دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ISSN: 1735-4951

برهان ریاضی

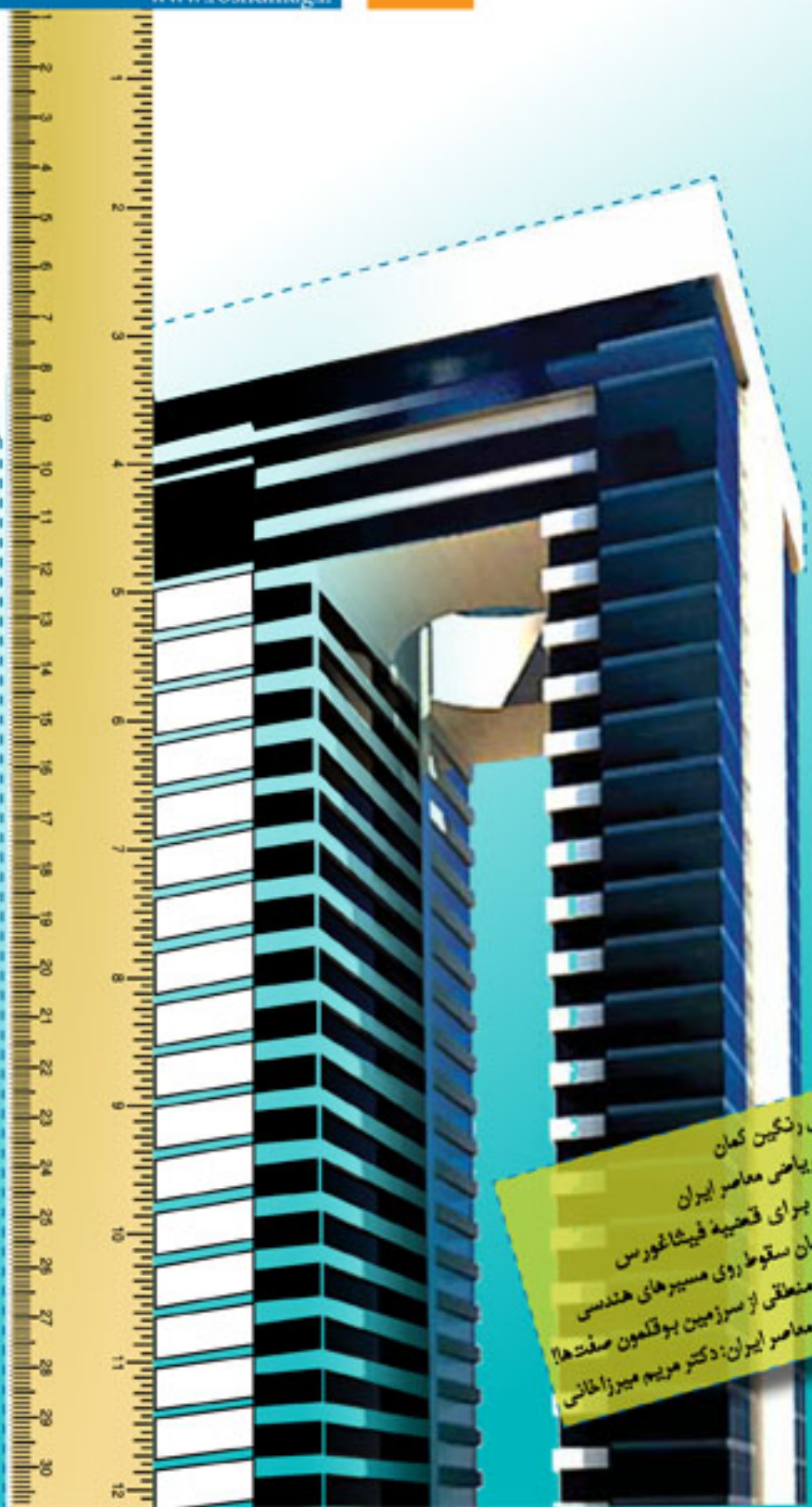
فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد ۲۳

دورهٔ بیست و چهارم
شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۳
۶۴ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال



ریاضی رنگین کمان
تاریخ ریاضی معاصر ایران
رقیبی برای قضیهٔ فیثاغورس
بررسی زمان سقوط روی مسیرهای هندسی
چند معمای منطقی از سرزمین بوقلمون صفت‌ها!
ریاضی‌دانان معاصر ایران: دکتر مریم میرزاخانی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

آغاز سال تحصیلی؛ شکوفایی فرهنگِ اصیل ایرانی-اسلامی

سال تحصیلی جدید با توکل به خداوند متعال و به پشتوانهٔ برنامه‌ریزی و سخت‌کوشی و بهره‌جویی از نظرات، راهنمایی‌ها و کلاس‌های درس اولیا و دبیران محترم و دلسوز آغاز شد. امسال که بنابر فرمودهٔ مقام معظم رهبری، سال «اقتصاد و فرهنگ، با عزم ملی و مدیریت جهادی» نامیده شده است باید نقطهٔ عطفی در شکوفایی فرهنگِ اصیل ایرانی- اسلامی باشد.

مسئلهٔ فرهنگ ابعاد بسیار وسیع و گسترده‌ای دارد و آنچه که در حوزهٔ آموزش‌وپرورش و به‌خصوص کلاس‌های درس موردنظر است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و باید مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار گیرد. بخشی از این فرهنگ شامل چگونگی ارتباط شما با هم‌کلاسی‌ها، معلمان و دبیران محترم است.

ما در آموزه‌های دینی خود به احترام و تکریم استاد و معلم بسیار سفارش شده‌ایم، تا جایی که امام علی(ع) فرمودند: «من علّمنی حرفاً فقد صیّرنی عبداً»: هر کس حرفی به من بیاموزد، مرا بندهٔ خود ساخته است. یا شما در آیات قرآن در سرگذشت حضرت موسی(ع) و حضرت خضر(ع)، اوج رابطهٔ بین معلم و شاگرد را مشاهده می‌کنید. حضرت موسی(ع) به‌عنوان پیامبری صاحب شریعت و کتاب، شاگردی متواضع و حضرت خضر که از اولیای خدا بوده است، به‌عنوان استاد و راهنما با هم تعامل دارند.

البته می‌دانید که هرقدر این رابطه بین شما و دبیر محترمتان براساس احترام متقابل بهتر برقرار شود، شرایط تدریس مناسب و یادگیری فهیمانه، بیشتر فراهم می‌شود و شما بهتر می‌توانید از کلاس درس استفاده کنید.

سردبیر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بخش دوم

تاریخ ریاضی معاصر ایران

گفت‌وگو با دکتر مهدی بهزاد (۱)

دکتر فرید قاسملو*

اشاره

دکتر فرید قاسملو، دانش‌آموختهٔ تاریخ و از محققان برجستهٔ بنیاد دایرةالمعارف اسلامی است. ایشان با همکاری دانشگاه آزاد اسلامی تحقیق جامعی دربارهٔ تاریخ ریاضی معاصر ایران انجام داده‌اند و در نهایت صمیمیت، چکیده‌ای از آن را در اختیار ما و خوانندگان مجلهٔ برهان قرار دادند. بخش دوم این تحقیق، در قالب گفت‌وگو در پی می‌آید.

کلیدواژه‌ها: تاریخ ریاضی معاصر، جواد بهبودیان، رحیم زارع نهندی، مهدی بهزاد، پرویز شهریاری

■ **قاسملو: آقای دکتر بهزاد، می‌دانم که شما مشغول تألیف زندگی‌نامهٔ علمی خود هستید. مایلم در ارتباط با تاریخ ریاضیات در ایران معاصر چند پرسش با شما مطرح کنم.**

● **بهزاد:** خوش‌حالم که در خدمتتان هستم.

■ **آیا به نظر شما می‌توان فرایند تکوین دانش ریاضی در ایران معاصر، یعنی از زمان تأسیس دانشگاه تهران تاکنون را به دوره‌هایی تقسیم کرد؟**

● فراموش نکنیم که پیش از تأسیس دانشگاه تهران، «دارالفنون» را داشتیم و «دارالمعلمین عالی» را و در زمانی که به دستور *میرزا تقی‌خان امیرکبیر* دارالفنون تأسیس شد، درس‌های ریاضی آنجا را سه معلم خارجی تدریس می‌کردند. یعنی در سرزمین *خوارزمی‌ها*، *خیام‌ها*، *کاشانی‌ها* و *بیرونی‌ها*، حتی یک ایرانی وجود نداشت که در جریان انفجار ریاضی در اروپا باشد. استادانی مانند *غلامحسین مصاحب*، *منوچهر وصال*، محسن هشترودی و بسیاری از استادان پیشین ریاضی دانشگاه تهران، از جمله دانشجویان ممتاز تنها مؤسسه آموزش عالی کشور بودند که در زمان **رضاشاه** برای ادامهٔ تحصیل به خارج رفتند و بازگشتند و در دانشگاه تهران به کار گمارده شدند.

در سال ۱۳۴۵، با ایجاد دورهٔ فوق‌لیسانس رشتهٔ ریاضی به سبک جدید در دانشگاه شیراز کنونی، تحولی در تکوین دانش ریاضی در ایران معاصر به‌وجود آمد. برگزاری نخستین کنفرانس ریاضی کشور در سال ۱۳۴۹ در همین دانشگاه و پیشنهاد تشکیل «انجمن ریاضی ایران» آغاز تحولی دیگر بود. تأسیس دورهٔ مدرسی مصاحب در دانش‌سرای عالی یا دانشگاه تربیت معلم بعدی، از مقاطع بارز این فرایند تکوین است. ایجاد نخستین دورهٔ دکترای ریاضی در «دانشگاه رضاشاه» پیش از انقلاب اسلامی ایران که به بار ننشست و ایجاد مجدد این دوره پس از انقلاب فرهنگی، مبدأ تحولی اساسی در فرایند مورد نظر شماست، در این فرایند، تشکیل «ستاد ملی سال جهانی ریاضیات»

و تأسیس نخستین «خانهٔ ریاضی» در اصفهان را نیز نباید از نظر دور داشت.

هر چند به‌نظر بسیاری، انقلاب فرهنگی به روند پیشرفت علم در ایران صدمه زد و به فرار مغزها شتاب بخشید، اما تأسیس «مرکز نشر دانشگاهی» و «مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات» را از اثرات مثبت آن می‌دانم و تحول در زمینهٔ نشر علمی و پژوهش‌های ریاضی را به فال نیک می‌گیرم.

■ آقای دکتر خیلی متشکرم. به تشکیل خانه‌های ریاضیات اشاره کردید. لطفاً موضوع را بشکافید و درخصوص نقش خود در این باب توضیح دهید.

● به توصیهٔ «سازمان ملل متحد»، سال ۲۰۰۰ میلادی سال جهانی ریاضیات نامیده شد تا نشان دهد گذر از قرن بیستم به قرن بیست‌ویکم میلادی باید از ریاضیات صورت گیرد که زبان و ملکهٔ همهٔ علوم است. ایران با توجه به سابقهٔ درخشان علمی که داشت به شدت از این پیشنهاد استقبال کرد و ستاد ملی سال جهانی ریاضیات به ریاست عالیهٔ رئیس جمهور محترم و ریاست وزیر وقت علوم، تحقیقات و فناوری تشکیل شد. کمیته‌ای نیز با شرکت تنی چند از ریاضی‌دانان با سابقهٔ کشور، از جمله بنده که در آن زمان رئیس انجمن ریاضی ایران بودم، تشکیل شد و به فعالیت پرداخت تا با توجه به نقاط قوت و ضعف موجود، برای اعتلای سطح ریاضیات کشور برنامه‌ریزی کند. یکی از برکات این فعالیت‌ها پیشنهاد تشکیل «خانه‌های ریاضیات» بود که به بار نشست و نخستین خانه با همت و پشتکار آقای دکتر **علی رجالی**، استاد دانشگاه صنعتی اصفهان، و حمایت مالی شهرداری اصفهان در این شهر پا به عرصهٔ وجود نهاد.

به توصیهٔ «سازمان ملل متحد»، سال ۲۰۰۰ میلادی سال جهانی ریاضیات نامیده شد تا نشان دهد گذر از قرن بیستم به قرن بیست‌ویکم میلادی باید از ریاضیات صورت گیرد که زبان و ملکهٔ همهٔ علوم است

پس از تشکیل چند «خانه» در برخی از شهرهای بزرگ کشور، از جمله خانهٔ ریاضیات نیشابور که از بدو تأسیس عضو هیئت امنای آن بوده‌ام، شورای خانه‌های ریاضیات ایران تحت حمایت و نظارت «کمیسیون انجمن‌های علمی» وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با همکاری چند تن از جمله بنده به ثبت رسید تا ضمن راهنمایی خانه‌های ریاضیات، از فعالیت‌های خانه‌های موجود حمایت کند و با شرایطی مدون راه تشکیل خانه‌های جدید را هموار سازد. نظر به اینکه تشکیل خانهٔ ریاضیات در هر شهر و روستا نه ممکن است و نه لازم و چون در مناطق کمتر برخوردار ایران، جوانان با استعداد درخشان ریاضی فراوان‌اند، اخیراً تصمیم گرفتم از محل هدیهٔ سخاوتمندانهٔ «بنیاد ملی نخبگان» هر ماه مبلغی در اختیار شورا قرار دهم تا خانه‌ها بتوانند طبق آیین‌نامه‌ای خاص پای این‌گونه جوانان را به خانه‌های ریاضی نزدیک محل اقامتشان باز کنند. خوش‌بختانه هم شورا و هم دبیرکل محترم کمیسیون ملی یونسکو در ایران از این تصمیم استقبال کردند و امیدواریم با حمایت دست‌اندرکاران، این طرح گسترش یابد و تعالی ریاضیات کشور را در پی داشته باشد.

در پایان لازم می‌دانم مژده دهم که اولاً دست‌اندرکاران کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی وابسته به یونسکو، در جریان آثار نیک این خانه‌ها قرار دارند و ابتکار ایران را در تأسیس آن‌ها می‌ستایند. ثانیاً، نخستین خانهٔ ریاضی در کلان‌شهر تهران نیز با حمایت وزارت آموزش‌وپرورش تشکیل شد و اخیراً خانهٔ ریاضیات دیگری هم با حمایت سخاوتمندانهٔ شهرداری تهران تأسیس شده است. بنده هم عضو افتخاری هیئت امنای این خانه هستم.

■ آقای دکتر، آیا با دوره‌های دکترای ریاضی به سبکی که تشکیل شده‌اند، موافق بوده‌اید؟

● خیر! پس از انقلاب فرهنگی بسیاری از استادان، کشور را ترک کردند. نرخ رشد جمعیت به سرعت بالا رفت و نیاز به تحصیل در دانشگاه و نیاز به استاد فزونی یافت. برای رفع این کاستی، وزارت علوم و آموزش عالی آن زمان حتی برای دانشگاهی که یک استاد تمام وقت ریاضی هم نداشت، مجوز تأسیس دورهٔ دکترای ریاضی صادر کرد! بدین ترتیب بین دانشگاه‌ها رقابت

بی‌مورد بر ســـر ایجاد این دوره‌ها بالا گرفت. خدمات ارزندهٔ علمی و اجرایی بسیاری از فارغ‌التحصیلان این دوره‌ها را می‌ستایم و برایشان احترام قائلم. اما در همان دوران درخصوص کاستی‌های قابل پیش‌بینی و قابل پیشـــگیری هشدار دادم و امروز از مشاهدهٔ بروز آن‌ها رنج می‌برم. در این دوران هم، از صدور آیین‌نامه‌های اســـتخدام متمرکز یا نیمه متمرکـــز اعضای هیئت علمی و گزینش متمرکز یا نیمه متمرکز دانشجویان دوره‌های دکترا رضایت ندارم و آن‌ها را نوعی توهین به استادان می‌دانم.

■ اجازه دهید به ســـؤال‌های تاریخـــی بازگردیم. به‌عقیدهٔ شما تأثیرگذارترین افراد در فرایند تکوین دانش ریاضی در ایران معاصر چه کسانی بوده‌اند؟

● تک‌تک معلمان ریاضی، اعم از آموزگار، دبیر، دستیار، مربی و استاد دانشگاه در هر مقام و مرتبه‌ای، سهمی هر چند اندک در پیشبرد ریاضیات کشور داشته‌اند و دارند. چگونه می‌توان به این پرسش پاسخ داد و نام پیش‌کسوتانی چون **تقی فاطمی** و **محسن هشترودی** را نبرد، که در دورانی، یکی الگوی معلمی کامل بودند و نام و یاد دیگری مترادف با ریاضیات اســـت؟ اما از بین ســـایرین، مایلم شـــش نفر را نام ببرم که چهار نفر اول عمدتاً در کســـوت دبیری فعالیت داشتند و دو نفر آخر در مقام اســـتادی: **احمد بیرشک، پرویز شهریاری، ابوالقاسم قربانی، عبدالحسین مصحفی، دکتر غلامحسین مصاحب** و **دکتر منوچهر وصال**.

در جلسهٔ طرح موضوع اعطای دکترای افتخاری به زنده یاد شهریاری که در حضور وزیر علوم تشکیل شده بود، عرض کردم بخت با ریاضیات کشور یار بوده است که امثال بیرشک، شهریاری، قربانی و مصحفی به دنبال مدرک به خارج نرفتنـــد. در ایران ماندند و خدمت کردند. اگر اجل چند ماه دیگر امان داده بود، قربانی، این استاد مسلم تاریخ ریاضیات، همچون سه نفر دیگر دکترای افتخاری می‌گرفت و نسل جوان بهتر می‌فهمید که برای خدمت و تعالی مدرک لازم نیست.

کتاب‌های درسی و کمک‌درسی ریاضی پیش از دانشگاه که به قلم هر یک از این چهار بزرگوار نوشته شده‌اند، شایان توجه‌اند. مجلهٔ یکان به مدیریت استاد مصحفی تأثیر شگرفی در پیشبرد ریاضیات کشور و جلب علاقهٔ دانش‌آموزان به این رشـــته داشت. زنده یاد شهریاری پیش از یکصد کتاب و جزوه در زمینهٔ ریاضیات تألیف و ترجمه کرده و تأسیس و مدیریت چند مجلهٔ ریاضی، نظیر آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات را عهده‌دار بوده است. برای وقوف از خدمات ارزندهٔ اســـتاد بیرشک به علم و ریاضیات کافی است «بیرشـــک نامه» را بخوانید و لذت ببرید. بی‌شـــک جناب‌عالی به عظمت کار استاد قربانی وقوف کامل دارید. با این اوصاف، آیا بخت با ریاضیات کشـــور یار نبوده است که این فرهیختگان در ایران مانده‌اند و به مدرک بالاتر چشم ندوخته‌اند؟

و اما دکتر غلامحسین مصاحب در طول حیات پر برکت خود بسیار جدی و سختگیر به کار تدریس و تألیف مشـــغول بود. وی دورهٔ مدرسی ریاضی را راه انداخـــت و تعداد زیادی مدرس برای دانشـــگاه‌های کشور تربیت کرد. تقریباً تمام فارغ‌التحصیلان مؤسسه مصاحب به خارج از کشور رفته‌اند و دکترا گرفته‌اند و اینک در دانشـــگاه‌های کشور و تشکل‌هایی چون انجمن ریاضی ایران به خدمت مشغول‌اند. از ذکر نام دقیق تألیفات استاد مصاحب در زمینهٔ منطق، آنالیز ریاضی، نظریهٔ اعداد، تاریخ ریاضیات و دایرةالمعارف معذورم. عذرم را بپذیرید که حافظه یاری نمی‌کند.

دکتـــر منوچهـــر وصال بـــه حـــق بنیان‌گذار پژوهش‌های علمی در ایران معاصر اســـت که یکصد ســـال عمر با برکت داشـــت و در مردادماه امســـال (۱۳۹۱) جان به جان آفرین تسلیم کرد. مایل نیستم بیش از این دربارهٔ این استاد فرزانه صحبت کنم، زیرا ســـابقهٔ آشـــنایی، همکاری و مریدی خودم را با این والاتبـــار به اختصار و با افتخار، برای درج در خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران نوشته‌ام و هم اینک نسخه‌ای از آن را برای استفاده به شما تقدیم می‌کنم.

پاسخ به این پرسش شما به درازا کشید. در پایان خوش‌حالم عرض کنم که حدود ۱۰ سال پیش، وقتی پس از وقفه‌ای طولانی مجدداً مسئولیت ادارهٔ انجمن ریاضی ایران به من سپرده شد، ایجاد جوایزی به نام هر یک از استادان: فاطمی، قربانی، مصاحب، وصال و هشترودی را به تصویب شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران رســـاندم تا هر یک سال یا هر دو سال یک‌بار، طبق آیین‌نامه‌های خاصی، به برندگان اهدا شوند و از این فرهیختگان بی‌ریا در تکوین دانش ریاضی در ایران معاصر همواره به نیکی یاد شود.

تک‌تک معلمان ریاضی، اعم از آموزگار، دبیر، دستیار، مربی و استاد دانشگاه در هر مقام و مرتبه‌ای، سهمی هر چند اندک در پیشبرد ریاضیات کشور داشته‌اند و دارند

لطفاً تأثیرگذارترین کتاب‌های فارسی ـ اعم از ترجمه یا تألیف ـ در فرایند تکوین دانش ریاضی در ایران معاصر را نام ببرید.

● باز هم پرسش درخصوص «ترین‌ها»! پاسخ دشوار است. اما اگر کتاب‌های ریاضی درسی دوره‌های پیش از دانشگاه را مستثنا کنیم و اگر بپذیریم که درجهٔ تأثیرگذاری کتاب با تعداد نسخه‌های چاپ شدهٔ آن نسبت مستقیم دارد، آن‌گاه پاسخ آسان می‌نماید و نام کتاب «حسابان»، یعنی ریاضیات عمومی دو سال اول رشته‌های علوم پایه و مهندسی دانشگاه‌ها و مدارس عالی کشور به ذهن متبادر می‌شود. یکی از پرفروش‌ترین کتاب‌های ریاضی دانشگاهی، کتاب حسابان **توماس** و **فینی**، چاپ مرکز نشر دانشگاهی است که شمارگانی بالغ بر یکصدهزار نسخه در سال داشته و به‌صورت رنگی به چاپ رسیده است.

زمانی‌که با همکاران، **سیامک کاظمی** و **علی کافی** توافق کردیم این اثر را به فارسی برگردانیم، پیمان بستیم متنی روان و عاری از هر نوع غلط، حتی کمتر از استاندارد جهانی، روانه بازار کنیم. دلیل عقد این پیمان جلوگیری از اتلاف وقت خوانندگان بود که مبادا با از قلم افتادن «پریمی»، وقتی تلف شود و از آن بدتر با مشاهدهٔ چند غلط از این نوع، اعتماد دانشجو از کتاب سلب شود و برای درک مطلب دست از چالش بردارد.

یکی از دلایل تأثیرگذاری این‌گونه کتاب‌ها را تعداد قابل توجهی از دانشجویان رشته‌های مهندسی دوره‌های کارشناسی می‌دانم که در همان سال‌های اول یا دوم تحصیل به رشتهٔ ریاضی روی می‌آورند یا درس‌های انتخابی خود را از میان درس‌های دانشکده‌های علوم ریاضی برمی‌گزینند.

جناب آقای دکتر بهزاد، نظر شما دربارهٔ مجلات و نشریات تأثیرگذار فارسی زبان در این رشته چیست؟ به عقیدهٔ شما تأثیرگذارترین نشریات ادواری زبان فارسی در تکوین دانش ریاضی چه نشریاتی بوده‌اند؟

● اگر اشتباه نکنم قدیمی‌ترین نشریهٔ ادواری ریاضی ایران معاصر با مدیریت غلامحسین مصاحب چاپ و منتشر شده است. تأثیرگذارترین آن‌ها هم مجلهٔ یکان است که ذکر خیر آن گذشت. مجلات «رشد آموزش ریاضی» و «برهان» از جمله نشریات ادواری وزارت آموزش‌وپرورش هستند که با شمارگان بالایی در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرند. بولتن انجمن ریاضی ایران هم، که در این سال‌ها به زبان انگلیسی منتشر می‌شود و مجله‌ای پژوهشی است، از استقبال خوب ریاضی‌دانان بسیاری از کشورها برخوردار شده است. اجازه می‌خواهم درخصوص این پرسش به همین چند نکته بسنده کنم.

قدیمی‌ترین نشریهٔ ادواری ریاضی ایران معاصر با مدیریت غلامحسین مصاحب چاپ و منتشر شده است. تأثیرگذارترین آن‌ها هم مجلهٔ یکان است

آیا می‌توان از منظر دانش ریاضی رتبهٔ ایران را بین کشورهای مختلف جهان مشخص کرد؟

● در مصاحبه با روزنامهٔ «جام‌جم» با توضیحاتی به این پرسش پاسخ داده‌ام. اگر رتبه‌های دانش‌آموزان دوره‌های ابتدایی و راهنمایی مدارس ما در «آزمون تیمز» خیلی پایین نبودند که متأسفانه هستند، با توجه به سایر مؤلفه‌ها به جایگاه ریاضیات در ایران معاصر عددی چون ۱۵ از ۲۰ تخصیص می‌دادم و بدون هرگونه ادعایی خودم را خلاص می‌کردم. با وجود چندین منزلگاه درخصوص انواع رتبه‌بندی‌ها، از جمله رتبه‌بندی‌های مقالات علمی، بی‌شک گروهی به این عدد کاملاً احساسی و فاقد پایهٔ علمی می‌خندند و بسیاری هم از دیدن آن خشنود می‌شوند.

آیا جوایز گوناگون تأثیری در رشد دانش ریاضی کشور داشته‌اند و آیا می‌توانید تعدادی از آن‌ها را نام ببرید؟

● مسلماً تأثیرگذار بوده‌اند و خواهند بود. اصولاً رقابت اساس پیشرفت است. در حال حاضر جایزهٔ **آبل** و جایزهٔ **فیلدز** دو مورد از مهم‌ترین جوایز بین‌المللی خاص ریاضی‌دانان هستند. در کشور ما هم انجمن ریاضی ایران بانی چندین جایزهٔ اثرگذار بوده که قدیمی‌ترین آن‌ها مربوط به مسابقات سالانهٔ ریاضی دانشجویی است که از سال ۱۳۵۱ آغاز شده است. دربارهٔ این مسابقات هم مطلب فراوان نوشته شده است، اما افسوس که ارجاع دقیق به مستندات مربوط به هر یک از موضوعات مورد نظرتان ممکن نیست.

علاوه‌بر این، انجمن تاکنون ۱۰ جایزه به نام استادان مختلف تأسیس کرده است که برخی سالانه و برخی دوسالانه‌اند و به افرادی با ویژگی‌های خاص اهدا می‌شوند. این جوایز به ترتیب حروف الفبا عبارت‌اند از:

۱. **جایزهٔ مهدی بهزاد:** به برترین مدیریت در پیشبرد ریاضیات؛
۲. **جایزهٔ مهدی رجبعلی‌پور:** به برترین مقاله در زمینهٔ جبر خطی و کاربردها؛
۳. **جایزهٔ عباس ریاضی کرمانی:** به مقالات برتر ارائه شده در کنفرانس‌های سالانهٔ ریاضی ایران؛
۴. **جایزهٔ محمدهادی شفیعی‌ها:** به بهترین ویراستار ریاضی؛
۵. **جایزهٔ تقی فاطمی:** به بهترین مدرس ریاضی؛
۶. **جایزهٔ ابوالقاسم قربانی:** به مقالات برتر در زمینهٔ تاریخ ریاضیات؛
۷. **جایزهٔ غلامحسین مصاحب:** به نویسندگان آثار برجستهٔ ریاضی به فارسی؛
۸. **جایزهٔ محمدحسن نجومی:** به شاخص‌ترین پذیرفته‌شدگان در ریاضیات مالی؛
۹. **جایزهٔ منوچهر وصال:** به مقالات برتر ارائه شده در سمینارهای سالانهٔ آنالیز ریاضی؛
۱۰. **جایزهٔ محسن هشترودی:** به مقالات برتر ارائه شده در سمینارهای دوسالانهٔ هندسه و توپولوژی.

■ می‌دانم خسته شده‌اید، اما آیا موضوع خاصی مدنظرتان هست که به آن نپرداخته باشیم؟

● از این فرصت سپاس‌گزارم. به نظر من پرسش اساسی این است که با این همه سابقه و سنت علمی، استعدادهای درخشان، امکانات مادی، دین و آیین و کیش حامی علم و فرهیختگی، همراه با زیرساخت‌های قوی موجود، چگونه می‌توان وضع ریاضیات ایران را ارتقا بخشید و آن را به جایگاه در خور شأن ایران و ایرانی رساند. حدود ده دوازده سال پیش آغاز راه را در بررسی همه‌جانبهٔ مسائل ریاضیات کشور دانستم و با تشکیل «کمیتهٔ ملی پیشبرد ریاضیات کشور» حمایت دستگاه‌های ذی‌ربط را برای انجام طرح کلان پیشنهادی خواستار شدم. پس از پایان دورهٔ مدیریتم بر انجمن ریاضی ایران، این پروژه دنبال نشد و هیچ یک از موضوع‌های هجده‌گانهٔ مورد نظر نه‌تنها به نتیجه نرسید، بلکه بررسی آن‌ها آغاز هم نشد. تنها استثنا، موضوع اول تحت عنوان «بررسی سیر تحول تاریخ صد سال اخیر ریاضیات ایران» است که جناب‌عالی مستقلاً تصدی آن را پذیرفته‌اید و می‌بینم که به خواست خدا با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی به

زودی به بار خواهد نشست.

اجازه می‌خواهم اضافه کنم که هم‌اینک در پی تجدید سازمان کمیتهٔ ملی پیشبرد ریاضیات و به بار نشاندن طرح کلان بررسی مسائل ریاضیات کشور در فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران هستم. خوش‌بختانه تشکیل «**کمیسیون پیشبرد ریاضیات کشور**» به پیشنهاد رؤسای شاخه‌های علوم پایه و علوم مهندسی فرهنگستان علوم در سیصد و نود و یکمین جلسهٔ مورخ ۹۱/۴/۱۹ به تصویب شورای علمی فرهنگستان علوم رسید. اعضای حقوقی این کمیسیون عبارت‌اند از: رئیس فرهنگستان علوم، رئیس گروه علوم پایه، رئیس گروه علوم مهندسی، رئیس شاخهٔ ریاضی، رئیس انجمن ریاضی ایران و رئیس انجمن آمار ایران.

اعضای حقیقی کمیسیون عبارت‌اند از: *مهدی بهزاد*، و آقایان *پرویز جبه‌دار مارالانی*، *علی رجایی*، *سعید سهراب‌پور*، *محمدرضا عارف*، *محمدرضا مخبر دزفولی* و *فتح‌اله مضطرزاده*.

هرچند از زمان تشکیل کمیتهٔ ملی پیشبرد ریاضیات حدود دوازده سال می‌گذرد و توان جسمی و ذهنی من تحلیل رفته است، اما به خدا پناه می‌برم و دست همکاری و یاری به سوی مقامات، اعضای محترم کمیسیون و ریاضی‌دانانی دراز می‌کنم که به آبادانی این مرز و بوم عشق می‌ورزند و پرداختن به ریاضیات را لازمهٔ منطقی اندیشیدن می‌دانند که خود پیش‌نیاز و دستمایهٔ تقویت عقلانیت است و جامعهٔ بیش از حد احساسی ما را به سرمنزل مقصود می‌رساند.

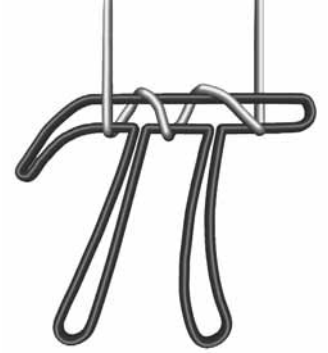
■ از صرف این همه وقت و انرژی، از شما متشکرم.

در حال حاضر جایزهٔ آبل و جایزهٔ فیلدز دو مورد از مهم‌ترین جوایز بین‌المللی خاص ریاضی‌دانان هستند. در کشور ما هم انجمن ریاضی ایران بانی چندین جایزهٔ اثرگذار بوده که قدیمی‌ترین آن‌ها مربوط به مسابقات سالانهٔ ریاضی دانشجویی است

*** پی‌نوشت**

۱. در شمارهٔ ۸ مجله (زمستان ۱۳۹۲) مصاحبهٔ اختصاصی اعضای هیئت تحریریه با آقای دکتر بهزاد به چاپ رسید. بعد از آن ایشان تذکری دربارهٔ متن آن مصاحبه به ما دادند که به بهانهٔ چاپ این مصاحبه، آن تذکر را نیز تقدیم خوانندگان مجله می‌نمائیم. در بخشی از مصاحبه، ایشان به توضیح حدسیهٔ خودشان در سال ۱۹۶۵ پرداخته و به بحث پیرامون رنگ‌آمیزی یال‌ها و رئوس گراف‌ها با شرایطی خاص پرداخته‌اند. توضیح این است که: منظور از عدد رنگی گراف، در آن بحث، عدد رنگی کلی است، یعنی حداقل تعداد کل رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی رأس‌ها و یال‌ها.

* ghassemlou@gmail.com



مجلهٔ Pi in the Sky

احسان یارمحمدی**

- **تارنما:** http://www.pims.math.ca/pi
- **ناشر:** Pacific Institute for the Mathematical Science
- **مکان انتشار:** کانادا
- **زبان:** انگلیسی
- **تاریخ آغاز انتشار:** ژوئن ۲۰۰۰
- **تعداد چاپ و توزیع در هر دوره:** ۲ شماره
- **هیئت تحریریه:** آنتونی کوآس[۱]، جان بومَن[۲]، موری برمنر[۳]، جان کمپبل[۴]، فلورین دیاکو[۵]، شارون فریسن[۶]، گوردون هَمیلتون[۷]، کلاُس هواچسمان[۸]، دراگوس هریمیوک[۹]، مایکل لامورکس[۱۰]، دیوید لیمینگ[۱۱]، پاتریک مایدورن[۱۲] و فُک لونگ[۱۳].
- **مدیر فنی:** آنتونی کوآس[۱۴]
- **هماهنگ کننده تولید:** کلر کرنان[۱۵]
- **طراح:** لیزا پرلمَن[۱۶]
- **نشانی:**

Pi in the Sky
PIMS University of Victoria Site Office,SSM Building
Room A418b
PO Box 3060 STN CSC, 3800 Finnerty Road,Victoria,
BC, V8W 3RT Canada

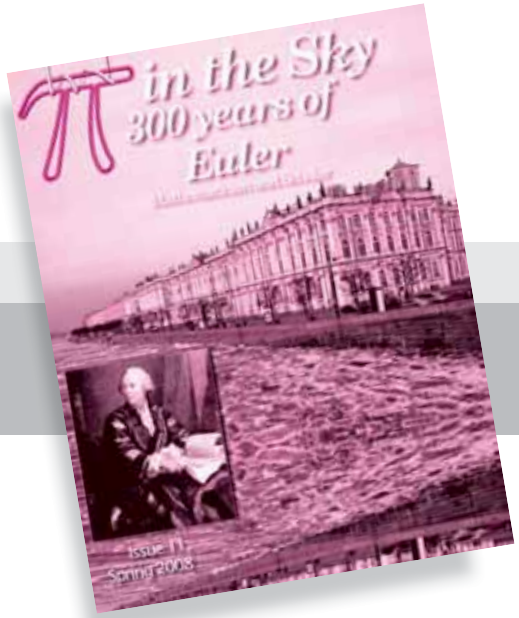
- **تلفن، دورنگار و رایانامه:**

Telephone Number: (250) 472-4271
Fax Number: (250) 721-8958
E-mail: pims@math.uvic.ca

مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» مجلهای دربارهٔ ریاضیات دورهٔ دبیرستان (در ایران دورهٔ دوم آموزش متوسطه) است و خوانندگان آن دانش‌آموزان و معلمان این دورهٔ تحصیلی هستند. هدف اصلی این مجله ایجاد بستری برای تولید فرهنگ ریاضی و ریاضی‌خوانی بین علاقه‌مندان به رشتهٔ ریاضی است. در ضمن، نحوهٔ ارائهٔ مطالب در این مجله به‌گونه‌ای است که بیشتر، دانش‌آموزان سال آخر دورهٔ دبیرستان و دانشجویان دورهٔ کارشناسی را مخاطب قرار می‌دهد. البته نه اینکه مطالب آن برای دانش‌آموزان سایر پایه‌های تحصیلی دورهٔ دبیرستان مطلوب نیست، بلکه به علت تنوعی که در نوع و ساختار برنامهٔ آموزشی مجله و نیز مقالات ارائه شده در آن نمایان است، خوانندگان آن باید دارای نگرشی جامع و مانع دربارهٔ موضوعات متنوع ریاضی باشند تا با مطالعهٔ این مجله، پویایی ذهن خود را محک بزنند.

دست‌اندرکاران مجلهٔ Pi in the Sky آن را هم به‌صورت مجلد و هم به‌صورت الکترونیکی و آنلاین در تارنمای ویژهٔ این مجله، در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهند. این مجله برای دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان در ایالت های «آلبرتا»[۱۷]، «بریتیش کلمبیا»[۱۸] و «واشینگتون»[۱۹] ارسال می‌شود. افرادی که مایل‌اند برای مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» مقاله یا مقالاتی دربارهٔ موضوعات متنوع ریاضی و کاربردهای آن ارسال کنند، می‌توانند با مراجعه به نشانی اینترنتی: «pims@math.uvic.ca»، این مهم را انجام دهند. مقالات ارسالی می‌تواند شامل مسائل ریاضی به همراه پاسخ درست آن‌ها، لطیفه‌های ریاضی، تصویرهای فکاهی و کاریکاتورهای ریاضی و نیز عبارت‌ها و جملات قصار مستدل دربارهٔ ریاضیات یا ریاضی‌دانان باشد. در ضمن معلمان، مدرسان، دانش‌آموزان، دانشجویان، والدین و تمامی علاقه‌مندان به آموزش ریاضی می‌توانند با ارسال نامه به سردبیر نقطه‌نظرات خود را دربارهٔ این مجله با ذکر کامل نام و نام خانوادگی، شمارهٔ تلفن به همراه کد شهر و کشور محل اقامت و نیز نشانی پست الکترونیکی ارسال کنند.

البته افرادی که می‌خواهند برای مجله مقاله بفرستند، می‌باید مقالهٔ (مقالات) خود را ترجیحاً با استفاده از نرم‌افزار «LaTex» تایپ و آماده کنند و آن را در قالب هر دو فایل «LaTex» و «PDF» متناظر آن برای مجله بفرستند. اشخاصی که به هر دلیل از نرم‌افزار «LaTex» برای مقالاتشان استفاده نمی‌کنند، می‌باید مقالات خود را با استفاده از نرم‌افزار «Microsoft Word» آماده کنند و با رعایت نکات و استانداردهای



مقاله‌نویسی موردنظر مجلهٔ Pi in the Sky، در قالب هر دو فایل «Microsoft Word» و PDF متناظر آن برای مجله ارسال کنند. مقالات ارسال شده از این نظر که آیا موضوع و محتوای آن‌ها با اهداف مجله سازگار است یا خیر، توسط هیئت داوران بررسی می‌شوند و مقالات مورد تأیید ایشان، مجوز چاپ در مجله را دریافت می‌کنند. مقالات تأیید شده به نام مؤلف آن‌ها در این مجله به طبع می‌رسند و ناشر حق انتشار و تکثیر آن را در قالب مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky به‌صورت مجلد و الکترونیکی دارد.

با بررسی ۱۷ شماره از مجلهٔ مزبور که از ژوئن ۲۰۰۰ تا ژانویهٔ ۲۰۱۴ منتشر شده‌اند، درمی‌یابیم که هیئت تحریریه و سردبیری این مجله دچار تغییراتی شده که بر خط‌مشی مجله و مطالب آن اثراتی داشته است. یکی از ویژگی‌های این مجله ارائهٔ توضیح مختصر و مفیدی در صفحات نخست دربارهٔ تصویر روی جلد آن است که دارای ارتباط مفهومی با یکی از مقالاتی است که در مجله گنجانده شده است. در شمارهٔ ۲ این مجله نیز قسمتی با عنوان «Teacher's Studio» وجود دارد که تقریباً شبیه به قسمت «روایت معلمان» در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است و به مطالبی اختصاص دارد که توسط معلمان ریاضی برای دانش‌آموزان در کلاس درس در یک موضوع خاص ارائه می‌شود.

مقاله‌ای که در اینجا به معرفی آن می‌پردازیم، «چند نکته دربارهٔ چندجمله‌ای درجه دوم» نام دارد که از نظر ساختار بیانی، شبیه مقالات **احمد قندهاری** در مجلهٔ «برهان متوسطه» (دورهٔ دوم) است. مطالعهٔ این مقاله را به شما ریاضی‌آموزان مخاطب مجلهٔ برهان توصیه می‌کنیم. اما قبل از ورود به این مقاله چند مثال و مسئلهٔ آن را که دارای راه‌حل نیز هستند، به‌عنوان تمرین مطرح می‌کنیم تا شما میزان توانمندی خود را در پاسخ به این تمرین‌ها که دربرگیرندهٔ سؤالات امتحان نهایی دیپلم کشورهای اروپایی نیز هستند، محک بزنید.

- معادلهٔ $x^2+2(m+1)x+m(m-1)=0$ را با جواب‌های $x_1,x_2\in R$ که در آن m عددی حقیقی است، در نظر بگیرید. در هر مورد زیر، تمام مقادیر m را که در شرط مطلوب صدق می‌کند، به‌دست آورید.

۱) $0<x_1<x_2$

۲) $x_1<x_2<0$

۳) $x_1<0<x_2$

- اگر k عددی حقیقی و $x_1,x_2\in R$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، شرایط لازم و کافی برای ضرایب a، b و c را به‌گونه‌ای که هر مورد روابط زیر برقرار باشد، تعیین کنید.

۱) $k<x_1<x_2$

۲) $x_1<x_2<k$

۳) $x_1<0<x_2$

- به‌ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $(m-2)x^3-(2m-1)x^2+(m+3)x=0$ دقیقاً سه ریشهٔ حقیقی نامنفی دارد؟

- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ زیر دارای دو جواب منفی متمایز است؟

$$(2+m)\log_2^2(x+4)+2(1-m)\log_2^{(x+4)}+m-2=0$$

البته در شمارهٔ ۱۵ مجله Pi in the Sky نیز مقاله‌ای با عنوان: «از مشکلات، اشتباهات و شکست‌ها تا موفقیت‌ها»* وجود دارد که می‌تواند برای شما دانش‌آموزان قابل توجه باشد. این مقاله سه مثال دربارهٔ خطاها، استدلال‌های اشتباه‌آمیز و ناامیدی‌هایی دارد که هنگام حل مسائل ریاضی رخ می‌دهند. همچنین ترفندها و راهکارهای زیرکانه‌ای ارائه می‌دهد که به نحوی اثربخش در حل مسئله کاربرد دارند. در اینجا مثال ۱ آن را ارائه می‌کنیم و توضیحات و تفاصیلی را که نگارندهٔ مقاله آن‌ها را ارائه نکرده است و امکان دارد شما را در درک این مثال دچار چالش سازد، ارائه کرده‌ایم. در ضمن شما را به مطالعهٔ دو مثال دیگر این مقاله در شمارهٔ ۱۵ مجله تشویق می‌کنیم.

- مقدار عبارت $\dfrac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}$ را تعیین کنید.

تعدادی از دانش‌آموزان راه‌حل زیر را ارائه کرده‌اند:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1-\sin 10^\circ)}$$

در واقــع نگارنــدهٔ این مقاله با ذکر این مثال خواســته اســت بیــان کند که هر چند تعــدادی از دانش‌آمــوزان از روابط مثلثاتی

$$\begin{cases} \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \\ \text{یا} \\ \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

و $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ برای ســاده کردن این عبارت اســتفاده کرده‌اند، اما عبارت به‌دست آمده با کمک این دو رابطهٔ مثلثاتی، به این علت که مقادیر $\sin 10^\circ$، $\cos 20^\circ$ و $\cos 10^\circ$ برای دانش‌آموزان مشــخص نیســت، از پیچیدگی بیشــتری برای ســاده کردن، نسبت به عبارت نخستین برخوردار شده است. همین موضوع ادامهٔ کار را برای این دانش‌آموزان مشــکل و در بعضی موارد ناممکن می‌ســازد. بنابراین، درک مسئله از جایگاه خاصی برخوردار اســت و چون درک مســئله از جانب افراد گوناگون، متفاوت است، بنابراین ممکن اســت کــه راه‌حل‌های متمایزی نیز بــرای آن پیدا شــود. بنابراین، راهکار خردمندانه این اســت که، به‌ویژه در جلسات برگزاری امتحان، از روش‌هایی برای حل مســئله استفاده کنید که مدت زمان و چالش کمتری را برای شما ایجاد می‌کنند. البته چون نگرش‌هــای دانش‌آموزان به ارائهٔ راه‌حل مســائل و درک آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است، بنابراین روشن است که راه‌حل‌های گوناگونی توســط آن‌ها ارائه خواهد شد. اما اگر در این مثال با استفاده از رابطهٔ $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$ مقــدار $\sin 80^\circ$ را تعیین کنیم، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{2\sin(60^\circ + 20^\circ) - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 20^\circ \cos 60^\circ - \sin 20^\circ}$$

چون دانش‌آموزان از مقادیر $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ آگاهی دارند. بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 20^\circ \cos 60^\circ - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ + 2\sin 20^\circ \times \frac{1}{2} - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

درضمن اگر در عبارت $\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ - \sin 20^\circ}$ دانش‌آموزی توانایی تشخیص استفاده از رابطه‌ای مناسب و متناسب با این عبارت مانند: $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ را بــرای تعیین مقدار $\cos 10^\circ$ داشته باشد، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{2\cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 30^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 30^\circ \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}$$

چون دانش‌آموزان از مقادیر $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ آگاهی دارند. بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 30^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 30^\circ \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ + 2\times\frac{1}{2}\sin 20^\circ - \sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

اما اگر به همان راه‌حل نخست که دانش‌آموزان در ادامهٔ آن دچار سردرگمی شــده بودند، مراجعه کنیم و با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ مقدار عبارت را ساده‌تر کنیم، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1 - \sin 10^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1 - 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ)}$$

اکنون بــا اســتفاده از روابــط $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$ و $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1 - 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2}$$
$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ - \sin 85^\circ)^2}$$

چون

$$\begin{cases} \sin 5^\circ = \sin(45^\circ - 40^\circ) = \sin 45^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \cos 45^\circ \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 40^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ \\ \text{و} \\ \sin 85^\circ = \sin(45^\circ + 40^\circ) = \sin 45^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 45^\circ \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 40^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ - \sin 85^\circ)^2} = \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ)^2}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ)^2}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sqrt{2}\times\sin 40^\circ)^2} = \frac{\cos 20^\circ}{4\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ}$$

سپس با استفاده از رابطهٔ $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ و چون می‌دانیم که $\sin 40^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ$، از ضرب عبارت $\frac{2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ}$ در عبارت بالا داریم:

$$\frac{2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ}\times\frac{\cos 20^\circ}{4\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ}$$

$$= \frac{1}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin 40^\circ}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

داریم:

$$\frac{1}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{1}{8\left[\frac{1}{2}(\sin(20^\circ+10^\circ)+\sin(20^\circ-10^\circ))\right]\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{1}{4(\sin 30^\circ+\sin 10^\circ)\sin 40^\circ} = \frac{1}{2\sin 40^\circ+4\sin 10^\circ\sin 40^\circ}$$

در ضمن با استفاده از رابطهٔ

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

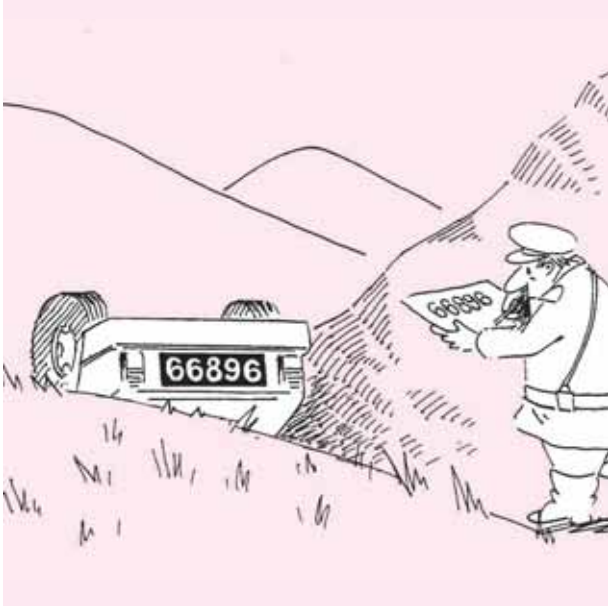
داریم:

$$\frac{1}{2\sin 40^\circ+4\sin 10^\circ\sin 40^\circ} = \frac{1}{2\sin 40^\circ-2(\cos 50^\circ-\cos 30^\circ)}$$

$$= \frac{1}{2\sin 40^\circ-2\cos 50^\circ+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

چون: $\cos 50^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\sin 40^\circ$، بنابراین:

$$\frac{1}{2\sin 40^\circ-2\sin 40^\circ+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



هر چند که محاسبات بالا از روند پیچیده‌تری نسبت به دو راه‌حل قبل برخوردار بود، اما در نهایت به جواب درست به‌دست آمده از دو روش قبل و استفادهٔ بیشتر ما از دانسته‌هایمان برای حل این مثال منجر شد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در مواجهه با مسائل به ظاهر پیچیده و مشکل، بر توانایی‌های خود متکی باشیم و زود تسلیم این نمونه از مسائل نشویم.

در شمارهٔ ۷ مجلهٔ Pi in the Sky مقاله‌ای نیز با عنوان «تعمیم [روش] تقسیم ترکیبی» وجود دارد که از نظر ساختار و محتوا نزدیک به مقالات مندرج در مجلهٔ برهان متوسطه (دورهٔ دوم) است که مطالعه و یادگیری آن برای ریاضی‌آموزان مفید است. در ضمن، در شمارهٔ ۴ این مجله که در دسامبر سال ۲۰۰۱ منتشر شده است، مقاله‌ای با عنوان «زندگی و مسافرت در بعد چهارم»[۲۰] به قلم **توماژ کاژینسکی**[۲۱] وجود دارد که **سعید علیخانی** ترجمهٔ آن را با ارائهٔ اضافاتی در انتهای آن ترجمه با عنوان «زندگی در بعد چهارم» در شمارهٔ ۷۸ مجله برهان متوسطه (دورهٔ دوم) در تابستان ۱۳۹۲ به چاپ رسانده است.

در شمارهٔ ۹ مجله که در دسامبر سال ۲۰۰۵ در اختیار مخاطبان قرار گرفته است، مقاله‌ای با عنوان «روابط ریاضیاتی در هنر» از **رضا سرهنگی**، استاد ایرانی گروه ریاضی «دانشگاه تَوسِن»[۲۲] منتشر شده است. این مقاله برای افرادی که به دنبال مطالبی دربارهٔ کاربرد ریاضیات در زندگی پیرامون خود هستند، قابل استفاده است.

در شمارهٔ ۱۱ مجلهٔ Pi in the Sky که در بهار سال ۲۰۰۸ به جامعهٔ ریاضیات عرضه شده است، به مناسبت سیصدمین سال تولد **لئونارد اویلر**، ریاضی‌دان برجسته و نامدار سوئیسی، تصویری از او، جلد این شماره از مجله را مزین کرده است. البته هیئت تحریریهٔ مجله نیز به پاس قدردانی از وی، سرمقاله را به یادش نگاشته است. در ضمن،

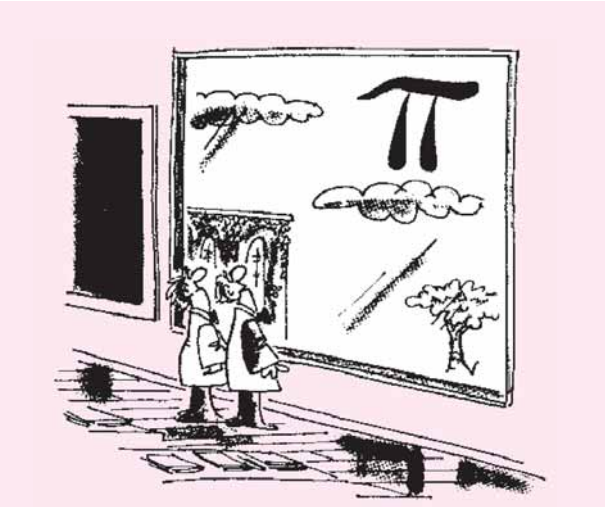
مقالات «اویلر و تابع گاما» به قلم **تام آرچیبالد**[۲۳]، «ساخت پل‌ها برای ریاضیات گسسته» نوشتهٔ **پیتر دوکس**[۲۴]، «اویلر، مجموع‌های نامتناهی و تابع زتا» اثر عضو هیئت تحریریهٔ این مجله **مایکل لامورِکس**، «چه کسی دایرهٔ اویلر را ابداع کرد؟» به قلم **کلاُس هواچسمان**، عضو دیگر هیئت تحریریهٔ مجله، و «لئونارد اویلر: زندگی‌نامه» نوشتهٔ **آلکساندر لیتواک**[۲۵] و **آلینا لیتواک**[۲۶] به‌چشم می‌خورند که نشان‌دهندهٔ احترام فراوانی است که دست‌اندرکاران مجله برای لئونارد اویلر قائل‌اند و لذا این تعداد مقاله را دربارهٔ او و کارهایش در این شماره از مجله گنجانده‌اند.

در شمارهٔ ۳ مجلهٔ Pi in the Sky که در ژوئن ۲۰۰۱ عرضه شده است، مقاله‌ای با عنوان «اصل استقرا»[۲۷] به قلم عضو هیئت تحریریهٔ مجله، **دراگوس هریمیوک** نگاشته شده است که پیگیری آن را به دانش‌آموزانی که درس «جبر و احتمال» را پیش روی خود دارند، توصیه می‌کنیم. اما در همین‌جا و قبل از مطالعهٔ این مقاله توسط شما، به علت اهمیت و جایگاه «اصل استقرا»، مسائل آن را ارائه می‌کنیم تا به این واسطه به‌عنوان سندی آماده شده، مسائلی را در این زمینه مورد بررسی قرار دهید و با تمرین‌هایی دربارهٔ «اصل استقرا» از نوع «Pi in the Sky» نیز آشنا شوید.

- برای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی n] ثابت کنید:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}<3.$$

- ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی n]، عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی] n رقمی A که هر رقم آن ۱ یا ۲ است، وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که A بر 2^n بخش‌پذیر است.
- یک صفحه به‌وسیلهٔ n خط به چند ناحیه تقسیم شده است، به‌گونه‌ای که هر ناحیهٔ همسایه با ناحیهٔ دیگر دارای رنگ‌آمیزی متفاوت است. ثابت کنید که صفحه می‌تواند به‌وسیلهٔ دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.



- فرض کنید: $Z=\{1,2,3,\ldots\}$. تمام توابع $f: Z\to Z$ را به گونه‌ای پیدا کنید که داشته باشیم:

۱. $f(2)=2$

۲. $f(n+1)=1+1f(1)+2f(2)+\ldots+nf(n)$

- تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ را که هیچ دو عدد متوالی را شامل نمی‌شوند، در نظر بگیرید. ثابت کنید که مجموع مربعات حاصل‌ضرب تعداد اعداد در این زیرمجموعه‌ها برابر است با: $(n+1)!-1$.

(**مثال:** اگر $n=3$ باشد، زیرمجموعه‌ها عبارت‌اند از: $\{1,3\}$، $\{3\}$، $\{2\}$ و $\{1\}$ و مجموع برابر است با:

$$1^2+2^2+3^2+(1\times3)^2=4!-1$$

البته چون در ادامهٔ مقاله «اصل استقرا» و در صفحهٔ ۲۶ مجله در قسمت «Math Challenges» مسائلی پیکارجو دربارهٔ «اصل استقرا» ارائه شده است، به علت ارتباط مسائل آن با موضوع مزبور، آن‌ها را در این قسمت و در ادامه قرار می‌دهیم.

- برای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی n] ثابت کنید که:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3.$$

- فرض کنید که در یک صفحه n خط به‌گونه‌ای که هیچ دو تا از آن‌ها با یکدیگر موازی و هیچ سه تا از آن‌ها با یکدیگر همرس نباشند، وجود دارند. ثابت کنید که صفحه توسط این خطوط به $1+\frac{n(n+1)}{2}$ ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است.
- ثابت کنید که n دایره در یک صفحه، صفحه را حداکثر به n^2-n+2 ناحیه تقسیم می‌کنند.
- یک صفحه به وسیلهٔ n دایره به چند ناحیه تقسیم شده است. نشان دهید که صفحه را می‌توان به وسیلهٔ دو رنگ [به‌گونه‌ای که هر ناحیه همسایه با ناحیه دیگر دارای رنگ‌آمیزی متفاوت باشد] رنگ‌آمیزی کرد.
- فرض کنید $Z=\{1,2,3,\ldots\}$. تمام توابع $f: Z\to Z$ را به‌گونه‌ای پیدا کنید که داشته باشیم:

۱. $f(1)=1$

۲. $$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\ldots+\frac{1}{f(n)f(n+1)}=\frac{f(n)}{f(n+1)}$$

تذکر: برای هر $n>1$ از اتحاد زیر که به وسیلهٔ استقرا ثابت شده است، استفاده کنید.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

قسمت «Book Review» در مجلهٔ Pi in the Sky ـ که در مجلهٔ «برهان متوسطه» (دورهٔ دوم) از آن به‌عنوان «معرفی کتاب» یاد

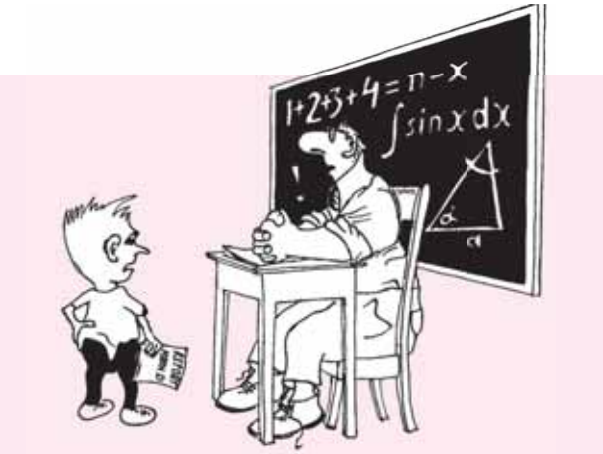
می‌شود ـ نیز شامل مطالبی در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۴ مجله و صفحات ۲۶ و ۲۷ شـــمارهٔ ۱۱ مجله است. در ضمن در شماره‌های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۱۱ مطالبی دربارهٔ زندگی‌نامه و دستاوردهای ریاضی‌دانان قرار داده شده است که مطالعهٔ آن‌ها می‌تواند برای افرادی که به تاریخ ریاضیات علاقه‌مند هســـتند، جالب باشد. نمونه‌ای از سؤالات امتحانات پایانی دیپلم در کشورهای گوناگون آسیایی و اروپایی نیز در شماره‌های ۱ و ۲ مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» به چشم می‌خورد که ریاضی‌آموزان می‌توانند با مراجعه به آن‌ها، از چگونگی و تفاوت ســـؤالات مندرج با سؤالاتی که در داخل کشور به‌عنوان سؤالات امتحانات بیان می‌شوند، مطلع شوند. در شـــماره‌های مختلف مجله در بخشی تحت عنوان «math jokes» لطیفه‌هـــای ریاضی و عبارات و جملات قصار ریاضی آمده است که ترجمهٔ بعضی از آن‌ها در بخش «ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی» مجلهٔ برهان، در دو سال گذشته، آمده است.

در تمـــام شـــماره‌های مجلـــه، قســـمتی بـــا عنـــوان «Math Challenges» وجـــود دارد که به ارائهٔ مســـائل پیکارجو در زمینه‌های متفاوت ریاضیات، برای علاقه‌مندان می‌پردازد. افرادی که به حل مسائل پیکارجو علاقه‌مند هستند، می‌توانند پاسخ‌های درست خود را به نشانی مجله ارسال کنند تا در شماره یا شماره‌های بعد به اســـم خود آن‌ها چاپ شود. در صفحهٔ ۳۱ شمارهٔ ۱۱ مجله، قضیه‌ای به همراه اثبات آن با عنوان «یک مسئلهٔ پیکارجوی هندسه» به قلم یک ایرانی به‌نام **دانش فُروُهَری** وجود دارد که برای ایجاد انگیزش و هیجان در شما دانش‌آموزان عزیز، برای نوشتن و ارسال مقاله به آن مجله هر چند با حجم کم در میان شما ریاضی‌آموزان، آن را در ادامه مطرح می‌کنیم.

● فرض کنید که AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند. ثابت کنید: $3(AB^2+AC^2+BC^2)=4(AM^2+BN^2+CP^2)$.

علاقه‌منـــدان، می‌توانند با مراجعه به این شـــمارهٔ مجله، راه‌حل فرســـتنده را ملاحظه کنند. لازم به ذکر است که با آگاهی از قضیهٔ میانه‌ها در مثلث (دستور محاسبهٔ طول هر میانه با داشتن طول‌های اضلاع مثلث) اثبات آسان خواهد بود.

در ضمـــن در صفحـــهٔ ۱۳ شـــمارهٔ ۱۶ مجلـــهٔ ریاضـــی Pi in the Sky مقاله‌ای به قلم **ویکتور ژو** با عنوان «ســـنگ ـ کاغذ ـ قیچی» وجود دارد که تداعی‌کنندهٔ بازی خاطره‌انگیز دوران کودکی ماست. امیدواریم پیگیری این مقاله برای شما یادآور روزهای خوش گذشته باشد. در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱ مجله، مقاله‌ای دربارهٔ «تشابه»[28] وجود دارد که مطالعهٔ آن را به دانش‌آموزانی که درس‌های هندسهٔ ۱ و ۲ را پیش روی خود دارند، پیشنهاد می‌کنیم. همچنین به دانش‌آموزان علاقه‌مند به درس هندسه توصیه می‌کنیم که به صفحهٔ ۱۸ شمارهٔ ۱ مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky مراجعه کنند و مقالهٔ «ساختار مثلث» اثـــر **کلاُس هواِچسمان** را مطالعه کنند. برای دانش‌آموزانی که تصور



می‌کنند، استفاده از تارنمای «ویکی‌پدیا» منبع مناسبی برای انجام تحقیقات و پژوهش‌های آن‌ها نیســـت نیز مقالهٔ «دایره‌های پنهان و رقم‌های π» به قلم **رِینهارد ایلنِر** را در صفحهٔ ۲۰ شـــمارهٔ ۱۷ مجله پیشنهاد می‌کنیم. زیرا بیشتر منابعی که در انتهای مقاله مزبور ارائه شده‌اند، برگرفته از تارنمای «ویکی‌پدیا» هستند.

در پایان بیان می‌کنیم، آنچه که در این مقاله آمد، تنها گوشه‌ای از برگ‌های زرین مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky است. به‌همین دلیل شما را به تهیهٔ تمامی شماره‌های این مجله ترغیب می‌کنیم تا با دریافت و مطالعهٔ یکایک مقالات مندرج در آن، به دانش و بینش ریاضی خود بیفزایید.

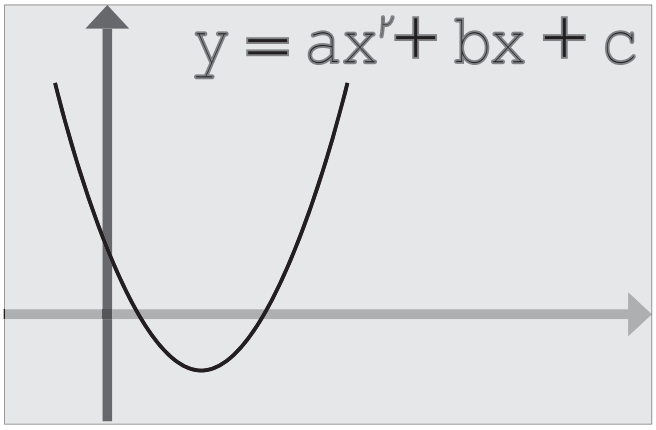
***پی‌نوشت‌ها**

1. Anthony Quas
2. Johan Bowman
3. Murray Bremner
4. John Campbell
5. Florin Diacu
6. Sharon Friesen
7. Gordon Hamilton
8. Klaus Hoechsmann
9. Dragos Hrimiuc
10. Michael Lamoureux
11. David Leeming
12. Patrick Maidorn
13. Fok Leung
14. Tel: (250) 721-7463, E-mail: aquas@uvic.ca
15. Clare Kiernan
16. Lisa Pearlman
17. Alberta
18. British Columbia
19. Washington
20. Life and Travel in 4D
21. Tomasz Kaczynski
22. Towson University
23. Tom Archibald
24. Peter Dukes
25. Alexander Litvak
26. Alina Litvak
27. Induction Principle
28. Similarity

* ترجمهٔ کامل این مقاله، به قلم یکی از خوانندگان مجله، در شمارهٔ آیندهٔ برهان خواهد آمد.

** ehsan_yarmohommadi@yahoo.com

مسائل کلامی از معادلات درجهٔ دوم



عنایت‌اله راستی‌زاده*
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شیراز

کلیدواژه‌ها: مسائل کلامی، معادلهٔ درجهٔ دوم، قضیهٔ فیثاغورس

اشاره

طبق قرارداد، «مسائل کلامی» به مسائلی می‌گوییم که در آن‌ها مقدار قابل توجهی از اطلاعات به‌جای نمادگذاری‌های ریاضی، به‌صورت متن ارائه شده باشد. این مسائل غالباً شامل یک روایت یا داستان‌اند. هدف از طرح این مسائل در برنامهٔ درسی، ترویج مدل‌سازی ریاضی با طرح پرسش‌هایی از زندگی واقعی است. در واقع، به‌جای آنکه صرفاً مهارت دانش‌آموزان در دست‌ورزی جبری یا محاسبات مکانیکی مورد سنجش واقع شود، درک آنان از مفاهیمی که به‌صورت توصیفی در متن مسئله گنجانده شده است، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در طرح این‌گونه مسائل، به معلمان توصیه می‌شود که مسئلهٔ موردنظر تا حد امکان از دنیای واقعی اطراف دانش‌آموز گرفته شده باشد و فضای مطرح شده در مسئله حداکثر ارتباط را با زندگی روزمرهٔ او داشته باشد. چرا که زمینه و بافت آشنا برای دانش‌آموز، درک وی را از مسئله تسهیل خواهد کرد.

■ **مثال ۱. مینا** از برادر بزرگ‌ترش هزار تومان بیش از نصف پس‌انداز ماهانه‌اش و از برادر کوچک‌ترش هزار تومان بیشتر از $\frac{1}{7}$ پس‌انداز ماهانه‌اش عیدی گرفت. پدر گفت با حاصل‌ضرب این دو عدد می‌توان یک خودروی ملی خرید. مینا و برادرش گفتند: ۲۴ میلیون تومان برای خرید یک خودرو؟! حساب کنید پس‌انداز ماهانهٔ مینا (قبل از دریافت عیدی) چه‌قدر بوده است؟

● **پاسخ:** با فرض اینکه پس‌انداز ماهانهٔ مینا x تومان باشد، داریم:

$$(1000+\frac{x}{2})(1000+\frac{x}{7}) = 24000000$$

$$\Rightarrow (2000+x)(7000+x) = 14\times 24\times 10^6$$

$$x^2+9000x-14\times 23\times 10^6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-14000)(x+23000) = 0$$

که از آنجا جواب قابل قبول $x=14000$ به‌دست می‌آید.

در این صورت پس‌انداز ماهانهٔ مینا قبل از دریافت عیدی ۱۴ هزار تومان بوده است.

■ **مثال ۲.** اگر سن **محمود** ۹ سال دیگر مجذور سن ۳۳ سال قبل او شود، سن محمود را به‌دست آورید.

● **پاسخ:** سن کنونی محمود را x می‌گیریم. داریم:

$$x+9=(x-33)^2 \Rightarrow x^2-67x+1080=0$$

ریشه‌های این معادله $x=40$ و $x=27$ هستند که فقط $x=40$ قابل قبول است. (چرا؟)

مثال ۳. مربع عددی مثبت ۳۰۰ درصد بزرگ‌تر از خود آن است. این عدد را بیابید.

● **پاسخ:** عدد موردنظر را x می‌گیریم. در این صورت:

$x^2=x+3x \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0$

جواب‌های این معادله $x=4$ و $x=0$ هستند که تنها $x=4$ قابل قبول است. پس عدد موردنظر عدد ۴ است.

مثال ۴. طول یک زمین ورزشی مستطیل شکل ۱۰۰ متر و عرض آن نصف میانگین طول و قطر آن است. مساحت زمین را به‌دست آورید.

● **حل:** فرض کنید عرض زمین x متر باشد. در این صورت:

$$x=\frac{1}{2}\times\frac{100+\sqrt{100^2+x^2}}{2} \Rightarrow (4x-100)^2=100^2+x^2$$

$$\Rightarrow 15x^2-800x=0 \Rightarrow x\approx 53/333$$

بنابراین مساحت زمین تقریباً ۵۳۳۳/۳ متر مربع است.

مثال ۵. طول یک زمین ورزش از سه برابر عرض آن ۲ واحد کمتر است. ابعاد زمین ورزش را تعیین کنید، در صورتی‌که مساحت آن ۶۵ مترمربع باشد.

● **حل:**

$a=3b-2,\ ab=65 \Rightarrow b(3b-2)=65$

$\Rightarrow 3b^2-2b-65=0$

$\Rightarrow b=5\ ,\ a=13$

مثال ۶. دو عدد صحیح زوج متوالی بیابید به‌طوری که مربع عدد کوچک‌تر ۱۰ واحد بیشتر از عدد بزرگ‌تر باشد.

● **حل:** اگر n و n+۲ این دو عدد باشند، در این صورت داریم:

$n^2=10+(n+2) \Rightarrow n^2-n-12=0$

$\Rightarrow (n-4)(n+3)=0$

پس این دو عدد ۴ و ۶ هستند. توجه کنید که $n=-3$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

مثال ۷. سه عدد صحیح متوالی تعیین کنید که چهار برابر مجموع هر سهٔ آن‌ها دو برابر حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر باشد.

● **حل:** فرض کنیم n-۱، n و n+۱ این سه عدد باشند. در این صورت داریم:

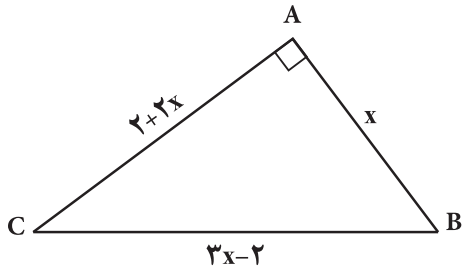
$4(n+1+n+n-1)=2(n+1)(n)$

$\Rightarrow 4(3n)=2(n^2+n)$

$\Rightarrow n^2-5n=0 \Rightarrow n=0,\ n=5$

پس جواب‌ها می‌توانند {-۱,۰,۱} یا {۴,۵,۶} باشند.

مثال ۸. در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر دو سانتی‌متر بیشتر از دو برابر طول ضلع کوچک‌تر است. اگر وتر مثلث دو سانتی‌متر کمتر از سه برابر طول ضلع کوچک‌تر باشد، اندازهٔ وتر را بیابید.



● **حل:**

$AC=2+2AB,\ BC=3AB-2,\ AB=x$

در این صورت داریم:

$AC=2+2x\ ,\ BC=3x-2,\ BC^2=AB^2+AC^2$

پس:

$(3x-2)^2=x^2+(2+2x)^2$

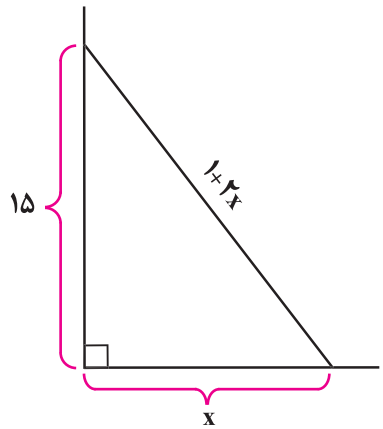
$\Rightarrow 9x^2-12x+4=x^2+4+4x^2+8x$

$\Rightarrow 4x^2-20x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=5$

که $x=5$ قابل قبول است. در این صورت اندازهٔ وتر ۱۳ سانتی‌متر خواهد بود.

مثال ۹. نردبانی به یک دیوار تکیه داده شده است. بالای نردبان در ارتفاع ۱۵ متری با دیوار تماس پیدا کرده است. فاصلهٔ دیوار تا پایین نردبان را پیدا کنید، هرگاه طول نردبان یک متر بیشتر از دو برابر این فاصله باشد.

● **حل:** فاصلهٔ دیوار تا پایین نردبان را با x نشان می‌دهیم. در این صورت طبق قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

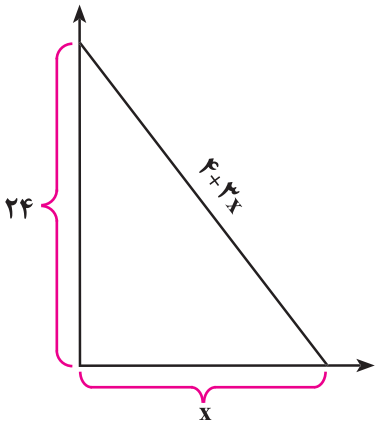


$x^2+15^2=(1+2x)^2$

و در نتیجه: $3x^2+4x-224=0 \Rightarrow x=8$

■ **مثال ۱۰.** دو خودرو از یک تقاطع شـــروع به حرکت می‌کنند. خودروی الف به سمت شمال و خودروی ب به سمت شرق می‌رود. هنگامی که خودروی الف ۲۴ کیلومتر را طی کرده بود، فاصلهٔ بین دو خودرو چهار کیلومتر بیشتر از سه برابر مسافتی بود که خودروی ب طـــی کرده بود. فاصلهٔ بین دو خـــودرو را در این موقعیت محاسبه کنید.

● **حل:** به یاری مثلث قائم‌الزاویه می‌توان معادلهٔ مرتبط با این مسئله را تشکیل داد.



$(4+3x)^2=x^2+24^2 \Rightarrow 16+9x^2+24x=x^2+576$

$\Rightarrow x^2+3x-70=0 \Rightarrow x=-10\ ,\ x=7$

که x=۷ قابل قبول است. در این صورت فاصلهٔ دو خودرو ۲۵ کیلومتر خواهد بود.

۱. طول یک مستطیل چهار برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۴۴ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد مستطیل را محاسبه کنید.

۲. حاصل‌ضرب دو عدد صحیح فرد متوالی یک واحد کمتر از دو برابر حاصل‌جمع آن‌هاست. آن‌ها را بیابید.

۳. سه عدد صحیح متوالی بیابید که سه برابر حاصل‌جمع آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه یک سانتی‌متر بزرگ‌تر از ضلع بزرگ‌تر آن است. ضلع کوچک‌تر مثلث ۷ سانتی‌متر کوچک‌تر از ضلع بزرگ‌تر است. اندازهٔ وتر و اضلاع را بیابید.

۵. دو موتورسیکلت الف و ب از یک تقاطع شروع به حرکت می‌کنند. الف به سمت جنوب و ب به سمت غرب می‌رود. هنگامی که موتورســـیکلت الف ۱۲ کیلومتر را طی کرد، فاصلهٔ بین این دو موتورسیکلت ۳ کیلومتر بیشتر از دو برابر مسافتی بود که موتورسوار ب در سمت غرب طی کرده بود. فاصلهٔ بین دو موتورسوار را در این موقعیت تعیین کنید.

جواب‌ها

۱) ۱۲ و ۳

۲) «۱-، ۱» و «۳، ۵»

۳) {۱-، ۰، ۱} و {۶، ۷، ۸}

۴) ۵، ۱۲ و ۱۳

۵) ۱۲ کیلومتر

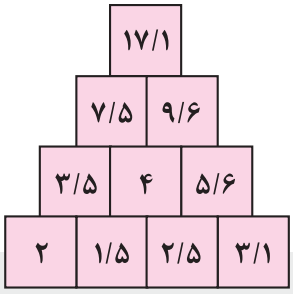
erastizadeh@yahoo.com

ایستگاه اول:

مثلث‌های جادویی!

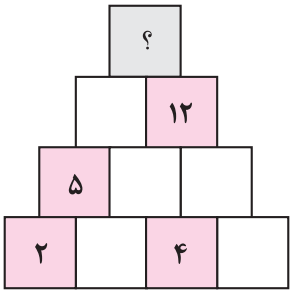
هوشنگ شرقی*

راســـتش را بخواهید، ایدهٔ این بخش را از کتاب ریاضی دخترم که در سال پنجم ابتدایی درس می‌خواند، گرفته‌ام! در این کتاب مثلث‌هایی از روی هم قرار گرفتن تعدادی مربع ساخته شده‌اند. درون مربع‌ها باید اعدادی قرار گیرند، به‌طوری که عدد هر مربع برابر با مجموع دو عدد مربع‌های زیرین آن باشد؛ مانند مثلث زیر:

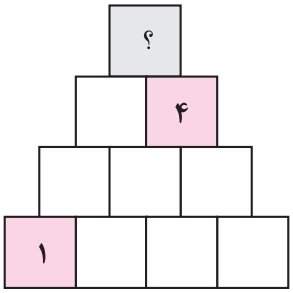


شکل۱

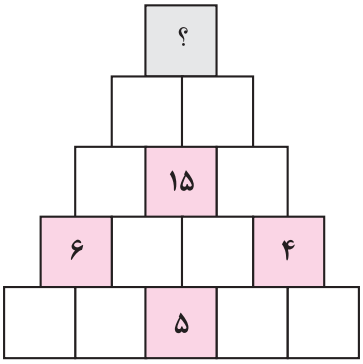
در چنین مسئله‌هایی (مثلث‌های جادویی) بعضی از عددها داده می‌شوند و همهٔ آن‌ها و به‌خصوص عدد لایهٔ آخر خواسته می‌شود. در اینجا چهار مثلث جادویی برای شما داریم که هدف از حل آن‌ها یافتن آخرین عدد بالایی مثلث اســـت. مسئله‌ها را در چهار سطح برایتان مطرح می‌کنیم: مبتدی، آسان، متوسط و دشوار. در ضمن در این مثلث‌ها، همهٔ اعداد، طبیعی هستند و این را نباید ضمن حل مسئله فراموش کنید. باز هم تأکید می‌کنم که همهٔ اعداد، عددهای طبیعی هستند. این شما و این هم مثلث‌های جادویی:



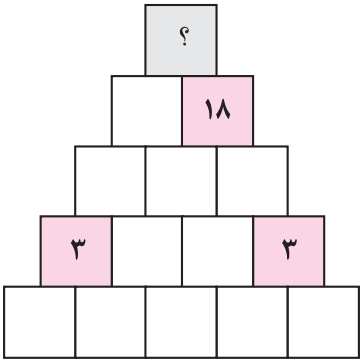
(مبتدی)



(آسان)



(متوسط)



(دشوار)

شکل۲

در ریاضیات، کمتر حفظ کنید و بیشتر بفهمید.

زنده‌یاد پرویز شهریاری

* hooshang_sharghi_45@yahoo.com

رقیبی برای قضیهٔ فیثاغورس

حسن طبیعی و محمد طبیعی

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه، مثلث منفرجه‌الزاویه، مثلث حاده‌الزاویه.

مقدمه

«قضیهٔ فیثاغورس» که یکی از مهم‌ترین و زیباترین قضایای هندسی است، بیان می‌کند که مثلثی با اضلاع a، b و c قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر: $c^2+b^2=a^2$. همچنین از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $c^2+b^2<a^2$، آن‌گاه: $\hat{A}>90^\circ$ و اگر $c^2+b^2>a^2$، آن‌گاه $\hat{A}<90^\circ$.

هدف از نوشتن این مقاله بیان و اثبات رابطه‌ای مشابه رابطهٔ قضیهٔ فیثاغورس است که سه خاصیت گفته شده را داشته باشد. هر چند اثبات‌های زیادی برای این رابطه وجود دارد، اما در اینجا قصد داریم تنها با استفاده از دو لِم معروف هندسی این رابطه را اثبات کنیم.

لِم ۱. در هر مثلث با اضلاع a، b و c رابطهٔ زیر برقرار است:

(P نصف محیط مثلث، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، و R شعاع دایرهٔ محیطی)

$$ab+ac+bc=p^2+r^2+4Rr$$

● برای اثبات این لِم کافی است از سه تساوی زیر استفاده کنیم (S مساحت مثلث است):

$$r=\frac{s}{p},\ R=\frac{abc}{4s},\ s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

لِم ۲. در مثلث ABC، O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل تقاطع ارتفاع‌هاست. اگر M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه: $2OM=AH$.

* از آنجا که O روی عمودمنصف BC واقع است، پس: $OM\perp BC$. لذا:

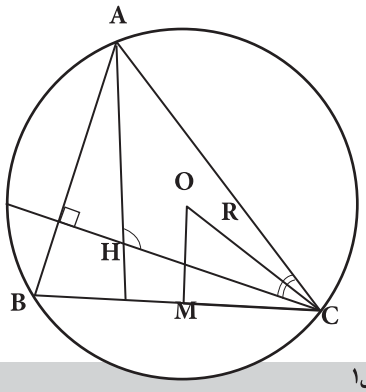
$$OM=R\cos(M\hat{O}C)=R\cos\frac{\widehat{BC}}{2}=R\cos\hat{A}\cdot$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{AH}{AC}=\frac{\sin(A\hat{C}H)}{\sin(A\hat{H}C)}=\frac{\sin(90-\hat{A})}{\sin(180-\hat{B})}=\frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}}$$

همچنین: $\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R$، پس: $AH=2R\cos\hat{A}$

و در نتیجه: $\boxed{2OM=AH}$



شکل۱

قضیهٔ ۱. در مثلث ABC رابطهٔ $2R+r=P$ برقرار است، اگر و تنها اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد.

● ابتدا می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر $2R+r=P$، آن‌گاه $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است. اگر طرفین تساوی را مجذور کنیم، خواهیم داشت: $4R^2+r^2+4Rr=P^2$.

حال به طرفین تساوی P^2 را اضافه می‌کنیم: $4R^2+P^2+r^2+4Rr=2P^2$.

با توجه به لِم (۱) داریم:

$$4R^2+ab+ac+bc=2P^2$$

با جای‌گذاری $P=\frac{a+b+c}{2}$ خواهیم داشت:

$$4R^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\Rightarrow 8R^2=a^2+b^2+c^2$$

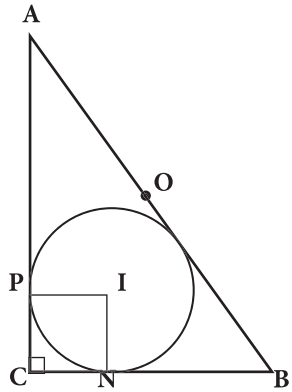
حال با استفاده از لِم (۲) می‌توان نوشت:

$R^2-\frac{a^2}{4}=OM^2=\frac{AH^2}{4}$ (M و N وسط‌های اضلاع هستند) و $R^2-\frac{b^2}{4}=ON^2=\frac{BH^2}{4}$. لذا: $4R^2-a^2=AH^2$ و $4R^2-b^2=BH^2$. پس: $8R^2-a^2-b^2=AH^2+BH^2$. از طرف دیگر، با توجه به تساوی (۱) داریم: $8R^2-a^2-b^2=c^2$. پس: $AH^2+BH^2=c^2$.

طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس: $\widehat{AHB}=90^\circ$. از طرف دیگر: $180-\hat{C}=90^\circ$، پس: $\hat{C}=90^\circ$.

● حال می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $2R+r=P$.

می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی (O) در مثلث قائم‌الزاویه در وسط وتر واقع است، پس: $2R=c$. حال اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و P و N محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی با AC و BC باشد، آن‌گاه روشن است که PINC مربع است و در نتیجه: $CN=r$. همچنین می‌دانیم: $CN=P-c$، پس: $r=P-c$ و $2R=c\Rightarrow 2R+r=p$.



شکل ۲

قضیهٔ ۲. مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است، اگر و تنها اگر داشته باشیم: $2R+r>P$.

● ابتدا ثابت می‌کنیم: اگر $2R+r>P$، آن‌گاه مثلث منفرجه‌الزاویه است. براساس برهان خلف، مشابه استدلال قبل پس از مجذور کردن طرفین نامساوی و افزودن P^2 به طرفین و استفاده از لِم (۱) خواهیم داشت: $8R^2>a^2+b^2+c^2$. از طرف دیگر می‌دانیم: $4R^2-a^2=AH^2$ و $4R^2-b^2=BH^2$، پس: $8R^2-a^2-b^2=AH^2+BH^2>c^2$ و همچنین: $A\hat{H}B<90^\circ$ و همچنین: $180-\hat{C}=A\hat{H}B<90^\circ$. در نتیجه $90^\circ<\hat{C}$ و مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است.

● حال می‌خواهیم بگوییم: اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ منفرجه‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $2R+r>P$. ابتدا فرض کنید: $\hat{C}>90^\circ$ پس: $c^2>a^2+b^2\Rightarrow 2c^2>2a^2+2b^2\Rightarrow 2c^2>(a+b)^2+(a-b)^2$

لذا: $(c+a-b)(c-a+b)>(a+b+c)(a+b-c)$، و: $(p-b)(p-a)>p(p-c)$. در نتیجه: $s>p(p-c)$ لذا $r=\frac{s}{p}>p-c$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ حمار: $2R>c$، پس: $2R+r>P$ و حکم به‌طور کامل ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳. مثلث ABC حاده‌الزاویه است، اگر و تنها اگر $2R+r<P$ برقرار باشد.

● **اثبات:** برای اثبات این قضیه از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $2R+r<P$ برقرار باشد و مثلث حاده‌الزاویه نباشد. روشن است که مثلث یا باید منفرجه‌الزاویه باشد و یا قائم‌الزاویه که در هر دو حالت داریم: $2R+r\geq P$ که با فرض $2R+r<P$ تناقض دارد.

تناقض حاصل نتیجه می‌دهد که اگر $2R+r<P$، آن‌گاه مثلث حاده‌الزاویه است. مشابه این استدلال می‌توان گفت اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $2R+r<P$.

منابع

۱. گودرزی، حبیب‌الله و گودرزی، محمدعلی (۱۳۸۲). روابط بین اجزای یک مثلث. انتشارات مبتکران. تهران.
۲. احمدپور، سیامک و مسگر مشهدی، مصطفی (۱۳۹۰). هندسه مسطحه از مقدمات تا المپیاد. انتشارات خوشخوان. تهران.
3. Yanloi, Wong (1996). "Geometric Identities of a traingle". Mathematical Medley Journal. September.

بررسی زمان سقوط روی

شایان خراسانی
دبیرستان شهید بهشتی
ساری

چکیده

در این مقاله عملکرد فرایند سقوط آزاد یا رهایی جسم را از یک ارتفاع معین، در ترکیب با مسائل هندسی نشان داده‌ایم. مسئلهٔ کمینهٔ زمان سقوط میان دو نقطه در یک صفحه که نیوتون آن را برای مسیرهای منحنی حل کرده و مسیر موردنظر را یافته، برای مسیرهای دیگری درون مثلث قائم‌الزاویه حل شده است. همهٔ مثال‌های اشاره شده در مقالهٔ جدید و مطالعهٔ آن‌ها می‌تواند دانش‌آموزان را در رویارویی با مسائل مرتبط با این فرایند توانمندتر کند.

کلیدواژه‌ها: زمان سقوط، مسیرهای هندسی

مقدمه

سقوط آزاد یا رها شدن جسم از یک ارتفاع، از مشهورترین مباحث مکانیک است که دانش‌آموزان در کتاب درسی خود با آن آشنا می‌شوند. اما اصولاً اکثر مسائل مربوط به آن به شکلی مطرح می‌شوند که خلاقیتی در دانش‌آموزان ایجاد نمی‌کند، زیرا تقریباً همهٔ کتاب‌های درسی و کمک‌درسی، مثال‌های مرتبط با این فرایند را به این صورت مطرح می‌کنند که یک یا چند جسم از یک ارتفاع مشخص رها می‌شوند و پارامترهای سینماتیکی مربوط به آن‌ها در این فرایند، مطلوب است. طرح مسئله‌ای توأم با فرایند فیزیکی مورد بحث و یک مسئلهٔ هندسی، هم خلاق است و هم تحلیل فیزیکی و توان ریاضی دانش‌آموز را ارتقا می‌دهد. البته در فیزیک کلاسیک مسائلی که از تلفیق فیزیک و ریاضی (به‌ویژه هندسه) طرح شده‌اند، کم نیستند. به‌عنوان نمونه در کتاب **ایوان نیون**[1] «قضیهٔ فرما» به شکل قضیه آموزنده‌ای در حل چند مسئلهٔ ریاضی به‌کار رفته است. همچنین، در کتاب **یوسپنسکی**[2] بسیاری از مسائل ریاضی توسط مکانیک حل شده‌اند.

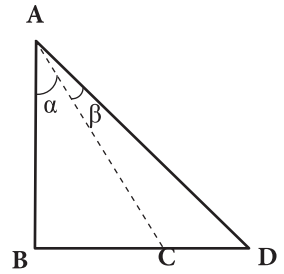
اما در این مقاله به منظور بررسی فرایند رهاسازی جسم، مثلث قائم‌الزاویه را برگزیده‌ایم، زیرا مطالعهٔ زمان سقوط روی مسیرهای متفاوت در آن، هم آموزنده است و هم حاوی نکات خلاق و جالبی است. در قسمت پایانی مقاله هم مسئلهٔ کمینهٔ زمان در مثلث قائم‌الزاویه را بررسی کرده‌ایم. انگیزهٔ اصلی ما در این قسمت، از مطالعهٔ داستان به چالش کشیده‌شدن **نیوتون** توسط **لایب نیتس** و **برنولی** ناشی شد. در سال ۱۶۹۶، لایب نیتس به کمک برنولی مسئله‌ای را به این شکل طرح کرد: «دو نقطه را به‌طور کاتوره‌ای روی یک صفحهٔ قائم اختیار کنید. وقتی جسم سنگینی بدون وجود اصطکاک تحت تأثیر نیروی گرانش از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی برود، چه منحنی‌ای را طی می‌کند تا این فاصله را در کوتاه‌ترین زمان بپیماید؟»

زمان سقوط درون مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را در نظر بگیرید که در رأس B قائمه است. مسیر AC را درون مثلث طوری رسم کرده ایم که با ضلع قائم زاویهٔ α و با وتر زاویهٔ β

مسیرهای هندسی

می‌سازد. به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱. یک بار جسم از نقطهٔ A رها می‌شود و به C می‌رسد و بار دیگر مسیر AC را طی می‌کند و به D می‌رسد. زمان طی AC را t^s و زمان طی AD را t'^s در نظر می‌گیریم.

جســـمی را از نقطهٔ A رها می‌کنیم و پس از طی مسیر AC، در مدت t^s به نقطهٔ C می‌رسد. جسم دیگری را در همان لحظه از نقطهٔ A رها می‌کنیم و مسیر AD را در t'^s طی می‌کند. معادلات حرکت مربوط به مسیرهای AC و AD به‌صورت زیر هستند:

$$AC = \frac{1}{2} g \cos\alpha t^2 \quad (1)$$

$$AD = \frac{1}{2} g \cos(\alpha+\beta) t'^2 \quad (2)$$

بدیهی است که AC و AD را می‌توان برحسب AB به‌صورت زیر نوشت:

$$AB = \frac{1}{2} g \cos^2\alpha t^2 \quad (3)$$

$$AD = \frac{1}{2} g \cos^2(\alpha+\beta) t'^2 \quad (4)$$

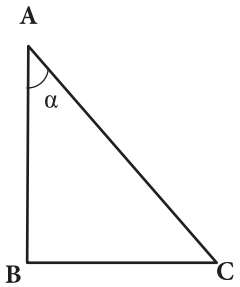
با تقسیم معادلات فوق برهم، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{t}{t'} = \frac{AC}{AD} \quad (5)$$

نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که نسبت زمان رها شدن در دو مســـیر متفاوت درون مثلث قائم‌الزاویه با نسبت طول مسیرهای متناظر، متناسب است.

زمان سقوط در مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵

نخســـت مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه ABC زیر را در نظر بگیرید. فـــرض کنید در رأس B انحنای بی‌نهایت کوچکی ایجاد می‌کنیم، به‌طوری که اگر جسمی از نقطهٔ A رها شـــد، پس از رسیدن به B به حرکت خود ادامه دهد تا به C برسد (یعنی یک برخورد کشسان صورت می‌گیرد). بررسی ما در این قسمت، مقایسهٔ زمان رها شدن روی وتر AC و روی مسیر ABC است.



شکل ۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن زاویهٔ رأس A برابر α است، یک‌بار جسم فاصلهٔ نقطهٔ A تا C را در t^s طی می‌کند و بار دیگر مسیر AB را در t_1^s و مسیر BC را در t_2^s طی می‌کند. در رأس B انحنای بی‌نهایت کوچکی ایجاد کرده‌ایم.

اگر فرض کنیم جســـم، وتر AC را در t^s طی کرده است، معادلهٔ حرکت آن به شکل زیر خواهد بود:

$$AC = \frac{1}{2} g \cos\alpha t^2 \quad (۶)$$

و فــرض می‌کنیم زمان طی مســیر قائم AB، t_1^s است، پس:

$$AB = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (۷)$$

با ادغام این دو رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$t = \frac{t_1}{\cos\alpha} \quad (۸)$$

همچنین براساس آخرین فرض ما زمان طی مسیر افقی BC، t_2^s است، پس:

$$BC = g t_1 t_2 \quad (۹)$$

مقدار ســرعت در نقطهٔ B برابر gt_1 و بدیهی است روی مســیر BC سرعت ثابت اســت. پس با قرار دادن $BC=AC \sin\alpha$ در رابطهٔ فــوق و جاگذاری مقدار AC از رابطــهٔ (۶) و به کمک رابطهٔ (۸) ارتباط میان t_1 و t_2 به‌صورت زیر حاصل می‌آید:

$$t_2 = \frac{1}{2}(\tan\alpha) t_1 \quad (۱۰)$$

با مقایسهٔ مســیر این رابطه با رابطهٔ $t = \frac{t_1}{\cos\alpha}$ داریم:

$$t_2 = \frac{\sin\alpha}{2} t \quad (۱۱)$$

حال مقدار t_1+t_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$t_1 + t_2 = (\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha) \times t$$

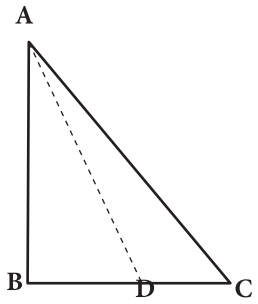
پس:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha} \quad (۱۲)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد، اگر $\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = 1$ باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت: $t=t_1+t_2$. شرط فوق به ازای $\alpha \approx 53^\circ$ صادق است. لذا برقراری رابطهٔ $t=t_1+t_2$ در مثلث قائم‌الزاویه ۳، ۴ و ۵ که دارای زاویهٔ حاده 53° است، امکان‌پذیر است. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا مســیر دیگری درون این مثلــث وجود دارد که شــرایط مورد بحث برای آن صادق باشــد؟ پاسخ را به شکل برهان خلف مطرح می‌کنیم.

برهان خلف

فرض کنید در مثلث شکل ۳ مسیر دیگری مانند ADC وجود دارد، به‌طوری که زمان رها شــدن در آن برابر t یا t_1+t_2 است.

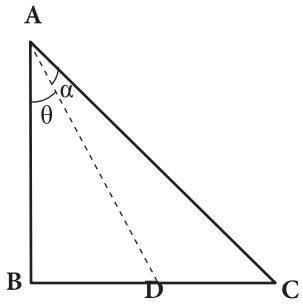


شکل ۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵ که در آن مسیر فرضی ADC در نظر گرفته شده است، با این فرض که: $t_{ADC}=t$.

با توجه به اینکه $V_B=V_D$، پس مسیر DC برای هر دو جسمی که از ADC و ABC رها می‌شوند، یکسان خواهد بود. لذا ناگزیر زمان مســیر ABD با مسیر AD برابر می‌شــود که این یعنی مثلــث ABD یک مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵ دیگر است که امری غیرممکن است. بنابراین فرض خلف نادرست است.

کمینهٔ زمان سقوط در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، جســمی از نقطهٔ A رها می‌شود و به نقطهٔ C می‌رسد. اما به این منظور بی‌نهایت مسیر از A تا C درون مثلث وجود دارد. برای ما مسیر کوتاه‌تر مطلوب اســت. می‌خواهیم ببینیم کدام مسیر در مقایسه با مســیرهای دیگر در کمترین زمان طی می‌شود.



شکل ۴. در این مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ رأس A برابر α است. بار دیگر فرض می‌کنیم در B و در D انحنای بی‌نهایت کوچکی وجود دارد و در آن‌ها یک برخورد کشسان صورت می‌گیرد. مسیر کمترین زمان را ADC برگزیده‌ایم، به‌طوری که AD با ضلع قائم‌الزاویه زاویهٔ θ می‌سازد.

با فرض اینکه جسم مسیر ADC را در مقایسه با مسیرهای دیگر در کمترین زمان طی می‌کند، زمان طی مسیر AD را t'_1 در نظر می‌گیریم و زمان طی مسیر قائم AB را t_1 ثانیه و زمان طی مسیر افقی BC را t_2 ثانیه در نظر می‌گیریم. معادلات حرکت به شکل زیرند:

$$AD = \frac{1}{2} g \cos\theta t'^2_1 \quad (13)$$

$$AB = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (14)$$

بی‌درنگ از معادلات فوق نتیجه می‌گیریم:

$$t'_1 = \frac{t_1}{\cos\theta} \quad (15)$$

با توجه به بحث مربوط به بخش قبل داریم:

$$t_2 = \frac{1}{2}(\tan\alpha)t_1 \quad (16)$$

$$t_{BD} = \frac{1}{2}(\tan\theta)t_1 \quad (17)$$

پس:

$$t_{DC} = t_2 - t_{BD} = \frac{1}{2}(\tan\alpha - \tan\theta)t_1$$

از این‌رو زمان طی مسیر فرضی ADC به‌صورت زیر است:

$$t_{ADC} = \frac{t_1}{\cos\theta} + \frac{1}{2}(\tan\alpha - \tan\theta)t_1 \quad (18)$$

برای کمینه شدن t_{ADC} از آن نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dt_{ADC}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

پس مسیری که در آن زمان رها شدن کمینه است، به زاویهٔ 30° نسبت به ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه است. اکنون دو پرسش مطرح می‌شود: نخست اینکه اگر زاویهٔ رأس A در مثلث مورد اشاره 30° باشد، کمترین زمان مربوط به کدام مسیر است؟

برای پاسخ باید توجه شود که مشتق رابطهٔ (۱۸)، ریشه‌ای در بازه $0<\theta<30^\circ$ ندارد، بنابراین ضروری است مقدار t_{ADC} را در نقاط مرزی $\theta=0$ و $\theta=30^\circ$ محاسبه کنیم. در $\theta=0$ و $\alpha=30^\circ$ نتیجه می‌گیریم:

$$t_{ABC} = t_1 + \frac{1}{2} t_1 \tan 30^\circ \quad (19)$$

و در $\theta=30^\circ$ و $\alpha=30^\circ$ از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌گیریم:

$$t_{AC} = \frac{t_1}{\cos 30^\circ} \quad (20)$$

به وضوح با مقایسهٔ روابط (۱۹) و (۲۰) می‌توان نتیجه گرفت:

$$t_{AC} < t_{ABC}$$

پس وقتی $\alpha=30^\circ$ است، مسیری که با کمترین زمان رها شدن توأم است، همان وتر مثلث قائم‌الزاویه است. پرسش دوم این است که اگر زاویهٔ α کوچک‌تر از 30° باشد، کمینهٔ زمان کدام مسیر در مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود؟ این‌بار با توجه به $\alpha<30^\circ$، روابط (۱۹) و (۲۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$t_{ABC} = t_1 + \frac{1}{2}(\tan\alpha)t_1 \quad (21)$$

$$t_{AC} = \frac{t_1}{\cos\alpha} \quad (22)$$

مقایسهٔ روابط فوق نشان می‌دهد، همواره داریم: $t_{AC}<t_{ABC}$. بنابراین به این نتیجهٔ کلی می‌رسیم: «در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ رأس بالایی آن $\alpha\leq30^\circ$ است، مسیری که کمترین زمان را نسبت به مسیرهای دیگر دارد، مسیر وتر مثلث است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم، بررسی فرایند رها شدن جسم از یک ارتفاع می‌تواند با مثال‌های هندسی همراه باشد و مطالعهٔ آن‌ها خلاقیت دانش‌آموزان را دو چندان می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Ivan Nion
2. Uspernskii

منابع

۱. نیون، ایوان (۱۳۶۹). ماکزیمم و مینمم. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار.

2. V. A. Uspenskii (1961). *some applications of mechanics to mathematics (translated from the Russian by Halina Moss), Blaisdell.*

۱

کاشی‌کاری‌های اشر و هندسی تبدیلات

دکتر مقداد قاری*

چکیده

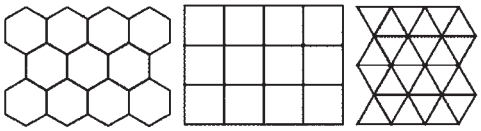
در این مقاله، به بررسی کاشی‌کاری‌های نقاش هلندی، ام. سی. اشر و ارتباط آن‌ها با هندسهٔ کاشی‌کاری پرداخته‌ایم. روش‌هایی را معرفی کرده‌ایم که به‌وسیلهٔ آن‌ها می‌توان با استفاده از تبدیلات ایزومتری یک کاشی‌کاری مفروض را به کاشی‌کاری‌هایی شبیه به نقاشی‌های اشر تبدیل کرد. این روش‌ها عبارت‌اند از: روش انتقال، روش دوران، ترکیب روش انتقال و دوران، و روش شکاف.

کلیدواژه‌ها: کاشی‌کاری، کاشی‌کاری‌های اشر، تبدیلات ایزومتری، انتقال، دوران.

مقدمه

کاشی‌کاری که یکی از موضوعات هندسه محسوب می‌شود، بسیار ساده و برای همه قابل فهم است و وسیله‌ای جذاب برای یادگیری بسیاری از مفاهیم ریاضی است (ر.ک: رستگار، ۱۳۸۱ & Gunbaum Shephard, 1987,). پیش از ورود به اصل مطلب، مفاهیم کاشی‌کاری و ایزومتری را یادآوری می‌کنیم.

«کاشی‌کاری»[1] صفحه، یعنی پوشاندن کامل صفحه (اقلیدسی) با شکل‌های هندسی به‌طوری‌که شکل‌ها روی هم قرار نگیرند و هیچ فضای خالی بین آن‌ها باقی نماند. ثابت می‌شود که با تمام انواع مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها و برخی از پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌ها می‌توان صفحه را فرش کرد (یعنی کاشی‌کاری ساخت). در شکل ۱ کاشی‌کاری‌ها با مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم نشان داده شده‌اند.



شکل ۱

پیش از خواندن ادامهٔ مقاله بکوشید ثابت کنید که چرا با مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌توان صفحه را فرش کرد (خوانندگان علاقه‌مند برای دیدن جزئیات بیشتر می‌توانند ر.ک: قاری، کاشی‌کاری با چندضلعی...، ۱۳۹۱: ۸۷-۸۲؛ قاری کاشی‌کاری ارشمیدسی، ۱۳۹۱: ۲۴-۱۵).

یک تبدیل «ایزومتری»[2] (یا به‌طور خلاصه ایزومتری) نگاشتی است که از صفحهٔ اقلیدسی به روی خودش، به‌طوری‌که حافظ طول باشد. به‌عبارت دیگر، همواره فاصلهٔ بین دو نقطه و تصاویرشان تحت تبدیل ایزومتری مساوی هستند. برای مثال، «انتقال» یک ایزومتری است، در حالی‌که «تجانس» ایزومتری نیست. ریاضی‌دانان از سال ۱۸۳۱ می‌دانستند که هر ایزومتری یکی از این چهار نوع است: دوران، انتقال، انعکاس، و لغزه (که ترکیبی است از یک انعکاس و یک انتقال موازی با خط انعکاس).

از آنجا که مطالب این مقاله به‌صورت پرسش و پاسخ مطرح شده‌اند، به خوانندهٔ علاقه‌مند پیشنهاد می‌شود که پس از خواندن یک سؤال ابتدا خود پاسخ را بیابد و سپس ادامهٔ مطلب را دنبال کند.

کاشی‌کاری‌های اشر

در این بخش نشـــان می‌دهیم که چگونه می‌توان بـــا به‌کارگیری تبدیلات ایزومتری (به‌خصوص انتقال و دوران) یک کاشی‌کاری مفروض را به کاشی‌کاری از نوع اشـــر تبدیل کرد. **ام. سی. اشر**[3] (۱۹۷۲-۱۸۹۸) نقاش هلندی، به ریاضی علاقه داشت و بسیاری از نقاشی‌هایش کاشی‌کاری‌هایی هســـتند که در آن‌ها به‌جای استفاده از شکل‌های هندســـی، از تصاویر موجودات زنده بهره گرفته است (ر.ک: اشـــر، ۱۳۸۵؛ مک گیلاوی، ۱۳۷۱؛ www.mcescher.com; Ranueei, 1974).

■ **سؤال ۱.** آیا می‌توان با تصاویر موجودات زنده صفحه را فرش کرد؟

● **پاسخ:** بله، به راحتی می‌توان چنین کاشی‌کاری‌هایی رسم کرد. شکل ۲ نمونه‌ای از نقاشی‌های اشر است.

شکل ۲

اشـــر در میان سفرهای متعدد خود در سال ۱۹۲۲ مسافرتی به اســـپانیا داشت. ضمن این ســـفر از روی کاشی‌کاری‌های به‌جا مانده از مورها (مسلمانان شمال آفریقا) در اســـپانیا در کاخ «الحمـــراء»[4] و به‌خصوص از روی مســـجد «لامزکیتـــا»[5] واقع در شـــهر کوردوبا، نســـخه‌برداری‌های مبســـوطی به عمل آورد. در سال ۱۹۲۴، **جورج پولیا** مقاله‌ای در یک مجلهٔ بلورشناسی منتشر کرد که در آن گروه‌های تقارن صفحه را رده‌بندی و طرح‌هایی از این ۱۷ نـــوع گروه تقارن را در آن چاپ کرده بود. **ب. ج. اشر** که زمین‌شناس بود، یک نسخه از آن مقاله را برای برادر هنرمندش، ام. سی. اشر فرستاد. او الگوهای هندســـی سیاه و ســـفید پولیا را به‌عنوان راهنمایی برای ســـاختن طرح‌های خود به‌کار برد و به این فکر افتاد که با اســـتفاده از تصاویر موجودات زنده (مانند پرندگان، ماهی‌ها و خزندگان)، کاشی‌کاری‌هایی بسازد. نمونه‌هایی از کاشی‌کاری‌های کاخ‌الحمراء را در شکل ۳ می‌بینید. نمونه‌های زیادی از این کاشی‌کاری‌ها را می‌توان در مساجد اسلامی یافت.

شکل ۳

■ **ســـؤال ۲.** دلیل اینکه معماران در مساجد اسلامی از شکل‌های هندسی به‌جای تصاویر موجودات زنده برای ساخت کاشی‌کاری استفاده کرده‌اند، چیست؟

● **پاسخ:** به‌طور قطع یکی از اهداف آن‌ها، جلوگیری از برهم خوردن حواس (که ممکن است با دیدن تصاویر موجودات زنده به‌وجـــود آید) و در عین حال، ایجاد آرامش و تمرکز برای عبادت‌کنندگان بوده اســـت. این نقش‌های هندسی، علاوه بر اینکه دارای نمادها و معانی خاصی هســـتند (برای مثال ر.ک: کریچلو، ۱۳۹۰)، به دلیل تکرار یـــک الگوی مبنا به‌صورتی منظم و قاعده‌مند، در ذهن بیننده القا کنندهٔ نظم و یادآور وحدت در کثرت (آفرینش) و کثرت در وحدت (معراج انســـان) هستند (برای اطلاعات بیشتر ر.ک: پارمان و السعید، ۱۳۷۷).

حال که با علت عدم استفاده از کاشی‌کاری‌های به ســـبک اشر در مساجد آشنا شدیم، می‌خواهیم طریقهٔ رسم این کاشی‌کاری‌ها را یاد بگیریم.

■ **سؤال ۳.** آیا می‌توان با شکل ۴ صفحه را فرش کرد؟

شکل ۴. اسب بالدار

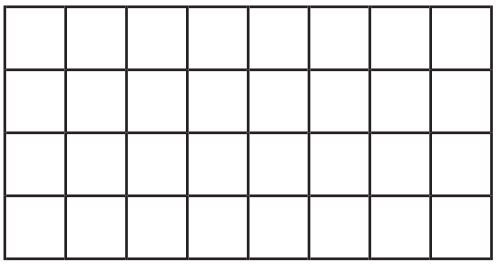
کاشی‌کاری که یکی از موضوعات هندسه محسوب می‌شود، بسیار ساده و برای همه قابل فهم است و وسیله‌ای جذاب برای یادگیری بسیاری از مفاهیم ریاضی است

● **پاسخ:** در نگاه اول ممکن است فکر کنید که نمی‌توان با اسب بالدار شکل ۴ صفحه را فرش کرد. برای اینکه به‌طور عملی این واقعیت را امتحان کنید، می‌توانید کاغذهای شفاف یا نازک فراهم کنید و با قرار دادن کاغذ شفاف روی تصویر اسب بالدار و رسم مکرر آن، مطمئن شوید که با اسب بالدار می‌توان صفحه را فرش کرد. کاشی‌کاری حاصل به‌صورت شکل ۵ است:

شکل ۵. کاشی‌کاری رسم شده توسط اشر با کاشی‌های اسب بالدار

■ **سؤال ۴.** اسب بالدار شکل ۴ چگونه رسم شده است که با آن می‌توان صفحه را فرش کرد؟

● **پاسخ:** دقت کنید که با تصویر هر اسبی نمی‌توان صفحه را فرش کرد. همچنین، برای ترسیم این اسب نباید مانند نقاشان قسمت‌های متفاوت اندام‌های اسب مانند سر، بدن، پاها و دست‌های آن را با شکل‌های هندسی رسم کرد. با کمی دقت می‌توانید تصویر این اسب و کاشی‌کاری آن را با کاشی‌کاری‌هایی که می‌شناسید، مقایسه کنید و دریابید که مشابه با کدام کاشی‌کاری است. نکته‌ای که می‌تواند به رسیدن به پاسخ این سؤال کمک کند، این است که در کاشی‌کاری شکل ۵ می‌توان نقاطی را پیدا کرد که دقیقاً چهار اسب بالدار اطراف آن نقاط قرار گرفته‌اند. این وضعیت مشابه با کاشی‌کاری با مربع است (شکل ۶).



شکل ۶. قسمتی از کاشی‌کاری با مربع

همچنین، الگوی قرار گرفتن اسب‌ها در کاشی‌کاری شکل ۵ که به‌طور موازی در ردیف‌ها و ستون‌هایی قرار گرفته‌اند نیز مشابه با کاشی‌کاری با مربع است. پس تا این لحظه **حدس** زدیم که اسب بالدار از روی مربع ترسیم شده است، ولی باید این حدس را اثبات کنیم.

■ **سؤال ۵.** چگونه می‌توان مربع را به اسب بالدار تبدیل کرد؟

● **پاسخ:** اولین راه‌حلی که به ذهن می‌رسد این است که اطراف اسب مربعی ترسیم کنیم. البته این راه اشتباه است، زیرا با کنار هم قرار دادن این مربع‌ها فضای خالی بین اسب‌ها باقی خواهد ماند. در واقع ضلع‌های مستقیم مربع باید طوری تغییر شکل یابند که شبیه پازل، یکدیگر را تکمیل کنند. در شکل ۷ نشان داده‌ایم که چگونه یک مربع می‌تواند به یک اسب بالدار تبدیل شود.

شکل ۷. مراحل تبدیل مربع به اسب بالدار (از چپ به راست) با استفاده از انتقال

در این تبدیل از انتقال استفاده شده است. روی یکی از ضلع‌های مربع یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم و آن را به روی ضلع مقابل آن انتقال می‌دهیم (و یا منحنی دلخواه را از روی یک ضلع مربع بریده و روی ضلع مقابل آن می‌چسبانیم). سپس همین کار را در مورد دو ضلع دیگر انجام می‌دهیم. حال اگر در کاشی‌کاری منتظم که از کاشی‌های مربع‌شکل تشکیل شده است (شکل ۶)، هر مربع را مطابق با شکل ۷ به یک اسب بالدار تبدیل

کنیم، کاشی‌کاری شکل ۵ به‌دست می‌آید. این روش را روش «انتقال» یا «برش» می‌نامند.

■ **سؤال ۶.** روش انتقال را برای چه شکل‌هایی می‌توان به‌کار برد؟

● **پاسخ:** روش انتقال برای شکل‌هایی قابل کاربرد است که اضلاع روبه‌روی آن‌ها دوبه‌دو موازی و مساوی باشند.

در ادامه روش دیگری برای ترسیم کاشی‌کاری‌هایی به سبک اشر معرفی می‌شود.

■ **سؤال ۷.** آیا می‌توان با شکل ۸ صفحه را فرش کرد؟

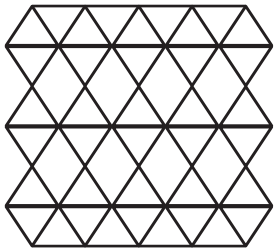
شکل ۸. ماهی

● **پاسخ:** به سادگی دیده می‌شود که با ماهی شکل ۸ کاشی‌کاری شکل ۹ را می‌توان ساخت.

شکل ۹. کاشی‌کاری اشر با کاشی‌های شکل ۸

■ **سؤال ۸:** ماهی شکل ۷ چگونه رسم شده است که با آن می‌توان صفحه را فرش کرد؟

● **پاسخ:** با کمی دقت می‌توان دریافت که نقاطی در کاشی‌کاری شکل ۹ وجود دارند که شش ماهی اطراف هر نقطه از آن نقاط را پوشانده‌اند. این وضعیت مشابه با کاشی‌کاری با مثلث متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱۰).

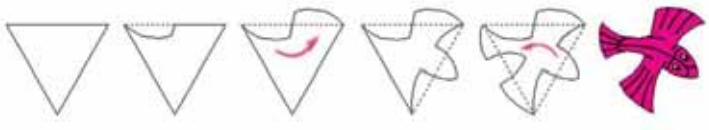


شکل ۱۰. قسمتی از کاشی‌کاری با مثلث متساوی‌الاضلاع

پس **حدس** می‌زنیم که اسب بالدار از روی مثلث متساوی‌الاضلاع ترسیم شده است، ولی باید آن را اثبات کرد.

■ **سؤال ۹.** چگونه می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را به ماهی تبدیل کرد؟

● **پاسخ:** مسلماً روش انتقال را نمی‌توان برای مثلث به‌کار برد و باید روش دیگری برای تبدیل مثلث متساوی‌الاضلاع به ماهی یافت. در شکل ۱۱ نشان داده شده است که چگونه می‌توان با استفاده از دوران، یک مثلث را به یک ماهی تبدیل کرد (مرجع [۱۰] را ببینید). (ر.ک: Meletsky, 1974).



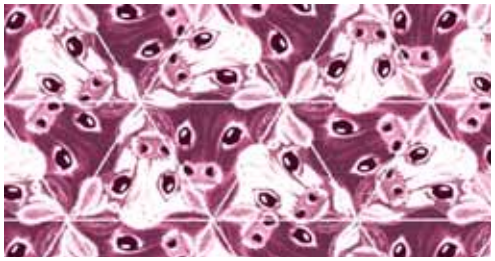
شکل ۱۱. مراحل تبدیل مثلث به ماهی با استفاده از دوران

مطابق با شکل ۱۱، ابتدا یکی از ضلع‌ها را نصف و روی نصف آن یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم. سپس این منحنی را ۱۸۰ درجه حول نقطهٔ وسط آن ضلع دوران می‌دهیم. همان‌طور که در کاشی‌کاری شکل ۹ می‌بینید، با این کار این ضلع خودش را تکمیل خواهد کرد. در مرحلهٔ بعد، روی یکی از اضلاع دیگر مثلث یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم و آن را حول رأس دیگر مثلث ۶۰ درجه دوران می‌دهیم. این روش را «*روش دوران*» می‌نامند.

روش دیگر برای فرش کردن صفحه استفاده از مهرهایی به شکل کاشی‌های کاشی‌کاری است. مهرهای شکل ۱۲ از روی کاشی‌های شکل‌های ۴ و ۸ ساخته شده‌اند.

شکل ۱۲

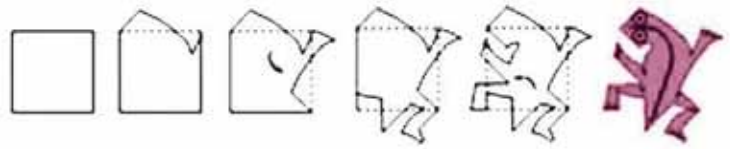
کاشی‌کاری شکل ۱۳ نیز با استفاده از روش دوران از مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست آمده است:



شکل ۱۳

سؤال ۱۰. روش دوران را برای چه شکل‌هایی می‌توان به‌کار برد؟

● **پاسخ:** روش دوران برای شکل‌هایی قابل کاربرد است که اضلاع مجاور آن‌ها مساوی باشند. دقت کنید که این روش برای مربع نیز قابل کاربرد است. در شکل ۱۴ روش دوران را برای مربع نشان داده‌ایم.



شکل ۱۴. مراحل تبدیل مربع به مارمولک با استفاده از دوران

با کاشی شکل ۱۴ کاشی‌کاری شکل ۱۵ را می‌توان ساخت.

شکل ۱۵. کاشی‌کاری اشر با کاشی شکل ۱۴

سؤال ۱۱: استفاده از روش دوران به‌جای انتقال برای مربع باعث ایجاد چه تفاوت‌هایی می‌شود؟ کاشی‌کاری‌های شکل‌های ۵ و ۱۵ چه تفاوت‌هایی دارند؟

● **پاسخ:** تفاوت در طریقهٔ قرار گرفتن کاشی‌ها در کاشی‌کاری است. در کاشی‌کاری شکل ۵، به‌دلیل استفاده از روش انتقال اسب‌های بالدار (شکل ۷) به‌صورت انتقال یافته در کاشی‌کاری ظاهر شده‌اند. ولی در کاشی‌کاری شکل ۱۵، به‌دلیل استفاده از روش دوران مارمولک‌ها (شکل ۱۴) به‌صورت دوران یافته در کاشی‌کاری ظاهر شده‌اند.

شکل‌های ۷، ۱۱ و ۱۴ به‌صورت انیمیشن در این منبع موجودند:

http://britlon.disted.camosun.bc.ca

در بخش دوم مقاله روش‌های دیگری برای ترسیم کاشی‌کاری به سبک اشر معرفی می‌شوند.

* پژوهشگر پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
meghdadghari@gmail.com

پی‌نوشت‌ها

1. Tiling
2. Isometry
3. Maurits Cornelis Escher
4. Alhambra
5. La Mezquita

منابع

۱. اشر، موریتس کورنلیس (۱۳۸۵). سرگذشت و آثار اشر. ترجمهٔ علی‌اصغر بهرام بیگی. کارگاه هنر. تهران.
۲. پارمان، عایشه و السعید، عصام (۱۳۷۷). نقش‌های هندسی در هنر اسلامی. ترجمهٔ مسعود رجب‌نیا. انتشارات سروش. تهران.
۳. رستگار، آرش (۱۳۸۱). کارگاه هندسه. مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی. تهران. چاپ دوم.
۴. مک گیلاوی، ک. اچ. (۱۳۷۱). دنیای علمی و جادویی موریس اشر. ترجمهٔ محمدرضا کشاورزی. انتشارات بهار. تهران.
۵. قاری، مقداد (۱۳۹۱). «کاشی‌کاری با چندضلعی‌های منتظم». نشریهٔ آموزشی پژوهشی اتحاد. اتحادیهٔ نمایندگان انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران. شماره‌های ۸ و ۹.
۶. قاری، مقداد (۱۳۹۱). کاشی‌کاری‌های ارشمیدسی. فرنود، نشریهٔ انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان. شمارهٔ ۱۹.
۷. کریچلو، کیت (۱۳۹۰). تحلیل مضامین جهان‌شناختی نقوش اسلامی. ترجمهٔ سیدحسن آذرکار. مؤسسهٔ انتشارات حکمت. تهران.
8. Grunbaum, B. & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and company.
9. Hejazi, Mehrdad (2005). *Geometry in nature and Persian architecture.* Building and Enviroment, vol. 40, pages 1413-1427.
10. Maletsky, Evan M. (1974). *Designs with Tessellations,* Mathematics Teacher, vol. 67, No. 4, pages 335-338.
11. Ranucci, Ernest R. (1974). Master of Tessellations: M. C. Escher, 1898-1972, Mathematics Teacher, vol. 67, No. 4, pages 299-306.
12. http://www.mcescher.com/. M. C. Escher, the official website.
13. http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher.htm. Escher in the Classrom.

ایستگاه دوم: چند معمای منطقی از سرزمین بوقلمون صفت‌ها!

بعد از محاسبات عددی پردردسر ایستگاه اول، حالا شنیدن چند معمای منطقی زیبا حتماً نشاط‌آور است! حتماً می‌دانید که بوقلمون‌صفت، برای توصیف آدم‌های دمدمی مزاج و متغیر احوال به‌کار می‌رود. «جزیرهٔ بوقلمون» محل زندگی این‌جور آدم‌ها بود. همهٔ این آدم‌ها، در بعضی روزهای هفته، فقط راست و در بعضی روزهای دیگر فقط دروغ می‌گفتند. مثلاً، **هرمز** و **مهرداد** دو برادر از ساکنان این جزیره بودند که هرمز فقط در روزهای دوشنبه دروغ می‌گفت و در بقیهٔ روزها راست می‌گفت.

- **معمای اول:** یک روز هرمز گفت: «امروز دوشنبه است و من متأهل هستم.» آیا آن روز واقعاً دوشنبه بود؟ آیا او واقعاً متأهل بود؟
- **معمای دوم:** مطابق روایتی دیگر از این داستان، هرمز گفت: «یا امروز دوشنبه است و یا من متأهل هستم.» یعنی لااقل یکی یا هر دو. اگر این روایت صحیح باشد، آیا هرمز متأهل بود یا نه و آیا آن روز واقعاً دوشنبه بود؟
- **معمای سوم:** یک روایت دیگر هم از این داستان وجود دارد که خیلی شبیه اولی است، ولی با آن تفاوت دارد. این‌بار گفته می‌شود که هرمز ابتدا گفت: «امروز دوشنبه است» و بعداً در همان روز گفت: «من متأهل هستم.» پاسخ سؤال‌های روایت دوم در این روایت چیست؟
- **معمای چهارم:** چه جمله‌ای است که هرمز می‌تواند آن را پنجشنبه‌ها بیان کند، ولی نمی‌تواند آن را در روزهای دیگر بگوید؟!
- **معمای پنجم:** مهرداد هم مانند هرمز بوقلمون‌صفت است، ولی او فقط روزهای پنجشنبه دروغ می‌گوید و بقیهٔ روزها دروغ نمی‌گوید. یک روز یکی از دو برادر گفت: «فردا سه‌شنبه است.» درست یک هفته بعد او گفت: «من فردا دروغ می‌گویم.» این چه روزی از هفته بود؟ او کدام برادر بود؟
- **معمای ششم:** روایتی دیگر از همین ماجرا وجود دارد! مطابق این روایت، بعد از آنکه یک برادر گفت: «فردا سه‌شنبه است»، برادر دیگر هفتهٔ بعد گفت: «من فردا دروغ می‌گویم.» اگر این روایت درست باشد، این‌بار در چه روزی از هفته این اتفاق افتاده است؟
- **معمای هفتم:** یک روز برادر بزرگ‌تر گفت: «من هرمز هستم.» سپس برادر دیگر گفت: «من مهرداد هستم.» چه کسی بزرگ‌تر است، هرمز یا مهرداد؟
- **معمای هشتم:** در این جزیره، متناظر با هر شهروند A یک شهروند A' وجود دارد که فقط و فقط در همان روزی که A دروغ می‌گوید، او راست می‌گوید. به‌عبارت دیگر، در هر روزی که A دروغ می‌گوید، A' راست می‌گوید و در هر روزی که A راست بگوید، A' دروغ می‌گوید. رفتار A' همیشه متضاد رفتار A است.

ویژگی دوم این جزیره آن است که در ازای هر دو شهروند A و B، یک شهروند C وجود دارد که در همهٔ روزهایی که A و B هر دو راست می‌گویند، او هم راست می‌گوید، اما نه در روزهای دیگر (C در هر روزی که لااقل یکی از دو نفر A و B دروغ بگویند، دروغ می‌گوید). شایعه‌ای وجود دارد که در این جزیره هیچ‌کس در همهٔ روزها راست نمی‌گوید. آیا این شایعه راست است؟

نگاهی به

کتاب هندسهٔ ۲ سال سوم ریاضی

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

اشاره

این کتاب به اقرار بیشتر معلم‌هایی که آن را تدریس کرده‌اند، کتابی خوش‌دست است و آن‌ها از تدریس کتاب لذت می‌برند. دانش‌آموزان نیز با این کتاب خیلی خوب کنار می‌آیند. با وجود این، در کتاب برخی معایب وجود دارد که در صورت رفع آن‌ها، درجهٔ کیفی کتاب بالاتر خواهد رفت. برخی از آن‌ها را به‌طور مختصر بررسی می‌کنیم.

اصول موضوع

یکی از مواردی که در جاهای متفاوت کتاب خودنمایی می‌کند، «اصول موضوع» است و اینکه کتاب براساس روش اصل موضوعی نوشته شده است یا خیر.

در فصل چهارم اصول موضوع بسیار واضح و شفاف بیان شده و قضایا نیز براساس آن‌ها اثبات شده‌اند. اما در سه فصل دیگر که در ادامهٔ کتاب هندسهٔ ۱ آمده همان شیوهٔ هندسهٔ ۱ ادامه یافته است. یعنی اصول موضوع شفاف بیان نشده‌اند و کتاب تأکید زیادی روی اصول موضوع ندارد. این امر شاید به‌دلیل اختلاف‌نظر مؤلفان کتاب پیش آمده باشد؛ اختلاف‌نظری که در شناسنامهٔ کتاب نیز خود را نشان می‌دهد. چرا که مؤلفان فصل‌های ۱، ۲ و ۳ و مؤلفان فصل ۴ راه خود را جدا کرده‌اند؛ مسئله‌ای که در کمتر کتابی دیده می‌شود.

از آنجا که هندسه معمولاً با اصول موضوع تدریس می‌شده است و بسیاری از معلم‌ها این شیوه را در نظام قدیم تدریس کرده‌اند یا خود به این روش تحصیل کرده‌اند، برای آن‌ها دوری از این شیوه کمی سخت است. اما باید توجه کرد که شیوهٔ اصل موضوعی برای دانش‌آموزان بسیار سنگین است و شیرینی هندسه را از

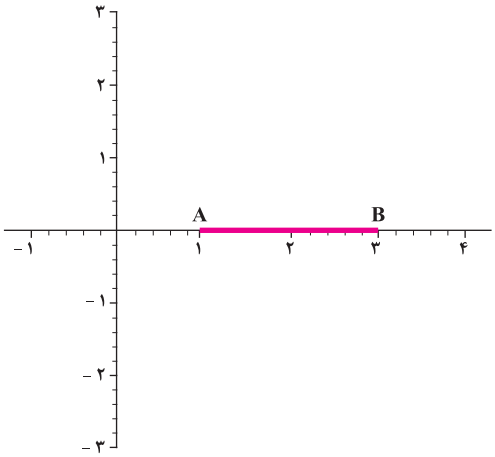
بین می‌برد. در واقع این فکر را به دانش‌آموز القا می‌کند که در هندسه نمی‌توان مسئله حل کرد. این موضوع برای معلم‌هایی که هندسه تدریس می‌کنند، بسیار آشناست.

تعریف

بدیهی است که تعریف در ریاضی بسیار اهمیت دارد، اما در چند مورد در این کتاب تعریف‌ها به درستی بیان نشده‌اند؛ از جمله تعریف «مرکز ثقل». در صفحه ۳۶ کتاب چنین آمده است: «توجه: نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل آن است.»

این موضوع در صورتی معنی پیدا می‌کند که قبلاً مرکز ثقل تعریف شده باشد، اما چنین اتفاقی نیفتاده است و دانش‌آموز تعریفی از مرکز ثقل ندیده است. همچنین، در صفحهٔ ۱۰۰ کتاب مؤلفان قصد تعریف مفهوم «جهت شکل» را داشته و نوشته‌اند: «در شکل مثال ۳، برای حرکت از A به B و به C، جهت حرکت عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، در صورتی که برای حرکت از A' به B' و به C' جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. پس بازتاب، **جهت** حرکت را عکس می‌کند.»

در این‌جا تعریف واضح و روشنی از جهت بیان نشده است. شاید مؤلفان محترم به منظور صرفه‌جویی در صفحه‌های کتاب چنین کرده‌اند. ولی بهتر بود در جای دیگری صرفه‌جویی می‌کردند، چرا که این عمل موجب مشکلات زیادی شده است. از جمله اینکه نمی‌توان جهت یک پاره‌خط را که موازی محور تقارن است، تعریف کرد. برای مثال، جهت شکل AB در شکل ۱ چیست؟

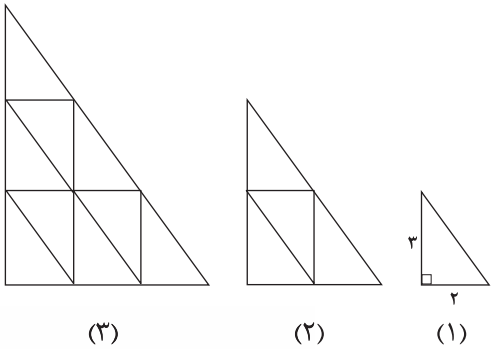


شکل ۱

جالب اینکه در خرداد ۱۳۹۱، «جهت شکل» یکی از سؤال‌های امتحانی بود که بین دبیران نیز بحث و جدل‌های زیادی بر سر آن درگرفته بود.

سؤال نامناسب

شروع کتاب همانند کتاب‌های هندسهٔ ۱ و جبر و احتمال، با روش‌های استدلال در ریاضی است که معمولاً با استقرا نیز آغاز می‌شود. به‌عنوان اولین فعالیت، دانش‌آموز باید تعداد مثلث‌های کوچک شکل ۲ را محاسبه کند و رابطهٔ بین n و تعداد مثلث‌های کوچک شکل مرحلهٔ n را حدس بزند و برای این حدس از جدول نظام‌دار استفاده کند.

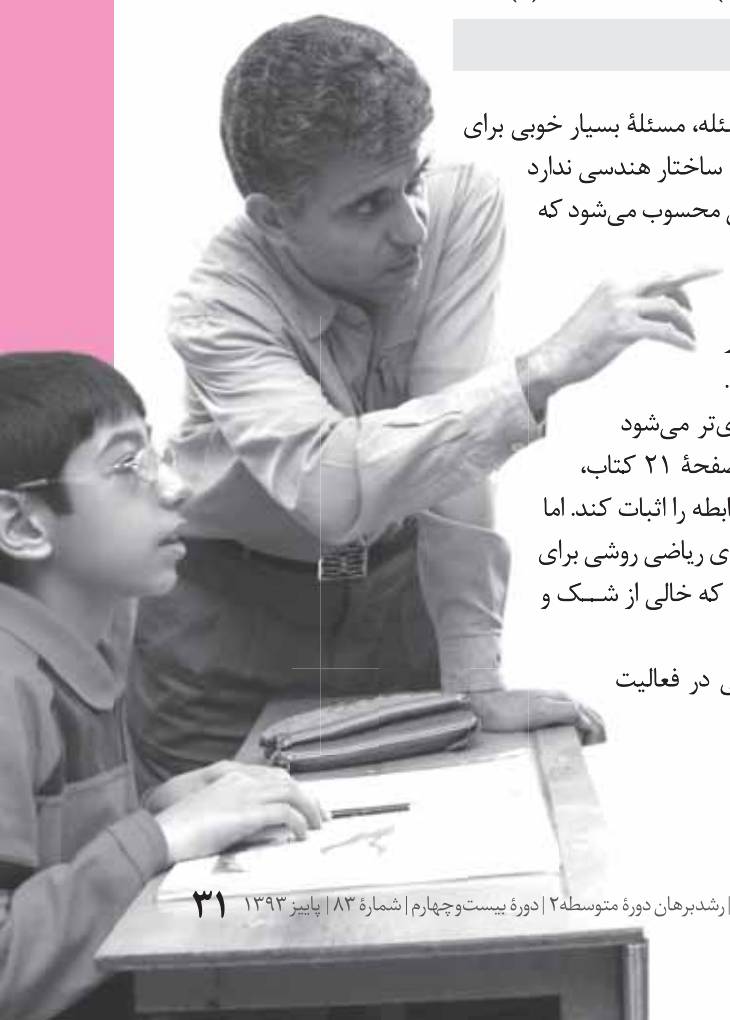


شکل ۲

هر چند این مسئله، مسئلهٔ بسیار خوبی برای شروع کار است، ولی ساختار هندسی ندارد و مسئله‌ای شمارشی محسوب می‌شود که بیشتر مناسب درس ریاضیات گسسته یا جبر و احتمال است. مشکل وقتی جدی‌تر می‌شود که در مسئله‌ی ۷ صفحهٔ ۲۱ کتاب، دانش‌آموز باید این رابطه را اثبات کند. اما آیا به غیر از استقرای ریاضی روشی برای این کار وجود دارد که خالی از شک و تردید باشد؟

چنین مشکلی در فعالیت ۱-۹ نیز وجود دارد.

از آنجا که هندسه معمولاً با اصول موضوع تدریس می‌شده است و بسیاری از معلم‌ها این شیوه را در نظام قدیم تدریس کرده‌اند یا خود به این روش تحصیل کرده‌اند، برای آن‌ها دوری از این شیوه کمی سخت است



آیا این مثال درست است؟

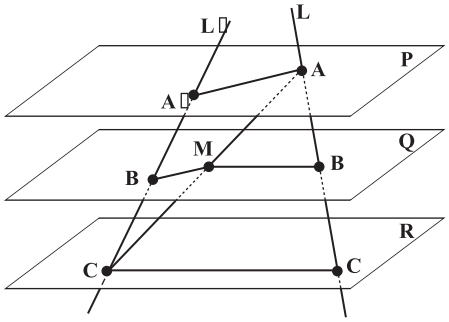
در فصل «هندسه در فضا» برای مفهوم «عبور بی‌شمار صفحه از یک خط» چنین آورده شده است: «مثال: شیرازهٔ هر کتاب، فصل مشترک تمام صفحه‌های آن کتاب است. برای مثال کمک می‌کند تا بهتر بفهمیم که چگونه از یک خط، بی‌شمار صفحه می‌گذرد.»

اما واضح است که این مثال به هیچ‌وجه نمی‌تواند مثال خوبی برای این مفهوم باشد. چرا که شیرازهٔ کتاب یک صفحه است. مثلاً چگونه می‌توان شیرازهٔ یک کتاب هزار صفحه‌ای را یک خط فرض کرد. به عبارت دیگر، این مثال به هیچ‌عنوان مثال خوبی نیست. بگذریم از اینکه صفحه‌های کتاب با هم موازی هستند و اصلاً فصل مشترکی ندارند! اما مثال صفحهٔ در و خط لولاها مثال مناسبی می‌تواند باشد.

کتاب هندسه ۲ کتاب به نسبت خوبی است و با کمی بازبینی و اصلاح کتاب بهتری می‌شود

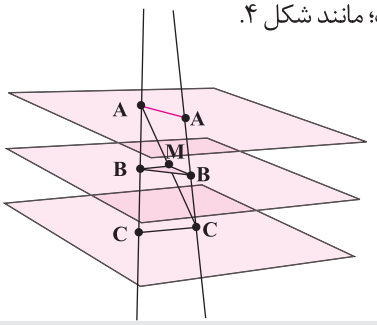
شکل‌های فضایی

شکل ۳ شکلی است که برای «قضیهٔ تالس» در فضا رسم شده است. در این شکل به نظر می‌رسد که دو خط L و L′ در یک صفحه قرار دارند، یعنی متنافر نیستند. بنابراین شکل نمی‌تواند حالت کلی داشته باشد.



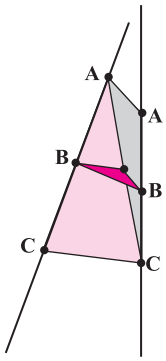
شکل ۳

برای این قضیه می‌توان شکل‌های زیباتری در نظر گرفت؛ مانند شکل ۴.

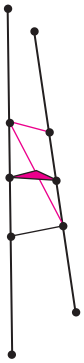


شکل ۴

اگر صفحه‌ها را حذف کنیم، شکل‌های ۵ و ۶ به‌دست می‌آیند که اثبات را خیلی واضح می‌کنند و نیازی هم به توضیح ندارند.

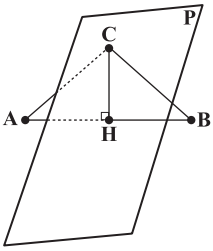


شکل ۵

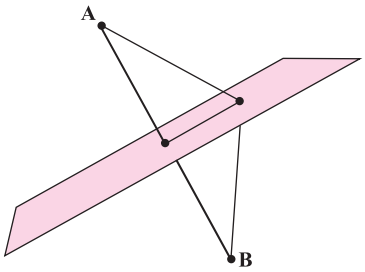


شکل ۶

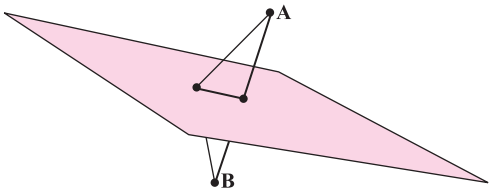
همچنین، شکل ۷ که شکل صفحهٔ ۱۵۴ کتاب است، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط را نشان می‌دهد و به‌نظر نمی‌رسد شکل مناسبی باشد. شاید شکل‌های ۸ و ۹ مناسب‌تر باشند.



شکل ۷

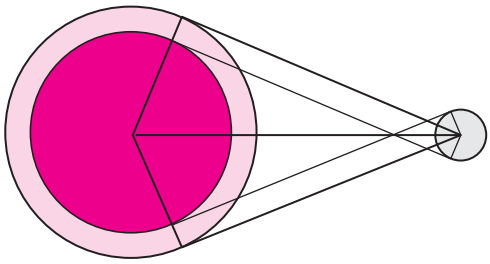


شکل ۸

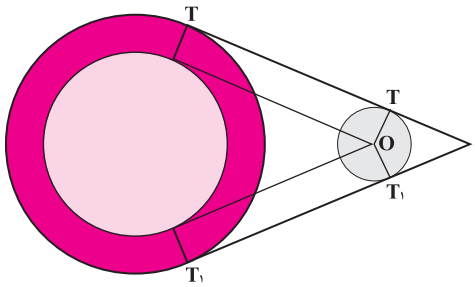


شکل ۹

در بخش مماس‌های مشترک داخلی و خارجی دایره هم شکل‌های زیبایی می‌توان به سادگی رسم کرد، ولی کتاب چنین نکرده است؛ از جمله شکل‌های ۱۰ و ۱۱.



شکل ۱۰



شکل ۱۱

آیا این اثبات است؟

در مسئلهٔ ۲ در صفحهٔ ۲۸ کتاب از دانش‌آموز خواسته شده است که با روش برهان خلف ثابت کند: «اگر a، b و c سه خط راست باشند که: b||c و a||b، آن‌گاه: a||c.»

به فرض که a و c موازی نباشند، پس متقاطع هستند. و به فرض که در نقطهٔ M این دو خط متقاطع باشند، بنابراین از نقطهٔ M دو خط a و c عبور کرده‌اند و هر دو با خط b موازی‌اند. اما این تناقض است. چرا که از هر نقطه خارج یک خط فقط یک خط موازی آن می‌گذرد. پس فرض خلف باطل و a و c موازی‌اند.

هر چند اثبات درست به‌نظر می‌رسد، ولی چنین نیست. چرا که قبلاً چنین چیزی را نپذیرفته‌ایم. در صورتی که فرض کنیم چنین چیزی بدیهی است، نیازی به این اثبات هم نبوده است. چرا که صورت مسئله نیز همین اندازه بدیهی است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به شرایط کتاب، چنین مسئله‌ای اگر مطرح نمی‌شد بهتر بود.

آیا کتاب ویراستاری شده است؟

به‌نظر می‌رسد کتاب ویراستاری نشده است یا اینکه از ویرایش آن مدت‌ها می‌گذرد. چرا که در صفحهٔ ۱۲۹ کتاب چنین آمده است:

«۴-۱. خط و صفحه در فضا

در شکل بالا، خط‌ها و صفحه‌های زیادی را می‌بینید. برخی از رابطه‌هایی که ...»

اما در بالای صفحه شکلی وجود ندارد. همچنین در فصل ۳ در جاهای متفاوت برای حل مسئله دانستن مختصات وسط پاره‌خط ضروری است. این رابطه در کتاب ریاضی ۱ قبلاً وجود داشت، اما در کتابی که در حال حاضر تدریس می‌شود، چنین رابطه‌ای وجود ندارد.

اثبات در پیوست

در فصل «هندسهٔ فضایی» اثبات بسیاری از قضایا و نتایج در پیوست آورده شده است. از طرف دیگر، برخی از این نتایج دوباره در ادامه ثابت شده‌اند. از جمله، نتیجهٔ ۱ در صفحهٔ ۱۴۱ که اثبات آن به پیوست ارجاع داده شده، در صفحهٔ ۱۵۳ به‌عنوان مثال ۳ ثابت شده است. هر چند چنین امری در کتاب‌های دانشگاهی متداول است، ولی تجربه نشان داده است که برای دورهٔ دبیرستان مناسب نیست؛ چرا که باعث سردرگمی دانش‌آموزی می‌شود که قرار نیست حتماً ریاضی‌دان شود. شاید حجیم شدن کتاب به‌خاطر استفاده از این روش باشد. بهتر است مثلاً بخش «اثبات به کمک تبدیلات» که وجود آن ضروری نیست، حذف شود و به‌جای آن فصل هندسهٔ فضایی کامل‌تر و دقیق‌تر ارائه شود.

نتیجه‌گیری

هر چند کتاب هندسه ۲ کتاب به نسبت خوبی است و با کمی بازبینی و اصلاح کتاب بهتری می‌شود، اما آنچه جای تأسف دارد این است که این کتاب نیز همانند سایر کتاب‌ها، آن‌قدر اصلاح نمی‌شود تا اینکه به کلی عوض شود. به‌عبارت دیگر، برخی کتاب‌ها همانند ریاضی ۱ بعد از چند دوره تدریس و اصلاح، درست وقتی که به کتابی مناسب تبدیل شده‌اند، به یکباره به‌طور کلی تغییر می‌کنند. به این امید که این روند روزی از بین برود.

برخی کتاب‌ها همانند ریاضی ۱ بعد از چند دوره تدریس و اصلاح، درست وقتی که به کتابی مناسب تبدیل شده‌اند، به یکباره به‌طور کلی تغییر می‌کنند. به این امید که این روند روزی از بین برود

منبع

- بروجردیان، ناصر و گویا، زهرا و دیگران (۱۳۹۰). هندسهٔ ۲ سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کتب درسی. تهران.

ریاضی رنگین‌کمان

مریم شفیعی
مدرس انجمن ریاضی
پژوهش‌سرای دانش‌آموزی
محمدبن زکریای رازی
محدثه تاجیک
دانش‌آموز عضو انجمن
ریاضی پژوهش‌سرای
دانش‌آموزی محمدبن
زکریای رازی شهرری

چکیده

در این مقاله، این سؤال که «چرا در یک قطرهٔ کروی آب، رنگین‌کمان را فقط بین زوایای ۴۰ تا ۴۲ درجه می‌توان دید؟» مورد بررسی قرار گرفته است.

وقتی یک شعاع نور خورشید از هوا وارد قطرهٔ آب می‌شود، مقداری از این نور از روی قطره بازتاب می‌کند، مقداری نیز بعد از ورود به قطره از پشت آن خارج می‌شود، و مقداری هم در درون قطره، طبق «قانون اسنل» شکست می‌خورد و از قطره خارج می‌گردد و تشکیل رنگین‌کمان می‌دهد.

در تشکیل رنگین‌کمان دو عامل اصلی «ضریب شکست نور» و «طول موج» نقش مهمی دارند و علت اصلی تشکیل رنگ‌های مختلف در رنگین‌کمان هستند. هر قطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگ‌های رنگین‌کمان را در محدودهٔ دید انسان ایجاد کند. در این پژوهش علت کمانی بودن رنگین‌کمان نیز گفته شده است.

ما بعد از بررسی و اثبات فرمول‌های ریاضی به این نتیجه رسیدیم که شدت نور خروجی در تمام زوایا یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویهٔ حدود ۴۲ درجه می‌سازد. البته این زاویه به رنگ پرتو بستگی دارد و بین زاویهٔ ۴۰ تا ۴۲ درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است.

کلیدواژه‌ها: رنگین‌کمان، قانون اسنل، طول موج، شکست نور.

مقدمه

یکی از نمایش‌های نور در آسمان رنگین‌کمان است. رنگین‌کمان همان نور خورشید است که تحت تأثیر قطرات باران به رنگ‌های خودش منتشر می‌شود و به چشم بیننده می‌رسد. این پدیده هنگامی روی می‌دهد که پرتوهای سفیدرنگ خورشید در ارتفاع بالا به قطرات کروی شکل باران برخورد می‌کنند و با تجزیه شدن به طیف‌های نور مرئی (همان اتفاقی که در منشور روی می‌دهد) و بازتاب درون قطره، از آن خارج می‌شوند.

اگرچه معروف است که رنگین‌کمان هفت رنگ دارد اما این یک اشتباهی تاریخی است. وقتی **آیزاک نیوتن**[1] برای نخستین‌بار پرتوهای خورشید را از درون منشور عبور داد و طیف تجزیه شدهٔ نور را به‌دست آورد، شش رنگ را دید، اما از آنجا که در آن روزگار هفت عدد مقدسی بود، ترجیح داد رنگ نیلی را بین بنفش و آبی قرار دهد و با هفت رنگ ساختن طیف نور، توجه عمومی بیشتری را متوجه این پدیده سازد!

رنگین‌کمان وجود خارجی ندارد؛ یعنی ما نمی‌توانیم رنگین‌کمانی را بگیریم، یا پرده‌ای برای نمایش آن برپا کنیم، یا در محل آن فیلم عکاسی قرار دهیم و اثرش را روی فیلم ثبت کنیم. هرقدر تلاش کنیم به رنگین‌کمان نزدیک شویم، رنگین‌کمان نیز به همان اندازه از ما دورتر می‌شود و همیشه در فاصله‌ای ثابت از ما باقی می‌ماند. به‌همین دلیل است که تاکنون کسی موفق نشده است رنگین‌کمان را به دام بیندازد.

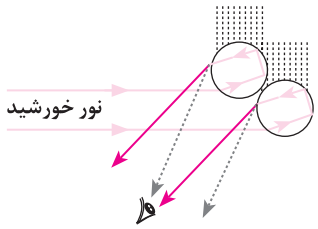
اولین‌بار **رنه‌دکارت**[2] آزمایشی انجام داد تا یک رنگین‌کمان بزرگ بسازد. او سه اصل را در نظر گرفت:

۱. فقط هنگام تشکیل باران رنگین‌کمان به‌وجود نمی‌آید و هرجا که قطرات ریز آب باشد، می‌توانیم رنگین‌کمان تشکیل دهیم.

۲. قطرات به‌طور تقریبی گرد و کروی هستند.

۳. کوچک‌تر یا بزرگ‌تر بودن قطره‌ها تأثیری در ظاهر رنگین‌کمان ندارد.

وقتی که نور با قطرهٔ کروی آب برخورد می‌کند، مقداری از آن نور بازتاب می‌کند و بقیهٔ آن شکست می‌خورد و در طول قطره حرکت می‌کند تا به سطح خمیدهٔ داخلی و آینه‌مانند قطره برخورد کند. در هر برخورد با سطح داخلی قطره، مقداری از نور باز می‌تابد و در قطره می‌ماند، و باقی‌ماندهٔ آن خارج می‌شود. بنابراین، پرتوهای نور می‌توانند بعد از یک، دو و سه بازتاب داخلی یا بیشتر با شکست دیگری از قطره خارج شوند. با وجود این، نوری که به پشت قطره برخورد می‌کند، دستخوش بازتاب کلی نمی‌شود و مقداری از نور از پشت قطره خارج می‌شود. اما نوری که از پشت قطرهٔ باران خارج شده رنگین‌کمان تشکیل نمی‌دهد، زیرا طیف تابشی از پشت قطره مانند رنگین‌کمان مرئی دارای شرایط تشکیل رنگین‌کمان نیست. از این‌رو رنگ‌ها بیشتر از آنکه رنگین‌کمان تشکیل دهند، با هم ترکیب می‌شوند (H. Nussenzveig, 1977).

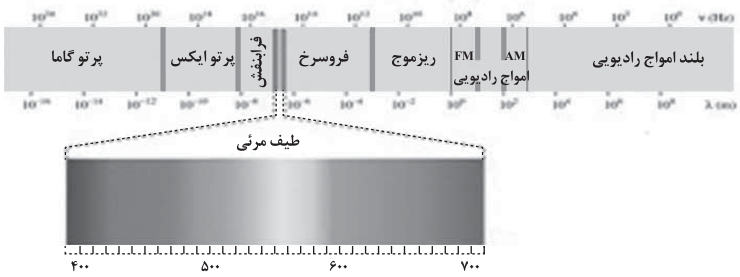


شکل ۱. شکل فرضی پرتو نور تابیده شده به قطره نور خورشید

در حقیقت در رنگین‌کمان طیف پیوسته‌ای از تمامی رنگ‌ها از بنفش تا قرمز در گسترهٔ دید انسان قرار می‌گیرد. رنگ‌های رنگین‌کمان ناشی از دو واقعیت اساسی‌اند:

اول اینکه پرتو نور خورشید متشکل از دامنهٔ همه رنگ‌های قابل دید در گسترهٔ بینایی انسان است. رنگ‌های نور خورشید زمانی که با یکدیگر ترکیب می‌شوند، سفید به‌نظر می‌رسند. این خاصیت نور خورشید نخستین‌بار توسط نیوتن در سال ۱۶۶۶ تشریح شد. **طیف مرئی** نام بخشی از طیف الکترومغناطیسی است که با چشم انسان قابل رؤیت و تشخیص است. طول موج‌های طیف مرئی بین ۳۸۰ تا ۷۵۰ نانومتر و فرکانس آن‌ها بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ ترا هرتز[3] است. (سگل، موکول، ۱۳۷۶)

وقتی که نور با قطرهٔ کروی آب برخورد می‌کند، مقداری از آن نور بازتاب می‌کند و بقیهٔ آن شکست می‌خورد و در طول قطره حرکت می‌کند تا به سطح خمیدهٔ داخلی و آینه‌مانند قطره برخورد کند



شکل ۲. طول موج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ تراهرتز

نکتهٔ دیگر اینکه، نورهای رنگی متفاوت، زمانی که از یک محیط مانند هوا به محیط دیگری مانند آب یا شیشه عبور می‌کنند، به میزان متفاوتی انتشار می‌یابند. انواع رنگین‌کمان‌ها عبارت‌اند از:

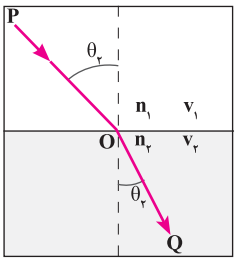
- **رنگین‌کمان دوگانه:** در اثر دو بازتاب و دو شکست در قطرهٔ آب ایجاد می‌شود که باعث می‌شود دو کمان به‌وجود آید و کمان اول رنگش عکس کمان بعدی است.
- **رنگین‌کمان با کمان‌های اضافه:** وقتی نورها خارج می‌شوند، اگر با هم تداخل داشته باشند، براساس اینکه تداخل‌ها سازنده یا ویرانگر باشند، یک سلسله کمان‌های اضافه که ممکن است خود رنگ‌های رنگین‌کمان نباشند، به‌وجود می‌آیند.
- **رنگین‌کمان قمری:** ماه کامل نور کافی برای تشکیل رنگین‌کمان دارد و رنگین‌کمان قمری به‌وجود می‌آورد. ولی چون نور ماه از خورشید خیلی کمتر است، نور رنگین‌کمان آن هم کمتر است (Jearl Walker, 1980).

بحث و نتیجه‌گیری

رنگین‌کمان در واقع در محل مشخصی از آسمان وجود ندارد. محل ظاهر شدنش به محل ناظر و موقعیت خورشید بستگی دارد. تمام قطرات باران نورخورشید را به‌طور یکسان می‌شکنند و باز می‌تابانند، اما فقط نور از بعضی از قطرات باران به‌چشم ناظر می‌رسد. شکست نور در قطرهٔ آب مهم‌ترین عامل ایجاد رنگین‌کمان است. مقدار شکست نور به‌طور کلی به دو عامل طول موج و محیطی که نور وارد آن می‌شود، بستگی دارد. هنگامی که نور از محیطی وارد محیط دیگری می‌شود که نور در آن دارای سرعت متفاوتی است، زاویهٔ شعاع نور در خط فاصل این دو محیط تغییر می‌کند و به اصطلاح می‌شکند (www.tebyan.net، شکست نور).

ویلبرورد اسنل[۴] در قانون شکست خود محاسبه کرد که نور چگونه زمانی‌که از یک محیط به محیط دیگری که چگالی متفاوتی دارد، گذر می‌کند خم یا پراکنده می‌شود (مانند گذر نور از هوا به محیط آب). در واقع این قانون رابطهٔ میان زاویهٔ نور را قبل از برخورد و پس از شکست در خط فاصل دو محیط نشان می‌دهد (fa.wikipedia و قانون اسنل).

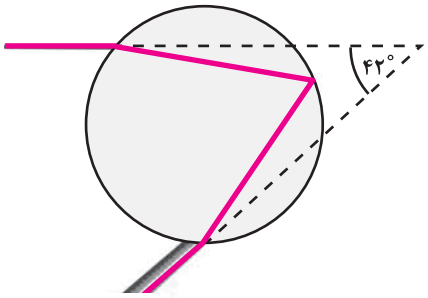
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۳. قانون شکست اسنل

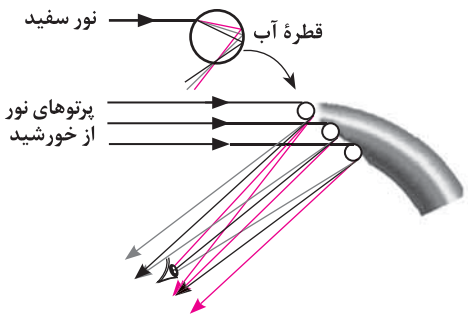
زمانی‌که مسیر پرتو نور درون قطرهٔ آب را برای نورهای قرمز و بنفش بررسی می‌کنیم، درمی‌یابیم که زاویهٔ انحراف برای این دو رنگ متفاوت است. نور بنفش که طول موج کوتاه‌تری دارد، با زاویهٔ بزرگ‌تری نسبت به نور قرمز که طول موج بزرگ‌تری دارد می‌شکند و هنگام خروج از قطره به‌واسطهٔ بازتاب پرتوهای نور از پشت قطره، نور بنفش نسبت به نور قرمز با زاویهٔ کمتری نسبت به نور سفید تابیده شدهٔ اصلی می‌چرخد و به‌چشم ناظر می‌رسد. به‌همین علت بالای رنگین‌کمان قرمز و پایین آن بنفش دیده می‌شود (C. Boyer, 1987).

رنگین‌کمان‌ها دایره‌های متحدالمرکزی هستند که چون زمین حرکت می‌کند، ما نمی‌توانیم کل رنگین‌کمان را مشاهده کنیم و فقط کمانی از آن را می‌بینیم



شکل ۴. شکست نور قرمز تا بنفش

زمانی که رنگین‌کمان و دسته رنگ‌های آن را مشاهده می‌کنیم، به نوری نگاه کرده‌ایم که از قطرات متفاوت آب پراکنده و بازتابیده شده است. هر قطرهٔ آب می‌تواند یک رنگ از رنگین‌کمان را در محدودهٔ دید ما ایجاد کند. مثلاً اگر نور قرمز خارج شده از یک قطره توسط ناظری مشاهده شود، نور آبی از آن قطره دیده نمی‌شود. بنابراین طبق شکل ۵ می‌توان گفت ناظر نور قرمز را از قطرهٔ بالایی، زرد را از قطرهٔ میانی و آبی یا بنفش را از قطرهٔ پایینی می‌بیند. به‌همین خاطر بالای رنگین‌کمان قرمز و پایین آن بنفش دیده می‌شود (R. A. R. Tricker, 1970 & H. Nussenzveig, 1977).

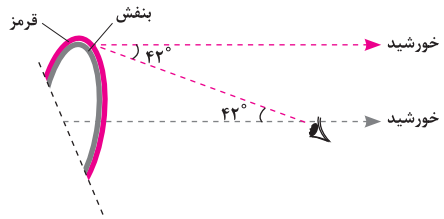


شکل ۵. نمایش رنگ‌های رنگین‌کمان توسط قطرات کروی آب

با علم به اینکه ضریب شکست نور در آب ۱/۳۳ یا ۱/۳۴ است، طیف بازتابیده در محدودهٔ زوایای ۴۰ تا ۴۲ درجه است (این مطلب با فرمول‌های ریاضی اثبات می‌شود). این زاویه به بزرگی و کوچکی قطرهٔ آب ربطی ندارد، اما خالص بودن رنگ‌های رنگین‌کمان به اندازهٔ قطرات باران بستگی دارد. قطرات درشت (در حدود قطره‌های چند میلی‌متری) رنگین‌کمان‌های روشن با رنگ‌های تفکیک شده و زیبا می‌دهند. قطرات ریز باران

(در حدود قطرهای ۰/۱ میلی‌متر) رنگین‌کمان‌هایی با رنگ‌های درهم پوشانیده شده ایجاد می‌کنند و غالباً نزدیک به رنگ سفید و شفاف دیده می‌شوند (Jearl Walker, 1980).

رنگین‌کمان‌ها دایره‌های متحدالمرکزی هستند که چون زمین حرکت می‌کند، ما نمی‌توانیم کل رنگین‌کمان را مشاهده کنیم و فقط کمانی از آن را می‌بینیم. هرچه خورشید در پایین‌ترین قسمت افق قرار داشته باشد، رنگین‌کمان ما کامل‌تر می‌شود. برای وقوع این پدیده، خورشید، چشم ناظر و وسط قوس رنگین‌کمان باید هر سه در یک امتداد مستقیم قرار گرفته باشند. پس اگر خورشید در آسمان خیلی بالا باشد، هرگز چنین خط مستقیمی درست نمی‌شود. به‌همین علت رنگین‌کمان را تنها صبح زود و یا موقع عصر می‌توان دید. برای اینکه فردی بتواند رنگین‌کمان را ببیند، باید پشت به خورشید و رو به باران بایستد تا پرتوهای تجزیه شده و بازگشتی رنگین‌کمان را مشاهده کند (H. Nussenzveig, 1977).



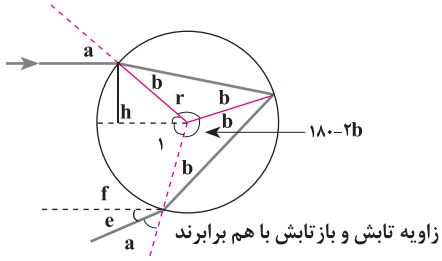
شکل ۶. حدود زوایا و جهت قرار گرفتن ناظر برای دیدن رنگین‌کمان

در این حالت فرد پرتوهایی در شش رنگ قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش را می‌بیند که با تقارن کروی به چشم او می‌رسند. چشم با امتداد دادن این پرتوها، کمان‌هایی شش‌رنگ را در آسمان تداعی می‌کند که همان رنگین‌کمان است.

اثبات ویژگی رنگین‌کمان از طریق دستورهای ریاضی

به منظور محاسبهٔ زاویهٔ رنگین‌کمان ما فقط نمی‌توانیم از قانون اسنل و شکست استفاده کنیم، بلکه باید از روابط جبری و مثلثاتی چون سینوس و مشتق نیز کمک بگیریم. در این قسمت ما فقط محاسبات مربوط به رنگین‌کمان اصلی را انجام می‌دهیم (www.phys.uwosh.edu).

در محاسبهٔ زاویه رنگین‌کمان ما باید بعضی از خطوط اضافی را در دایرهٔ فرضی که به‌عنوان قطرهٔ باران است، نظیر ارتفاع، شعاع دایره، زاویهٔ تابش، زاویهٔ شکست و زاویهٔ بازتابش داشته باشیم.



شکل ۷. زوایا و خطوط فرضی در قطرهٔ آب

a = زاویهٔ برخورد نور

b = زاویهٔ شکست نور

r = شعاع قطرهٔ آب

زاویهٔ بین خط‌چین و شعاع r، a است.

e = زاویهٔ دید برای دیدن رنگ‌های رنگین‌کمان توسط ناظر (هدف، به‌دست آوردن این زاویه است).

h = ارتفاع نقطه‌ای که اشعهٔ نور به قطره برخورد می‌کند.

نکته: بین زاویهٔ تابش و دو شعاع دایره، مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود و زاویه‌های b برابرند. همچنین، بعد از برخورد شعاع نور و برگشت آن، دوباره مثلث متساوی‌الساقین داریم که در آن زاویه‌های b با هم برابرند.

مجموع زوایای مرکز دایره ۳۶۰ درجه است، پس داریم:

$$f + a + (۱۸۰^\circ - ۲b) + (۱۸۰^\circ - ۲b) = ۳۶۰^\circ$$

$$f + a + ۳۶۰^\circ - ۴b = ۳۶۰^\circ \rightarrow f = ۴b - a$$

از طرف دیگر داریم:

$$f = e + a \rightarrow e = f - a \rightarrow e = ۴b - a - a$$

فرمول اصلی: $e = ۴b - ۲a$

از فرمول به‌دست آمده نسبت به a مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{de}{da} = ۴\frac{db}{da} - ۲\frac{da}{da} \rightarrow \frac{de}{da} = -۲ + ۴\frac{db}{da}$$

$$\xrightarrow{\frac{de}{da}=۰} -۲ + ۴\frac{db}{da} = ۰ \rightarrow ۴\frac{db}{da} = ۲ \rightarrow \frac{db}{da} = \frac{۱}{۲}$$

❖ قانون شکست اسنل در نقطهٔ a (محل برخورد شعاع نور به قطره):

$$n_۱ \sin a = n_۲ \sin b$$

چون محیط اول هواست، ضریب شکست نور در هوا را یک می‌گیریم: $n_۱ = ۱$

$$\sin a = n \sin b$$

از قانون شکست اسنل نسبت به a مشتق می‌گیریم:

$$\cos a = n\cos b\frac{db}{da} \xrightarrow{\frac{db}{da}=\frac{1}{2}} \cos a = \frac{n\cos b}{2}$$

می‌دانیم:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

در فرمول به‌دست آمدهٔ بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{n}{2}\sqrt{1-\sin^2 b}$$

$$1-\sin^2 a = \frac{n^2}{4}(1-\sin^2 b) \quad *$$

❖ قانون شکست اسنل در نقطهٔ b (محل خروج شعاع نور از قطره):

$$n_1 \sin b = n_2 \sin a$$

این بار محیط اول آب و محیط دوم هواست، پس: $n_2 = 1$

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin a}{n})$$

از این فرمول دو نتیجه می‌گیریم:

- از فرمول Arc می‌گیریم تا در فرمول نهایی جایگزین کنیم:

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin a}{n})$$

- طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و به‌جای $\sin^2 b$ معادل آن را در فرمولی که با * نشان داده شده است، قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{n^2}$$

$$1-\sin^2 a = \frac{n^2}{4}(1-\frac{\sin^2 a}{n^2})$$

$$4-4\sin^2 a = n^2 - \sin^2 a$$

$$4-n^2 = 4\sin^2 a - \sin^2 a$$

$$4-n^2 = 3\sin^2 a \rightarrow \sin^2 a = \frac{4-n^2}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \rightarrow a = \mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

$$e = 4b - 2a \rightarrow e = 4\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sin a}{n}) - 2\mathrm{Arc}\sin a$$

اگر به‌جای sin a مقدار به‌دست آمده را قرار دهیم، فرمول نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$e = 4\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}{n} - 2\mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

اگر ضریب شکست نور در آب را ۱/۳۳ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4\mathrm{Arc}\sin\frac{0/8623}{1/33} - 2\mathrm{Arc}\sin 0/8623$$

$$e \approx 42/3^\circ$$ (برای نور قرمز)

اگر ضریب شکست نور در آب را ۱/۳۴ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4\mathrm{Arc}\sin\frac{0/7348}{1/34} - 2\mathrm{Arc}\sin 0/7348$$

$$e \approx 40/6^\circ$$ (برای نور بنفش)

به‌عبارت دیگر از این محاسبات می‌توان نتیجه گرفت که شدت نور خروجی در تمام زوایا یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید زاویهٔ حدود ۴۲ درجه می‌سازد. البته این زاویه به رنگ پرتو بستگی دارد و بین ۴۰ تا ۴۲ درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها در زوایای حدود ۴۲ درجه، پرتوهای رنگی به‌طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند.

تنها در زوایای حدود ۴۲ درجه، پرتوهای رنگی به‌طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند

*** پی‌نوشت‌ها**

1. Isaac Newton
2. René Decartes
3. ترا هرتز برابر 10^{12} هرتز (هرتز یکای سنجش طول موج در سیستم SI است).
4. Snell

*** منابع**

۱. سگل، موکول (۱۳۷۶). آشنایی با نور و لیزر. ترجمهٔ پریچهر همایون‌روز. نشر ذکر، کتاب‌های قاصدک. تهران.
2. C. Boyer (1987). The rainbow: from myth to mathematics, Princeton University Press.
3. R. A. R. Tricker (1970). Introduction to meteorological optics. American Elsevier.
4. H. Nussenzveig (1977). The theory of the rainbow, Scientific American, April.
5. www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows.
6.www.phys.uwosh.edu/rioux/genphysii/pdf/rainbows.pd
7. Fraser, Alistair B. (1972). "Inhomogenieties in the Color and Intensity of the Rainbow", Journal of Atmospheric Sciences, 29, 211.
8. Greenler, Robert, Halos, and Glories (1980). Rainbows, Cambridge University Press.
9. Humphreys, W. J., (1929). Physics of the Air. McGraw- Hill Book Co.
10. Humphreys, W. J., Weather (1923). Proverbs and Paradoxes. Williams and Wilkins Company.
11. wikipedia.org/wiki/
12. www.konjkav.com
13. fa.wikipedia.or
14. www.tebyan.net
15. www.youtube.com
16. www.phys.uwosh.edu
17. danesh.roshd.ir

ایستگاه سوم:
لطیفه‌های ریاضی!

حالا بعد از کلنجار رفتن با معماهای متفاوت، شنیدن چند لطیفه می‌تواند خستگی‌تان را دربیاورد!

لطیفهٔ اول

به یک ریاضی‌دان و یک فیزیک‌دان و یک مهندس، هر کدام یک توپ فلزی مشابه دادند و از آن‌ها خواستند که با ابزار مورد نیازشان که مطابق درخواست به آنان داده می‌شود، در مدت زمان دلخواه حجم آن را اندازه بگیرند.

ریاضی‌دان یک نوار پارچه‌ای مدرج خواست و به کمک آن محیط توپ را اندازه گرفت. بعد آن را بر دو برابر عدد پی تقسیم کرد و شعاع کره را به‌دست آورد. آن‌گاه مکعب آن را در عدد پی ضرب کرد و چهار سوم حاصل‌ضرب را به‌عنوان حجم توپ اعلام کرد.

فیزیک‌دان ظرفی مدرج با گنجایش زیاد و یک لیتر آب درخواست کرد و مقداری آب در آن ریخت و حجم آن را خواند. سپس توپ را درون آب انداخت و حجم ثانویه را هم خواند و تفاضل حجم ثانویه و حجم اولیه را به‌عنوان حجم توپ اعلام کرد.

اما مهندس چه کرد؟ او کمی توپ را ورانداز کرد و ناگهان متوجه عددی روی آن شد. بله شمارهٔ سریال توپ را دید و فوراً آن را نوشت و به‌عنوان حجم توپ اعلام کرد!

لطیفهٔ دوم

روزی یک مهندس، یک فیزیک‌دان و یک ریاضی‌دان با هم برای تماشای مسابقهٔ فوتبال به ورزشگاه رفتند. در ابتدای بازی به بحث پیرامون مسابقه پرداختند و هر سه توافق کردند که احتمال برد یکی از دو تیم بیشتر از دیگری است. اما در پایان مسابقه، تیم مقابل برنده شد.

مهندس گفت: «نمی‌دانم چه‌طور شد! من سرعت توپ، قدرت بازیکنان، اصطکاک زمین و حتی دما و فشار هوا را اندازه گرفته بودم و با محاسبهٔ تأثیر همهٔ این‌ها آن حدس را زدم!»

فیزیک‌دان گفت: «احتمالاً بعضی عوامل پیش‌بینی نشدهٔ طبیعی را در نظر نگرفته بودی. من با آنالیز همهٔ این‌ها نتیجه گرفتم.»

و مهندس گفت: «پس چه‌طور شد که تو هم اشتباه کردی؟»

و ریاضی‌دان آمد وسط و گفت: «شاید او هم مثل من همهٔ بازیکنان را کروی شکل و یکسان در نظر گرفته است!»

ریاضی‌دانان پیر نمی‌میرند، آن‌ها فقط بخشی از تابع‌های خود را از دست می‌دهند!

لطیفهٔ سوم

مدیر یک مرکز تحقیقاتی خطاب به رئیس دپارتمان فیزیک مرکز گفت: «چرا من باید این همه هزینه برای وسایل آزمایشگاهی گران‌قیمت و ابزار و وسایل مورد نیاز شما بدهم؟ چرا از دپارتمان ریاضی یاد نمی‌گیرید؟ همهٔ آنچه که آن‌ها نیاز دارند، قلم، کاغذ و سطل کاغذ زباله است! یا از آن‌ها بهتر، دپارتمان فلسفه، همهٔ لوازم مورد نیازشان فقط قلم و کاغذ است!»

تعریف دقیق دقت چیست؟!

محمد دشتی

به مدرسه می‌روم شاید چیزی یاد بگیرم!

گفت‌وگو با محمدعلی شیخان معلم پیشکسوت ریاضی

اشاره

گفت‌وگو با برخی از معلمان پیشکسوت که نسل ما در دهه‌های ۱۳۴۰ و ۱۳۵۰ توفیق درک حضور در کلاس‌های آن‌ها را داشته‌اند، بازگشت به خاطرات نسلی است که تصویری با ابهت، تأثیرگذار، شیرین و البته قاطع و گاهی سخت‌گیر و منضبط از معلمان خود دارند؛ معلمانی که گویی سلسلهٔ آن‌ها دارد به پایان می‌رسد.

آقای محمدعلی شیخان، معلم پیشکسوت ریاضی که سابقهٔ حضور و تدریس در دبیرستان‌های مطرح آن زمان، از جمله «دبیرستان البرز» را دارد، از همین دســـت معلمان است. توفیقی حاصل شد که روز نهم شهریورماه ۱۳۹۲، به اتفاق آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجلهٔ «رشد برهان» و آقای هوشنگ شرقی، مدیر داخلی مجله، به دیدار این معلم بی‌ادعا و تأثیرگذار برویم.

زمانی که شروع به صحبت کرد، سحر کلام، ســـادگی بیان و صداقت گفتارش کلاس درسی بی‌پیرایه را به رویمان گشود. حاضر بودیم، ساعت‌ها در محضر ساده و بی‌آلایش او بنشینیم و درس‌های زندگی را به گوش جان از او بشنویم. وقتی در پایان صحبت از ایشان سؤال کردیم که چه صحبت و سفارشی برای معلمان و دانش‌آموزان دارید، حکیمانه و صادقانه پاسخ داد: «هیچ حرف و سفارشی ندارم!» و افزود: «همیشه هم این‌گونه بوده‌ام.»

او با حس معلمی و درک تجربی خود، وقتی احساس کرد ما پاسخ خودمان را نگرفته‌ایم، تأکید کرد: «معلم باید کار خودش را انجام دهد، نیازی به نصیحت و سفارش نیست. اگر معلم کار خودش را بلد باشد، دانش‌آموز از منش و مشی و عمل او می‌آموزد و خودش راه را پیدا می‌کند. اگر معلم، معلم باشد، دانش‌آموز هم دانش‌آموز خواهد بود و هر دو در کنار هم چون دو یار و غمخوار، راه خود را پیدا خواهند کرد. شما به واقع معلمی کنید و نگران نتیجهٔ کارتان نباشید!»

آنچه می‌خوانید، گپ و گفت صمیمانهٔ ما با این معلم باصفا و با اخلاق است. شک نداریم که چون کلامش از دل برآمده، لاجرم بر دل خواهد نشســـت. از آنجا که با توجه به همهٔ محدودیت‌های موجود، امکان گفت‌وگو با دیگر معلمانی را نداریم که چون آقای شیخان منشأ اثر و خیر و برکت برای کشورشان بوده‌اند، این اندک را به پاس قدرشناسی از همهٔ آن عزیزان، پیشکش خوانندگانی می‌کنیم که قدرشناس و قدردان بزرگان و معلمان گرامی خود هستند.

استاد! لطفاً مختصری از زندگی و سوابق حرفه‌ای خودتان بیان فرمایید!

● متولد فروردین ۱۳۰۳ در لاهیجان هستم. در سال ۱۳۲۳ از دانش‌سرای مقدماتی رشت به‌عنوان شاگرد اول فارغ‌التحصیل شدم. ادامهٔ تحصیلم موکول به استعلام از تهران شد. رئیس دانش‌سرا، آقای **رشیدی** گفتند برای ادامهٔ تحصیل باید از تهران سؤال کنیم. تا این موضوع روشن شود در حدود یک ماه و نیم سرگردان بودم تا اینکه در بهمن‌ماه آن سال و در حالی که چند ماهی از سال تحصیلی گذشته بود، نامه‌ای مبنی بر اینکه می‌توانم برای ادامهٔ تحصیل به تهران بروم، به دستم رسید.

چون اواسط سال تحصیلی بود، صبر کردم و مهرماه ۱۳۲۴ به تهران آمدم و سال ششم ریاضی و سه سال دانشکده را در تهران تمام کردم. در نهایت نیز در سال ۱۳۲۸ از دانش‌سرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. البته آن سال دو لیسانس گرفتم که یکی لیسانس ریاضی از دانشکدهٔ علوم و دیگری دانش‌نامهٔ تربیت معلم بود. بعد هم به لاهیجان برگشتم.

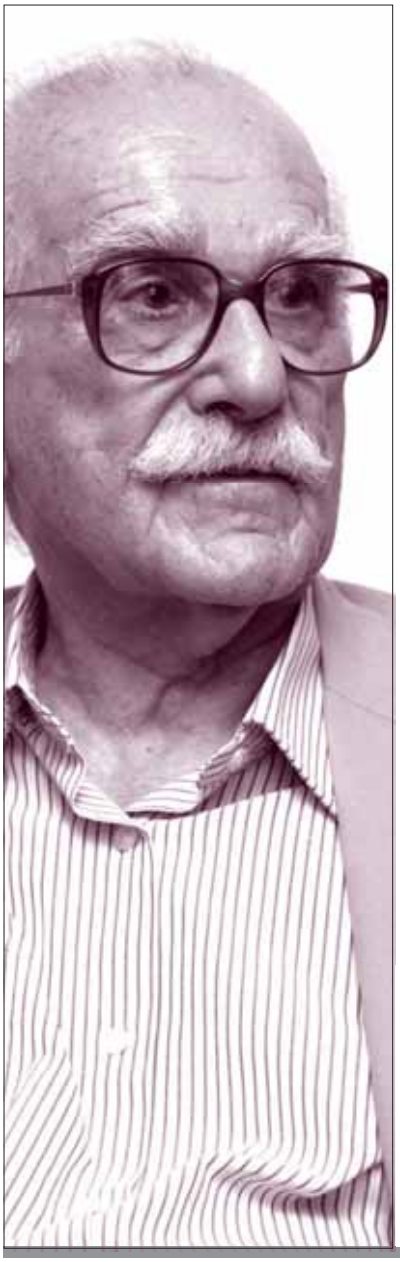
چرا در تهران نماندید؟ پیشنهاد کار در تهران نداشتید؟

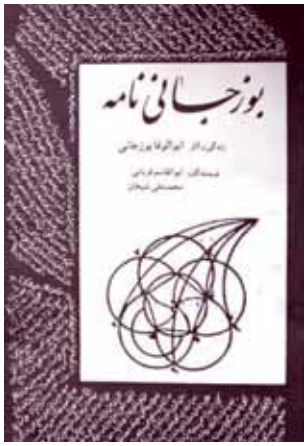
● چرا اتفاقاً در همان ایام آقای **مینویی**، رئیس تعلیمات متوسطه تهران، چند جا را برای تدریس به من پیشنهاد دادند، اما بنده نپذیرفتم. از آنجا که تعهد خدمت داشتم، به لاهیجان برگشتم. البته بعدها و در سال ۱۳۳۴ به تهران منتقل شدم و به دبیرستان البرز آمدم. بد نیست اشاره کنم در مدت چهار پنج سالی که در لاهیجان مشغول خدمت بودم، گرفتاری‌های زیادی را تحمل کردم، چون لاهیجان شهر خان‌ها بود و انتظار داشتند معلم در قبال دریافت پول به فرزندان آن‌ها نمره بدهد. وقتی به لاهیجان رفتم، این موضوع را حس کردم و میان من و آن‌ها مشکلاتی ایجاد و باعث شد برایم پاپوش درست کنند. دنبال بهانه می‌گشتند تا اینکه نهایتاً در جریان اتفاقات ۲۸ مرداد سال ۱۳۳۲ مرا دستگیر و به رودسر تبعید کردند.

خاطره‌ای هم از این‌گونه اتفاقات در ذهن دارید؟

● بله! رسم شده بود که در لاهیجان هر رئیس شهربانی که می‌آمد سراغ بنده را می‌گرفت. همان روزها فردی به‌نام سرهنگ **خلیقی** رئیس شهربانی لاهیجان شد. یک روز فردی مرا صدا زد و گفت که سرهنگ خلیقی می‌خواهد شما را ببیند. من قبل از رفتن با آقای **نجفی**، رئیس فرهنگ آنجا تماس گرفتم و موضوع را با او مطرح کردم. با اطلاع ایشان به دیدار سرهنگ رفتم. وارد اتاق که شدم سلام کردم و ایشان در حال نماز خواندن جواب سلامم را داد.

پس از نماز و خوش و بشی مختصر،





در زمان تدریس هیچ‌وقت جزوه نمی‌گفتم، ولی بچه‌ها از گفته‌هایم یادداشت برمی‌داشتند. تمرین‌هایی هم با هزینهٔ خودم و به‌صورت ورق‌های پلی‌کپی به بچه‌ها می‌دادم

شروع به گفتن سوابق خودش کرد و گفت که رئیس زندان بوده و چنین و چنان کرده است. اگر هم لازم باشد، می‌تواند خواستهٔ خودش را به هر طریقی که لازم باشد به‌دست آورد. به اصطلاح می‌خواست به نوعی گربه را دم حجله بکشد. پس از صحبت‌های ایشان، گفتم: «همهٔ آنچه را گفتید شنیدم، اما لطفاً اصل مطلب را بگویید. از من چه می‌خواهید؟»

او هم رک و پوست کنده گفت: «به پسران آقای **زهتاب** نمره بدهید.»

اما من نپذیرفتم و گفتم من نمی‌توانم چنین کاری بکنم. سرهنگ هم با توضیح اینکه بهتر است به حرف‌هایش گوش بدهم، گفت: «من آنچه را به خیر و صلاح توست گفتم، بعد از این هرچه دیدی از چشم خودت دیدی!»

■ **بعد از این تهدید اتفاقی هم برایتان رخ داد؟**

● نه خدا را شکر! بعد از آن ملاقات اتفاق خاصی برایم نیفتاد. بعد از مدتی کوتاه به لنگرود و اول مهرماه ۱۳۳۴ هم به تهران منتقل شدم. شهریورماه سال ۱۳۳۴ بود که به تهران آمدم. سال اول را در «دبیرستان مروی» تدریس کردم، اما سال دوم دکتر **مجتهدی** تمام برنامهٔ صبح‌های مرا در دبیرستان البرز به تدریس اختصاص داد. آن زمان دبیرستان‌ها سه ساعت برنامهٔ صبح داشتند و دو ساعت برنامهٔ بعدازظهر که عملاً همهٔ روز را اشغال می‌کرد. در سال ۱۳۵۸ بازنشسته شدم، البته بعد از آن هم تدریس می‌کردم. در سال ۱۳۵۷ و در جریان انقلاب، مدتی دکتر **امین ریاحی** مسئولیت آموزش‌وپرورش را پذیرفته بود و از من هم خواست که پستی را قبول کنم، اما نپذیرفتم. البته در دو سال آخر خدمتم، در کنار تدریس، بازرس تعلیماتی هم بودم.

■ **ظاهراً بعد از بازنشستگی هم به تدریس ادامه دادید؟**

● همین‌طور است. بعد از بازنشستگی هم تا مدتی تدریس می‌کردم، اما بعد از آن دیگر تدریس نکردم. تا اینکه آقای **محسن سراجی** از من خواست معلمی مرکز آموزش‌های فنی انقلاب در خیابان پاسداران را بپذیرم. چند سالی هم در آن‌جا تدریس کردم و بعد از آن تدریس را کنار گذاشتم، اما مقالات زیادی در مجله‌های آقای **شهریاری**، یعنی «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» نوشتم.

■ **از هم‌کلاسی‌ها هم کسی را به یاد دارید؟**

● بله! تعدادی از دوستان را به‌یاد دارم که دو نفرشان در تهران هستند. یکی آقای **هندی‌نژاد** و دیگری آقای **ایرج ادیبی**. البته بسیاری از دوستانم متأسفانه فوت شده‌اند. ما با آقای شهریاری هم‌کلاس بودیم. البته ایشان در آن سال‌های پرآشوب دو سال زندانی بودند و همین زندان رفتنشان باعث شد زبان روسی را به حد کمال یاد بگیرند و از آن به خوبی استفاده کنند.

■ **بعد از بازنشستگی از شاگردانتان هم کسی را ملاقات کرده‌اید و ارتباطی بین شما و ایشان بوده است؟**

● بله! طی این سال‌ها گاهی بعضی از این عزیزان را دیده‌ام که باعث خوش‌حالی من و آن‌ها شده است و حقاً همهٔ شاگردانم با حق‌شناسی و قدرشناسی به سراغم آمده‌اند. یکی از این شاگردان آقای دکتر **تهرانی**، استاد «دانشگاه شهید بهشتی» است که چند سال پیش روزی که به کوه می‌رفتم، ایشان را دیدم. این دیدار برای هر دوی ما شیرین و خاطره‌انگیز بود. یادم هست که رشته‌شان معماری بود.

آقای **گل‌جان** هم شاگردم بود که مدیرعامل «گل‌بافت» است. دکتر **عیسی حبیب‌الله خیر** هم از استادان «دانشگاه شریف» بود که با کمال تأسف چند سال پیش فوت کرد. ایشان هم در «دارالفنون» شاگردم بود. آقای گل‌جان ۱۰ سالی در انگلستان تحصیل کرد و در همهٔ آن سال‌ها مرتباً برای من نامه می‌نوشت که هنوز هم نامه‌هایش را نگه داشته‌ام. آقای **عباس شریفی‌مقدم**، مدیرعامل و رئیس هیئت مدیرهٔ صنعت پتروشیمی ایران در بندر بوشهر نیز از شاگردان من در دارالفنون بود.

■ **انگار شما با مجلهٔ یکان هم همکاری داشتید؟**

● بله. مدتی در آن مجله با آقای **مصحفی** همکاری داشتیم. از سال ۱۳۴۲ تا ۱۳۵۶ برای درس هندسه سؤال مطرح می‌کردم و در دو سال آخر طراح سؤال ترسیمی و رقومی بودم. البته به‌خاطر مشغلهٔ زیاد نتوانستم همکاری زیادی با ایشان داشته باشم. با دکتر **وفایی** هم که معاون دارالفنون بود، ۱۴ سالی همکاری داشتم. او هم یکی از مردان فرهیخته بود و مدتی پیش فوت کرد.

■ **در صحبت‌هایتان فرمودید که در تهران به دبیرستان البرز و نزد آقای مجتهدی رفتید. اگر دربارهٔ شخصیت و کارهای ایشان خاطره‌ای دارید، بگویید.**

● متأسفانه بیش از یک سال نتوانستم با ایشان همکاری کنم. علتش هم این بود که خلق‌وخوی خاصی در کار تدریس داشتم. آن خلق‌وخو هم این بود که زیربار توصیهٔ نامشروع هیچ‌کس نمی‌رفتم. البته دکتر مجتهدی هیچ‌وقت شخصاً چیزی از من نخواستند، اما کسانی دیگر در آن مدرسه توقعاتی داشتند که از من ساخته نبود. بد نیست بدانید دکتر مجتهدی مدرسه‌ای را اداره می‌کرد که اغلب شاگردهای آن بچه‌های سناتور، وزیر، وکیل و گاهی بچه‌های برخی معلمان آنجا بودند. گاهی وضعی پیش می‌آمد که باعث ناراحتی و

اهدای جایزهٔ کتاب سال به آقای محمدعلی شیخان توسط رئیس‌جمهور وقت

جر و بحث با معلمان یا خانواده‌ها می‌شد.

عادتم این بود که وقتی به کلاس می‌رفتم، ویژگی‌های کلاس را برای بچه‌ها می‌گفتم و از آن‌ها می‌خواستم که اگر شرایط و روش کارم را نمی‌پذیرند، بگویند. خوش‌بختانه همه هم می‌پذیرفتند و من کارم را انجام می‌دادم. اما یک‌بار یکی از همکاران که فرزندش آنجا درس می‌خواند، به من گفت: بچه‌ها از شما راضی هستند، اما انگار خیلی در کلاس سخت می‌گیرید. دلیلش را پرسیدم و ایشان گفت: «راستش دیشب بچهٔ من از خواب پرید و هی تکرار می‌کرد: آقای شیخان آمد! آقای شیخان آمد!» تأملی کردم و گفت: «قبول کنید که من هم باید بتوانم کلاس را اداره کنم. اما حالا که شما می‌فرمایید، باشد کمتر سخت‌گیری می‌کنم!»

آیا درست است که شما بیشتر هندسه تدریس می‌کردید؟

● بله. البته بعضی جاها حساب استدلالی، جبر و درس‌های مرتبط دیگر را هم تدریس می‌کردم.

در زمینهٔ تاریخ ریاضی هم فعالیت کردید؟

● بله، با آقای **شیخ رضایی** فعالیت‌هایی داشته‌ام و مشترکاً و با همکاری برخی دوستان کتابی را منتشر کردیم که مورد استقبال معلمان قرار گرفت.

در مجموع چند کتاب تألیف کرده‌اید؟

● بنده چهار کتاب تألیفی دارم.

چه توصیه‌ای به دانش‌آموزان و مخاطبان مجلهٔ ما دارید؟

● توصیهٔ خاصی ندارم! در تمام دوران معلمی هم به شاگردانم چیز خاصی را توصیه نکرده‌ام. اعتقاد دارم معلم باید کار خودش را درست انجام دهد و با چنین شرطی دانش‌آموز از روش و منش معلم راه درست را پیدا می‌کند. مدرسه بهترین جا برای آموختن و یادگیری است. در همین ارتباط نکته‌ای را خوانده‌ام که آن را به‌صورت تابلوی دست‌نویسی درآورده‌ام و در قاب روی کتابخانه‌ام قرار داده‌ام تا در معرض دید خودم و فرزندانم باشد. این نوشته را راز موفقیت مردان بزرگ می‌دانم. آن نکته این است که: روزی از **میکل آنژ** که در هوای سرد و برفی زمستان با عجله در حال رفتن به جایی بود. می‌پرسند: «با این سن و سال و با این عجله در این برف و بوران کجا می‌روید؟»

میکل آنژ می‌گوید: «به مدرسه می‌روم تا شاید چیزی یاد بگیرم!» من هم همین توصیه را به بچه‌ها دارم.

در کلاس درستان از چه روشی استفاده می‌کردید؟

● در زمان تدریس هیچ‌وقت جزوه نمی‌گفتم، ولی بچه‌ها از گفته‌هایم یادداشت برمی‌داشتند. تمرین‌هایی هم با هزینهٔ خودم و به‌صورت ورق‌های پلی‌کپی به بچه‌ها می‌دادم که هنوز هم بسیاری از آن‌ها را نگه داشته‌ام. حتی دفترهای

اگر ما وظیفهٔ معلمی خودمان را به درستی انجام دهیم، دانش‌آموزان راهشان را به درستی پیدا خواهند کرد

کلاس را که نمرات بچه‌ها را در آن‌ها می‌نوشتم، نگه داشته‌ام.

و به‌عنوان سخن پایانی، اگر موضوعی هست که ما بدان اشاره نکردیم و مایل هستید در آن مورد سخن بگویید، بفرمایید.

● یک موضوع اینکه اگر شما به سراغ کسانی می‌روید که عمرشان را در خدمت به مردم و فرزندان آن‌ها سپری کرده‌اند، در حقیقت از تلاش صادقانه و خدمت‌گزاری به مردم تقدیر می‌کنید و این شایسته، حال خدمت‌گزاران و معلمان گذشته را بهتر می‌کند. از این بابت از شما و مسئولان مجلات رشد سپاس‌گزارم. با آنکه شما خودتان هم معلم هستید و الحمدالله درک درستی از مسائل دارید، اما به‌عنوان عصارهٔ یک عمر معلمی عرض می‌کنم: «اگر ما وظیفهٔ معلمی خودمان را به درستی انجام دهیم، دانش‌آموزان راهشان را به درستی پیدا خواهند کرد. مهم نیست که چه می‌گوییم، این رفتار و منش و عمل ماست که بر شنونده و دانش‌آموز و یا هر مخاطبی تأثیر می‌گذارد و رفتار او را شکل می‌دهد. اگر به وظیفهٔ معلمی خودمان به درستی عمل کنیم، همه‌چیز درست می‌شود.»

محرم نژاد ایردموسی*

پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که خود از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. در این شماره، پنج مسئلهٔ اول توسط خوانندگان مجله ارسال شده که با نام خودشان آن‌ها را ارائه کرده‌ایم. در همین‌جا هم از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

همان‌طور که وعده داده بودیم، در این شماره اسامی افرادی، را که راه‌حل‌ها و مسائل خود را برای مجله فرستاده بودند، ذکر می‌کنیم.

محمد طبیعی، دانش‌آموز «دبیرستان علامه طباطبایی» تهران، با حل بسیاری از مسائل دو شمارهٔ ۷۹ و ۸۰، گوی سبقت را از دیگر عزیزان ربودند که امیدواریم این تلاش مستمر خود را ادامه دهند. نفیسه آغویی، سمیرا قاسمی و ساناز ولی‌زاده، دانش‌آموزان «دبیرستان فرزانگان چهاردانگه»، امیرحسین کفاش امیری از شهر بابل، و معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری، دیگر عزیزانی بودند که راه‌حل‌های خود را برای مجله فرستاده‌اند. از همهٔ آنان تشکر می‌کنیم. از راه‌حل‌های آن‌ها در این شماره استفاده کرده‌ایم.

خوشبختانه وبلاگ مجله نیز راه‌اندازی شده است و شما می‌توانید بعضی از بخش‌های مجله به‌ویژه مسائل پای تخته را قبل از چاپ مطالعه کنید. آدرس وبلاگ در صفحه شناسنامه، در کنار فهرست مطالب مجله، درج شده است.

بخش اول: مسئله‌ها

۹۱. (فرستنده: عطا طهوری، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تبریز)

اگر داشته باشیم: $\log_{6}^{15} = a$ و $\log_{12}^{18} = b$، حاصل $\log_{25}^{24}$ را برحسب a و b به‌دست آورید.

۹۲. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

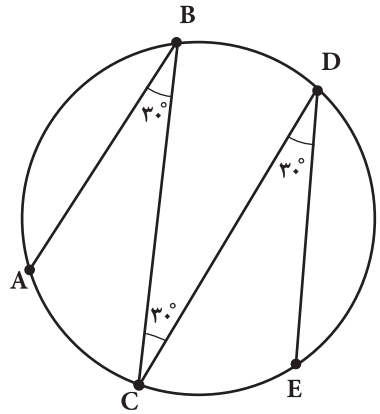
مربعی را داخل مربع دیگری انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت دو ناحیه‌ای که مجاور به دو ضلع روبه‌روی مربع هستند، با مجموع مساحت دو ناحیهٔ دیگر برابر است.

۹۳. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

با فرض $f(x) = x - \frac{1}{x}$، معادلهٔ $f(f(x))=0$ چند ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

۹۴. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مطابق شکل زاویه‌های بین هر دو وتر متوالی برابر است با ۳۰ درجه. ثابت کنید اگر $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$، آن‌گاه کمان AB ۹۰ درجه است.



شکل ۱

۹۵. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مربع ABCD مفروض است. دایرهٔ S را به مرکز B و به شعاع AB، و نیم‌دایرهٔ L را به قطر AB و داخل مربع رسم می‌کنیم. روی نیم‌دایرهٔ L نقطهٔ M را در نظر بگیرید و BM را رسم کنید تا دایرهٔ S را در T قطع کند. ثابت کنید: $\angle DAT=\angle TAM$.

۹۶. در معادلهٔ $5(x^2+y^2+z^2)=1250-2xyz$، همهٔ متغیرها اعدادی اول هستند. معادله را حل کنید.

۹۷. در یک ساعت دیجیتالی که ساعت را با h، دقیقه را با m و ثانیه را با s نمایش می‌دهد، در چند زمان متفاوت $h+m=s$ اتفاق می‌افتد؟ ($0 \le h \le 23$، $0 \le m \le 59$، $0 \le s \le 59$)

۹۸. بزرگ‌ترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که نامساوی زیر به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a، b، c و d برقرار باشد:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+\lambda bc+cd$$

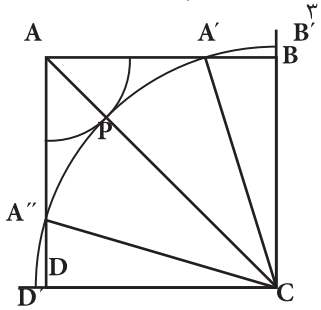
۹۹. سه مورچه روی رئوس مثلث ABC هستند و طول اضلاع AB، BC و CA به ترتیب برابر است با ۵، ۴ و ۳. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در ثانیه و در جهت $A \to B \to C \to A$ حرکت کنند، در چه لحظه‌ای از ۳ ثانیهٔ اول، مساحت مثلثی که سه رأس آن توسط مورچه‌ها مشخص می‌شود، مینی‌مم است؟

۱۰۰. مجموعهٔ $S=\{1, 2, ..., 2013\}$ مفروض است. چند سه‌تایی از زیرمجموعه‌های S مانند (A,B,C) می‌توان ساخت به‌طوری که: $A \cup B \cup C=S$ و $B \subseteq A \cup C$؟

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۳۱. مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ مفروض است. دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ می‌کشیم. دایرهٔ دوم را به مرکز C رسم می‌کنیم، به‌طوری که در نقطهٔ P روی AC بر دایرهٔ اول مماس شود. مساحت ناحیه‌ای داخل مربع را پیدا کنید که خارج دو دایره باشد.

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران) طول قطر مربع برابر ۴ است، در نتیجه: $AP+PC=4$. چون $AP=1$، پس $PC=3$. چون $3 > 2\sqrt{2}$، پس دایره به مرکز C، اضلاع AB و AD را به‌ترتیب در A' و A'' و امتداد BC و DC را به‌ترتیب در B' و D' قطع می‌کند. برای محاسبه مساحت ناحیهٔ $A'B'B$ (و $A''D'D$)، مساحت قطاع $A'B'C$ و مثلث $A'BC$ را از هم کم می‌کنیم. ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول $A'B$ را می‌یابیم که برابر ۱ است و سپس مساحت مثلث $A'BC$ را برابر $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آوریم. مساحت قطاع $A'B'C$ نیز برابر $\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\sin^{-1}\frac{1}{3}}{2\pi} \times 9\pi$ خواهد بود. با محاسبه مساحت ناحیه‌های $A'B'B$ و $A''D'D$ و مساحت ربع‌های دو دایره، مساحت خواسته شده برابر خواهد بود با: $8+2\sqrt{2}+9\sin^{-1}\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\pi$.



شکل ۲

۳۲. برای هر دو عدد حقیقی x ثابت کنید:

$$(2^{\sin x}+2^{\cos x})^2 \geq 2^{2-\sqrt{2}}$$

راه‌حل: (از نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

طبق نامساوی حسابی ـ هندسی داریم: $2^{\sin x}+2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}}$. در نتیجه:

$$(2^{\sin x}+2^{\cos x})^2 \geq 2^{\sin x+\cos x+2}$$

از طرف دیگر: $-\sqrt{2} \leq \sin x+\cos x \leq \sqrt{2}$. در نتیجه نامساوی حکم برقرار است.

۳۳. اگر P_n، nامین عدد اول باشد، برای هر $n \geq 12$، ثابت کنید: $P_n > 3n$.

راه‌حل: (از نفیسه آغویی از دبیرستان فرزانگان چهاردانگه) مسئله را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $P_n \leq 3n$. همهٔ اعداد ۱ تا ۳n را به n دستهٔ ۳تایی به این صورت افراز می‌کنیم:

$$\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \ldots, \{3n-2,3n-1,3n\}$$

چون $n \geq 12$، پس دستهٔ {۳۴,۳۵,۳۶} وجود دارد که هیچ عضوی از آن اول نیست. بنابراین اعداد اول P_1 تا P_n باید عضو n-۱ دسته باشند. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری دو عدد اول متوالی مانند P_i و P_{i+1} در یک دسته مانند $\{3L-2, 3L-1, 3L\}$ می‌افتند. چون 3L اول نیست، پس باید 3L-2 و 3L-1 اول باشند. اما یکی از این دو زوج است و مرکب خواهد بود که این موضوع تناقض محسوب می‌شود.

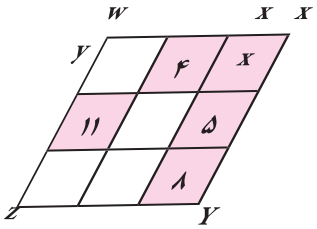
۳۴. مستطیلی مطابق شکل به چهار مستطیل کوچک‌تر با نام‌های w، x، y و z افراز شده است. اگر محیط مستطیل‌های w، x و y به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۵ باشد، محیط مستطیل z را بیابید.

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) اگر طول ضلع افقی w را x فرض کنیم، طول ضلع عمودی آن برابر x-۱ و طول ضلع عمودی Y برابر x-۲/۵ خواهد شد. در نتیجه چون طول ضلع عمودی X برابر x-۱ است، طول ضلع افقی X برابر x+۰/۵ به‌دست می‌آید. بنابراین محیط z برابر است با: ۲(۲/۵-x+x+۰/۵)=۶.

W	X
Y	Z

شکل ۳

۳۵. مطابق شکل، متوازی‌الاضلاع WXYZ به ۹ متوازی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم شده است. محیط چهار تا از آن‌ها در شکل مشخص شده است. محیط متوازی‌الاضلاع میانی را بیابید، اگر محیط متوازی‌الاضلاع WXYZ برابر ۲۱ باشد.



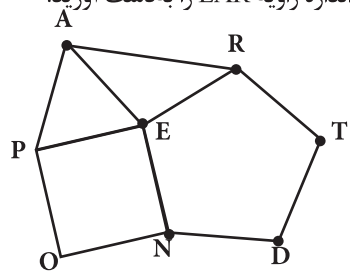
شکل ۴

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) مطابق شکل، طول دو ضلع را برابر x و y فرض می‌کنیم و با توجه به محیط‌های داده شده، طول بقیهٔ اضلاع را برحسب x و y به‌دست می‌آوریم. ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۵، برابر x-۲/۵ و سپس ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۱۱ برابر x+۳ به‌دست می‌آید. ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۴ برابر y-۲ و سپس ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۸ برابر y+۲ می‌شود. در نتیجه: ۲۱=۲(x+۳+۲-y+x+y+۲/۵ -x+y+۲) که نتیجه می‌دهد: x+y=۱. اکنون محیط متوازی‌الاضلاع میانی برابر است با: ۲(۲-y+۲/۵-x)=۲(۴/۵-۱)=۷.

۳۶. در ذوزنقه ABCD که AB و CD موازی هستند، داریم: AB=۱۵، BC=۱۲، CD=۳۰ و AD=۹. مساحت ذوزنقه را بیابید.

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران) از A و B دو عمود بر DC رسم می‌کنیم و پای عمودها را A′ و B′ می‌نامیم. داریم: AA′=BB′ و A′B′=۱۵. در نتیجه: DA′+ B′C=۱۵. از طرف دیگر، از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $A'D^2=A'A^2=81-B'B^2=144-B'C^2$. در نتیجه: $B'C^2-A'D^2=63$. بنابراین: $B'C-A'D=\frac{63}{15}$. با توجه به B′C+A′D=۱۵، به‌دست می‌آید: $A'D=\frac{27}{5}$ و $B'C=\frac{48}{5}$. در نتیجه: $A'A=\sqrt{81-A'D^2}=\frac{36}{5}$ و مساحت ذوزنقه برابر $\frac{A'A}{2}(AB+CD)=\frac{36}{5}\times\frac{45}{2}=162$ خواهد شد.

۳۷. در شکل، TREND یک پنج‌ضلعی منتظم و PEA یک مثلث متساوی‌الاضلاع و OPEN یک مربع است. اندازهٔ زاویه EAR را به‌دست آورید.



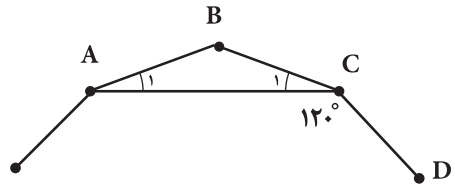
شکل ۵

راه‌حل: (از سمیرا قاسمی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه) می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{\pi(n-۲)}{n}$. در نتیجه اندازهٔ هر زاویهٔ پنج‌ضلعی منتظم، مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با ۱۰۸°، ۹۰° و ۶۰°. پس زاویهٔ AER برابر $۳۶۰^\circ-(۱۰۸^\circ+۹۰^\circ+۶۰^\circ)=۱۰۲^\circ$ خواهد شد. از طرف دیگر داریم: AE=PE=NE=ER و مثلث AER متساوی‌الساقین است. پس اندازهٔ زاویهٔ EAR برابر است با: $\frac{۱۸۰^\circ-۱۰۲^\circ}{۲}=۳۹^\circ$.

۳۸. در شکل قسمتی از یک n ضلعی منتظم نشان داده شده است. اگر زاویهٔ ACD برابر ۱۲۰° باشد، n را بیابید.

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) چون AB=BC، پس: $C_۱=A_۱=\alpha$. از طرف دیگر:

$A\hat{B}C = B\hat{C}D = C_۱ + ۱۲۰$



شکل ۶

همچنین اندازهٔ هر زاویه nضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$. در نتیجه:

$A_۱+B+C_۱=۱۸۰ \Rightarrow \alpha+۱۲۰+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow \alpha=۲۰^\circ \Rightarrow B=۱۴۰^\circ$

که نتیجه می‌دهد: $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}=۱۴۰$. با حل معادله به پاسخ n=۹ می‌رسیم.

۳۹. آیا می‌توان این مربع را به یک مربع جادویی تبدیل کرد؟

			۱۲
	۱۶	۱	۱۰
	۲	۱۵	۸

شکل ۷

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران) چون مجموع اعداد جدول برابر است با $\frac{۱۶\times۱۷}{۲}$، در نتیجه مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر باید برابر $\frac{۱۳۶}{۴}=۳۴$ باشد. در نتیجه مکان اعداد ۴، ۹، ۷، ۵ و ۱۳ به ترتیب در جدول مشخص می‌شود. برای چهارخانهٔ باقی‌مانده اعداد ۳، ۶، ۱۱ و ۱۴ باقی می‌مانند که با بررسی حالت‌ها به این نتیجه می‌رسیم که پاسخ مسئله منفی است.

		۱۳	۴
		۵	۱۲
۷	۱۶	۱	۱۰
۹	۲	۱۵	۸

شکل ۸

۴۰. عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را بیابید، به‌طوری که $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.

راه‌حل: (از سمیرا قاسمی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

$۱۰۰a+۱۰b+c=۱۰a+b+۱۰b+c+۱۰c+a$

$\Rightarrow ۸۹a=۱۰c+b$

از طرف دیگر: $۰\le ۱۰c+b\le ۹۹$ پس: a=۱ و $۱۰c+b=۸۹$. در نتیجه: b=۹ و c=۸ و $\overline{abc}=۱۹۸$.

* iradmusa@yahoo.com

حل یک مسئله از هندسه به روش پولیا

ابراهیم ریحانی
گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

کلیدواژه‌ها: جرج پولیا، هندسهٔ فضایی، وضع خطوط در فضا.

چکیده

«شورای ملی معلمان ریاضی»[1] (NCTM) امریکا در سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه (۲۰۰۰)، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می‌داند که راه‌حل آن از پیش شناخته شده نیست، به این خاطر برای یافتن راه‌حل، دانش‌آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشند و از مسیر این فرایند، درک و فهم جدید ریاضی را در خود رشد و توسعه دهند. با توجه به نقش و جایگاه روش پولیا برای حل مسئله، در این مقاله روش پولیا را در قالب حل یک مسئلهٔ هندسه توضیح می‌دهیم.

■ **مسئله: اگر A، B، C و D چهار نقطه در فضا باشند و در یک صفحه قرار نداشته باشند، خط‌هایی که از دوبه‌دوی این نقطه‌ها می‌گذرند، نسبت به هم چگونه‌اند؟**

● **حل:** سعی می‌کنیم این مسئله را به کمک الگوی پولیا با «فرهنگ آموزشی حل مسئله» حل کنیم. روش پولیا چهار مرحله دارد: فهمیدن؛ طرح یک نقشه؛ اجرای نقشه؛ بازگشت یا نگاه به عقب. در اولین مرحله، یعنی «فهمیدن مسئله»، همان‌طور که پولیا می‌گوید: «باید به‌صورتی آشکار بدانیم که چه چیزی خواسته شده است». طبق این الگو، شاگرد باید در این مرحله بتواند بخش‌های اصلی مسئله، یعنی «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط» مسئله را تعیین کند. در مسئلهٔ فوق مجهول «وضعیت تعدادی خط نسبت به هم در فضاست». داده‌ها «چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا هستند» و شرط مسئله این است که «A، B، C و D در یک صفحه واقع نباشند». پولیا فهمیدن مسئله را به دو مرحله تقسیم می‌کند: «آشنا شدن» و «کار کردن برای فهم بهتر».

آشنایی با مسئله می‌تواند همان چیزی باشد که در سطرهای بالا ذکر شد؛ یعنی معین کردن بخش‌های اصلی مسئله و در ادامه، به منظور «کار کردن برای فهم بهتر» مجهول، داده‌ها و شرط مسئله و ارتباط آن‌ها با یکدیگر، به‌صورت مسئله مراجعه می‌کنیم. منظور از «وضعیت»، وضعیت تعدادی خط در فضاست که به روشنی در کتاب درسی ذکر شده است: «دو خط در فضا نسبت به هم یکی از سه وضعیت متنافر، متوازی یا متقاطع را دارند.»

داده‌های مسئله همان‌طور که ذکر شد چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا هستند که شرط «در یک صفحه نبودن» بر آن‌ها قرار گرفته است. برای فهم بهتر مسئله، مناسب است بررسی کنیم که: «آیا شرط مسئله می‌تواند برقرار شود؟» آیا این موضوع ارتباطی با مطالبی که در متن درس ذکر شده است، دارد؟ در حقیقت اصل

چهار که می‌گوید: «حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند»، امکان تحقق شـــرط مسئله را تأمین می‌کند.

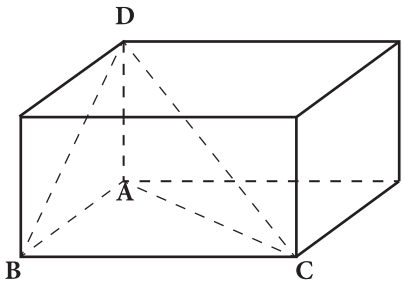
شـــاید دقیقاً نتوان مشخص کرد کـــه از چه زمانـــی وارد مرحلـــهٔ دوم، یعنی «طرح نقشه» می‌شویم. همواره ارتباط‌هایـــی بین فهم یک مســـئله و طرح یک نقشـــه برای حـــل آن وجود دارد. بـــه هر میزان کـــه درک بهتری از مسئله حاصل شـــود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد. به هر حال، گاهی برای دستیابی به یک نقشه، بهتر است مسائل مشابه و حالات خاص مسئله را بررسی کنیم. مسئله برای حالت دو نقطه به چه شکل درمی‌آید؟ در این حالت شرط مسئله را باید به‌صورت دو نقطهٔ متمایز که داده شده‌اند بیان کنیم.

از دو نقطـــه در فضـــا، یـــک و تنهـــا یـــک خط می‌گذرد. بنابراین مســـئله‌ای برای طرح کردن به‌وجود نمی‌آیـــد. حال به بررســـی مســـئله با ســـه نقطهٔ B ،A و C در فضـــا می‌پردازیم. یعنی بررســـی می‌کنیم کـــه اگر ســـه نقطه در فضا داشـــته باشـــیم، وضعیت خط‌هایـــی که از دوبـــه‌دوی آن‌ها می‌گذرند، نســـبت به‌هم چگونه است؟

در مورد ســـه نقطهٔ A، B و C آیا اصلی شبیه اصل چهار برقرار است؟ به عبارت دیگر، آیا سه نقطه در فضا یافت می‌شـــوند که نتوان آن‌هـــا را در یک صفحه قرار داد؟ بـــا توجه به اینکه از هر ســـه نقطهٔ دلخواه در فضا می‌توان صفحه‌ای گذراند، پاسخ این سؤال منفی است. از طـــرف دیگر، صفحه‌ای کـــه از A، B و C می‌گذرد، شامل خطوطی که از این نقاط می‌گذرند نیز هست. سه نقطهٔ A، B و C به هر صورتی که در فضا اختیار شوند، باز هم می‌توان صفحه‌ای را شامل هر سه آن‌ها به‌دست آورد. در ایـــن صورت، اگر آن ســـه نقطه بر یک امتداد نباشند، خطوط به‌دست آمده، با توجه به اینکه در یک صفحه هستند، دوبه‌دو متقاطع‌اند. بنابراین یافتن دو یا ســـه نقطه در فضا که نتوان آن‌ها را در یک صفحه قرار داد، امکان‌پذیر نیست، اما ممکن است چهار نقطه در فضا یافت که نتوان آن‌ها را در صفحه‌ای قرار داد.

در حقیقت ما در مرحلهٔ طرح نقشه به‌سر می‌بریم.

تلاش‌هایمان را بـــرای یافتن ارتباط میان داده‌ها و مجهول ادامه می‌دهیم. سعی می‌کنیم نشان دهیم که چگونه اجزای متفاوت مسئله به‌هم وابسته‌اند. یک‌بار دیگر به‌صورت مســـئله رجوع می‌کنیم. حال که شرط مسئله قابل تحقق اســـت، آیا می‌توانیم نمونه‌ای ملموس از آن را نشان دهیم؟ آیا در محیط اطرافمان مثال مناسبی یافت می‌شـــود؟ اشـــکالی ندارد، اگر مثال حالت خاصـــی را دربربگیرد. چگونه می‌توان از کلاسی که به شکل مکعب مستطیل اســـت، برای توضیح این مســـئله و یافتن راه‌حل آن (اگرچه در حالتی خاص) استفاده کرد؟ یکی از حالت‌های ممکن در شکل ۱ دیده می‌شود.



شکل ۱

A، B و C را ســـه نقطه در صفحهٔ کف اتاق (ســـه رأس مســـتطیل کف اتاق) و D را نقطه‌ای خارج از این صفحه ـ مثلاً یک رأس مســـتطیل ـ روی سقف اتاق در نظر می‌گیریم. در این حالت خط‌هایی که از دوبه‌دو این نقاط می‌گذرند، کدام‌ها هســـتند؟ آیا شکل کمک می‌کند؟ حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

DA, DB, DC, AB, AC, BC

بررسی وضعیت خطوط فوق به کمک شکل ساده اســـت. برای مثال، AD و AB متقاطع‌اند و AD و BC متنافرند. بقیهٔ حالات باقی‌مانده را می‌توان به‌ترتیب فوق بررسی کرد. اجازه دهید کمی به عقب برگردیم. آیا در مسئله حالتی اتفاق می‌افتد که سه نقطه از چهار نقطه روی یک امتداد قرار گیرند؟ در این صورت چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ اگر ســـه نقطه از چهار نقطهٔ A، B، C و

همواره ارتباط‌هایی بین فهم یک مسئله و طرح یک نقشه برای حل آن وجود دارد. به هر میزان که درک بهتری از مسئله حاصل شود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد

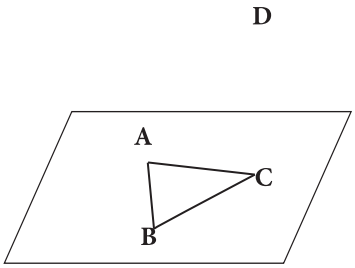
به گفتهٔ پولیا برای یافتن جواب مسئله، باید به‌صورت مکرر دیدگاه و طرز نگاه خود به مسئله را عوض کنیم

D روی یک خط باشند، آن‌گاه این خط به همراه نقطهٔ چهارم یک صفحه را معلوم می‌کنند که با شرط مسئله، یعنی «واقع نبودن چهار نقطه در یک صفحه» سازگاری ندارد. بنابراین وضعیت چهار نقطهٔ A، B، C و D به گونه‌ای است که هیچ سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند.

به گفتهٔ پولیا برای یافتن جواب مسئله، باید به‌صورت مکرر دیدگاه و طرز نگاه خود به مسئله را عوض کنیم. بار دیگر به مسئله برمی‌گردیم. دو نکتهٔ مهم را مورد توجه قرار می‌دهیم: نکتهٔ اول اینکه چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا داریم که هیچ سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند. نکتهٔ دوم اینکه آیا با الهام از مکعب مستطیل می‌توان ایده‌ای کلی برای حل مسئله ارائه کرد؟ از نکتهٔ اول چه چیزی عایدمان می‌شود؟ کدام اصل در کتاب با این موضوع مرتبط است؟

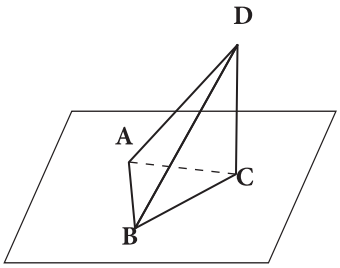
اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

چگونه می‌توان از این مطلب برای حل مسئله استفاده کرد؟ ساده‌ترین موضوع قابل بیان این است که از سه تا از چهار نقطهٔ بالا، مثلاً از B، C و D می‌توان صفحه‌ای مانند P گذراند. در این صورت موقعیت D نسبت به این صفحه چگونه خواهد بود؟ D نقطه‌ای خارج صفحهٔ P است. با این کار قسمتی از مسئله را حل کرده‌ایم. به‌عبارت دیگر، وضعیت خطوطی که از دوبه‌دو نقاط، A، B و C می‌گذرند (AB، AC و BC) را می‌توان معلوم کرد. همانند آنچه که در حالت خاص (شکل ۱) داشتیم، سه خط دوبه‌دو متقاطع هستند.



شکل ۲

حال با الهام از شکل ۱، شکل ۲ را تکمیل می‌کنیم و حل مسئله در حالت کلی حاصل می‌شود. چهاروجهی ABCD در شکل ۱ کدام شکل فضایی را معلوم می‌کند؟ آیا مشابه این وضعیت برای شکل ۲ قابل دسترسی است؟ دیده می‌شود که اگر در شکل ۲ از D به A، B و C وصل کنیم، شکل ۳ به‌دست می‌آید که در اینجا نیز یک چهاروجهی یا هرم ABCD حاصل می‌شود.



شکل ۳

حال به بررسی وضعیت خطوطی که از دوبه‌دوی این نقاط گذشته‌اند (یعنی خطوط DC، DA، AB، BC، DB، و AC) می‌پردازیم. به‌طور نمونه، DA و AC متقاطع (در نقطهٔ A) و DA و BC متنافر هستند. توجه داریم که اگر DA و BC متنافر نباشند، آن‌گاه یا موازی هستند و یا متقاطع و در هر صورت از آن‌ها یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. این با شرط مسئله که چهار نقطهٔ A، B، C و D در یک صفحه قرار ندارند، سازگاری ندارد. وضعیت خط‌هایی که از دوبه‌دوی نقاط A، B، C و D می‌گذرند، به این شرح است: زوج‌های (DA, AC)، (DB, C)، (DB, AB)، (DA, DB)، (AB, AC)، (AB, BC)، (DA, CD)، (DA, AB)، (DB, BC)، (DC, AC)، (DC, BC) و (AC, BC) متقاطع هستند و زوج‌های (BD, AC)، (DA, BC) و (DC, AB) متنافرند.

اما باز هم اجازه دهید به عقب برگردیم. آیا مسئله به روش دیگری نیز قابل حل است؟ آیا بدون رسم شکل نیز می‌توانستیم خطوطی را که از دوبه‌دو نقاط A، B، C و D می‌گذرند، تعیین کنیم؟ یکی از **حالت‌ها** را در نظر می‌گیریم؛ مثلاً AB. AB چگونه به‌دست می‌آید؟ AB خطی است که از A و B می‌گذرد. از طرف دیگر، برای به‌دست آوردن آن مثل این است که حروف A و B را کنار یکدیگر قرار داده‌ایم. شاید چیزی مثل قرار دادن ارقام کنار هم که اعدادی را به‌دست می‌دهند. مثلاً ۲ و ۱ که ۱۲ و ۲۱ را به‌دست می‌دهند. آیا BA خط جدیدی را به‌دست می‌دهد؟ خیر، زیرا خطی که از A و B می‌گذرد، همان خطی است که از B و A می‌گذرد. به‌عبارت دیگر، ترتیب قرار گرفتن A و B در کنار هم مهم نیست.

در کدام قسمت دیگر از ریاضیات با چنین موضوعی مواجه شده‌اید که در آن ترتیب و تکرار اهمیتی ندارد؟ «مجموعه‌ها» پاسخی طبیعی به این سؤال به‌شمار می‌رود. چگونه می‌توان مسئله (جزئی) فوق، یعنی تعیین خطوطی که از دوبه‌دو نقاط A، B، C و D می‌گذرند را با یک مسئله مشابه در مجموعه‌ها مقایسه کرد؟ اگر چند خط دیگر را معین کنیم، مسئله واضح‌تر می‌شود. AD، BC و DB سه خط دیگر هستند. هر کدام از آن‌ها دو جزء دارند و یا به بیان دقیق‌تر، یک ترکیب دو حرفی هستند؛ ترکیب‌های دو حرفی (غیرتکراری) که از چهار حرف A، B، C و D به‌دست می‌آیند. مسئلهٔ مشابه آن در مجموعه‌ها چیست؟

قبل از پاسخ به پرسش فوق یادآور می‌شویم، همان‌گونه که پولیا می‌گوید: «استاد باید کمک کند، ولی نه بسیار زیاد و نه بسیار کم؛ تا چنان باشد که برای دانشجو سهم قابل قبولی از کاری که باید انجام دهد بر جای بماند.» و نیز: «معلم باید آمادهٔ آن باشد که اگر این اشاره [راهنمایی] برای برانگیختن شاگردان کافی [مناسب] نباشد، درصدد یافتن چاره‌ای دیگر برآید، و بدین ترتیب باید آمادگی آن را داشته باشد که رفته‌رفته به اشاره‌های صریح‌تری متوسل شود.»

به آخرین سوال مطرح شده باز می‌گردیم. ترکیب‌های دوحرفی (غیرتکراری) از حروف A، B، C و D که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن حروف اهمیتی ندارد، مشابه مسئلهٔ به‌دست آوردن زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعهٔ چهار عضوی است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه چهار عضوی چه‌قدر است؟ پاسخ همان تعداد ترکیب‌های دو حرفی از چهار حرف A، B، C و D است که برابر ۶ می‌شود. این ترکیب‌ها و یا همان خطوط حاصل که از دوبه‌دو نقاط A، B، C و D می‌گذرند، عبارت‌اند از: BC، AC، AB، DC، DB و DA.

یک‌بار دیگر به مسئلهٔ تعیین وضعیت این ۶ خط نسبت به یکدیگر باز می‌گردیم. یک زوج از آن‌ها را مثال بزنید که متقاطع باشند. (DA, DB) یک مثال است. آیا (DB, DA) زوج جدیدی است؟ خیر همان قبلی است. تعداد زوج‌های ممکن چه‌قدر است؟ چگونه می‌توان همهٔ آن‌ها را شمرد و مطمئن بود که چیزی از قلم نیفتاده است؟ آیا مسئله‌ای مشابه ۶ خط به‌دست آمده از نقاط A، B، C و D داریم؟ آیا این مسئله (جزئی) را می‌توان با بیانی دیگر مطرح کرد؟

«مجموعه‌ای شامل شش خط متفاوت، چه تعداد حالات مختلف را دوبه‌دو نسبت به هم دارا هستند؟». آیا این نیز مسئله‌ای از نوع ترکیب است؟»

پاسخ $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ است که همان ترکیب‌های دوعضوی از یک مجموعهٔ شش عضوی است. این ۱۵ زوج در زیر فهرست شده‌اند:

۵ ← (DA, DB), (DA, DC), (DA, AB), (DA, AC), (DA, BC)

۴ ← (DB, DC), (DB, AB), (DB, AC), (DB, BC)

۳ ← (DC, AB), (DC, AC), (DC, BC)

۲ ← (AB, AC), (AB, BC)

۱ ← (AC, BC)

$$\binom{۶}{۲} = ۱۵$$

واضح است که امکان دارد دانش‌آموزان به شیوه‌های متفاوتی فهرستی از این ۱۵ زوج خطوط را ارائه کنند. در روش فوق ابتدا زوج‌هایی که از DA و پنج خط دیگر غیر از آن حاصل می‌شوند، فهرست شده‌اند و در سطر دوم همین کار با DB انجام شده است؛ با این تفاوت که موارد تکراری حذف شده‌اند و کار به‌همین منوال ادامه یافته است. بین زوج‌های داده شده، کدام‌ها متقاطع هستند؟ چه روش ساده‌ای برای تعیین آن‌ها وجود دارد؟ مثلاً واضح است که هر زوجی که دارای یک حرف مشترک هستند، متقاطع‌اند. تعداد این زوج‌ها دوازده تاست که عبارت‌اند از:

(DA, DB), (DA, DC), (DA, AB), (DA, AC), (DB, DC), (DB, AB), (DB, BC), (DC, AC), (DC, BC), (AB, AC), (AB, BC), (AC, BC)

کدام‌ها باقی مانده‌اند؟

(DA, BC), (DC, AB), (DB, AC)

آن‌ها را روی شکل نشان دهید. آیا هیچ‌یک از این سه زوج خطوط می‌توانند متقاطع یا موازی باشند؟ اگر به‌طور مثال (DA, BC) موازی یا متقاطع باشند، چه اتفاقی می‌افتد؟ همان‌گونه که قبلاً بیان شد صفحه‌ای شامل آن‌ها به‌دست می‌آید که با فرض مسئله در تناقض است. پس (DA, BC) و نیز دو حالت باقی‌مانده متنافر هستند و در ضمن مطمئن هستیم که حالت دیگری وجود ندارد.

پی‌نوشت

1. National Council of Teachers of Mathematics

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۹۴۵). **چگونه مسئله را حل کنیم**. ترجمهٔ احمد آرام. انتشارات کیهان. تهران. چاپ دوم.

2. National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

غلامرضا یاسی‌پور

اصول اقلیدس

- نویسنده: تامس ال. هیث
- ترجمهٔ **محمدهادی شفیعی‌ها**
- ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

کتاب **«اصول اقلیدس»** (شکوفایی، حدود ۳۰۰ ق.م) که به حق می‌توان آن را پرشمارگان‌ترین کتاب علمی دانست، اثر جاودانهٔ **اقلیدس**، از نخستین شاگردان آکادمی **افلاطون** (۳۴۷-۴۲۷ ق.م) است.

طبق مقدمهٔ کتاب، این داستان که ریاضی‌دانی در پاسخ شاهزاده‌ای که از سختی هندسه شکایت کرده بود، گفته «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» دربارهٔ اقلیدس است. و نیز این ماجرا که دانشمندی در پاسخ شخصی که از او پرسید: «از فراگرفتن این چیزها چه عایدش می‌شود»، دربارهٔ اوست که غلامش را می‌خواند و می‌گوید: «سکه‌ای به او بده، زیرا او باید از آنچه که فرامی‌گیرد، عایدی ببرد.»

باری کتاب ۱۳ مقاله دارد و ما در این مختصر، اشاراتی اندک به هر یک از مقالات آن می‌آوریم.

- مقالهٔ اول با تعاریف آغاز می‌شود، و با این اولین تعریف: «*نقطه آن است که جزء ندارد.*» سپس اصل‌های موضوع هندسه آمده‌اند که اولین آن‌ها عبارت است از: «*هر دو نقطه را می‌توان با یک خط راست به‌هم وصل کرد.*»

  و بعد از آن، اصل‌های بدیهی (بدیهیات) که باز اولین آن‌ها این اصل است: «*چیزهای مساوی با یک چیز، خود نیز با هم مساوی‌اند.*»

  آن‌گاه قضیه‌ها آورده شده‌اند، با اولین قضیه‌ای که به این صورت است: «*مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر یک خط راست متناهی مفروض.*»

  و چهل و هشتمین قضیه این صورت را دارد: «*اگر در مثلثی مربع یکی از ضلع‌ها با [مجموع] مربع‌های دو ضلع دیگر مثلث مساوی باشد، زاویهٔ بین دو ضلع این مثلث قائمه است.*»

- مقالهٔ دوم بسیار کوتاه، و با دو تعریف و ۱۴ قضیه همراه است.

- مقالهٔ سوم ۱۱ تعریف، و ۳۷ قضیه دارد. این تعریف اولین تعریف آن است: «*دایره‌های متساوی دایره‌هایی هستند که قطرها یا شعاع‌های متساوی دارند.*»

  و این قضیه اولین قضیهٔ آن است: «*مطلوب پیدا کردن مرکز یک دایرهٔ مفروض است.*»

- مقالهٔ چهارم شامل ۷ تعریف و ۱۶ قضیه است. آخرین قضیه دارای مسئلهٔ این مقاله، به این صورت آمده است: «*مطلوب، محاط کردن یک پانزده ضلعی متساوی‌الزوایا در دایرهٔ مفروض است.*»

- مقالهٔ پنجم ۱۸ تعریف در مورد نسبت‌ها و ۲۵ قضیه دربارهٔ آن‌ها دارد. تعریف اول آن چنین است: «*یک کمیت وقتی جزئی از یک کمیتِ «کوچک‌تر از بزرگ‌تر» است که کمیت بزرگ‌تر را بشمارد.*»

  و قضیهٔ آخر آن به این صورت است: «*اگر چهار کمیت متناسب باشند، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین کمیت‌ها از مجموع دو کمیت دیگر بزرگ‌تر است.*»

- مقالهٔ ششم تنها سه تعریف و ۳۳ قضیه دارد، و باز در مورد نسبت‌هاست. صورت قضیهٔ سی‌وسوم این مقاله چنین است: «*در دایره‌های متساوی، نسبت زاویه‌ها به یکدیگر، مثل نسبت کمان‌های روبه‌روی آن‌هاست؛ خواه این زاویه‌ها در مراکز دایره باشند، خواه بر محیط‌های آن‌ها.*»

- مقالهٔ هفتم ۲۲ تعریف و ۳۹ قضیه دارد که همه دربارهٔ اعدادند. به‌عنوان نمونه تعریف ۱۲ می‌گوید: «*عدد اول، عددی است که تنها توسط واحد شمرده شود.*»

  و تعریف ۲۲ می‌گوید: «*عدد تام، عددی است که با مجموع اجزای خود مساوی است.*»

- مقالهٔ هشتم بدون تعریف است، اما ۲۷ قضیه دارد که همه در مورد نسبت‌های اعدادند. لازم به ذکر است که تمام این قضایا به زبان امروزی مسائل، از راه هندسی ثابت شده‌اند.
- مقالهٔ نهم نیز بدون تعریف، اما دارای ۳۶ قضیه است. صورت قضیه بیست‌ودوم این مقاله چنین است: «*حاصل جمع تعداد زوجی عدد فرد، عددی است زوج.*»
- مقالهٔ دهم، مفصل‌ترین مقالهٔ کتاب است که با چهار تعریف آغاز می‌شود و ۱۱۵ قضیه دارد.

در این مقاله با اصطلاحاتِ امروزه نامأنوسی از قبیل واسط، ذوالاسمین، واسطی اول و دوم، مهاد، کهاد، ضلع و مفصل اول و دوم مواجه می‌شویم که تعریف همه‌شان در مقاله آمده است، و ما خوانندهٔ علاقه‌مند را به خود مقاله ارجاع می‌دهیم و در اینجا تنها به ذکر صورت قضیهٔ ۱۱۵، آخرین قضیهٔ مقاله، کفایت می‌کنیم: «از هر خط راست واسط، تعداد بی‌نهایت خط راست گنگ پدید می‌آید که با هیچ‌یک از خط‌های راست قبل از خود یکی نیست.»

- مقالهٔ یازدهم با این تعریف آغاز می‌شود: «*جسم آن است که طول و عرض و ارتفاع دارد.*»

و با این قضیه هم تمام: «*اگر دو منشور با ارتفاع‌های متساوی در دست باشند، و قاعدهٔ یکی متوازی‌الاضلاع باشد و قاعدهٔ دیگری مثلث، و اگر متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث باشد، دو منشور با هم مساوی خواهند بود.*»

این مقاله دارای ۲۸ تعریف و ۳۹ قضیه است، و از صورت قضیه‌ای که آورده‌ایم مشخص می‌شود که دربارهٔ هندسهٔ فضایی است.

- مقالهٔ دوازدهم بدون تعریف و دارای ۱۸ قضیه است. قضیه هجدهم آن می‌گوید: «*نسبت دو کره به یکدیگر، همچون مکعب نسبت قطرهای آن‌هاست به یکدیگر.*»
- مقالهٔ سیزدهم نیز با قضیه‌ها آغاز می‌شود و شامل ۱۸ قضیه است. این مقاله و نیز خود کتاب، با قضیهٔ هجدهم که صورت آن چنین است، به پایان می‌رسد: «*مطلوب تعیین ضلع‌های پنج شکل و مقایسهٔ آن‌هاست با یکدیگر.*»

کتاب از طرف «**شورای خانه‌های ریاضیات ایران**» به مناسبت «سال جهانی ریاضیات» (سال ۲۰۰۰ میلادی) انتشار یافته است. از آشفتگی‌هایی که در کتاب مشهود است و از کمبودهایی که در آن مشاهده می‌شود، معلوم است که با عجله آماده شده است.

گرچه سعی مترجم دانشمند کتاب مأجور است، از ایشان انتظار بیشتری می‌رفت که آن را با آوردن شرح حال **تأمس ال. هیث**، نویسندهٔ کتاب و تاریخچهٔ اصول اقلیدس در دوران تمدن اسلامی و کارهایی که در مورد آن توسط ریاضی‌دان‌های ایرانی، از جمله **خواجه نصیرالدین طوسی** انجام گرفته، غنی‌تر کند.

اکنون که از مؤلف کتاب خبری نداریم، و مترجم کتاب نیز به رحمت ایزدی پیوسته است و به او نیز نمی‌توان امید بست، از ناشر کتاب انتظار می‌رود که در چاپ‌های بعدی آن، این کمبودها را به اصلاح آرد و از جملهٔ پشت گوش افکندنی‌ها نشمارد. آوردن معادل‌های انگلیسی اصطلاحات کتاب، و نیز آوردن معنی فارسی موارد عربی آن‌ها، از نیازهای اولیهٔ کتاب است.

به‌نظر می‌رسد که آشنایی با این کتاب، برای دبیران ریاضی، به‌خصوص معلمان هندسه، لازم است.

۴

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

رابطه‌ها، تعریف‌ها و خواص زیر فقط برای اعداد صحیح داده شده‌اند (برقرارند).

۱. a می‌شمارد (عاد می‌کند) b را (یا b مضربی از a است)، اگر عددی صحیح چون k وجود داشته باشد، به‌طوری که: $b = ak$.

۲. ک‌م‌م (a,b) = **کوچک‌ترین مضرب مشترک** a و b، آن را L بنامید، که کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح و مثبت a و b می‌باشد.

بنابراین:

i. دو عدد صحیح و مثبت m و n وجود دارند، به‌طوری‌که: $L=an$ و $L=bm$؛

ii. اگر M مضرب مشترک دیگری برای a و b باشد، در این صورت M مضربی از L است؛ و

iii. $L \geq a$ و $L \geq b$.

۳. ب‌م‌م (a,b) = **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه** (شمارنده) مشترک a و b آن را D بنامید، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح و مثبت a و b می‌باشد.

بنابراین:

i. دو عدد صحیح و مثبت s و t وجود دارند، به‌طوری که $a=Ds$ و $b=Dt$؛ s و t نسبت به هم اول هستند (یعنی عامل مشترکی ندارند)

ii. اگر T مقسوم‌علیه مشترک دیگری برای a و b باشد، آن‌گاه T مقسوم‌علیه D است؛ و

iii. $T \leq a$ و $T \leq b$.

اصل خوش ـ ترتیبی: هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح و نامنفی دارای کوچک‌ترین عضو است (عضو ابتدا دارد).

برخی خاصیت‌ها و واقعیت‌های توابع

اگر f و g دو تابع با مقادیر حقیقی باشند، در این صورت ساخت توابع زیر امکان‌پذیر است:

۱. f+g به‌صورت $(f+g)(x)= f(x)+g(x)$ تعریف می‌شود.

۲. f-g به‌صورت $(f-g)(x)= f(x)-g(x)$ تعریف می‌شود.

۳. fg به‌صورت $(fg)(x)= f(x)\,g(x)$ تعریف می‌شود.

۴. $\frac{f}{g}$ به‌صورت $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ که $g(x)\neq 0$ تعریف می‌شود و

۵. fog به‌صورت $(fog)(x)= f(g(x))$ تعریف می‌شود.

دامنه‌های این توابع توسط دامنه و ویژگی‌های f و g مشخص می‌شوند. یک تابع f:

۱. **اکیداً صعودی** نامیده می‌شود اگر برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 که $x_1<x_2$، رابطهٔ $f(x_1)<f(x_2)$ برقرار باشد.

۲. **اکیداً نزولی** نامیده می‌شود، اگر برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 که $x_1<x_2$، رابطهٔ $f(x_1)>f(x_2)$ برقرار باشد.

۳. **نزولی** نامیده می‌شود اگر برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 که $x_1\leq x_2$، رابطهٔ $f(x_1)\geq f(x_2)$ برقرار باشد.

۴. **صعودی** نامیده می‌شود اگر برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 که $x_1\leq x_2$، رابطهٔ $f(x_1)\leq f(x_2)$ برقرار باشد.

۵. **فرد** نامیده می‌شود اگر برای هر x، $f(-x)= -f(x)$.

۶. **زوج** نامیده می‌شود اگر برای هر x، $f(-x)=f(x)$.

۷. **یک‌به‌یک** نامیده می‌شود اگر برای هر دو عدد حقیقی x_2 و x_1 که $x_1\neq x_2$، رابطهٔ $f(x_1)\neq f(x_2)$ برقرار باشد. و

۸. **پوشا** نامیده می‌شود اگر برای هر مقدار y حداقل یک مقدار مانند x وجود داشته باشد؛ به‌طوری که: $f(x)=y$.

لغات مهم

1) Relations: رابطه‌ها
2) Properties: خواص
3) Definitions: تعاریف
4) Integer number: عدد صحیح
5) Common multiple: مضرب مشترک
6) Common divisor: مقسوم‌علیه مشترک
7) Real-Valued functions: توابع با مقادیر حقیقی
8) Domain: دامنه
9) Increasing: اکیداً صعودی
10) Decreasing: اکیداً نزولی

The following relations, definitions, and properties are given only for **integer numbers**.

1. a divides b (or b is a multiple of a) if there exists an integer number k such that b=ak.
2. The lcm (a,b)= **least common multiple** of a and b, call it L, is the smallest multiple that the positive integers a and b have in common. Therefore
   i. there exist two positive integers n and m such that L=an and L=bm;
   ii. if M is another common multiple of a and b, then M is a multiple of L; and
   iii. $L \geq a$ and $L \geq b$.
3. The GCD (a,b) = **greatest common divisor** of a and b, call it D, is the largest divisor that the positive integers a and b have in common. Therefore
   i. there exist two positive integers s and t such that a = Ds and b=Dt;with s and t relatively prime (i.e. having no common factors)
   ii. if T is another common divisor of a and b, then T is a divisor of D; and
   iii. $T \leq a$ and $T \leq b$.

Well-Ordering Principle. Every nonempty set of nonnegative integers contains a smallest element.

Some facts and properties of functions

Let f and g be two real-valued functions. Then it is possible to construct the following functions.

1. f +g defined as (f+g)(x) = f(x)+g(x);
2. f-g defined as (f-g)(x) = f(x) - g(x);
3. fg defined as (fg)(x) = f(x) g(x);
4. f/g defined as (f/g)(x) = f(x)/g(x) when $g(x) \neq 0$; and
5. $f \circ g$ defined as $f \circ g(x) = f(g(x))$.

The domains of these functions will be determined by the domains and properties of f and g.

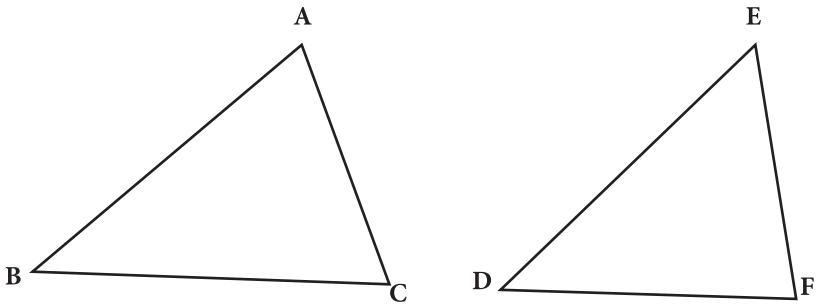
A function f is said to be:

1. **increasing** if for every two real numbers x_1 and x_2 such that $x_1 < x_2$, it follows that $f(x_1) < f(x_2)$;
2. **decreasing** if for every two real numbers x_1 and x_2 such that $x_1 < x_2$, it follows that $f(x_1) > f(x_2)$;
3. **nondecreasing** if for every tow real numbers x_1 and x_2 such that $x_1 \leq x_2$ it follows taht $f(x_1) \leq f(x_2)$
4. **nonincreasing** if for every two real numbers x_1 and x_2 that $x_1 < x_2$ it follows that $f(x_1) \geq f(x_2)$
5. **odd** if f(-x)=-f(x) for all x;
6. **even** if f(-x)=f(x) for all x;
7. **one - to - one** if for every two real numbers x_1 and x_2 such that $x_1 \neq x_2$ it follows that $f(x_1) \neq f(x_2)$; and
8. **onto** if for every value y there is at least one value x such that f(x)=y.

محمدجواد سروستانی[1]
دانش‌آموز سال چهارم متوسطه از شهر تهران

اثباتی دیگر برای قضیهٔ لولا یا قیچی!

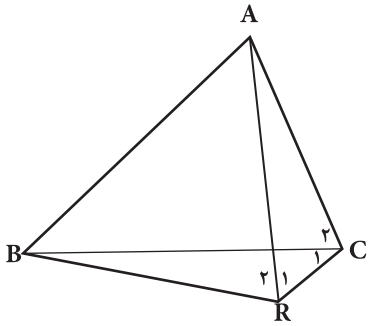
اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگری نظیربه‌نظیر مساوی باشند و زاویهٔ بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگ‌تر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آن‌گاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.



حکم فرض $\begin{cases} AB = DE \\ AC = EF \\ \hat{A} > \hat{E} \end{cases} \Rightarrow \quad : DF < BC$

برهان:

۱. $B\hat{A}C > D\hat{E}F$ است. از A خط AR را چنان رسم می‌کنیم که داشته باشیم: $B\hat{A}R = D\hat{E}F$ و $AR = EF$. سپس از B به R وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} D\hat{E}F = B\hat{A}R \\ AB = DE \\ AR = EF \end{cases} \xRightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{ABR} \cong \overset{\Delta}{DEF} \Rightarrow DF = BR$$

۲. اکنون از نقطهٔ R به نقطهٔ C وصل می‌کنیم.

در مثلث $\overset{\Delta}{ACR} : AC = AR \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{R}_1 \Rightarrow \hat{C}_1 < \hat{R}_1 \overset{\hat{R}_1 < \hat{R}}{\Rightarrow} \hat{C}_1 < \hat{R}$

قضیه: ضلع روبه‌رو زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر $\Longrightarrow DF = BR$

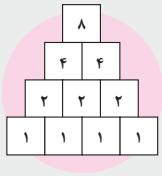
در مثلث $\overset{\Delta}{BCR} : \hat{C}_1 < \hat{R} \Rightarrow BR < BC \overset{DF=BR}{\Rightarrow} DF < BC$

۱. خوانندهٔ محترم مجله، آقای محمدجواد سروستانی در ایمیل ارسالی خود، اثبات فوق را به‌عنوان ابتکار خودشان مطرح کرده‌اند. البته این ادعا کاملاً محتمل و پذیرفته است که یک روش استدلال، هم‌زمان به ذهن افراد متعددی در جاهای مختلف، بدون ارتباط با هم، برسد، با این حال برای اطلاع ایشان یادآوری می‌کنیم، این روش برای اثبات قضیهٔ لولا که به‌نظر می‌رسد کوتاه‌تر و زیباتر از روش قدیمی آن است، پیش از این نیز مطرح شده و یکی از منابعی که در آن این اثبات آمده است، به‌عنوان نمونه معرفی می‌شود:
Hungarian problem Book III, Andy Liu The mathematical Association of America.

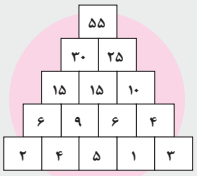
پاسخ ایستگاه اول

مسئلهٔ مبتدی: پاسخ بسیار ساده است: ۲۴

مسئلهٔ آسان: به خانهٔ با عدد ۴ توجه کنید. مجموع دو عدد زیرین آن باید ۴ باشد، پس سه امکان وجود دارد: (۱ و ۳)، (۳ و ۱) و (۲ و ۲). اما دو حالت اول ناممکن است، زیرا عدد ۱ نمی‌تواند در خانه‌های میانی باشد. (چرا؟) پس دو خانهٔ زیرین باید ۲ و ۲ باشند. و از آنجا نتیجه می‌شود که خانه‌های زیرین عددهای ۲ نیز ۱ و ۱ هستند و بعد به سادگی عددهای همهٔ خانه‌ها پر می‌شوند:



مسئلهٔ متوسط: باز هم به خانهٔ ۴ توجه کنید. عددهای زیرین آن باید یکی از سه امکان (۳ و ۱)، (۱ و ۳) و (۲ و ۲) باشند. در این سه حالت می‌توان جدول را با توجه به سایر عددها پر کرد. در هر سه حالت، عدد خانهٔ بالایی یکسان و جواب ۵۵ است:



مسئلهٔ دشوار: این مسئله واقعاً کمی دشوار است! برای حل آن بهتر است از معادلات استفاده کنیم. مطابق شکل زیر عددهای داخل خانه‌ها را با پارامترهای a، b، c، ... و l نام‌گذاری کنید:

اکنون با توجه به ویژگی مثلث به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$a+b=۳,\ b+c=f,\ c+d=g,\ d+e=۳,\ g+۳=h,$$
$$f+g=i,\ ۳+f=j,\ j+i=k,\ i+h=۱۸,\ l=k+۱۸$$

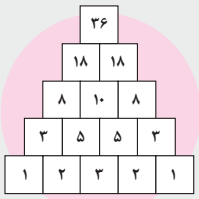
به کمک این معادله‌ها و با مبنا قرار دادن دو متغیر a و c، همهٔ متغیرها را به این دو متغیر تبدیل می‌کنیم و به روابط زیر می‌رسیم:

$$b=۳-a,\ f=۳+c-a,\ j=۶+c-a,\ h=۹+\frac{a-c}{۲},$$
$$d=۶+\frac{a-۳c}{۲},\ e=\frac{۳c-a}{۲}-۳,\ g=۶+\frac{a-c}{۲},$$
$$i=۹+\frac{c-a}{۲},\ k=۱۵+\frac{۳c-۳a}{۲}$$

حال با توجه به مثبت بودن b، نتیجه می‌شود که ۲ یا a=۱. با فرض a=۱ نتیجه می‌شود:

$$b=۲,\ d=\frac{۱۳-۳c}{۲},\ e=\frac{۳c-۷}{۲}$$

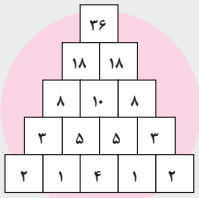
وچون d,e>۰ نتیجه می‌شود: $\frac{۷}{۳}<c<\frac{۱۳}{۳}$. لذا: ۴ یا c=۳. پاسخ c=۴ با توجه به طبیعی بودن e و d غیرقابل قبول است و از آنجا نتیجه می‌شود که c=۳ و از آنجا مقادیر بقیهٔ پارامترها نیز به‌دست آمده و به مثلث زیر می‌رسیم:



و با فرض a = ۲ نتیجه می‌شود:

$$b=۱,\ d=\frac{۱۴-۳c}{۲},\ e=\frac{۳c-۸}{۲}$$

و چون e>۰ و d نتیجه می‌شود: $\frac{۸}{۳}<c<\frac{۱۴}{۳}$ و در نتیجه: ۴ یا c = ۳ که پاسخ c=۳ غیرقابل قبول است. در نتیجه c=۴ و از آنجا به مثلث زیر می‌رسیم:



یعنی مسئله دو جواب بیشتر ندارد و در هر دو حالت جواب ۳۶ است.

اقتصاد و فرهنگ با عزم ملی و مدیریت جهادی

برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوهٔ اشتراک:
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجلهٔ شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

◆ نام مجلات درخواستی: .....
◆ نام و نام خانوادگی: ..... ◆ میزان تحصیلات: .....
◆ تاریخ تولد: ..... ◆ تلفن: .....
◆ نشانی کامل پستی: ..... شهرستان: ..... خیابان: .....
استان: ..... شمارهٔ فیش بانکی: ..... مبلغ پرداختی: .....
پلاک: ..... شمارهٔ پستی: .....
◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید: .....
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امورمشترکین: ۵۹۵۶۱/۱۱۱
● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
● اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴ / ۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۶۶۵۶
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

پاسخ ایستگاه دوم

معمای اول: اگر آن روز دوشنبه نبود، پس هرمز در آن روز راست‌گو بود. پس باید جملهٔ او راست باشد. یعنی جملهٔ «امروز دوشنبه است و من متأهل هستم» راست است. ولی یکی از مؤلفه‌های آن نادرست است (امروز دوشنبه است) و این تناقض به‌وجود می‌آورد. پس آن روز دوشنبه بوده است و هرمز دروغ گفته است. یعنی جملهٔ «امروز دوشنبه است و من متأهل هستم» دروغ است. ولی یک بخش آن (امروز دوشنبه است) راست است، پس باید بخش دیگر آن دروغ باشد؛ یعنی هرمز متأهل نیست. پس به‌طور خلاصه، این جمله در روز دوشنبه بیان شده و هرمز متأهل نیست.

معمای دوم: فرض کنیم که این جمله در روز دوشنبه بیان شده باشد. نتیجه می‌شود که جملهٔ درستی است (وقتی جمله‌ای با رابط «یا» بیان شود، کافی است یکی از اجزای آن درست باشد تا همهٔ جمله درست باشد). ولی هرمز در روزهای دوشنبه نمی‌تواند راست بگوید، پس این جمله نمی‌تواند در روز دوشنبه بیان شده باشد و لذا جملهٔ درستی است! در نتیجه باید یکی از اجزای آن درست باشد. اما یک جزء آن نادرست است (امروز دوشنبه است)، پس باید جزء دیگر آن درست باشد، یعنی هرمز متأهل است.

معمای سوم: وقتی هرمز گفت: «امروز دوشنبه است»، بلافاصله نتیجه می‌شود که نمی‌تواند این جمله در روز دوشنبه بیان شده باشد. (چون در این صورت جملهٔ درستی خواهد بود، ولی هرمز دوشنبه‌ها راست نمی‌گوید!) پس آن روز دوشنبه نبوده و هرمز راستگو بوده است. یعنی جمله‌اش باید راست باشد و این به دور باطل می‌انجامد! پس هرمز هیچ روزی نمی‌تواند این جمله را گفته باشد و روایت دروغ است!

معمای چهارم: جملهٔ مناسب این است: «امروز پنجشنبه یا دوشنبه است.» هرمز می‌تواند این جمله را پنجشنبه بگوید، زیرا در آن صورت راست گفته است. ولی در هیچ روز دیگری نمی‌تواند آن را بگوید. چون اگر در روزهای شنبه، یکشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه و جمعه آن را بگوید، جملهٔ نادرستی گفته است، در حالی‌که در این پنج روز باید راست بگوید. اگر هم در روز دوشنبه این جمله را بگوید، راست گفته در حالی‌که در این روز نمی‌تواند راست بگوید!

معمای پنجم: گفتن اینکه فردا سه‌شنبه است، معادل با گفتن آن است که «امروز دوشنبه است» که چنانچه دیدیم، هرمز هرگز نمی‌تواند این جمله را بگوید. پس آنکه این جمله را گفته، مهرداد است و مهرداد فقط می‌تواند این جمله را در روز دوشنبه (به راستی) و یا در روز پنجشنبه (به دروغ) گفته باشد. پس آن روز دوشنبه یا پنجشنبه بوده است. حال در همان روز (هفتهٔ بعد) او گفت: «من فردا دروغ خواهم گفت.» تنها روزهایی که او می‌تواند این حرف را بزند، چهارشنبه (به راستی) و یا پنجشنبه (به دروغ) است. بنابراین آن روز دوشنبه نبوده است. پس آن روز پنجشنبه و گوینده هم مهرداد بوده است.

معمای ششم: مطابق این روایت و با همان استدلال، نتیجه می‌شود که برادر اول مهرداد و روزی که این حرف را زده، دوشنبه یا پنجشنبه بوده است. اما حالا این هرمز بود که هفتهٔ بعد در همان روز گفت: «من فردا دروغ خواهم گفت.» خب تنها روزهایی که هرمز می‌توانست این حرف را بزند، یکشنبه (به راستی) و دوشنبه (به دروغ) است. پس آن روز باید دوشنبه بوده باشد.

معمای هفتم: اگر یکی از جمله‌ها راست باشد، آن‌گاه دیگری هم راست است. زیرا دو جمله با هم راست و یا هر دو دروغ هستند. ولی هر دو جمله نمی‌توانند دروغ باشند، زیرا دو برادر هر دو در یک روز دروغ نمی‌گویند. پس هر دو جمله راست هستند؛ یعنی هرمز برادر بزرگ است.

معمای هشتم: اگر یک شهروند A باشد، بنابراین یک شهروند A' هم وجود دارد که عادت دروغ‌گویی او برخلاف A است. پس براساس شرط دوم (با در نظر گرفتن A' به‌جای B) یک شهروند C وجود دارد که فقط و فقط در روزهایی راست‌گوست که A و A' هر دو راست بگویند. اما A و A' هرگز در یک روز یکسان با هم راست نمی‌گویند، بنابراین C هرگز راست نمی‌گوید! در نتیجه C هر روز دروغ می‌گوید. اما چون یک شهروند C' وجود دارد که خلاف C رفتار می‌کند ـ یعنی هر روز راست می‌گوید ـ پس شایعه دروغ است!

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و نه‌شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول)
رشد جوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی
◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی
(به صورت فصل‌نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

◆ رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول) ◆ رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه دوم) ◆ رشد آموزش قرآن ◆ رشد آموزش معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد آموزش زمین‌شناسی ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.
◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ـ ۰۲۱

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات