.

بیرنه[11] و **جانسون**[12] (۱۹۹۳) بر این باورند که فرایند استدلال شامل استنباط‌هایی است که از اصول و شواهد به‌دست می‌آیند و به‌وسیلهٔ آن، افراد نتایج جدیدی را استنتاج می‌کنند و یا نتیجهٔ ارائه شده را مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌دهند (نقل شده در: Christou & Papageorgiou, 2007).

وبستر[13] (۱۹۸۲) فرایند استدلال را به‌عنوان توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج نتایج از بین حقایق مفروض و آشنا تعریف می‌کند (نقل شده در: Mansi, 2003).

برودیه (۲۰۱۰) نیز معتقد است که حاصل فرایند استدلال، یک متن، گفت‌وگو و یا یک نوشته است که برای نتیجه‌گیری نهایی از اسناد و شواهدی که در جامعهٔ موردنظر، قابل قبول و مورد پذیرش هستند، استفاده می‌شود.

به‌طور کلی می‌توان گفت استدلال کردن، شامل فرایند تفکر، نتیجه‌گیری و ارتباطات بین تجربه‌ها و دانشی است که فرد برای توضیح آنچه که می‌بیند، مورد استفاده قرار می‌دهد.

براساس تعاریف بیان شده می‌توان گفت، استدلالی که در حوزهٔ ریاضیات و با توجه به منطق و واقعیات موجود در ریاضی ارائه می‌شود، «استدلال ریاضی» نامیده می‌شود. مانسی (۲۰۰۳) نیز براساس تعریف وبستر از استدلال، استدلال ریاضی را به‌عنوان توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج از حقایق ریاضی آشنا یا مفروض، تعریف می‌کند.

همچنین **یاکل**[۱۴] و هنا (۲۰۰۳) استدلال ریاضی را استفاده از «استقرا»[۱۵]، «استنتاج»[۱۶] و «استنباط»[۱۷] برای نتیجه‌گیری در مورد «کمیت»[۱۸]ها و «ساختار»[۱۹]ها توصیف و آن را به‌عنوان «فعالیتی جمعی»[۲۰] معرفی می‌کنند که در آن، یادگیرندگان در تعامل با یکدیگر برای حل مسائل ریاضی شرکت دارند.

(نقل شده در: Yankelewitz, Mueller & Maher, 2010)

برودیه (۲۰۱۰) بر این باور است که هنگام ارائهٔ یک استدلال، شیوه‌هایی از تفکر ایجاد می‌شوند که می‌توانند شامل فرایندهایی از جمله متقاعد شدن فرد و متقاعد کردن دیگران در مورد یک ادعای خاص، حل یک مسئله و پیوستن تعدادی مفاهیم به یک مجموعهٔ منسجم و کلی‌تر باشند.

یانکلویتز (۲۰۰۹) نیز معتقد است که توانایی برای متقاعد کردن دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره از طریق بحث و توجیه، اساس استدلال ریاضی را تشکیل می‌دهد.

لایتنر[۲۱] (۲۰۰۰) چهار گام را در فرایند استدلال معرفی می‌کند که تقریباً مشابه مراحل حل مسئله به روش **پولیا** (۱۹۵۴) است:

۱. ابتدا موقعیتی «سؤال برانگیز»[۲۲] و دشوار پیدا می‌شود که مشخص نیست چگونه باید اقدام کرد.

۲. شخص تلاش می‌کند که راهبردی برای حل مسئله انتخاب کند (به‌یاد آورد، بسازد و یا کشف کند). سپس بررسی می‌کند که آیا راهبرد موردنظر، مسئله را حل می‌کند یا نه و اگر نه، به دنبال راهبرد دیگری خواهد بود.

۳. این مرحله که اجرای راهبرد نامید می‌شود، می‌تواند از طریق استدلال‌های تأییدکننده حمایت شود؛ بدین صورت که شخص در پی آن است که: آیا راهبرد موردنظر به‌کار می‌آید؟ وگرنه دوباره راهبرد دیگری انتخاب و اجرا می‌شود.

۴. در مرحلهٔ آخر، یعنی نتیجه‌گیری، بعد از طی مراحل بالا یک نتیجهٔ کلی به‌دست می‌آید.

■ تعمیم و توجیه در استدلال ریاضی

در ادبیات تحقیق دو ویژگی مهم برای استدلال ریاضی بیان می‌شود و دیگر فعالیت‌های مرتبط با آن، مثلاً سروکار داشتن با نمادهای ریاضی، بازنمایی و برقراری ارتباط، در حمایت از این ویژگی‌ها نقش خود را ایفا می‌کنند. این دو ویژگی «تعمیم»[۲۳] و «توجیه»[۲۴] هستند (Brodie, 2010; Ball & Bass, 2003). توجیه کردن به معنای «ارائهٔ دلایل کافی» است و یک فعالیت مهم ریاضی محسوب می‌شود که به افراد اجازه می‌دهد، بین مفاهیم و قسمت‌های گوناگون یک گزاره ارتباط برقرار کنند و برای تأیید ادعاها و حدسیه‌های خود، مدارک و شواهد لازم را ارائه و مفاهیم و ایده‌های جدید ریاضی را توسعه دهند. فرایند تعمیم نیز شبکه‌ای به‌هم پیوسته از دانش و مفاهیم ریاضی را ایجاد می‌کند و امکان حل مسئله را فراهم می‌کند؛ زیرا به یادگیرنده کمک می‌کند تا ساختار زیربنایی مسئله یا دسته‌های بزرگ‌تری از مسائل و ایده‌هایی را که مطرح می‌شوند، ببیند. به‌طور کلی، زمانی که یادگیرندگان استدلال ریاضی می‌کنند، از طریق توجیه و تعمیم با ریاضیات ارتباط برقرار می‌سازند (Brodie, 2010).

در ادبیات تحقیق دو ویژگی مهم برای استدلال ریاضی بیان می‌شود و دیگر فعالیت‌های مرتبط با آن، مثلاً سروکار داشتن با نمادهای ریاضی، بازنمایی و برقراری ارتباط، در حمایت از این ویژگی‌ها نقش خود را ایفا می‌کنند

■ روش‌های استدلال

براساس تحقیقات انجام شده (استایلیانیدز و استایلیانیدز، ۲۰۰۸؛ کریمی و فردین‌پور، ۱۳۸۵؛ جلیلی، ۱۳۸۵؛ جهانشاهی، ۱۳۸۰؛ عین‌اللهی، ۱۳۷۹)، روش‌های استدلال به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

۱. روش شهودی[۲۵]: این روش به واسطهٔ آنچه مشاهده می‌کنیم یا آنچه که احساسمان به ما می‌گوید، به‌دست می‌آید که روشی علمی و مطمئن به‌شمار نمی‌آید؛ اما به فهم بهتر مفاهیم ریاضی کمک می‌کند.

۲. روش تمثیلی[۲۶]: در این روش از طریق تمثیل بین مفاهیم گوناگون به نوعی شباهت و یکسانی دست می‌یابیم. این روش می‌تواند در ایجاد زمینه‌های شهودی مؤثر واقع شود. برای مثال، با توجه به درست بودن گزارهٔ «هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است» و «مربع، نوع خاصی از مستطیل است»، می‌توان نتیجه گرفت که: «مربع یک متوازی‌الاضلاع است.»

۳. روش استقرایی[۲۷] **ـ تجربی:** به معنای نتیجه‌گیری و کشف حقایق کلی بر مبنای وقایع جزئی و دستهٔ محدودی از مشاهدات است. در ریاضی از این روش برای بناکردن یک قانون کلی استفاده می‌شود، نه برای اثبات آن.

۴. روش استنتاجی[۲۸]: این روش شامل دنباله‌ای از گزاره‌هاست که به‌طور منطقی با هم در ارتباط هستند و براساس حقایق و واقعیت‌های پذیرفته شده، به یک نتیجه‌گیری درست منتهی می‌شوند.

شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» (۲۰۰۰) به‌طور مفصل و جزئی انواع مهارت‌های استدلالی موردنیاز دانش‌آموزان

را برمی‌شمارد و تأکید می‌کند که آموزش این مهارت‌ها باید در تمام سطوح تحصیلی مورد توجه قرار گیرد.

■ طبقه‌بندی استدلال‌ها از نگاه برخی محققان

بال و باس (۲۰۰۳) دو مفهوم «استدلال» و «معناسازی»[۲۹] را از یکدیگر متمایز دانسته‌اند. آن‌ها معناسازی را فرایندی شخصی می‌دانند که خود فرد آن را انجام می‌دهد. اما استدلال به مجموعه‌ای از هنجارهای مشترک جمعی اطلاق می‌شود که براساس نظم و انضباط پایه‌ریزی شده‌اند. هر چند این محققان از جامعه و هنجارها توضیح شفافی ارائه نکرده‌اند، اما اظهارنظر تلویحی و ضمنی آن‌ها بدین‌گونه است که فرایند استدلال هنگامی رخ می‌دهد که برای دستیابی به یک جمع‌بندی مشترک دربارهٔ اصول مورد بحث، نظرات و ایده‌های مختلف مورد آزمایش قرار می‌گیرند. بال و باس (۲۰۰۳) «استدلال کاوش‌گرایانه»[۳۰] و «استدلال توجیهی»[۳۱] را نیز از یکدیگر متمایز می‌دانند. آن‌ها معتقدند استدلال کاوشگرایانه مبین استدلالی است که به کشف و توضیح ایده‌های جدید ریاضی می‌انجامد و استدلال توجیهی استدلالی است که برای توجیه و اثبات ادعاهای ریاضی به‌کار می‌رود.

این تمایز توسط پولیا (۱۹۵۴) نیز بیان می‌شود. او بین استدلال «اثباتی»[۳۲] که برای ارائهٔ اثبات‌های رسمی مورد استفاده قرار می‌گیرد، و استدلال‌های محتمل (قابل قبول[۳۳]) که برای کشف مفاهیم ریاضی ارائه می‌شوند، تمایز قائل می‌شود. پولیا (۱۹۵۴) معتقد است که در بسیاری از موارد، نوع دوم در الگوهای استدلال مورد استفاده توسط ریاضی‌دانان و دانشجویان ریاضی، مورد غفلت قرار می‌گیرد.

(نقل شده در: yankelewitz, 2009)

همچنین پولیا (۱۹۵۴) به استدلال «راه‌یابانه»[۳۴] (اکتشافی) اشاره می‌کند و بیان می‌دارد که این نوع استدلال، نه به‌عنوان استدلالی قطعی و نهایی، بلکه تنها به‌عنوان ابزاری موجه‌نما و موقتی در نظر گرفته می‌شود و هدف آن، کشف راه‌حل مسئله است. او عقیده دارد: «هنگامی که می‌خواهیم برهانی قطعی بسازیم، به استدلال راه‌یابانه نیاز داریم. بدان‌گونه که برای برپا داشتن پل، نخست به چوب‌بست‌ها نیازمندیم» (ص ۵۰).

لایتنر (۲۰۰۸) نیز بین دو نوع استدلال تمایز قائل می‌شود که عبارت‌اند از:

۱. استدلال تقلیدی[۳۵]: که از روی عادت و تکرار یاد گرفته می‌شود و دو نوع دارد که عبارت‌اند از:

- **استدلال به‌یاد سپاری (مربوط به حافظه)**[۳۶]: برای مثال، دانش‌آموزی که یک مسئله را با استفاده از یک جواب کامل و معین در کتاب درسی یا حل شده توسط معلم، حل می‌کند.
- **استدلال الگوریتمی**[۳۷]: که در آن یک مسئله از طریق به‌کار بردن رویه‌ای معین حل می‌شود.

۲. استدلال خلاقانه[۳۸]: شامل دنباله‌ای از استدلال‌های جدید است که براساس اصول ریاضی هستند. تفاوت مهم بین استدلال تقلیدی و خلاقانه این است که نوع اول ضرورتاً شامل تفکر مفهومی و تحلیلی نیست، در حالی‌که به گفتهٔ لایتنر، چنین فرایند تفکری برای استدلال خلاقانه ضروری است.

■ استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای

از آنجا که فرایند استدلال بخش مهمی در ریاضیات محسوب می‌شود، لذا این فرایند برای یادگیری در ریاضیات مدرسه‌ای نیز ضروری و مهم است. یاکل و هنا (۲۰۰۳) تأکید می‌کنند که باید برای همهٔ دانش‌آموزان از همان اوایل تحصیلات در مدارس ابتدایی، محیط حمایتی مناسبی برای تأیید یا رد ادعاها ایجاد شود. تحقیقات نشان می‌دهند، تدریس صرف الگوریتم‌ها می‌تواند برای توسعهٔ استدلال دانش‌آموزان بی‌فایده و حتی مضر باشد

(نقل شده در: Mueller, 2007)

میولر (۲۰۰۷) معتقد است: هنگامی که ریاضیات به‌عنوان یک فرایند استدلالی در مقابل یک فرایند «قانون‌مدار»[۳۹] پذیرفته می‌شود، آن‌گاه شرایط جمعی (محیط اجتماعی)[۴۰] نیز باید در نظر گرفته شود. برای مثال، ایجاد فضایی که در آن دانش‌آموزان بتوانند به‌عنوان یک جامعهٔ یادگیرنده در تعامل با یکدیگر باشند و نظرات خود را مورد نقد و بررسی قرار دهند، یکی از شرایط ضروری فرایند استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای است. این فرایند می‌تواند به توجیه و اثبات ریاضی منجر شود. برخی از تحقیقات نیز نشان می‌دهند که ساخت اثبات توسط دانش‌آموزان، با تشویق آن‌ها به توجیه راه‌حل‌هایشان در کلاس درس اتفاق می‌افتد.

(Mueller & Maher, 2009)

طبق گفتهٔ ماهر و **دیویس**[۴۱] (۱۹۹۵)، موقعی که دانش‌آموزان به بررسی و انتقال ایده‌هایشان در ریاضیات تشویق می‌شوند، قادر خواهند بود که شکل‌هایی از استدلال را به همان روشی که ریاضی‌دانان حرفه‌ای انجام می‌دهند، مورد استفاده قرار دهند. در واقع آن‌ها معتقدند که روش دانش‌آموزان برای تنظیم ایده‌ها، بحث در مورد تفکراتشان و همچنین ابداع روش‌هایی برای متقاعد کردن خود و دیگران، مشابه کار ریاضی‌دانان در فرایند استدلال است (نقل شده در: Mueller, 2007).

پولیا: «هنگامی که می‌خواهیم برهانی قطعی بسازیم، به استدلال راه‌یابانه نیاز داریم. بدان‌گونه که برای برپا داشتن پل، نخست به چوب‌بست‌ها نیازمندیم»

برخی مواقع دانش‌آموزان نمی‌توانند شکل رسمی و نمادین استدلال‌های استنتاجی را به‌خوبی درک کنند. در این‌گونه موارد می‌توانند برای شروع کار با استدلال استنتاجی از شکل‌های غیررسمی آن در آموزش استفاده کنند

میولر و همکاران (۲۰۱۰) معتقدند، اغلب دانش‌آموزان هنگام توضیح و توجیه تفکراتشان با مشکل مواجه می‌شوند. آن‌ها بیان می‌دارند که اگرچه ممکن است دانش‌آموزان بتوانند برخی از مسائل پیچیده را حل کنند، اما در اغلب موارد قادر به توجیه راه‌حل‌هایشان نیستند و یا نمی‌توانند به‌خوبی فرایند چگونگی رسیدن به جواب را توضیح دهند. یکی از دلایل این مشکل می‌تواند تأکید بیش از اندازهٔ معلمان در کلاس درس بر یادگیری حقایق ریاضی، مهارت‌ها و رویه‌های مورد نیاز تنها برای حل مسائل الگوریتمی و سرراست باشد. در این صورت ممکن است توانایی دانش‌آموزان برای استدلال‌کردن به تعویق بیفتد. تا زمانی که آن‌ها مفاهیم موردنظر را به‌طور کامل و به‌خوبی نفهمیده باشند، در به‌کارگیری این مفاهیم در استدلال و بحث‌هایشان با مشکل مواجه خواهند بود.

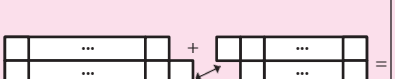
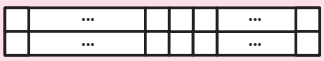
باید توجه داشت که برخی مواقع دانش‌آموزان نمی‌توانند شکل رسمی و نمادین استدلال‌های استنتاجی را به‌خوبی درک کنند. در این‌گونه موارد می‌توانند برای شروع کار با استدلال استنتاجی از شکل‌های غیررسمی آن در آموزش استفاده کنند. برای مثال، استایلیانیدز و استایلیانیدز (۲۰۰۸) سه نوع اثبات را که هر سه برپایهٔ استدلال استنتاجی‌اند، برای تأیید گزارهٔ زیر ارائه می‌دهند که در جدول ۱ مشاهده می‌شود:

«حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.»

همان‌گونه که اشاره شد، استایلیانیدز و استایلیانیدز معتقدند که هر سه روش ارائه شده براساس استدلال استنتاجی هستند و تنها نحوهٔ بیان آن‌ها متفاوت است (تصویری[۴۲]، جبری، روایتی[۴۳]) و هر کدام از این روش‌ها با توجه به شرایط دانش‌آموزان قابل استفاده‌اند. لازم به ذکر است که گرچه نتایج ریاضی در قالب استدلال‌های رسمی و منطقی ارائه می‌شوند، ولی این نتایج برگرفته از استدلال‌های غیررسمی ریاضی‌دانان هستند. برخی از محققان آموزشی نیز مهارت در استدلال‌های غیررسمی را مورد تأکید قرار داده‌اند و بیان می‌دارند که بسیاری از تکالیف مرتبط با استدلال در کتاب‌های درسی ماهیت غیررسمی دارند و لذا توسعهٔ مهارت‌های دانش‌آموزان در این زمینه می‌تواند تأثیر زیادی در افزایش توانایی آن‌ها به منظور ارائهٔ استدلال‌های رسمی داشته باشد (Wu & Tsai, 2007).

ماک[۴۴] (۱۹۹۰) در مطالعهٔ خود نشان می‌دهد که وقتی دانش‌آموزان از دانش غیررسمی خود برای حل مسائل استفاده می‌کنند، به ایجاد الگوریتم‌ها و رویه‌ها می‌پردازند؛ هر چند در برخی موارد این الگوریتم‌ها با نمونه‌های سنتی تدریس شده در مدارس تفاوت دارند (نقل شده در: Mueller, 2007). **مور**[۴۵] (۱۹۹۴) نیز در تحقیق خود دریافت که دانشجویان بدون درک و فهم غیررسمی مفاهیم

جدول ۱. سه نوع استدلال استنتاجی برای تأیید گزارهٔ «حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.» (Stylianides & Styliandes, 2008)

مراحل استدلال	اثبات با استفاده از زبان عامیانه	اثبات با استفاده از نمادهای جبری	اثبات با استفاده از شکل
مرحلهٔ اول	اعداد فرد، اعدادی هستند که اگر شما آن‌ها را به‌صورت جفت‌جفت کنار هم قرار دهید، یکی اضافه می‌آید.	اعداد فرد اعدادی به شکل $2n+1$ هستند که n یک عدد صحیح است.	اعداد فرد به این شکل هستند:
مرحلهٔ دوم	اعداد زوج، اعدادی هستند که اگر به‌صورت جفت‌جفت دسته‌بندی شوند، هیچ‌چیز اضافه نمی‌آید.	اعداد زوج به شکل $2n$ هستند که n یک عدد صحیح است.	اعداد زوج به شکل زیر هستند:
مرحلهٔ سوم	اگر شما دو عدد فرد را با هم جمع کنید، آن دسته‌های تک‌عضوی که از هر کدام باقی می‌مانند، وقتی در کنار هم قرار می‌گیرند، یک جفت را تشکیل می‌دهند.	اگر شما دو عدد فرد را با هم جمع کنید، داریم: $(2a+1)+(2b+1)=$ $(2a+2b)+(1+1)=$ $2(a+b+1)$	اگر دو عدد فرد را با هم جمع کنیم، داریم: 
مرحلهٔ چهارم	عدد حاصل می‌تواند به‌صورت جفت‌جفت دسته‌بندی شود. پس عدد حاصل یک عدد زوج است.	عدد حاصل به‌صورت $2n$، و بنابراین زوج است.	اعداد حاصل به شکل یک عدد زوج هستند. 

نمی‌توانند تعریف موردنظر را یاد بگیرند و توضیح دهند که این خود یکی از علل شکست دانشجویان در ارائهٔ اثبات است (نقل شده در: Hawro, 2007). **هیلی** و **هویلز** (۲۰۰۰) نیز معتقدند برای توسعه و بهبود توانایی و شایستگی دانش‌آموزان در ارائهٔ استدلال‌های استنتاجی، ابتدا باید توانایی آن‌ها در استدلال‌های غیررسمی و روایتی تقویت شود. علاوه بر این، **کریستو** و **پاپاجرجیو** (۲۰۰۷)، در مطالعهٔ خود نشان داده‌اند که استفادهٔ بجا و مناسب از استدلال استقرایی نیز (به‌خصوص در دورهٔ ابتدایی) می‌تواند نقش مهمی در یادگیری ریاضیات و موقعیت‌های حل مسئله داشته باشد.

دویلی‌یرز[۴۶] (۲۰۰۳) نیز در مورد نقش استدلال استقرایی و قیاسی در ریاضیات صحبت می‌کند و برخی از کارکردهای این شکل از استدلال را هنگام انجام فعالیت‌های ریاضی، مانند حدسیه‌سازی، ساخت یک گزاره و یا ارائهٔ یک مثال نقص نشان می‌دهد. او معتقد است که ریاضی‌دانان قبل از اینکه مسئله را از یک دیدگاه استنتاجی بررسی کنند، از روش‌های استدلال استقرایی، شهودی و یا قیاسی استفاده کنند. در واقع این نوع از استدلال‌ها پیش‌زمینه‌ای برای اثبات‌های رسمی هستند. دویلی‌یرز تأکید می‌کند که این استدلال‌ها محدودیت‌هایی دارند و شخص همیشه باید در ذهن داشته باشد که آن‌ها برای ضمانت درستی گزاره‌های ریاضی کافی نیستند و مفاهیم ریاضی را همانند استدلال استنتاجی توضیح نمی‌دهند.
(نقل شده در: yankelowitz, 2009).

علاوه‌بر این، پولیا (۱۹۵۴) معتقد است که برای حل مسئله و یا اثبات یک گزاره، گاه استدلال شهودی مقدم است و گاه استدلال صوری و گاه توأماً استفاده کردن از آن‌ها سودمند و جالب است. البته باید توجه داشت که تا قبل از ورود به دبیرستان، دانش‌آموزان باید با محدودیت‌های استدلال غیراستنتاجی آشنا شوند. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (۲۰۰۰) نیز بیان داشته است که دانش‌آموزان کلاس‌های ششم تا هشتم به منظور استفاده از استدلال استقرایی به‌طور مناسب، باید محدودیت‌ها و همچنین شیوهٔ استفاده از آن را بدانند؛ زیرا بسیاری از تکالیف آن‌ها بر استدلال‌های استقرایی تکیه دارند. لازم به ذکر است که در فرایند توجیه، اصلاح و رد حدسیه‌ها، فرصت آشنایی با محدودیت‌ها و کاربرد استدلال استقرایی نیز برای دانش‌آموزان فراهم می‌آید.
(Paddack, 2009)

واتسون[۴۷] (۲۰۰۸) معتقد است که در بسیاری از کلاس‌های مدرسه، استدلال‌های استقرایی و استنتاجی هم‌زمان با هم معرفی می‌شوند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. باید توجه داشت که استفادهٔ مناسب از این دو روش توسط دانش‌آموزان و همچنین توسعهٔ توانایی آن‌ها در استدلال استنتاجی ضروری و البته تاحدودی مشکل است (نقل شده در: استیسی و وینکنت، ۲۰۰۹). با وجود این، استایلیانیدز (۲۰۰۵) بر این باور است که فرصت‌های آموزشی، دانش‌آموزان را بیشتر برای استدلال استقرایی آماده می‌کنند تا استدلال استنتاجی. از نقطه‌نظر او فرصت‌های استدلال و اثبات به‌طور ناهموار و نامتوازن در سطوح متفاوت تحصیلی و مفاهیم گوناگون در درس‌های ریاضی توزیع شده‌اند.

مانسی (۲۰۰۳) معتقد است، قبل از اینکه از دانش‌آموزان خواسته شود به نوشتن اثبات بپردازند، باید توانایی و مهارت استدلال ریاضی در آن‌ها توسعه یابد. در واقع گسترش توانایی دانش‌آموزان برای استدلال و توجیه اینکه چرا یک گزارهٔ ریاضی برقرار است و یا چرا یک رویهٔ خاص درست است، باید به‌عنوان قسمت مهمی از آموزش ریاضیات محسوب شود؛ زیرا دانش‌آموزانی که مهارت‌های مربوط به توجیه و استدلال در آن‌ها تقویت نمی‌شود به احتمال زیاد با مفهوم اثبات مشکل پیدا خواهند کرد.

ادوارد[۴۸] (۱۹۹۷) اصطلاحی را تحت عنوان «قلمرو پیش از اثبات»[۴۹] در مورد دانش‌آموزان مطرح می‌کند. این اصطلاح شامل شیوه‌های تفکر، گفت‌وگو و فعالیت‌هایی است، که هدفشان کشف گزاره‌های ریاضی است. در واقع او معتقد است، قلمرو پیش از اثبات، همان استدلال ریاضی است که دانش‌آموزان با آن درگیر می‌شوند تا مهارت نوشتن اثبات‌های رسمی در آن‌ها توسعه یابد. او پنج نوع فعالیت استدلالی را که عموماً در قلمرو پیش از اثبات به آن‌ها توجه می‌شود و دارای سلسله مراتب هستند، چنین مطرح می‌کند:

۱. **شناخت و ساخت الگوها**[۵۰]: اولین مهارت، شناخت و ساخت الگوها یا قوانین برای کشف مسائل معین است.
۲. **توصیف الگوها**[۵۱]: پس از تسلط بر مرحلهٔ اول، دانش‌آموزان شروع به توصیف الگوها از طریق قانون‌گذاری به‌صورت رسمی (استفاده از نمادهای جبری) یا غیررسمی (مثلاً توصیف روایتی) می‌کنند.
۳. **حدسیه‌سازی**[۵۲]: پس از تسلط بر مرحلهٔ دوم، دانش‌آموزان حدسیه‌سازی می‌کنند. یعنی قادر هستند که الگو یا قانونی را بیان کنند که به‌طور کلی درست است؛ گرچه آن‌ها هنوز ضرورت اثبات کردن را نمی‌دانند.
۴. **استدلال استقرایی**: ممکن است دانش‌آموزان با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدسشان را تأیید کنند و بگویند که گزارهٔ موردنظر همیشه درست است.
۵. **استدلال استنتاجی**: موقعی که دانش‌آموزان با استفاده

مانسی: قبل از اینکه از دانش‌آموزان خواسته شود به نوشتن اثبات بپردازند، باید توانایی و مهارت استدلال ریاضی در آن‌ها توسعه یابد

همان‌گونه که اهمیت استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند

از اصول موضوعه[53] و قضایای ثابت شده سعی می‌کنند که درستی حدس خود را تأیید کنند، از استدلال استنتاجی بهره می‌گیرند. در این مرحله شخص برای یادگیری فرایند اثبات آماده است.

برودیه (۲۰۱۰) بیان می‌دارد که برای برخی از ریاضی‌دانان و برنامه‌ریزان درسی، استدلال ریاضی با اثبات برابر دانسته شده است، در حالی‌که برخی دیگر معتقدند که اثبات شکلی از استدلال و توجیه است. او معتقد است که اثبات رسمی همیشه یک توجیه یا توضیح کافی از مفاهیم ریاضی را ارائه نمی‌دهد. گرچه اثبات‌های رسمی مدت زیادی است که برای تولید دانش ریاضی بدون خطا تدریس می‌شوند، اما در حقیقت بدین‌گونه نیست. برای مثال، بیشتر معلمان ریاضی از طریق ارائهٔ یک استدلال یک صفحه‌ای از «قضیهٔ **فیثاغورس**» قانع می‌شوند، در حالی‌که یک اثبات دقیق منطقی در مورد این موضوع، حدود ۸۰ صفحه است (دویلی‌یرز، ۱۹۹۰ نقل شده در: Brodie, 2010). در واقع اثبات، ما را از عدم اطمینان و غیرمنطقی بودن دانشمان حفظ نمی‌کند، اما در عین حال، یک بخش مهم و ضروری از استدلال ریاضی است که به‌عنوان شکل ویژه‌ای از استدلال، توجیه و تعمیم در ریاضیات آموخته می‌شود (هنا و جانک، ۱۹۹۶، نقل شده در: Brodie, 2010).

■ بحث و نتیجه‌گیری

همان‌گونه که اهمیت استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند. به‌طور کلی، استفاده از انواع روش‌های استدلال برای آموزش و ارائهٔ این مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای مناسب است، اما باید دقت داشت که هر کدام از این روش‌ها در جای مناسب و با توجه به شرایط دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد تا آن‌ها نیز برای دقت و رسیدن به اعتبار مورد نیاز در این زمینه، ارزش قائل شوند.

برخی از تحقیقات به استفادهٔ دانش‌آموزان از مثال‌ها و استدلال استقرایی در تأیید گزاره‌ها و عدم توانایی آن‌ها در تمایز بین روش‌های متفاوت استدلال و اثبات اشاره می‌کنند. باید توجه داشت که هرچند استفادهٔ مناسب از استدلال‌های استقرایی و غیررسمی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای امری

پی‌نوشت‌ها

1. Kuhn
2. Education for thinking
3. Ross
4. National council of teachers of mathematics
5. Ball & Bass
6. Brodie
7. Wu
8. Leighton
9. coordinating
10. mediator
11. Byrne
12. Johnson
13. Webster
14. Yackel
15. induction
16. deduction
17. inference
18. quantity
19. structure
20. communal activity
21. Lithner
22. problematic
23. Generalizing
24. Justifying
25. intuition
26. analogy
27. inductive
28. deductive
29. sense-making
30. reasoning of inquiry
31. reasoning of justification
32. demonstrative
33. plausible
34. heuristic
35. Imitative
36. memorised
37. algorithmic
38. creative
39. rules oriented
40. social enviroment
41. Davis
42. pictorial
43. narrative
44. Mack
45. Moore
46. de Villiers
47. Watson
48. Edvard
49. the territory before proof
50. Noticing and constructing patterns
51. Describing
52. Conjecturing
53. axiomatic
54. Anderson

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۳۸۶). چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمهٔ احمد آرام. کیهان. تهران. چاپ هشتم.
۲. جلیلی، میرزا (۱۳۸۵). «اثبات در یک دستگاه ریاضی». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۸۳.
۳. جهانشاهی، محمد (۱۳۸۰). اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستان و پیش‌دانشگاهی. (چاپ دوم). تهران. انتشارات مدرسه.
۴. عین‌اللهی، علیرضا (۱۳۷۹). روش‌های استدلال در ریاضیات. پسین. تهران.
۵. کریمی فردین‌پور، یونس (۱۳۸۵). «اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای»، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. ش ۸۳.
۶. حاجی حسین‌نژاد، غلامرضا و بالغی‌زاده، سوسن (۱۳۸۹). «تأثیر آموزش مبتنی بر «تدریس برای فهمیدن» بر برنامهٔ درسی تجربه شده- درس تاریخ هنر». فصل‌نامهٔ مطالعات برنامهٔ درسی ایران. ش ۱۷.
۷. راس، کنت (۱۳۸۵). «ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای. ترجمهٔ فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. ش ۸۳.
۸. ملکی، حسن و حبیبی‌پور، مجید (۱۳۸۵). «پرورش تفکر انتقادی هدف اساسی تعلیم‌وتربیت»، فصل‌نامهٔ نوآوری‌های آموزشی. ش ۱۹.
9. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
10. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms,* New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.
11. Christou, Constantion & Papageorgiou, Eleni (2007). A framework of mathematics inductive reasoning, *Learning and Instruction,* 17, 55-66.
12. Hawro, Justyna (2007). University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. In CERME 5, 2290-2299.
13. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.

ضروری است، اما باید شرایط آموزشی را به‌گونه‌ای فراهم کرد که دانش‌آموزان به ضرورت استدلال‌های استنتاجی پی ببرند. با وجود اینکه مدرسه مکان مناسبی برای پرورش تفکر و مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان است، اما همان‌گونه که **آندرسون**[۵۴] و همکارانش (۲۰۰۰) بیان می‌کنند، لازم است مشخص شود که آیا بین آموخته‌های دانش‌آموزان و توانایی آنان در حل مسائل زندگی حال و آینده ارتباطی وجود دارد یا نه (نقل شده در: Kuhn, 2008).

در این راستا، یکی از وظایف معلمان ریاضی این است که در کلاس درس، فرصت‌ها و شرایطی را فراهم نمایند که در قالب آن، دانش‌آموزان از اهمیت و ضرورت اثبات و استدلال‌های معتبر و کارکردهای مختلف این مفاهیم، آگاه شوند. مطالعات (برای مثال، شونفیلد، ۱۹۹۴؛ بال و باس، ۲۰۰۳؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱) نیز نشان می‌دهند که چنانچه محیط حمایتی مناسبی برای پرورش و رشد استدلال‌های دانش‌آموزان فراهم شود، به‌طوری که آن‌ها بتوانند در کلاس درس نظرات خود را بیان کنند، همچنین استدلال‌ها و حدسیه‌های هم‌کلاسی‌هایشان را مورد نقد و بررسی قرار دهند و معلم نیز به‌خوبی این جریان نقد و بررسی را هدایت و کنترل کند، آن‌گاه این استدلال‌ها می‌توانند به سمت استدلال‌های رسمی و اثبات ریاضی سوق یابند. بدین ترتیب معلمان می‌توانند به ارتقای توانایی و مهارت‌های مربوط به استدلال و اثبات در دانش‌آموزان، کمک مؤثری کنند. برای مثال، معلم می‌تواند بعد از انجام فعالیت‌ها و تکالیف مربوط به استدلال و اثبات، با بیان سؤالاتی همچون: «می‌توانید توضیح دهید که چگونه به این جواب رسیده‌اید؟» یا «من و هم‌کلاسی‌هایتان را از درستی جوابتان مطمئن کنید»، از یادگیرندگان بخواهد که جوابشان را توضیح دهند. زیرا عمل «توضیح دادن» می‌تواند فرایند تفکر دانش‌آموزان را توسعه دهد و موجب شود که آن‌ها با استدلال‌های یکدیگر آشنا و برای ساخت ایده‌های مفید ریاضی آماده شوند.

امید است که با مطالعات بیشتر و عمیق‌تر در کشور خودمان بتوانیم در پرورش و توسعهٔ مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان، قدم‌های مؤثری برداریم که این کار به تلاش محققان آموزشی و معلمان، و همچنین حمایت مسئولان آموزش‌وپرورش و بها دادن به این تحقیقات نیاز دارد.

یکی از وظایف معلمان ریاضی این است که در کلاس درس، فرصت‌ها و شرایطی را فراهم نمایند که در قالب آن، دانش‌آموزان از اهمیت و ضرورت اثبات و استدلال‌های معتبر و کارکردهای مختلف این مفاهیم، آگاه شوند

14. Kuhn, Deanna (2008). *Education for thinking*. United states of American: Harvard university.
15. Leighton, J. P. (2003). *Defining and Describing Reasoning.* In J. O. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), The Nature of Reasoning. New York, NY: Cambridge.
16. Lithner, Johan (2000). Mathematical reasoning in task soving. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 165-190.
17. Mansi, K. E.(2003). *Reasoning and proof in mathematics Education: A Review of Litereture.* A Theses submitted to the graduate faculty of north Carolina State university in partial fultillment of the degree of master of science.
18. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpuplished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
19. Mueller, Mary, Maher, Carolyn (2009). Learning to Reason in an Informal Math After-School Program, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 21, No. 3, 7-35.
20. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics,Inc.
21. Paddack, Megan (2009). *The process of making meaning: The interplay between teachers knowledge of mathematical proofs and their classroom practices.* Unpuplished doctoral dissertation, university of new Hampshire, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
22. Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior,* 13(1), 55-80.
23. Stacey, Kaye & Vincent, Jill (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Science and Mathematics Education,* 72, 271-288.
24. Stylianides, Andreas J. (2007). Proof and proving in school mathematics, Journal for reasearch in *Mathematics education*, 38(3), 289-321.
25. Stylianides, Andreas J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. Pythagoras, 32(1), Art.# 14, 10 pages. (dio: 10, 4102/pythagoras. v32i1, 14).
26. Stylianides, A. J., & Ball, D.L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowing about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 11,307-332.
27. Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning,* 10, 103-133.
28. Varghese, Thomas, (2007). *Students teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.
29. Wu, Ying - Tien & Tsai, Chin-Chung (2007). High school students' informal reasoning on a socio-scientific issue: Qualitative and quantitative analyses. *International journal of science education,* 29(9), 1163-1187.
30. Yankelewitz, Dina (2009). *The Development of mathematical reasoning in elementary school students exploration of franction ideas,* Unpuplished doctoral dissertation, university of New Jersey, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
31. Yankelewitz, Dina, Muelle, Mary & Maher, Carolyn A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 76-85.

❊ Math5fa@yahoo.com

مغالطات در محاورات

آموزشی

غلامرضا یاسی‌پور

مقدمه

بسیاری از دانش‌آموزان بر این تصورند که مغالطه تنها در حوزهٔ ریاضیات رخ می‌دهد، و غافل از این‌اند که ما در صحبت‌های روزمره‌مان، مرتباً و بدون آنکه متوجه باشیم، در شبکهٔ مغالطات می‌افتیم و بندی این بندهای درهم‌تنیده می‌شویم.

در این مقاله به‌صورتی بسیار کوتاه به پاره‌ای از این مغالطات اشاره می‌کنیم و خاطرنشان می‌سازیم که مغالطاتِ محاورات بسی بیشتر از این مواردی است که ما آورده‌ایم. خواننده خود باید با دقت و فراست مواظب باشد که با شناخت آن‌ها، نه خود در هزارتویشان گرفتار آید و نه به دیگری اجازهٔ ماندن در آن را بدهد.

کلیدواژه
استدلال ریاضی، تفکر منطقی، ریاضیات مدرسه‌ای، آموزش ریاضی

■ تعریف مغالطه

مغالطه در لغت، به معنی به «غلط افکندن» است و در اصطلاح منطق، بدین مفهوم است که از مقدمات استدلالمان، با مقدمه یا مقدماتی به ظاهر موجه، نتیجه‌ای دلخواه را به‌دست آوریم.

و اینک چند مغالطه که در محاورات روزانه به‌کار می‌روند و مشهورترند:

■ مغالطهٔ «که» و «چه»

حضرت **علی**(ع) در «نهج‌البلاغه» می‌فرماید: «اُنظُر اِلی ما قالَ و لاتَنْظُر الی مَن قالَ.»

سعدی شیرازی این قاعده را به بهترین صورتی در «گلستان» خود ترجمه کرده است و می‌فرماید: «ببین **چه** می‌گوید، مبین که می‌گوید.»

اغلب ما در محاورتمان، مرتکب این مغالطه می‌شویم و برای اثبات عقیده‌مان از شخصی مشهور نقل قول می‌کنیم. در حالی‌که اگر بعضی از سخنان این شخص درست است، به هیچ‌وجه معلوم نیست که تمام سخنان او درست باشد. بسیار امکان دارد، این سخنی که از او نقل کرده‌ایم، سخنی نادرست باشد. نیز به این علت که اگر سخنی بشنویم، توقع داریم که گوینده خود به آن عمل کرده باشد، و اگر این چنین نباشد، آن کلام را حتی در صورت درست بودن قابل قبول نمی‌دانیم. در حالی‌که بسیار امکان دارد گوینده‌ای سخن بسیار درستی بگوید، اما خود به آن عمل نکند. **مولوی** در این مورد تمثیلی می‌آورد که اشاره به‌همین حالت دارد. او می‌فرماید:

همچو جوی است او نه آبی می‌خورد
آب از او بر آب‌خواران بگذرد
آب در جو زان نمی‌گیرد قرار
زانکه آن جو نیست تشنه و آب‌خوار

سعدی نیز در گلستان با توجه به این مطلب می‌گوید:

باطل است آنچه مدّعی گوید:
«خفته را خفته کی کند بیدار»
مرد باید که گیرد اندر گوش
ور نوشته است پند بر دیوار

و در این سخن اشاره به این دارد که آدمی باید به «چه» توجه داشته باشد نه به «که». به‌عبارت دیگر، این «سخن» است که باید بررسی شود نه «گویندهٔ سخن». البته در این مورد باید معصومان را مستثنا کرد.

بخش اول

■ مغالطهٔ جهان‌بینی

پاره‌ای از افراد بر این تصورند که چون به اصطلاح دنیا دیده‌اند، پس می‌توانند هرچه به زبانشان می‌آید بگویند، و آن را درست پندارند. از همه مهم‌تر شنوندهٔ آن‌ها نیز باید به‌درستی آن گردن نهد و اقرار کند! در حالی‌که خبر ندارند جهان بسیار وسیع‌تر از آن است که پنداشته‌اند و جهان‌بینی‌شان از آن حقیرتر که در خاطر نگاشته‌اند.

مولوی در این مورد می‌فرماید:

تو جهان را قدر دیده دیده‌ای
کو جهان؟ سبلت چرا مالیده‌ای

(مثنوی)

و بعد این تمثیل زیبا را می‌آورد:

آن مگس بر برگ کاه و بول خر
همچو کشتی‌بان همی افراشت سر
گفت من کشتیّ و دریا خوانده‌ام
مدتی در فهم آن می‌مانده‌ام
اینک این کشتیّ و این دریا و من
مرد کشتی‌بان و اهل رای و فن

(مثنوی)

در این مورد، این سخن هم از شاعر معاصر، **حمیدی شیرازی** شنیدنی است:

پشه‌ای گردان چو گردی در فضا
روی یال شیری افتاد از قضا
بسکه آن ناچیز خودبینیش بود
پیش خود بر شیر سنگینیش بود
لحظه‌ای نگذشته با شیر کلان
گفت آن مسکین لاغر کای فلان:
گر تو را بر دوش سنگینیم ما
زود گو تا بیش ننشینیم ما
شیر گفت از این زمان تا هر زمان
هر کجایی هرچه می‌خواهی بمان
گرنه خود گفتی به دوشم جسته‌ای
خود ندانستم کجا بنشسته‌ای

شیخ **محمود شبستری** نیز با اشاره به‌همین حقارت جهانی‌بینی این‌گونه اشخاص می‌فرماید:

تو از عالم همین لفظی شنیدی
بیا بر گو که از عالم چه دیدی؟

(گلشن راز)

■ مغالطهٔ نسبی‌بودن بدی

اغلب اوقات دچار این مغالطه می‌شویم که بدی را مطلق می‌دانیم و تصور می‌کنیم که در جهان بد مطلق موجود است؛ در حالی‌که چنین نیست. مولوی در این مورد زهرمار

را مثال می‌آورد و می‌گوید:

زهرمار آن مار را باشد حیات
از برای دیگری آمد ممات
پس بد مطلق نباشد در جهان
بد به نسبت باشد این را هم بدان

(مثنوی)

و به این ترتیب نشـان می‌دهد که چون هر شیء از یک یا چند جهت خوب، و از جهت یا جهات دیگر بد است، پس بد مطلق در جهان موجود نیست.

گرچه در اینجا می‌توان خاطرنشان کرد که هرچه تجربه و دانش ما بیشتر شود، بدی این بد نسبی هم کمتر می‌شود، و مثـلاً از همین زهرماری که برای انسـان مرگ می‌آورد ـ چون دانش و تجربهٔ آدمی بیشـتر شـود ـ پاره‌ای از داروها را برای نجات همین انسـان می‌سـازند و در اختیارش قرار می‌دهند. پس در این مورد نیز باید توجه داشـته باشیم که از بـد، به‌طور مطلق بهره‌برداری نکنیم، و در دام این مغالطه نیفتیم.

■ مغالطهٔ سفید و سیاه

پاره‌ای از اشـخاص، زمانی که از کسـی یا چیزی سخن بـه میان می‌آورند، یا آن را سـفید سـفید یا سـیاه سـیاه در نظـر می‌گیرنـد، در حالی‌کـه چنین نیسـت. در کتاب **«اسرارالتوحید» ابوسعید ابوالخیر** چنین آمده است: روزی شـیخ با اصحاب در کوچه‌ای روان بودند، در مسیر به سگی مرده برخوردند که مدتی از مرگش می‌گذشت و جسدش بو گرفته بود. مریدان شـیخ همه بینی خود را با دست گرفته دور شـدند، جز شیخ که نزدیک لاشهٔ سگ مرده رفت، و به دندان‌هایش اشاره کرد و گفت چه دندان‌های سپیدی دارد.

سعدی می‌فرماید:

دشمن چو بینی ناتوان، لاف از بُروت خود مزن
مغزی است در هر استخوان، مردی است در هر پیرهن

(گلستان)

باید توجه داشـت کـه در این‌گونه موارد سـفیدی و سـیاهی مطلـق وجود نـدارد و این دو را بایـد به درجات سنجید. گرچه در این اواخر اصطلاح **خاکستری** نیز مطرح می‌شود، ولی کافی نیست و بین سیاهی و سفیدی به قول قدما هزار مرحله موجود است. توجه کنیم که این برخورد نادرسـت ما از منطق **ارسـطویی**مان سرچشمه می‌گیرد. می‌دانیم که در **منطق ارسـطویی** که **«منطق دو ارزشی»**[1] اسـت، یک گزاره یا راست اسـت یا دروغ. یعنی یک گزاره نمی‌توانـد در آن واحـد (و دیگر وحدت‌هـای تناقض) هم راست باشد هم دروغ، و نه راست باشد نه دروغ. ناچار باید یکی از این دو باشـد. این منطق به جفا در اسـتدلال‌های روزمره‌مان رخنه کرده اسـت و ما را به سمت مطلق‌گرایی سـوق می‌دهد و موجب افتادنمان در دام چنین مغالطه‌ای می‌شود.

این را هم تذکر بدهیم که در مقابل منطق دو ارزشـی متعارفمان، **«منطق چندارزشـی»**[2] قـرار دارد و این اواخر توسـط یک ایرانی به‌نام **لطفی‌زاده**، **«منطق فازی»**[3] مطرح شده که بی‌شمار ارزشی است.

اشـارهٔ دیگری که در این مورد می‌تـوان کرد، مربوط به بعضی شـبکه‌های اینترنتی است که در آن‌ها تنها لغت «like» موجود است، در حالی‌که کاربران بر این خواسته‌اند کـه موارد دیگری چون «love» و «hate» و تعدادی دیگر از این‌گونه موارد نیز در دسترسشـان باشد، زیرا فقط یک اصطلاح را برای بیان منظورشان کافی نمی‌دانند.

پی‌نوشت‌ها

1. two valued logic
2. many valued logic
3. fuzzy logic

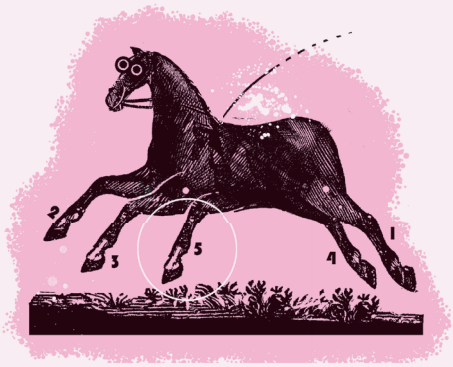
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چند لطیفهٔ ریاضی

بعد از تفکر روی چند معما و پارادوکس، حالا گوش‌کردن به این چند لطیفه، آرام‌بخش است!

لطیفهٔ اول

یک شیمی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک ریاضی‌دان در یک جزیره گرفتار شده بودند و غذایشان تمام شده بود. تنها یک قوطی کنسرو داشتند، اما دربازکن نداشتند. فیزیک‌دان و شیمی‌دان در حال بحث گرمی در مورد راه‌های باز کردن در قوطی بودند، ناگهان ریاضی‌دان از جا پرید و در حالی‌که انتظار داشتند حرف تازه‌ای در این مورد بگوید، گفت: «بیایید فرض کنیم ما یک دربازکن داریم...!»



لطیفهٔ دوم

ریاضی‌دان می‌خواست یک میز کار طراحی کند. او نخست میزی بدون پایه طراحی کرد. سپس میزی با تعدادی نامتناهی پایه طراحی کرد! سپس بقیهٔ عمرش را صرف تعمیم این موضوع کرد که میزی با n پایه طراحی کند، به‌طوری که n لزوماً یک عدد طبیعی نباشد!

لطیفهٔ سوم

این مسئله را برای یک ریاضی‌دان، یک فیلسوف و یک مهندس مطرح کردند: «اگر دم اسب را به‌عنوان یک پا تعریف کنیم، حالا اسب چندپا دارد؟»

ریاضی‌دان گفت: «۵ تا»، فیلسوف گفت: «یکی» و مهندس گفت: «نمی‌توانید این کار را بکنید!»

پاسخ ایستگاه‌های اندیشه و ادب ریاضی این شماره

ایستگاه اول: رمز جدول همان عنوان جدول است. فرهنگ و اندیشه!

ایستگاه دوم: معماهای بامزه!

معمای اول: یک راه این است که اول ساعت‌ها را با هم به‌کار بیندازیم و وقتی ساعت هفت دقیقه‌ای به‌آخر رسید، چهار دقیقه از شن ساعت ۱۱ دقیقه‌ای باقی‌مانده است. از همان لحظه تخم‌مرغ‌ها را در آب قرار می‌دهیم و بعد از تمام‌شدن زمان کار ساعت ۱۱ دقیقه‌ای، آن را سروته می‌کنیم تا ۱۱ دقیقهٔ دیگر هم جوشیدن تخم‌مرغ‌ها ادامه یابد و در مجموع ۱۵ دقیقه بجوشند. ولی در این صورت مجبور می‌شویم برای خوردن آن ۲۲ دقیقه صبر کنیم!

راه بهتر و کمی دشوارتر آن است که ما انجام دادیم: تخم‌مرغ‌ها را فوراً در آب گذاشتیم و هم‌زمان هر دو ساعت را به‌کار انداختیم. وقتی کار ساعت ۷ دقیقه‌ای تمام شد، آن را برگرداندیم و وقتی کار ساعت ۱۱ دقیقه‌ای تمام شد، به اندازهٔ ۴ دقیقه شن، ته ساعت ۷ دقیقه‌ای جمع شده بود. آن را یک‌بار دیگر برگرداندیم و ۴ دقیقهٔ دیگر را برای ادامهٔ جوشیدن تخم‌مرغ‌ها اندازه گرفتیم.

معمای دوم: تخم‌مرغ‌ها را در آب انداختیم و هر دو ساعت را به‌کار انداختیم. وقتی ساعت ۴ دقیقه‌ای کارش تمام شد، آن را برگرداندیم و وقتی ساعت ۷ دقیقه‌ای کارش تمام شد، آن را هم برگرداندیم. یک دقیقهٔ بعد ساعت ۴ دقیقه‌ای کارش تمام شد و ۸ دقیقه سپری شد و به اندازهٔ ۶ دقیقه شن در بالای ساعت ۷ دقیقه‌ای باقی بود. یک دقیقه شن هم در پایین آن ریخته بود. پس بلافاصله ساعت ۷ دقیقه‌ای را دوباره برگرداندیم تا یک دقیقهٔ دیگر هم محاسبه شود.

معمای سوم: برخلاف تصور اولیه، کار ساده است: دو کتلت را درون ماهی‌تابه قرار می‌دهیم و یک دقیقه بعد یکی از آن‌ها را برمی‌گردانیم و یکی را از ماهی‌تابه خارج می‌کنیم. سپس کتلت سوم را به‌جای آن می‌گذاریم. یک دقیقهٔ بعد طرف دوم کتلت اول پخته و آن را خارج می‌کنیم و کتلت دوم را هم برمی‌گردانیم. کتلت سوم را هم که بیرون بود، به داخل ماهی‌تابه می‌بریم و طرف دوم آن را هم به همراه طرف دوم کتلت دوم سرخ می‌کنیم. پس بعد از سه دقیقه هر سه کتلت آماده‌اند!

همراه با مخاطبان

در نهایت خوش‌بختی، نامه‌ها و پیام‌نگارهای متعدد شما عزیزان، همچنان بارقهٔ امید راه دشواری است که ما برگزیده‌ایم. به ما نوید داشتن یاران و همراهانی وفادار را برای ادامهٔ این مسیر می‌دهد. پاسخ‌های ما را به بخشی از این نامه‌ها و پیام‌نگارها ملاحظه می‌کنید:

● آقایان حسن و محمد طبیعی

مطالبتان به دستمان رسید. مانند گذشته به مجله محبت دارید و ما هم سعی می‌کنیم از مطالب ارسالی‌تان استفاده کنیم. پاسخ‌های آقای محمد طبیعی به مسائل بخش «پای تخته» هم به مسئول این بخش تحویل داده شد.

● آقای محمدکریم نائل از دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان

مقاله‌تان با عنوان «حل یک مسئلهٔ هندسی با چند راه‌حل» به دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آتی مورد استفاده قرار می گیرد. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● آقای بهرام دستوریان، از دانشگاه آزاد اسلامی واحد دهدشت

دو مطلب ارسالی شما با عنوان‌های «جدول فرهنگ و اندیشه» و «همهٔ اعداد حسابی با هم برابرند؟!» به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما، از جدول عددی ارسالی‌تان در ایستگاه اندیشه و ادب همین شماره استفاده کردیم. اما در مورد مقاله‌تان یادآور می‌شویم، ایده‌هایی که در مورد پارادوکس‌هایتان به‌کار برده‌اید، تکراری و قدری کهنه‌اند و بارها مورد استفادهٔ طراحان پارادوکس‌ها (یا سفسطه‌ها!) قرار گرفته‌اند. اگر بتوانید روی مسائل جدی‌تر مورد نیاز دانش‌آموزان تمرکز کنید و برایمان مطلب بفرستید، حتماً از آن‌ها استفاده می‌کنیم و سپاس‌گزارتان خواهیم بود.

● خانم فاطمه رضانژاد از شهرستان رودبار

مطلبتان با عنوان «ریاضیات ذهنی» به دستمان رسید. به‌نظر می‌آمد بیشتر برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی مناسب باشد، لذا آن را به همکارانمان در مجلهٔ رشد برهان متوسطهٔ ۱ تحویل دادیم تا ان‌شاءالله مورد استفاده قرار دهند.

● آقای محمد رحمانی از شهرستان تاکستان استان زنجان

مقاله‌تان با عنوان «محاسبهٔ

انتگرال به کمک مساحت» به دستمان رسید. فرمت ارسال ایمیل‌تان طوری بود که هنگام پرینت گرفتن از آن، بعضی از فرمول‌ها و شکل‌ها حذف شدند. لذا از شما خواهشمندیم که مطلبتان را بار دیگر اصلاح و برایمان ارسال کنید. علاوه بر این، بارها متذکر شده‌ایم که در ابتدای مقالهٔ ارسالی، مشخصات کامل و سمت خود را ذکر کنید و یک تلفن تماس نیز بگذارید.

در مورد محتوای مقاله‌تان هم باید بگوییم که بحث «انتگرال» آن هم در این سطح، تنها در ماه‌های پایانی سال تحصیلی و در سطح دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی مطرح می‌شود، لذا تنها می‌تواند مورد اقبال دستهٔ بسیار کوچکی از خوانندگان مجله واقع شود. از شما دوست عزیز خواهشمندیم روی مطالب عمومی‌تر تمرکز کنید و باز هم ما را مورد عنایت خود قرار دهید. با این همه، ضمن سپاس از شما و در صورت ارسال مجدد مقاله، امیدواریم بتوانیم از آن در یکی از شماره‌های بعدی استفاده کنیم.

● آقا یا خانم اسدی

مطلبتان با عنوان «احتمال» به‌دست ما رسید. باز هم توصیه می‌کنیم مشخصات کامل و سمت خود را در ابتدای مقاله بنویسید و حتماً یک شماره تلفن تماس ذکر کنید. با سپاس از شما امیدواریم در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده کنیم.

● خانم رقیه شهبازی از شهرستان عجب‌شیر استان آذربایجان‌شرقی

ایمیل‌های ارسالی‌تان به دستمان رسید. با سپاس فراوان از توجهتان به مجله، توصیه می‌کنیم که مطالبی را برایمان بفرستید که ایدهٔ آن‌ها به‌طور کامل از خودتان باشد. به‌جای اقتباس از منابع داخلی یا خارجی، سعی کنید دربارهٔ مفاهیم سادهٔ ریاضی قلم بزنید و آنچه را که به نظرتان مفید می‌آید، مطرح سازید. با این حال در صورت امکان سعی می‌کنیم از مطالبتان استفاده کنیم.

● آقای نوید نصرت‌زهی از شهرستان سراوان

مطلب شما دربارهٔ روش‌های ضرب سریع اعداد، به دستمان رسید. به‌نظر می‌رسید که بیشتر برای طرح در مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۱ مناسب باشد و لذا به همکارانمان در آن مجله تحویل داده شد.

● خانم مریم حیدری عبداللهی از شهرستان یزد

با سپاس فراوان از ارسال جدول واژگان ریاضی، به شما بابت ذوق و سلیقه‌تان تبریک می‌گوییم و توصیه می‌کنیم در این زمینه بیشتر فعالیت کنید و یاری‌رسان مجله‌تان شوید. از جدول ارسالی‌تان در یکی از شماره‌های آینده حتماً استفاده می‌کنیم. مقاله‌تان با عنوان «گذر از سختی‌ها...» هم به دستمان رسید. البته ترجمهٔ مطالب مجلات خارجی با ذکر منبع (که شما هم چنین کرده‌اید)، مناسب و قابل استفاده است، ولی تلاش کنید خودتان هم دست به قلم ببرید و مقالات مناسبی، با توجه به اشرافی که به نیازهای دانش‌آموزان دارید، برای آنان بنویسید. از مقاله‌تان در یکی از شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد. با تشکر از شما، باز هم با ما در تماس باشید.

● آقای سیداحسان حسینی از شهرستان دره‌شهر استان ایلام

مقاله‌تان با عنوان «شاهزادهٔ ریاضیات» به دستمان رسید. با تشکر فراوان از توجهتان به مجلهٔ خودتان، و به‌خصوص توجهتان به تاریخ ریاضیات، حتماً در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌کنیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

با عرض معذرت از دیگر دوستانی که به‌دلیل محدودیت فضای مجله، امکان پاسخ‌گویی در این شماره به آن‌ها فراهم نشد، ادامهٔ پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها را به شمارهٔ بعد موکول می‌کنیم. با آرزوی توفیق برای همهٔ خوانندگان و دوستداران مجله، تا شمارهٔ ویژهٔ مهرماه همگی را به خدا می‌سپاریم.

مسائلی برای حل

مسائل ریاضی ۱

مصطفی دیداری

۱. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) در مقایسهٔ دو عدد، عدد بزرگ‌تر در سمت ... عدد کوچک‌تر قرار دارد.

ب) روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این اعداد را اعداد ... می‌نامیم.

ج) عدد π تا دقت دو رقم اعشار برابر است با...

د) $|x|$ برابر است با ... عدد x تا صفر.

۲. عبارت رادیکالی زیر را ساده کنید:

$\sqrt[3]{40}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt[3]{5}$

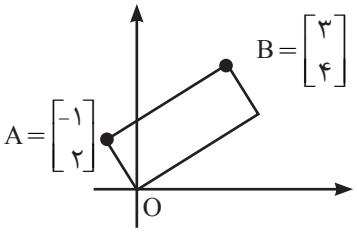
۳. حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

$(a+2b)^3-a(a-2b)^2$

۴. تجزیه کنید.

$27x^3-8y^3$

۵. مساحت مستطیل زیر را بیابید.



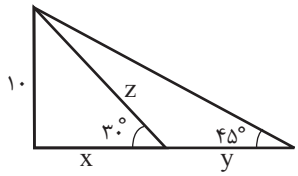
۶. اگر نقطهٔ $\begin{bmatrix}-3\\m+1\end{bmatrix}$ روی خط $(2m-1)x+\frac{2}{3}y=7$ باشد، m را به‌دست آورید.

۷. دو خط $3x+2y=5$ و $x-y=5$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) محل تلاقی دو خط را به‌دست آورید.

ب) معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط بگذرد و بر خط $y+3x=2$ عمود باشد.

۸. مقدار x، y و z را به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آورید.



۹. اگر $\theta=30^\circ$ باشد، حاصل عبارت $\sin^2\theta-\cos2\theta+2\tan\theta$ را به‌دست آورید.

۱۰. درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)}=1-\sin\theta\cos\theta$$

$(\sin\theta+\cos\theta\neq0)$

۱۱. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{x-1}{2x-3}-\frac{x^2+4}{4x^2-9}$

ب) $\frac{4x^2-25y^2}{(x+4)}\div\frac{2x^2y+5xy^2}{x^2+8x+16}$

۱۲. تقسیم زیر را انجام دهید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به‌دست آورید:

$12x^3+36x-1 \,\big|\, x+1$

۱۳. مخرج عبارت رادیکالی زیر را گویا کنید.

$\frac{1}{2\sqrt{a}+a\sqrt{2}}$

۱۴. معادلات درجهٔ دوم زیر را با روش‌های خواسته شده حل کنید.

الف) (روش مربع کامل)

$x^2-6x-7=0$

ب) (روش کلی) $2x^2-3x-5=0$

ج) (روش هندسی) $x^2-x-2=0$

۱۵. اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-1)x^2-2x+3=0$ دارای جواب حقیقی نباشد، حدود m را به‌دست آورید.

۱۶. نامعادلهٔ زیر را حل کنید و جواب را روی محور نمایش دهید.

$2(1-x)-3(1+x)\leq6$

۱۷. هزینهٔ رفت و برگشت سفر به اصفهان ۷۰/۰۰۰ تومان، هزینهٔ خوراک ۱۳۰/۰۰۰ تومان و هزینهٔ هر شب اقامت در هتل ۵۰/۰۰۰ تومان است. با ۴۷۰/۰۰۰ تومان حداکثر چند روز می‌توان در اصفهان اقامت کرد؟ (نامعادلهٔ موردنظر را بنویسید.)

مسائل ریاضی ۲

مصطفی دیداری

۱. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات نهم و دهم برابر با ۵۶ و جملهٔ پنجم برابر با ۱۰ است. دنباله را مشخص کنید و جملهٔ بیستم دنباله را به‌دست آورید.

۲. اگر رابطهٔ

$f=\{(-1,a-b),(a-b,5),(-1,3),(3,a+b)\}$

تابع باشد:

الف) a و b را به‌دست آورید.

ب) حاصل $f(-1)+f^{-1}(5)$ را به‌دست آورید.

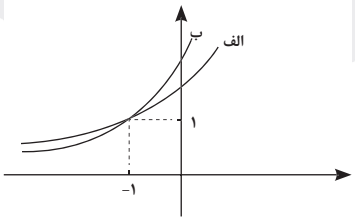
۳. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-|x+1|-2$ را به کمک انتقال به‌دست آورید (با رسم مراحل).

۴. دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\frac{1}{x(x^2-4)}$

ب) $g(x)=\sqrt{\frac{x-4}{1-x}}$

۵. مشخص کنید دو نمودار (الف) و (ب) مربوط به کدام یک از توابع $y=2^{x+1}$ و $y=3^{x+1}$ هستند؟



۶. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\log_{x^2}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$$

۷. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$A=\log_9 3\sqrt{3}-2\log_5\frac{1}{25}$$

۸. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\log(x+1)-\log(x-1)=2\log 2-1$$

۹. $\frac{11\pi}{6}$ رادیان را به درجه تبدیل و آن را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

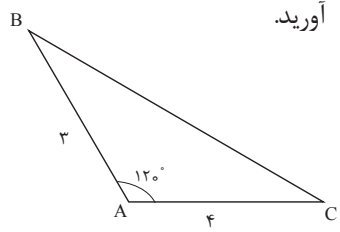
۱۰. حاصل $\sin(\frac{7\pi}{4})+\cos 210^\circ$ را به‌دست آورید (ساده‌کردن لازم نیست).

۱۱. اگر $0\le\theta\le 2\pi$ باشد، زوایای θ را به‌گونه‌ای بیابید که $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد (با رسم شکل).

۱۲. الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4\cos 2x$ را در یک دورهٔ تناوب رسم و حداقل و حداکثر آن را تعیین کنید.

ب) محل برخورد تابع با محور xها را در نمودار مشخص کنید.

۱۳. با توجه به شکل زیر طول ضلع BC و مساحت مثلث و $\sin\hat{C}$ را به‌دست آورید.



۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2A^2+I)^{-1}$ را به‌دست آورید.

۱۵. دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید:

$$\begin{cases}2x-3y=5\\ x-y=1\end{cases}$$

۱۶. به چند طریق می‌توان با حروف کلمهٔ FLOWER کلمهٔ چهارحرفی ساخت که (تکرار مجاز نیست):

الف) دارای حرف L باشد و دارای حرف O نباشد.

ب) دو حرف O و L در کلمه موجود و در کنار هم باشند.

۱۷. مقدار n را از تساوی زیر به‌دست آورید.

$$P(n,2)=C(n,3)$$

۱۸. از بین ۴ دانش‌آموز تجربی، ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۳ دانش‌آموز انسانی می‌خواهیم شورایی سه‌نفره تشکیل دهیم. به چند روش می‌توان اعضا را انتخاب کرد، در صورتی‌که:

الف) رشتهٔ دانش‌آموزان مهم نباشد.

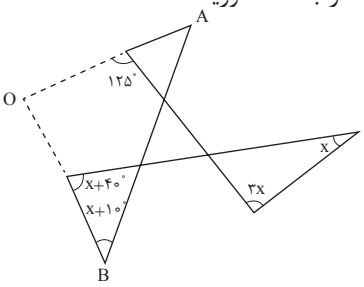
ب) از هر رشته به تعداد مساوی در شورا انتخاب شود.

مسائل هندسهٔ ۱

هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو قطر آن با هم برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۲. در شکل زیر $OA=OB$ است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.



۳. ثابت کنید هر مثلثی که در آن میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

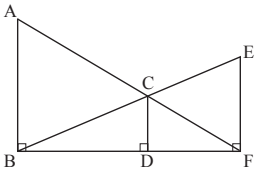
۴. در مثلث ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، $AB=2$ و $AC=6$ است. طول ارتفاع AH را به‌دست آورید.

۵. در ذوزنقهٔ ABCD، CD و AB به ترتیب قاعده‌های بزرگ و کوچک و AD و BC ساق‌ها هستند. می‌دانیم که: $AD=AB=6cm$. مساحت ذوزنقه را به‌دست آورید، اگر $A\hat{D}C=30^\circ$ و $D\hat{C}B=60^\circ$ باشد.

۶. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها توان دوم نسبت تشابه‌است.

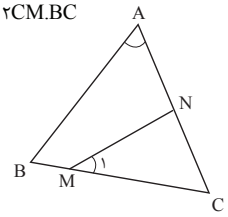
۷. در شکل زیر AB، EF و CD بر BF عمود شده‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{CD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{EF}$$



۸. در شکل زیر $\hat{M}_1=\hat{A}$ است. اگر N وسط AC باشد، ثابت کنید:

$$AC^2=2CM.BC$$



۹. در مثلث ABC، ارتفاع‌های BM و CN بر اضلاع AC و AB رسم شده‌اند. اگر $AM = ۲cm$ ، $AB = ۵cm$ و $MN = ۱/۵cm$ باشد، طول BC را به‌دست آورید.

۱۰. طول یال‌های مکعب مستطیلی ۱، $\sqrt{۳}$ و ۲ واحد است. زاویهٔ قطر اصلی مکعب مستطیل را با یال بزرگ‌تر به‌دست آورید.

۱۱. مساحت کل یک منشور قائم با قاعدهٔ مربع برابر ۱۸۲ واحد سطح است. اگر مجموع طول‌های ارتفاع و ضلع قاعدهٔ آن ۱۰ واحد باشد، حجم منشور را به‌دست آورید.

۱۲. حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مربعی به ضلع a و هر یک از وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقین به ضلع b باشد.

۱۳. حجم مخروطی را به‌دست آورید که شعاع قاعدهٔ آن با شعاع کره‌ای به حجم ۲۸۸π، و ارتفاع آن، با ارتفاع منشوری به حجم $۱۰\sqrt{۳}$ که قاعدهٔ آن مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد است، برابر باشد.

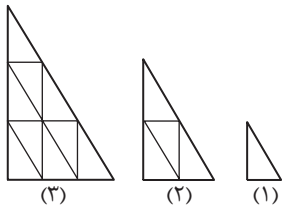
۱۴. طول قطر یک مکعب مستطیل مساوی $۲\sqrt{۳}$ و مساحت کل آن مساوی ۲۴ واحد است. حجم این مکعب مستطیل را به‌دست آورید.

سؤالات هندسهٔ ۲

هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۱

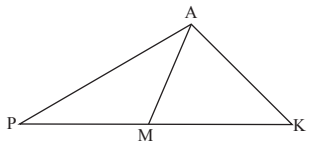
۱. مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک همه با یکدیگر هم‌نهشت هستند. با توجه به شکل‌های زیر و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹	؟	...	؟



۲. **قضیه:** ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

۳. در مثلث PAK، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر $PM = AK$، آن‌گاه: $AM > MK$.



۴. **قضیه:** ثابت کنید عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرس‌اند.

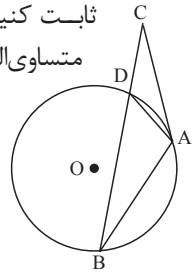
۵. خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد. با توجه به اندازهٔ R روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.

۶. **قضیه:** ثابت کنید طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.

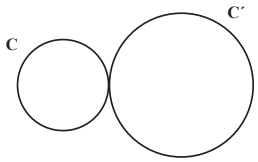
۷. پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر داده شده است. کمان در خور زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به این پاره‌خط مفروض است. شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.

۸. **قضیه:** ثابت کنید اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

۹. در دایرهٔ O، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند.
خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است.
ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



۱۰. شکل زیر نشان‌دهندهٔ دو دایرهٔ مماس برون است.



الف) این دو دایره دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی هستند؟

ب) اگر $R = ۴$ و $R' = ۹$ آن‌گاه اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.

۱۱. نقاط $A(۶,۱)$، $B(۸,۳)$، $C(۶,۵)$ و $D(۴,۳)$ رأس‌های یک مربع هستند.

الف) مربع و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y) = (x-۵, y-۲)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب خط AB و تصویرش را به‌دست آورید و با هم مقایسه کنید.

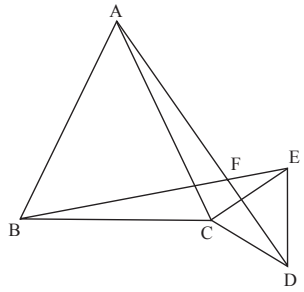
پ) آیا تبدیل ایزومتری است؟ چرا؟

۱۲. خط به معادلهٔ $L: ۳x - ۲y - ۱۲ = ۰$ و تصویرش را تحت تبدیل تجانس $D(x,y) = (\frac{۱}{۲}x, \frac{۱}{۳}y)$ رسم کنید. سپس معادلهٔ خط تصویر را به‌دست آورید.

۱۳. مثلث ABC و مثلث ECD

متساوی‌الاضلاع هستند. با استفاده از تبدیل دوران ثابت کنید:

$AD = BE$ و $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.



۱۴. درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید:

الف) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی، از هر زاویهٔ داخلی آن بزرگ‌تر است.

ب) تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

پ) اگر دو خط متقاطع باشند، تحت یک بازتاب نیم‌ساز زاویهٔ تشکیل شده بین خط و تصویرش محور تقارن است.

ت) اگر دو صفحهٔ P و P′ برهم عمود باشند، هر خط عمود بر صفحهٔ P بر صفحهٔ P′ نیز عمود است.

۱۵. **قضیه:** ثابت کنید اگر خط L با صفحهٔ P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می‌کند.

۱۶. اگر سه خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ دوبه‌دو متقاطع باشند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همرس‌اند.

۱۷. ثابت کنید دو صفحهٔ P و P′ موازی هستند، اگر و تنها اگر هر خط واقع بر یکی از این صفحه‌ها با صفحهٔ دیگر موازی است.

۱۸. الف) دو خط متنافر را تعریف کنید.

ب) نشان دهید اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز عمود است.

سؤالات حسابان

مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۱

۱. ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید. (گنجایش شیشه‌ها را برحسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید.)

۲. در دنبالهٔ هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.

$\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \ldots$

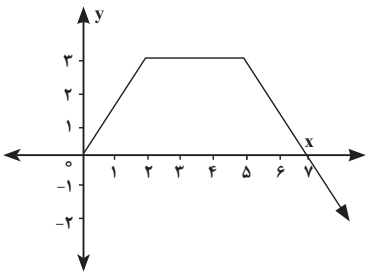
۳. معادلهٔ $\sqrt{۱-x} - ۱ = x^۲ - ۲x$ را با روش هندسی حل کنید.

۴. جاهای خالی را با عبارات ریاضی مناسب پر کنید:

الف) مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\frac{x}{x-۳} + \frac{۳}{x-۱} = ۵$ برابر است با...

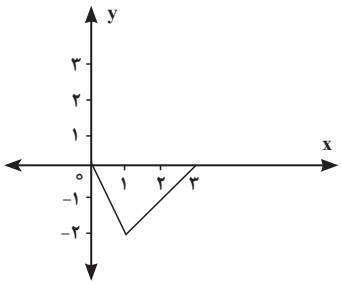
ب) اگر $x \le ۱$ باشد، ضابطهٔ تابع $y = |x-۳| + |x-۱|$ بدون استفاده از قدرمطلق برابر است با...

ج) تابع زیر در بازهٔ... صعودی اکید و در بازهٔ ... نزولی اکید و در بازهٔ ... ثابت است.



د) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $cx^۲ + bx + a = ۰$ برابرند با ... و ... $(c \neq ۰)$

۵. در شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x-۳)$ و سپس نمودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید.



۶. اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$ و $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند:

الف) تابع fog را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۷. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-۲)^۳$ و $x \ge ۲$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ وارون آن را بنویسید.

۸. سینوس زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$ را حساب کنید.

۹. تمامی جواب‌های معادلهٔ $۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$ را تعیین کنید.

۱۰. مقدار $\cos(\tan^{-۱}\frac{۳}{۴})$ را حساب کنید.

۱۱. حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$

ب) $\lim_{x \to ۳^+} (x - [x])$

ج) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos ۲x}{\cos x - \sin x}$

۱۲. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته شود.

$$f(x) = \begin{cases} a - |x-۱| & x \ge ۱ \\ \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x < ۱ \end{cases}$$

۱۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده

باشد، ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

۱۴. معادلهٔ خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=2x^3-x$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی به‌دست آورید.

۱۵. مشتق بگیرید (ساده کردن الزامی نیست):

الف) $y=(x^3+\frac{1}{x})$

ب) $y=3(2x-5)^4+\sqrt[3]{x}$

ج) $y=\frac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}$

۱۶. آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ (دلیل خود را توضیح دهید.)

سؤالات جبر و احتمال

مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۱

۱. با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$(1+\sqrt{3})^n \geq 1+n\sqrt{3}$

۲. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ (با ذکر دلیل)

الف) اگر a و b دو عدد صحیح و فرد و هر دو مضربی از ۵ باشند آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب ۱۰ است.

ب) اگر a یک عدد حقیقی و $a^2>0$ باشد، آن‌گاه $a>0$ است.

پ) اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.

۳. ۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده‌ایم. حداقل چند تا از آن‌ها باقی‌ماندهٔ یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت و چرا؟

۴. اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$

۵. با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n+3)$ زوج باشد، آن‌گاه n یک عدد فرد است.

۶. مجموعه‌های $A=\{2^k \mid k\in N, k\leq 2\}$ و $B=\{x^2 \mid x\in N, x\leq 3\}$ مفروض‌اند:

الف) A و B را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

ب) $A\Delta B$ را مشخص کنید.

ج) $(A\Delta B)\times A$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

۷. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $(C\cap A\cap B)\cup(A-C)\cup(A-B)=A$

ب) $A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$

۸. رابطهٔ R روی R^2 به صورت زیر تعریف شده است:

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ab=cd$

الف) نشان دهید که این رابطه هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی $[(-1,2)]$ را مشخص کنید.

۹. یک طرف سکهٔ سالمی عدد ۱ و در طرف دیگر آن عدد ۲ را نوشته‌ایم. این سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربهٔ تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A را که در آن، مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب اول و دوم برابر ۳ باشد، مشخص کنید.

پ) پیشامد B را که در آن، عدد ظاهر شده در پرتاب دوم برابر ۱ باشد، بنویسید.

ت) پیشامد آن‌که B رخ دهد، ولی A رخ ندهد را تعیین کنید.

۱۰. درون کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۶ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است:

الف) احتمال آن‌که دقیقاً ۲ تا از مهره‌های خارج شده سفید باشند.

ب) احتمال آن‌که مهره‌های خارج شده از ۳ رنگ متفاوت باشند.

۱۱. تاس سالمی را ۱۲ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که ۴ بار عدد فرد روی تاس ظاهر شده باشد، چه‌قدر است؟

۱۲. سه نفر دوندهٔ a، b و c در یک مسابقه شرکت می‌کنند. احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b $\frac{1}{3}$ احتمال برد c است:

الف) احتمال برد هر یک از دونده‌ها را بیابید.

ب) احتمال آن‌که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.

۱۳. تیری را به سمت هدفی مربع شکل به ضلع ۴ پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که نقطهٔ اصابت تیر درون دایره‌ای به شعاع ۰/۵ قرار بگیرد که مرکز آن منطبق بر مرکز مربع است.

۱۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$، مطلوب است محاسبهٔ $P(A-B)$.

حل مسائل ریاضی ۱

۱. الف) راست
ب) گنگ
ج) ۳/۱۴
د) فاصله

۲.
$\sqrt[3]{40}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt[3]{5}$
$=\sqrt[3]{2^3\times5}+2\sqrt{2^2\times2}-\sqrt{5^2\times2}+3\sqrt[3]{5}$
$=2\sqrt[3]{5}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt[3]{5}$
$=5\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}$

۳.
$(a+2b)^3-a(a-2b)^2$
$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-a(a^2-4ab+4b^2)$
$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-a^3+4a^2b-4ab^2$
$=10a^2b+8ab^2+8b^3$

۴. $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

۵.
$OA=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$
$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$
$S=OA\times AB=\sqrt{5\times20}=\sqrt{100}=10$

۶.
$(2m-1)(-3)+\frac{2}{3}(m+1)=7$
$\xrightarrow{\times3}(2m-1)(-9)+2(m+1)=21$
$-18m+9+2m+2=21$
$-16m=10\Rightarrow m=-\frac{10}{16}=-\frac{5}{8}$

۷. الف) محل تلاقی دو خط همان جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{array}{l}\times2\\ \\ \end{array}\begin{cases}3x+2y=5\\ x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y=5\\ 2x-2y=10\end{cases}$$
$5x=15$
$x=3$
$\Rightarrow y=-2\Rightarrow A\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$

ب)
$y+3x=2\Rightarrow y=-3x+2$
$m=-3\Rightarrow$ شیب خط خواسته شده $=\frac{1}{3}$
$y-(-2)=\frac{1}{3}(x-3)$
$\Rightarrow y=\frac{1}{3}x-3$

۸.
$\sin45^\circ=\frac{10}{z}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{10}{z}$
$\sqrt{2}z=20\Rightarrow z=\frac{20}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$
$\cos45^\circ=\frac{x}{z}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{x}{10\sqrt{2}}$
$\Rightarrow x=\frac{10\times2}{2}=10$
$\tan30^\circ=\frac{10}{x+y}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{10}{x+y}$
$\Rightarrow x+y=\frac{30}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$
$y=10\sqrt{3}-x=10\sqrt{3}-10$

۹.
$\sin^2 30^\circ-\cos60^\circ+2\tan30^\circ$
$=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+2(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$=-\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۱۰.
$\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)}$
$=1-\sin\theta\cos\theta$

۱۱. الف)
$\frac{x-1}{2x-3}-\frac{x^2+4}{4x^2-9}$
$=\frac{x-1}{2x-3}-\frac{x^2+4}{(2x-3)(2x+3)}$
$=\frac{(x-1)(2x+3)-(x^2+4)}{(2x-3)(2x+3)}$
$=\frac{2x^2+x-3-x^2-4}{(2x-3)(2x+3)}$
$=\frac{x^2+x-7}{(2x-3)(2x+3)}$

ب)
$\frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x+4}\div\frac{xy(2x+5y)}{(x+4)^2}$
$=\frac{(2x-5y)(2x+5y)}{(x+4)}\times\frac{(x+4)^2}{xy(2x+5y)}$
$=\frac{(2x-5y)(x+4)}{xy}$

۱۲.
$$\begin{array}{l|l}12x^3+36x-1 & x+1\\ \hline 12x^3+12x^2 & 12x^2-12x+48\\ -12x^2+36x-1 & \\ -12x^2-12x & \\ 48x-1 & \\ 48x+48 & \\ -49 & \end{array}$$

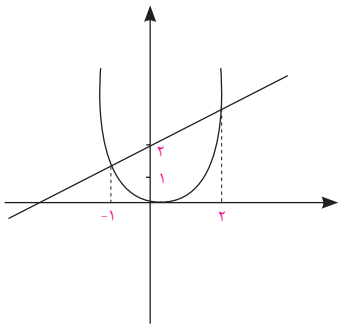
۱۳.
$\frac{1}{2\sqrt{a}+a\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}}$
$=\frac{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}}{4a-2a^2}$

۱۴. $(\frac{b}{2})^2$ یعنی $(\frac{-6}{2})^2$ را اضافه و کم می‌کنیم:

الف) $x^2-6x-7=\underbrace{x^2-6x+9}-9-7=0$
$(x-3)^2=16\Rightarrow\begin{cases}x-3=4\Rightarrow x=7\\ x-3=-4\Rightarrow x=-1\end{cases}$
$2x^2-3x-5=0$

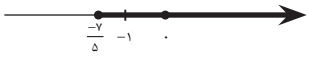
ب) $\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-5)=49$
$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}\\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-7}{4}=-1\end{cases}$

ج) $x^2-x-2=0\Rightarrow x^2=x+2$
معادله دو جواب دارد.
$x_1=2\ ,\ x_2=-1$



۱۵.
$\Delta<0\Rightarrow4-4(m-1)(3)<0$
$4-12m+12<0$
$\frac{16}{12}<\frac{12}{12}m\Rightarrow\frac{16}{12}<m$
$\Rightarrow m>\frac{4}{3}$

۱۶.
$2(1-x)-3(1+x)\le6$
$2-2x-3-3x\le6$
$-5x\le7$
$x\ge\frac{-7}{5}$



۱۷.
تعداد روزهای ماندن = x
$70/000+130/000+50/000x\le470/000$
$50/000x\le270/000$
$x\le\frac{270/000}{50/000}=5/000$ حداکثر پنج روز

حل مسائل ریاضی ۲

۱.

$$\begin{cases} a_9 + a_{10} = 56 \Rightarrow a_1 + 8d + a_1 + 9d = 56 \\ a_5 = 10 \Rightarrow a_1 + 4d = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \times(-2)\begin{cases} 2a_1 + 17d = 56 \\ a_1 + 4d = 10 \end{cases}$$

$$9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$\Rightarrow a_1 = -6$$

$$a_n = -6 + (n-1)(4)$$

$$a_{20} = -6 + 19(4) = 70$$

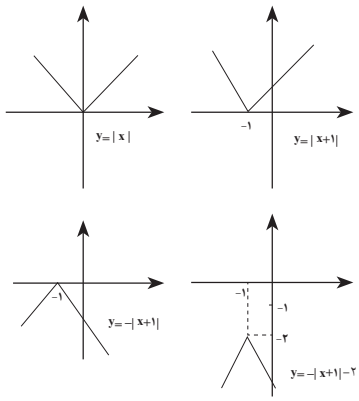
۲. الف)

$$a - b = 3 \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

ب)

$$f(-1) + f^{-1}(5) = (4-1) + (4-1) = 6$$

۳.



۴. الف)

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = \pm 2$$

$$D = R - \{0, -2, 2\}$$

ب)

$$\frac{x-4}{1-x} \geq 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

		۱		۴	
x - ۴	−		−	○	+
۱ - x	+	○	−		−
	−	∧	+		−

ت. ن

جواب $= (1, 4]$

۵. الف نمودار $y = 2^{x+1}$ و ب نمودار $y = 3^{x+1}$ است (نقطه‌یابی کنید؛ مثلاً $x = 0$).

۶.

$$(x^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{به توان } -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow (x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-2})^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = 2^3 = 8$$

۷.

$$\log_9 3\sqrt{3} - 2\log_5 \frac{1}{25}$$

$$= \log_9 3 + \log_9 \sqrt{3} - 2\log_5 5^{-2}$$

$$= \log_{3^2} 3 + \log_{3^2} 3^{\frac{1}{2}} + 4\log_5 5$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{19}{4}$$

۸.

$$\log(x+1) - \log(x-1) = 2\log 2 - 1$$

$$\Rightarrow \log\frac{x+1}{x-1} = \log 2^2 - \log 10$$

$$\Rightarrow \log\frac{x+1}{x-1} = \log\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow 10x + 10 = 4x - 4 \Rightarrow 6x = -14$$

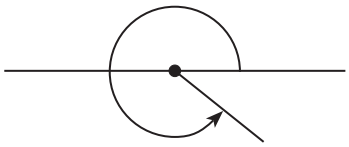
$$x = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

و با توجه به دامنهٔ لگاریتم نیز این جواب غیرقابل قبول است و معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۹.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{11\pi}{6}}{\pi}$$

$$D = \frac{180 \times 11}{6} = 330^\circ$$



۱۰.

$$\sin(\frac{7\pi}{4}) + \cos 210^\circ$$

$$= \sin(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + \cos(180^\circ + 30^\circ)$$

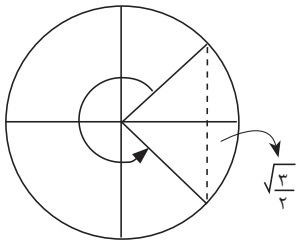
$$= \sin(-\frac{\pi}{4}) - \cos 30^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱.

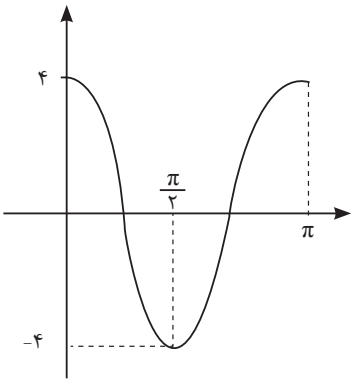
$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = 360 - 30^\circ = 330^\circ = \frac{11\pi}{6}$$



۱۲.

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



۴ = حداکثر −۴ = حداقل

$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ = محل برخورد با محور xها

۱۳.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 16 + 9 - 24(-\frac{1}{2}) = 37$$

$$BC = \sqrt{37}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(AC)(AB)\sin\hat{A} = \frac{1}{2}(4)(3)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin\hat{C}}{3} = \frac{\sin\hat{A}}{BC} \Rightarrow \frac{\sin\hat{C}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{37}}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{C} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{37}}$$

۱۴.

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&4\end{bmatrix}$$

$$2A^2=\begin{bmatrix}2&4\\0&8\end{bmatrix},\ 2A^2+I=\begin{bmatrix}3&4\\0&9\end{bmatrix}$$

$$(2A^2+I)^{-1}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}9&-4\\0&3\end{bmatrix}$$

۱۵.

$$\begin{cases}2x-3y=5\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2&-3\\1&-1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Rightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=$$

$$\frac{1}{-2-(-3)}\begin{bmatrix}-1&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$$

۱۶. الف) حرف O را کنار می‌گذاریم.

حال:

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{انتخاب یک خانه برای L}}\times\underbrace{4\times3\times2}_{\text{سایر خانه‌ها}}=96$$

ب) O و L را در یک دسته قرار می‌دهیم. بنابراین دو خانه باقی می‌ماند.

پس:

$$\underbrace{2!}_{\text{جایگشت‌های L و O}}\times4\times3=24$$

۱۷.

$$p(n,2)=c(n,3)\quad(n\ge3)$$

$$\Rightarrow\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!\times6}$$

$$\Rightarrow n-2=6\Rightarrow n=8$$

۱۸.

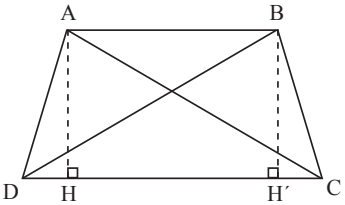
الف) $\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{6}=220$

ب) $\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}=4\times5\times3=60$

حل مسائل هندسهٔ ۱

هوشنگ شرقی

۱. ارتفاع‌های AH و BH′ را رسم می‌کنیم. AH و BH′ بر BC عمود و در نتیجه با هم موازی‌اند.



چون: $AB\parallel HH'$، پس $ABH'H$ مستطیل است. در نتیجه: $AH=BH'$.

بنابراین:

$$AH=BH',AC=DB\ (\text{فرض}),$$

$$\hat H=\hat H'=90^\circ\Rightarrow\Delta ACH\cong\Delta BDH'\ (\text{وتر و یک ضلع})$$

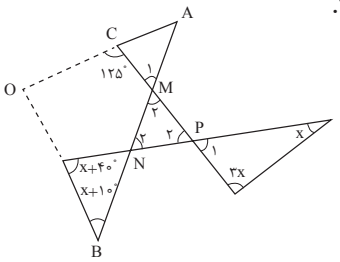
$$\Rightarrow DH'=CH\Rightarrow DH'-HH'=CH-HH'$$

$$\Rightarrow DH=CH'$$

$$(DH=CH',BH'=AH,\hat H'=\hat H'=90^\circ)$$

$$\Rightarrow\Delta ADH\cong\Delta BCH'\ (\text{ض‌زض})\Rightarrow AD=BC$$

۲.



$$\hat P_1=\hat P_2=180^\circ-4x$$

$$OA=OB\Rightarrow\hat A=\hat B=x+10^\circ$$

$$O\hat CM=\hat A+\hat M_1\Rightarrow\hat M_1=\hat M_2=125-\hat A$$

$$=125-(x+10)=115-x$$

$$\hat N_1=\hat N_2=180-(x+40+x+10)=130-2x$$

$$\hat M_2+\hat N_2+\hat P_2=180^\circ$$

$$\Rightarrow115-x+130-2x+180-4x=180$$

$$\Rightarrow7x=245^\circ\Rightarrow x=35^\circ$$

۳.

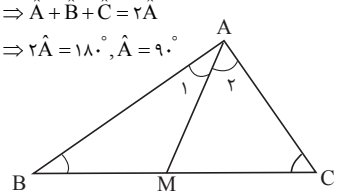
$$AM=\frac{BC}{2}\Rightarrow AM=MB=MC$$

$$\Rightarrow\hat A_1=\hat B,\hat A_2=\hat C$$

$$\Rightarrow\hat A_1+\hat A_2+\hat B+\hat C=2(\hat A_1+\hat A_2)$$

$$\Rightarrow\hat A+\hat B+\hat C=2\hat A$$

$$\Rightarrow2\hat A=180^\circ,\hat A=90^\circ$$



۴.

$$S_{ABC}=\frac12AB.AC=\frac12BC.AH$$

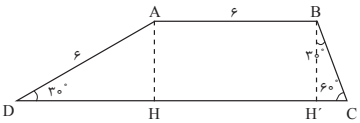
$$\Rightarrow AH=\frac{AB.AC}{BC}$$

$$BC^2=AB^2+AC^2=4+36=40$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{2\times6}{2\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

۵.



$$AD=6,\hat D=30^\circ\Rightarrow AH=\frac12AD=3$$

$$\Rightarrow DH^2=AD^2-AH^2=36-9=27$$

$$\Rightarrow DH=3\sqrt3,BH'=AH=3,CH'=\frac{BC}{2},$$

$$BC=2CH'$$

$$BC^2=BH'^2+CH'^2\Rightarrow4CH'^2=9+CH'^2$$

$$\Rightarrow3CH'^2=9,CH'=\sqrt3$$

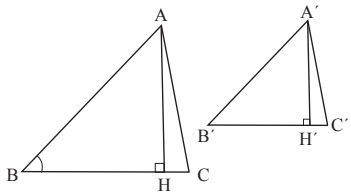
$$HH'=AB=6\Rightarrow CD=DH+HH'+CH'$$

$$=3\sqrt3+6+\sqrt3=4\sqrt3+6$$

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\times AH$$

$$=\frac{6+4\sqrt3+6}{2}\times3=6(3+\sqrt3)$$

۶.



$$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'\Rightarrow\hat B=\hat B',$$

$$\hat H=\hat H'=90^\circ\Rightarrow\Delta ABH\sim\Delta A'B'H'$$

$$\Rightarrow\frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=K$$

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=K$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac12BC.AH}{\frac12B'C'.A'H'}=(\frac{BC}{B'C'})(\frac{AH}{A'H'})$$

$$=K\times K=K^2$$

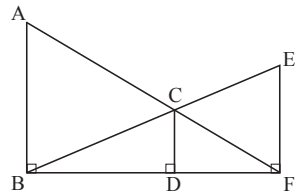
۷. از قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABF و EBF کمک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}CD\parallel AB\Rightarrow\frac{CD}{AB}=\frac{DF}{BF}\\CD\parallel EF\Rightarrow\frac{CD}{EF}=\frac{BD}{BF}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{CD}{AB}+\frac{CD}{EF}=\frac{DF+BD}{BF}=\frac{BF}{BF}=1$$

$$\Rightarrow CD(\frac{1}{AB}+\frac{1}{EF})=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{CD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{EF}$$



۸.

$\hat{M}_1 = \hat{A},\ \hat{C} = \hat{C} \Rightarrow \Delta MCN \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{AC}{2}}{BC} = \frac{MC}{AC}$

$\Rightarrow \frac{AC^2}{2} = MC.BC$

$\Rightarrow AC^2 = 2MC.BC$

۹.

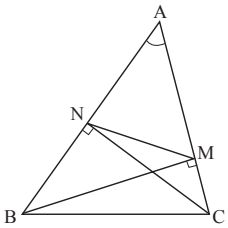
$\hat{A} = \hat{A},\ \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ANC$

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$(\hat{A} = \hat{A}, \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}) \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$

$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1/5}{BC} \Rightarrow BC = 3/75cm$

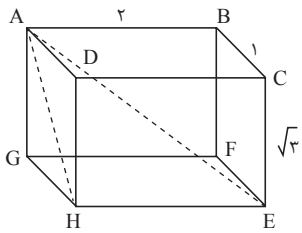


۱۰. مطابق شکل زاویهٔ AEH موردنظر است. مثلث AEH را در نظر می‌گیریم:

$AH = \sqrt{AG^2 + GH^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$AE = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1+4+3} = 2\sqrt{2},$

$HE = 2$



بنابراین، در این مثلث متساوی‌الساقین، مربع ضلع بزرگ برابر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است:

$AE^2 = AH^2 + HE^2$

در نتیجه، مثلث AEH قائم‌الزاویه هم هست و بنابراین زوایای حادهٔ آن ۴۵° هستند: $A\hat{E}H = H\hat{A}E = 45^\circ$

۱۱. اگر ضلع قاعده را a و ارتفاع منشور را h در نظر بگیریم، طبق فرض داریم:

مساحت کل $S = 4ah + 2a^2 = 182$

$\Rightarrow a^2 + 2ah = 91,\ a + h = 10$

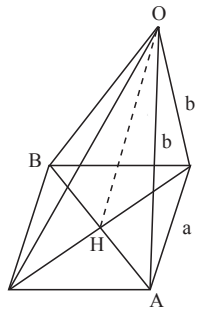
$\Rightarrow h = 10 - a \Rightarrow a^2 + 2a(10 - a) = 91$

$\Rightarrow a^2 - 20a + 91 = 0 \Rightarrow (a-7)(a-13) = 0$

$\Rightarrow a = 13$ (غ‌ق‌ق) $,a = 7 \Rightarrow h = 3$

$V = a^2h = 49 \times 3 = 147$

۱۲. پای ارتفاع هرم، وسط قاعده (محل برخورد قطرها) است. بنابراین می‌توان نوشت:



$HA = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Delta OHA : OH^2 + HA^2 = OA^2$

$\Rightarrow OH^2 + \frac{a^2}{2} = b^2$

$\Rightarrow OH^2 = b^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow OH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}a^2.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$

۱۳. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط و شعاع کره را R بنامیم، طبق فرض داریم:

$\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6$

و اگر ارتفاع مخروط و منشور را با h نمایش دهیم، داریم:

$S.h = 10\sqrt{3}, S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2^2) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3}h = 10\sqrt{3}, h = 10$

و از آنجا حجم مخروط برابر است با:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(6)^2 \times 10 = 120\pi$

۱۴. اگر ابعاد مکعب مستطیل را a، b و c بنامیم، طبق فرض داریم:

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 12, 2(ab + ac + bc) = 24$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc = 12$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2)$

$+(b^2 - 2bc + c^2) = 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0,$

$(a-b)^2 \geq 0,$

$(a-c)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0$

$\Rightarrow a - b = a - c = b - c = 0$

$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4$

$\Rightarrow a = b = c = 2 \Rightarrow V = abc = 8$

حل مسائل هندسهٔ ۲

هوشنگ شرقی

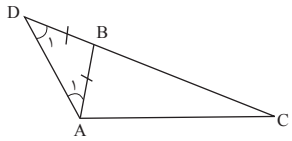
۱.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹	؟	...	n^2

۲. فرض: ABC یک مثلث است.

حکم: $AB + BC > AC$

برهان: ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازهٔ AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ D به‌دست آید. سپس D را به A وصل می‌کنیم. در مثلث ABD داریم:



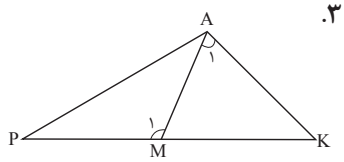
$BD = AB \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1$

همچنین در مثلث ADC داریم:

$DC = DB + BC \Rightarrow DC = AB + BC$

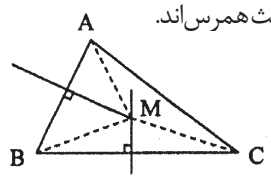
با توجه به شکل $D\hat{A}C > \hat{A}_1$، بنابراین $D\hat{A}C > \hat{D}_1$. در نتیجه: $DC > AC$. بنابراین: $AB + BC > AC$.

۳.



$$\overset{\Delta}{AMP}, \overset{\Delta}{AMK} : \left.\begin{array}{l} PM = AK \quad \text{قضیهٔ} \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 > \hat{A}_1 \quad \text{(زاویهٔ خارجی)} \quad \text{لولا} \end{array}\right\} \Rightarrow AP > MK$$

۴. عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. چون M روی عمودمنصف M است، پس: $MB = MC$ (۱). و چون M روی عمودمنصف AB است، پس: $MA = MB$ (۲). از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $MA = MC$. بنابراین نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی نقطهٔ M روی عمودمنصف AC است. پس عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرس‌اند.

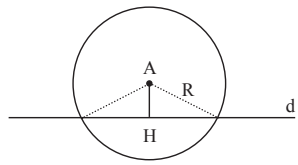


۵. دایره‌ای به شعاع R و به مرکز A رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d جواب مسئله است.

اگر: $AH > R$، مسئله جواب ندارد.

اگر: $AH = R$، مسئله یک جواب دارد.

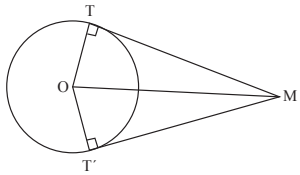
اگر: $AH < R$، مسئله دو جواب دارد.



۶. چون شعاع در نقطهٔ تماس برخط مماس عمود است، نتیجه می‌گیریم: $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \\ OT = OT' \\ OM = OM \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\Delta}{OMT} \cong \overset{\Delta}{OMT'}$$

$$\Rightarrow MT = MT'$$



۷.

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{4}{2\sin 30} = 4$$

$$OH = R|\cos\alpha| \Rightarrow OH = 4|\cos 30| = 2\sqrt{3}$$

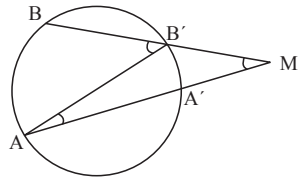
۸. امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ C در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم.

$$A\hat{B'}B = B'\hat{A}M + A\hat{M}B'$$

(زاویهٔ خارجی مثلث AMB')

$$\Rightarrow A\hat{M}B' = A\hat{B'}B - B'\hat{A}M = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

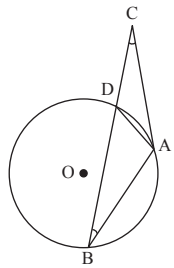
$$\Rightarrow A\hat{M}B = A\hat{M}B' = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AB'}}{2}$$



۹.

$$\overset{\Delta}{ABC} : \left\{\begin{array}{l} AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ B = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \quad \text{محاطی} \\ D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \quad \text{ظلی} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow DC = DA$$



۱۰. یک مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی دارند.

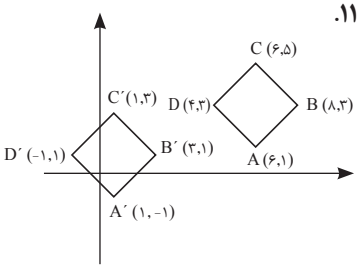
$$\begin{cases} R = 4 \\ R' = 9 \end{cases}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

$$TT' = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

۱۱.



الف) $T(x, y) = (x - 5, y - 2)$

$$\left.\begin{array}{l} A(6,1) \to A'(1,-1) \\ B(8,3) \to B'(3,1) \\ C(6,5) \to C'(1,3) \\ D(4,3) \to D'(-1,1) \end{array}\right\}$$

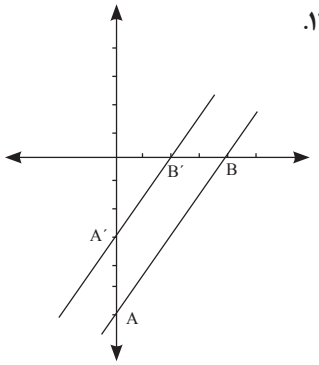
ب)

$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{(8-6)^2 + (3-1)^2} \\ \quad = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ A'B' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-(-1))^2} \\ \quad = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{3-1}{8-6} = 1 \\ m_{A'B'} = \frac{1-(-1)}{3-1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{A'B'}$$

ج) بله، چون تبدیل انتقال ایزومتری است.

۱۲.



$$L : 3x - 2y - 12 = 0$$

$$D(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$$

$$A(0, -6) \xrightarrow{D} A'(0, -3)$$

$$B(4, 0) \xrightarrow{D} B'(2, 0)$$

$$m' = \frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2} \Rightarrow L' : y - 0 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

۱۳. دوران حول C و به اندازهٔ 60° را تبدیل T می‌نامیم. با این تعریف روشن است که: $T(A) = B, T(D) = E, T(C) = C$

$$\Rightarrow T(\Delta ADC) = \Delta BEC$$

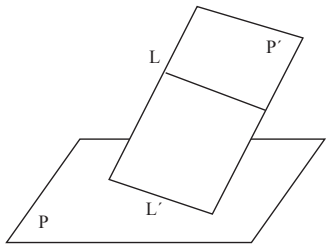
و چون دوران ایزومتری است، پس: $BE = AD$ و نیز طبق ویژگی دوران AD و BE زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دوران با هم می‌سازند: $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.

۱۴. الف) نادرست ب) درست
پ) درست ت) نادرست

۱۵. برای اثبات این قضیه دو حالت موازی‌بودن یک خط و یک صفحه در فضا را در نظر می‌گیریم.

الف) خط L در صفحهٔ P قرار ندارد. فرض کنیم P' صفحهٔ گذرنده از L باشد که P را در خط P' قطع می‌کند. L و L' هر دو در صفحهٔ L' هستند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند. زیرا از متقاطع‌بودن L و L' نتیجه می‌شود که خط L صفحهٔ P را قطع می‌کند که این خلاف فرض است. پس با هم موازی‌اند.

ب) خط L در صفحهٔ P قرار دارد. پس در این حالت هر صفحهٔ P' متمایز از P که از L می‌گذرد، صفحهٔ P را در همان خط L قطع می‌کند و درستی قضیه روشن است.



۱۶. از دو خط $L_۱$ و $L_۲$ صفحهٔ P را می‌گذرانیم. اگر $L_۳$ در صفحهٔ P باشد، حکم برقرار است. در صورتی‌که $L_۳$ در صفحهٔ P نباشد. چون $L_۳$ با $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع است، پس صفحهٔ P را در نقطهٔ مشترک $L_۱$ و $L_۲$ قطع می‌کند. زیرا در غیر این صورت باید صفحه را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند. یعنی $L_۳$ به تمامی در صفحهٔ P قرار می‌گیرد که این خلاف فرض است.

۱۷. فرض کنیم: $P \parallel P'$ و $d \subset P$. اگر خط d با صفحهٔ P' متقاطع باشد، پس صفحهٔ P با صفحهٔ P' متقاطع خواهد بود که این خلاف فرض است. پس: $d \parallel P'$. برعکس، فرض کنیم هر خط مانند d از صفحهٔ P با صفحهٔ P' موازی باشد. اگر صفحهٔ P با صفحهٔ P' متقاطع باشد، آن‌گاه در یک خط مانند L مشترک خواهند بود. اگر خط d در صفحهٔ P متقاطع با L در نقطهٔ A رسم شود، خط d صفحهٔ P' را در نقطهٔ A قطع کرده که این خلاف فرض است. پس: $P \parallel P'$.

۱۸. الف) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط متنافر می‌گوییم.

ب) فرض کنید خط L بر صفحهٔ P عمود است و آن را در نقطهٔ A قطع کرده است. فرض کنید L' خط دلخواهی در صفحهٔ P باشد. از نقطهٔ A در صفحهٔ P خط L'' را به موازات L' رسم می‌کنیم. از آنجا که L بر L'' عمود و L' با L'' موازی است. L بر L' هم عمود است.

حل سؤالات حسابان

مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۱

۱.

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۴ = ۳^۲ \times ۲^۴ \\ ۴۵ = ۳^۲ \times ۵ \\ ۶۳ = ۳^۲ \times ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ب.م.م} = ۳^۲ \text{ و}$$

تعداد شیشه‌ها $= ۲^۴ + ۵ + ۷ = ۲۸$

۲.

$$\text{مجموع تمام جملات} = \frac{a}{۱-q} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

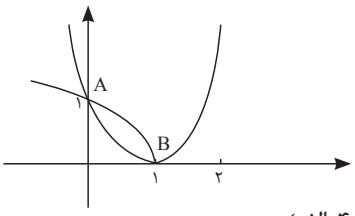
۳.

$f(x) = \sqrt{۱-x}$,

$g(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$

$\Rightarrow A(۰,۱)\ ,\ B(۱,۰)$

$\Rightarrow x_۱ = ۰,\ x_۲ = ۱$



۴. الف)

$x(x-۱) + ۳(x-۳) = ۵(x-۱)(x-۳)$

$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۲x + ۲۴ = ۰$

$\Rightarrow (۲x-۸)(۲x-۳) = ۰ \Rightarrow$

مجموعه جواب $= \left\{۴, \frac{۳}{۲}\right\}$

ب) $x - ۱ \le ۰ \Rightarrow |x-۱| = ۱ - x, x - ۳ < ۰$

$\Rightarrow |x-۳| = ۳ - x \Rightarrow y = ۴ - ۲x$

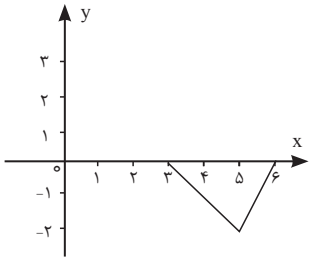
ج) $[۰,۲]$: صعود اکید

$[۵,+\infty)$: نزولی اکید

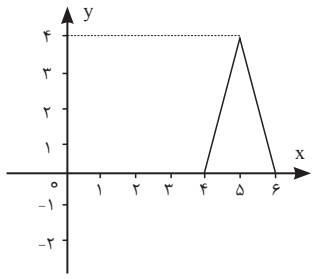
$[۲,۵]$: ثابت

د) $\frac{۱}{\beta}$ و $\frac{۱}{\alpha}$

۵.



$y = f(x-۳)$



$y = -۲f(x-۳)$

۶.

$fog(۰) = f(g(۰)) = f(۴) = \sqrt{۴-۳} = ۱$,

$fog(۳) = f(g(۳)) = f(۲)$ وجود ندارد

$fog(۵) = f(g(۵)) = f(۶) = \sqrt{۶-۳} = \sqrt{۳}$

$\Rightarrow fog = \{(۰,۱), (۵, \sqrt{۳})\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$

۷. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2,$
$x_1-2\ge 0, x_2-2\ge 0$
$\Rightarrow x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$
$y=(x-2)^2\Rightarrow \sqrt{y}=(x-2)\Rightarrow \sqrt{y}+2=x$
$x=\sqrt{y}+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$

۸. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\Rightarrow \cos 45^\circ=1-2\sin^2 22/5^\circ$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^2 22/5^\circ$
$\Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \sin^2 22/5^\circ=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$
$\Rightarrow \sin 22/5^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

۹. $\cos x(2\cos x-1)=0$
$\rightarrow \begin{cases}\cos x=0\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 2\cos x-1=0\rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$
$\rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}$

۱۰. $\tan^{-1}(\frac{3}{4})=\alpha\rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4}$
$\cos(\tan^{-1}\frac{3}{4})=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$

۱۱. الف) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x+4)}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$
$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{8\times 4}=\frac{1}{32}$

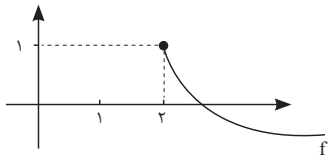
ب) $\lim_{x\to 3^+}(x-[x])=3-3=0$

ج) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$
$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

۱۲. شرط پیوستگی: $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

حد راست: $\lim_{x\to 1^+}(a-|x-1|)=a$
حد چپ: $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=3$
$\Rightarrow a=3$

۱۳. $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=1$



۱۴. $f(1)=2(1)^3-1=1 \qquad y'=6x^2-1$
$m=-\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{5}$
$y-y_0=m(x-x_0)\rightarrow y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$
$\Rightarrow y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$

۱۵. الف) $y'=3x^2-\frac{1}{x^2}$
ب) $y'=3\times 4\times 2\times(2x-5)^3+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
ج) $y'=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x})(1+x^2)-(2x)(\sin\sqrt{x})}{(1+x^2)^2}$

۱۶. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$
و چون حد فوق وجود ندارد، پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

سؤالات جبر و احتمال

هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۱

۱. $P(1):1+\sqrt{3}\ge 1+\sqrt{3}$
$P(k):(1+\sqrt{3})^k\ge 1+k\sqrt{3}$
$P(k+1):(1+\sqrt{3})^{k+1}\ge 1+(k+1)\sqrt{3}$
دو طرف فرض را در $1+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم
$(1+\sqrt{3})^k(1+\sqrt{3})\ge(1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$
$(1+\sqrt{3})^{k+1}\ge(1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$
برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:
$(1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\ge 1+(k+1)\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow 1+\sqrt{3}+k\sqrt{3}+3k\ge 1+k\sqrt{3}+\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow 3k\ge 0$ (بدیهی است).

نحوهٔ اشتراک:
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد، نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

◆ نام مجلات درخواستی: .....
◆ نام و نام خانوادگی: .....
◆ تاریخ تولد: ..... ◆ میزان تحصیلات: .....
◆ تلفن: .....
◆ نشانی کامل پستی: .....
استان: ..... شهرستان: ..... خیابان: .....
شمارهٔ فیش: ..... مبلغ پرداختی: ..... شمارهٔ پستی: .....
پلاک: .....
◆ در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را ذکر کنید: .....
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
● اشتراک مجله: ۰۲۱ـ۷۷۳۳۶۶۵۶ / ۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۲. الف) درست است:

راه‌حل اول:

$$\left.\begin{array}{l} a=5q \\ b=5t \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=5q+5t=5(q+t)$$
$$=5(2k)=10k$$

(q+t زوج است $\Rightarrow$ q,t فرد هستند)

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a=5(2t+1) \\ b=5(2t'+1) \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=5(2t+1)+5(2t'+1)$$
$$=10(t+t'+1)=10k$$

ب) نادرست است:

مثال نقض : $a=-3<0 \rightarrow a^2=9>0$

پ) نادرست است:

مثال نقض : $\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \\ c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow b\sqrt{ac}=5\sqrt{4}=10$

۳. باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد طبیعی بر ۲۴، یکی از ۲۴ عدد ۰ و ۱ و ۲ و... و ۲۳ هستند. بنابراین $m=50$ کبوتر و $n=24$ لانهٔ کبوتر داریم. طبق تعمیم‌یافتهٔ اصل لانهٔ کبوتر، به اندازهٔ $[\frac{m-1}{n}]+1$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند:

(لااقل سه عدد باقی‌ماندهٔ یکسانی خواهند داشت.) $1+[\frac{m-1}{n}]=[\frac{49}{24}]+1=3$

۴.
$$a^2+b^2+c^2+3\geq 2a+2b+2c$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$$

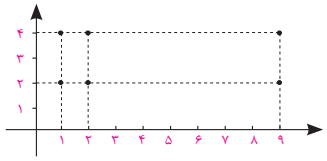
و چون همهٔ مراحل برگشت‌پذیر هستند، پس اثبات کامل است.

۵. فرض خلف : $n\neq 2k+1 \Rightarrow n=2k$

$$5n+3=5(2k)+3=10k+3$$
$$=2(5k+1)+1=2q+1$$

پس $5n+3$ عددی فرد است و این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف نادرست است.

۶.
$$A=\{2,4\}\ ,\ B=\{1,4,9\}$$
$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$=\{2,4,1,9\}-\{4\}=\{2,1,9\}$$
$$(A\Delta B)\times A=\{2,1,9\}\times\{2,4\}$$
$$=\{(2,2),(2,4),(1,2),(1,4),(9,2),(9,4)\}$$



۷. الف) $(C\cap A\cap B)\cup(A-C)\cup(A-B)$

$$=(C\cap A\cap B)\cup(A\cap C')\cup(A\cap B')$$
$$=A\cap[(C\cap B)\cup(C'\cup B')]$$
$$=A\cap[(C\cap B)\cup(C\cap B)']=A\cap U=A$$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow(A\cup B)=B$

$$\Rightarrow(A\cup B)'=B'\Rightarrow A'\cap B'=B'$$
$$\Rightarrow B'\subseteq A'$$

۸. الف) $\forall(a,b)\in R^2,(a,b)R(a,b)$

$\Rightarrow ab=ab$ رابطهٔ بازتابی

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(c,d)R(a,b)$$
$$(a,b)R(c,d)\Rightarrow ab=cd\Rightarrow cd=ab$$
$\Rightarrow(c,d)R(a,b)$ رابطهٔ تقارنی

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)R(c,d)\\(c,d)R(e,f)\end{array}\right\}\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$

$$\left.\begin{array}{l}ab=cd\\cd=ef\end{array}\right\}\Rightarrow ab=ef\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$
رابطهٔ تعدی

R هر سه خاصیت را دارد، پس هم‌ارزی است.

ب) $[(-1,2)]=\{(x,y)|(x,y)R(-1,2)\}$

$$=\{(x,y)|xy=-2\}$$

۹. الف) $S=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),$
$(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$

ب) $A=\{(1,2,1),(1,2,2)(2,1,1),(2,1,2)\}$

پ) $B=\{(1,1,1),(1,1,2),(2,1,1),(2,1,2)\}$

ت) $B-A=\{(1,1,1),(1,1,2)\}$

۱۰.

الف) $P(A)=\frac{C(5,2)\times C(10,1)}{C(15,3)}=\frac{100}{455}=\frac{20}{91}$

ب) $P(B)=\frac{C(5,1)\times C(6,1)\times C(4,1)}{C(15,3)}$
$$=\frac{120}{455}=\frac{24}{91}$$

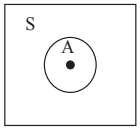
۱۱.
$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}=\frac{\binom{12}{4}}{2^{12}}$$

۱۲.
$$P(a)+P(b)+P(c)=1$$
$$P(a)=\frac{1}{2}P(b)$$
$$P(b)=\frac{1}{3}P(c)$$
$$P(c)=x$$
$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x+x=1\Rightarrow x=\frac{6}{9}$$

الف) $P(a)=\frac{1}{9},\ P(b)=\frac{2}{9},P(c)=\frac{6}{9}$

ب) $P\{b,c\}=P(b)+P(c)=\frac{2}{9}+\frac{6}{9}=\frac{8}{9}$

۱۳.
$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{1}{4}\pi}{16}=\frac{\pi}{64}$$



۴

۱۴.
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\frac{2}{3}=P(A)-P(A\cap B)+\frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{3}=P(A-B)+\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت مطبوعه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی)
- رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی)
- رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی)
- رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول)
- رشد جوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد آموزش ابتدایی
- رشد آموزش متوسطه
- رشد تکنولوژی آموزشی
- رشد مدیریت مدرسه
- رشد مدرسه فردا
- رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی
(به صورت فصل‌نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول)
- رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه دوم)
- رشد آموزش قرآن
- رشد آموزش معارف اسلامی
- رشد آموزش زبان و ادب فارسی
- رشد آموزش هنر
- رشد آموزش مشاور مدرسه
- رشد آموزش تربیت‌بدنی
- رشد آموزش علوم اجتماعی
- رشد آموزش تاریخ
- رشد آموزش جغرافیا
- رشد آموزش زبان
- رشد آموزش ریاضی
- رشد آموزش فیزیک
- رشد آموزش شیمی
- رشد آموزش زیست‌شناسی
- رشد آموزش زمین‌شناسی
- رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش
- رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۰۲۱

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات