دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

رشد برهان ریاضی

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

دورهٔ بیست‌وچهارم
شمارهٔ پی‌درپی ۸۵
بهار ۱۳۹۴
شمارهٔ ۳
۶۴ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

حرف اول / فصل برداشت محصول / حمیدرضا امیری ۲

آموزشی / این مسئله‌ها واقعی‌اند یا روزمره؟ / قاسم حسین قنبری ۳
روشی آسان و سریع برای تعیین علامت توابع / سیمین افروزان ۶
پای تخته / محرم نژاد ایردموسی ۱۲
هندسه نااقلیدسی / سیداحسان حسینی ۱۶
محاسبهٔ انتگرال به کمک مساحت / محمد رحمانی ۲۸
تعمیم یک مسئله در هندسه / مرتضی بیات ـ زهرا خاتمی ۳۰
یک‌تساوی و چند نامساوی / محمد طبیعی ۴۰
فرض ضمنی، ملانصرالدین، کانتور و غزها! / غلامرضا یاسی‌پور ۴۴
کاربرد ترکیبیات در فیزیک / محمد مقدسی ۴۶
ساخت انیمیشن برای آموزش ریاضی / فرزاد حمزه‌پور ۵۸

ریاضیات در سینمای جهان / بررسی فیلم سینمایی جنون درخشان / احسان یارمحمدی ۱۰

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی / مجموعه‌های عددی / حمیدرضا امیری ۲۱

گفت‌وگو / تدریس و معلمی لذت‌بخش است (پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار دکتر عین‌الله پاشا) / ارغوان غلامی ـ هوشنگ شرقی ۲۲

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: بازی و ریاضی! / هوشنگ شرقی ۹
ایستگاه دوم: معماهایی از سرزمین ایران باستان! ۳۳
ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۳۹
پاسخ ایستگاه اول ۶۲

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران / رشد آموزش ریاضی شماره‌های ۲۵ تا ۲۸ / غلامرضا یاسی‌پور ۳۴

معرفی کتاب / حل مسائل جبری با روش‌های هندسی / احسان یارمحمدی ۴۲

تاریخ ریاضی معاصر ایران / جراید و نقش آن‌ها در عمومی‌سازی ریاضیات / دکتر فرید قاسملو ۵۱

بازتاب / پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها ۵۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی و با یاد همکار عزیزمان زنده‌یاد پرویز شهریاری
وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار*: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله: http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۰۲۱
۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
شمارگان: ۱۰۵۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

*تذکر مهم:
نشانی پیام‌نگار سابق مجله (Borhanm@roshdmag.ir) فقط تا چند روز آینده معتبر است. لطفاً مقالات و سایر پیام‌های خود را از این به بعد به این نشانی ارسال نمایید:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل برداشت محصول

کم‌کم به انتهای سال تحصیلی و امتحانات پایان سال نزدیک می‌شویم. فصل امتحانات برای دانش‌آموز و معلم، شبیه به فصل برداشت محصول برای کشاورزان است.

شما در طول یک سال تحصیلی با مطالعه و تمرکز در کلاس‌های درس و تمرین و ممارست برای رسیدن به محصولی پربار کوشیده‌اید و حالا وقت برداشت و لذت‌بردن از محصول است.

اکنون با خیال راحت خودتان را برای امتحانات آماده می‌کنید و در همین حال به ایام بعد از امتحان و تابستانی سراسر توأم با شادی و البته مطالعه و برنامه‌ریزی برای شروع سال تحصیلی بعد، فکر می‌کنید.

برای امتحانات که آماده می‌شوید، یادتان باشد، به نکات مهمی که یادداشت کرده‌اید، حتماً مراجعه کنید. به‌علاوه همهٔ تمرین‌های کتاب درسی را باید حل کرده باشید. مثال‌های حل شدهٔ کتاب درسی و مسئله‌هایی که در کلاس درس به کمک معلم حل کرده‌اید، همگی منابع اصلیِ برای طرح سؤال امتحانی محسوب می‌شوند و شما باید روی آن‌ها تسلط کافی داشته باشید. راستی امتحانات مستمر و پایان نیم‌سال اول را هم به این منابع اضافه کنید.

امیدواریم همگی در امتحانات موفق باشید و با دستی پر به استقبال تابستان بروید.

سردبیر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

این مسئله‌ها واقعی‌اند یا روزمره؟

چکیده

در کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول و دوم متوسطه مسائلی مطرح شده‌اند که شکل داستانی دارند. مؤلفان محترم مدعی هستند که این مسائل از دنیای واقعی‌اند. آیا این اتفاق افتاده است؟ یعنی مسائلی از دنیای واقعی مطرح و حل شده‌اند و حل آن‌ها گره‌ای را باز می‌کند؟ یا اینکه مؤلف قصد داشته روش‌های ریاضی را به مسئله و دانش‌آموز تحمیل کند؟

قاسم حسین قنبری*
دبیر ریاضی و مدرس
دانشگاه فرهنگیان سمنان

کلیدواژه‌ها: مسئله‌های واقعی، دنیای واقعی، ریاضی پایه‌های اول و دوم دبیرستان

مقدمه

یکی از اهداف تغییر کتاب‌های درسی ریاضی، کاربردی کردن ریاضی، حل مسائل زندگی روزمره و حل مسائل دنیای واقعی است. در مقدمهٔ کتاب ریاضی سال اول دبیرستان داریم: «یکی از اهداف این کتاب آن است که شما بتوانید ریاضی را به شکل معنادار درک کنید و توانایی به‌کارگیری آن را در حل مسائل روزمره پیدا کنید.» در مقدمهٔ کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان هم‌چنین می‌خوانیم: «تأکید بر ارتباط بین ریاضیات و علوم دیگر و دنیای واقعی». متأسفانه معلم‌هایی که این کتاب‌ها را تدریس می‌کنند، از جمله خود نگارنده، خاطرهٔ خوشی از این مسئله‌ها ندارند. چند مسئلهٔ این کتاب‌ها را بررسی می‌کنیم تا موضوع بهتر مشخص شود. ضمناً صورت هر مسئله بدون ویرایش از کتاب‌ها نقل می‌شود.

۱. روز نیکوکاری

مسئلهٔ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب ریاضی ۱ از این قرار است: **«دانش‌آموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند در روز نیکوکاری، بازار خیریه به نفع نیازمندان برگزار کنند. قرار شد در این بازار یک‌روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آن‌ها یک بستهٔ صدتایی لیوان یک‌بار مصرف به مبلغ هزار تومان خریدند. هزینهٔ خود شربت، بدون در نظرگیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان ۹۰ تومان شد. یکی از دانش‌آموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را ۱۲۵ تومان بفروشیم تا سود کافی ببریم. دانش‌آموز دیگری گفت: اگر به اندازهٔ کافی شربت نفروشیم ممکن ضرر کنیم. دانش‌آموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.»**

در این مسئله چند مشکل وجود دارد:

- آیا می‌توان شربت‌ها را به هر قیمتی فروخت؟
- وقتی که لیوان‌ها و پودر شربت، خریداری شده، دیگر بحث سود و زیان به چه کار می‌آید؟
- به فرض که پودر شربت اضافه را به فروشنده پس دهیم. آیا همیشه چنین کاری امکان دارد و آیا این عوض کردن صورت مسئله نیست؟

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

- چه پودر شربتی در بازار وجود دارد که می‌توان مقداری از آن را مصرف کرد و باقی‌ماندهٔ آن را به فروشنده پس داد؟ برای انجام چنین کاری باید شربت‌ها را به‌صورت لیوانی درست کنیم و نه یکجا. برای این کار لازم است که برای هر لیوان یک قاشق تهیه کنیم که آن هم هزینه‌ای خواهد داشت.
- برای تهیهٔ شربت به آب نیاز داریم (امروزه آب معدنی مصرف می‌شود) هزینهٔ آب کجا محاسبه می‌شود؟
- اگر فرض کنیم که همهٔ شربت‌ها فروخته شود و هزینهٔ آب را در نظر نگیریم (در برخی از شهرها باید فرض کنیم که با آب غیربهداشتی شربت درست کنیم، چون آب لوله‌کشی قابل شرب نیست) کل سود این بازار خیریه ۲۵۰۰ تومان می‌شود. آیا این مبلغ ارزش آن را دارد که شربت غیربهداشتی به خورد مردم دهیم؟!

از این بحث‌ها نتیجه می‌گیریم که باید قیمت هر لیوان شربت را افزایش دهیم که این خود کاری خلاف شرع و عرف است، دیگر اینکه این مسئله با این شکل، اصلاً یک مسئلهٔ ریاضی نیست. به‌عبارت دیگر، در دنیای واقعی جایی برای این مسئله وجود ندارد.

۲. تیرک پرچم

«امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت: شما که ریاضی را خوب یاد گرفته‌اید، توانایی‌های بسیاری در زندگی به‌دست آورده‌اید. شما کارهایی می‌توانید انجام دهید که دیگران نمی‌توانند. مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی‌دانیم ارتفاع تیرک پرچم چه‌قدر است؟ من گفتم که دانش‌آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند و می‌توانند برای شما طول این تیرک را به‌دست آورند.»

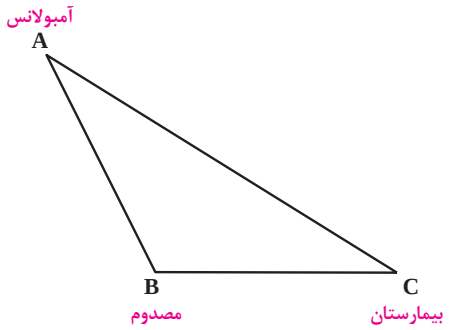
این مقدمه‌ای برای ورود به بحث مثلثات در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان است. طناب تیرک پرچم مدرسهٔ ما که امکان پوسیدن ندارد، چرا که به‌جای طناب از سیم استفاده شده است. ولی اگر مدیر مدرسه بخواهد آن‌را عوض کند، مسئله را به این شکل هیچ‌گاه حل نخواهد کرد. او بدون شک تیرک پرچم را با ارتفاع دیوار مدرسه مقایسه می‌کند، سپس با چند متر اضافه کردن به آن و با کمی تقریب، طناب را تهیه می‌کند. ولی اگر قصد داشت مثلاً ارتفاع منارهٔ مسجد جامع سمنان را اندازه بگیرد، شاید به این روش متوسل می‌شد.

۳. عملیات نجات

کاربردهایی از مثلثات

فاطمه به مسائل امداد و نجات علاقه‌مند است. دلیل علاقه‌مندی وی وقوع اتفاقاتی چون زلزله در کشور ما است در نتیجه او سعی دارد مسائل این چنین را بهتر و بیشتر بشناسد. در یکی از این مسائل که در فیلمی آن را دیده بود حادثه‌ای در نقطهٔ A مانند شکل زیر روی داد.

(این حادثه را می‌توانید زلزله، تصادف، سیل، ... تصور کنید.) آمبولانس در فاصلهٔ ۱ کیلومتری از حادثهٔ A در نقطهٔ C قرار دارد. زاویهٔ A، B و C را نیز رانندهٔ آمبولانس حدس زد او فاصلهٔ خود تا بیمارستان را نیز می‌داند. رانندهٔ آمبولانس می‌خواهد بداند که آیا به اندازهٔ کافی بنزین برای رفتن از A به B دارد یا نه؟



شکل ۱

همان‌طور که در تصویر کتاب معلوم است، مؤلف قصد دارد بحث را با داستانی شروع کند که برای دانش‌آموز جذاب باشد و سپس آن‌ها را همراهی کند تا مسئله را حل کنند. اما خود داستان برای دانش‌آموز و هر خوانندهٔ دیگری، به یک مسئله تبدیل می‌شود. همان‌طور که در متن ذکر شده است، «زاویه‌های A، B و C را رانندهٔ آمبولانس حدس زد». پرواضح است که فقط صورت مسئله عوض شده و مسئله به مسئلهٔ سخت‌تری تبدیل شده است. چرا که وقتی راننده در نقطهٔ A قرار دارد، چگونه سه زاویهٔ یک مثلث را حدس می‌زند؟ حدس زدن طول یک پاره‌خط از اندازهٔ زاویه به مراتب راحت‌تر است. همچنین، از کجا معلوم که همهٔ خیابان‌ها روی خط راست باشند و با توجه به شرایط و اورژانسی بودن حادثه، مگر راننده غیر از حرکت چاره دیگری هم دارد؟ به‌عبارت دیگر نمی‌توان گفت این مسئله در دنیای واقعی اتفاق افتاده است. چرا که اگر در دنیای واقعی رانندهٔ آمبولانس برای طی کردن یک فاصلهٔ حداکثر یک کیلومتری، این

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

همــه وقت صرف کند، به احتمال زیــاد برای مصدومان اتفاقات بدی می‌افتد که جبران‌ناپذیر است.

۴. نردبان و کسینوس

نردبان وسیله‌ای است که از آن برای رفتن به ارتفاع اســتفاده می‌شــود. بنابراین اندازه‌گیری آن کار سختی نیست. اما این مسئله در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان به روش بسیار جالبی مطرح شــده است! آیا این مسئله واقعی است؟

«فرض کنید نردبانی را برای رفتن به پشت‌بام به دیوار تکیه داده‌ایم. شــما می‌توانید فاصلهٔ پای نردبــان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حســاب کنید. همچنین زاویه‌ای که نردبان با ســطح زمین می‌سازد را هم می‌توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می‌توانید طول نردبان را حساب کنید؟»

خلاصهٔ مســئله این اســت که نردبانی را بــه دیوار تکیــه داده‌ایم و می‌خواهیم طــول آن‌را اندازه بگیریم. از یک دانش‌آموز پنجم دبســتان برای حل مســئله کمک می‌خواهیم. وی روش‌های زیر را ارائه داده است:

۱. بــه بــالای نردبان می‌رویم، یک ســر متر نواری را آنجا می‌چســبانیم و سر دیگر متر را در پایین نردبان قرار می‌دهیم و طول را اندازه می‌گیریم.

۲. اگر یک خط‌کش بیست سانتی‌متری داشته باشیم، روی نردبان می‌رویم و قطعه‌قطعه آن‌را اندازه می‌گیریم.

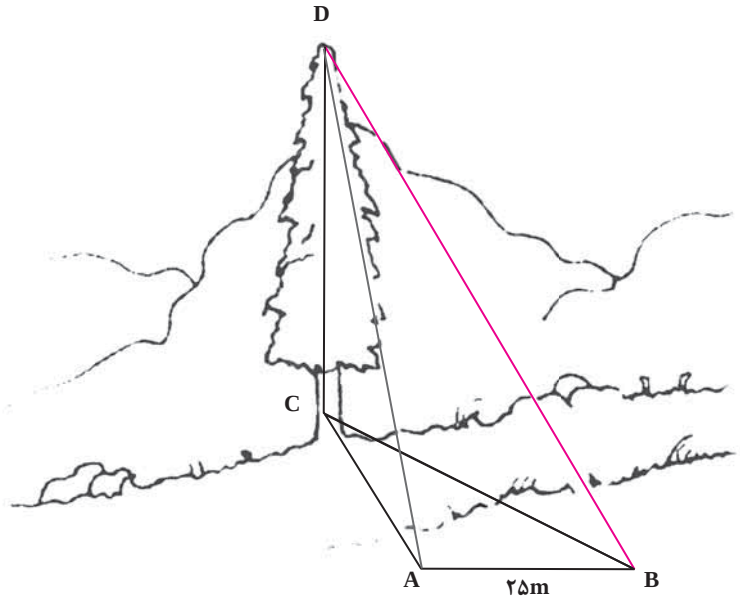
۳. یکــی از پله‌ها را اندازه می‌گیریم و در تعداد آن‌ها ضرب می‌کنیم.

آزمایش امر بسیار ساده است. فقط کافی است با یک دانش‌آموز پنجم دبستان و یا کوچک‌تر صحبت شود. تجربهٔ تدریس نشــان داده اســت که اگر بخواهیــم به این روش مسئله را در کلاس بیان و حل کنیم، صورت مسئله تغییر می‌کنــد. چرا که دانش‌آموزان ایــن روش را نمی‌پذیرند و نمی‌توان درستی و لزوم این روش را برای آن‌ها توجیه کرد.

بلندترین درخت دنیا

در مسائل فصل پنجم کتاب، مسئله‌ای ارائه شده که در آن **رضا** قصد اندازه‌گیری یک درخت را دارد. شکل ۲، شکل مربوط به این مسئله است.

۹. رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه اســت اندازه بگیرد. او روبه‌روی درخت در نقطهٔ A ایستاده است. زاویهٔ دید رضا با نوک درخت حدوداً 60° است. او به اندازهٔ 125° برمی‌گردد و بعد از طی ۲۵ متر به نقطهٔ B می‌رسد. زاویهٔ بین مسیر AB و خط BC (C پای درخت است) 45° می‌باشد ارتفاع درخت را حساب کنید.



شکل ۲

بعد از حل مســئله، ارتفاع درخت تقریباً ۱۷۶ متر! به‌دســت می‌آید. تا اینجا اتفاق خاصی نیفتاده است. اما یک ســؤال مهم: «آیا چنین درختی با این ارتفاع وجود دارد؟» با جست‌وجو در شبکهٔ اینترنت به مدد «گوگل» درمی‌یابیم که بلندترین درخت جهان ۱۱۵/۵ متر ارتفاع دارد و در پــارک ملی ردود در شــمال کالیفرنیا روییده اســت. متأسفانه نمی‌توانیم از این درخت عکسی در این صفحه قرار دهیم، ولی تصویر آن، هیچ تناسبی با درخت تصویر شده در کتاب ندارد.

اما ســؤال مهم‌تر اینکه منظور از طرح این مسئله با این جواب عجیب و غریب چیســت؟ چــه اجباری بوده اســت که ارتفاع یک درخت را حســاب کنیم؟ مؤلف در مقدمهٔ کتاب بر «استفاده از تجربیات عینی دانش‌آموز» تأکید کرده اســت. آیــا دانش‌آموزی هســت که در این زمینه، تجربهٔ عینی داشته باشد؟

پیشنهاد

- مؤلفان کتاب‌های درســی در صورت امکان این کتاب‌هــا را در یک مدرســهٔ معمولــی تدریس بفرمایند تا با شــرایط واقعی مدارس ایران آشــنا شوند.
- مؤلفان محترم، نخست روش‌ها و جواب سؤال‌ها را در دنیای واقعی بررســی کننــد تا ببینند آیا چنین نظریه‌هایی امکان‌پذیر هستند یا خیر!
- قبــل از اینکه کتاب‌ها به شــکل وســیع چاپ شوند، آن‌ها را به شکل آزمایشی در یک یا چند شهر تدریس کنند تا مشکلاتشان رفع شود.

منابع

۱. ریاضیات۱، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۸.

۲. ریاضیات۲، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۸.

* ghanbari52@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

روشی آسان و سریع برای تعیین علامت توابع

سیمین افروزان*
دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

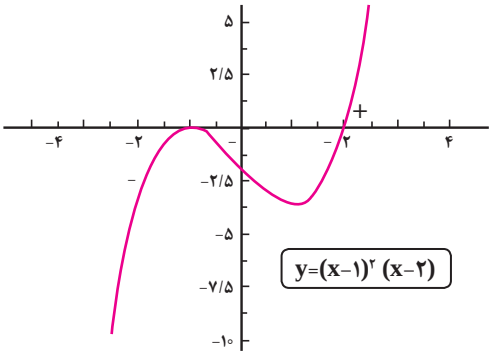
اشاره

مطالب ریاضی اجزای مرتبطی هستند که با تفکر در برخی از آن‌ها می‌توان به دیگری رسید. مطالبی که خواهید خواند نشان می‌دهد که چگونه با تعمق در مفهوم ریشه‌ها و حد در بی‌نهایت می‌توان به روشی آسان و مستدل برای تعیین علامت توابع دست یافت.

کلیدواژه‌ها: تعیین علامت، ریشهٔ ساده، ریشهٔ مضاعف، حد تابع در بی‌نهایت

تعیین علامت یک تابع

برای اینکه مشخص کنیم یک تابع به ازای چه مقدارهایی از متغیر، مثبت و به ازای چه مقدارهایی منفی است، آن را تعیین علامت می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، مشخص می‌کنیم که به ازای چه مقدارهایی از متغیر (x)، منحنی تابع بالای محور طول‌ها و به ازای چه مقدارهایی پایین محور مذکور است. به این منظور y یا ضابطهٔ تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها و یا طول نقاط تقاطع نمودار تابع با محور طول‌ها را به‌دست آوریم.



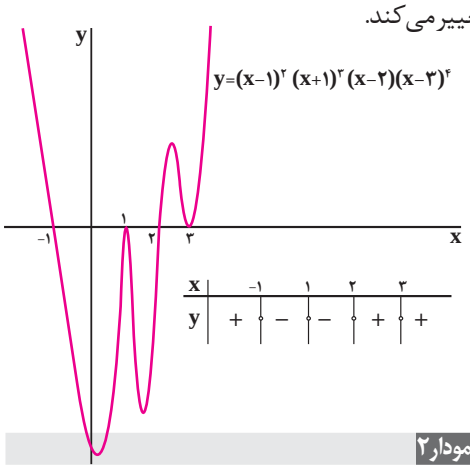
نمودار ۱

انواع ریشه‌ها

ریشهٔ ساده: اگر منحنی تابع، محور طول‌ها را قطع کند و قبل و بعد از نقطه تقاطع تغییر علامت دهد، طول نقطه برخورد را «ریشهٔ ساده» گویند. در صورتی که عبارت تابع را به حاصل‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنیم، ریشه‌های ساده از عامل‌هایی به‌دست می‌آیند که توان فرد دارند.

ریشهٔ مضاعف: «ریشهٔ مضاعف» طول نقطه‌ای است که منحنی تابع در آن نقطه بر محور طول‌ها مماس باشد و قبل و بعد از آن نقطه تابع تغییر علامت ندهد. در صورتی که عبارت تابع را به‌صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسیم، ریشه‌های مضاعف از عامل‌هایی به‌دست می‌آیند که توان زوج دارند. برای مثال، در تابع $y=(x+1)^2(x-2)$، $x=-1$ ریشهٔ مضاعف و $x=2$ ریشهٔ ساده است.

بنابراین در تعیین علامت توابع، ریشه‌های ساده نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌کنید، تنها در ریشه‌های ساده علامت تابع تغییر می‌کند.



نمودار ۲

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

لازم به ذکر است که اگر ریشه‌ای به‌دست نیامد، به این معنی است که علامت تابع همواره مثبت (نمودار تابع بالای محور طول‌ها) و یا همواره منفی (نمودار تابع پایین محور طول‌ها) است. لذا برای تعیین علامت مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. ریشه‌های ساده را به‌دست می‌آوریم و تنها آن ریشه‌ها را در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

۲. چون ریشه‌های ساده دامنهٔ تابع را به چند ناحیهٔ مختلف‌العلامه افراز می‌کنند، کافی است علامت تابع را در یکی از این نواحی تعیین کنیم.

۳. به هر ریشه (ریشهٔ ساده) که رسیدیم، علامت را تغییر می‌دهیم.

برای مشخص کردن علامت اولین خانهٔ سمت راست در جدول تعیین علامت، لازم است رفتار تابع را در بی‌نهایت بررسی کنیم.[1]

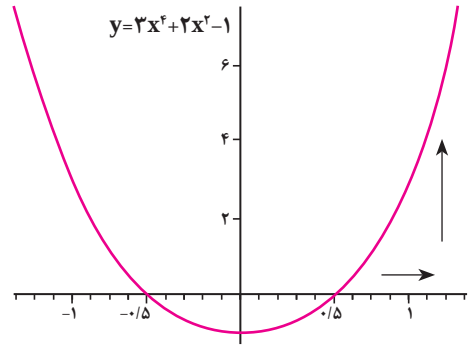
حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت

وقتی از حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت سخن می‌گوییم، می‌خواهیم رفتار تابع را وقتی متغیر (x) از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، بررسی کنیم. در چندجمله‌ای‌ها کافی است بی‌نهایت را تنها در جملهٔ پیشرو[2] که سریع‌ترین افزایش را دارد، جایگزین کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4+2x^2-1)=\lim_{x\to+\infty}x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^4\times\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3x^4=3(+\infty)^4=+\infty$$

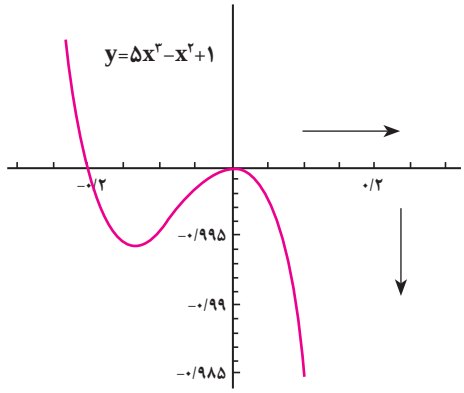


نمودار ۳

پس جایگزین کردن بی‌نهایت در جملهٔ پیشرو، برای به‌دست آوردن حد تابع در بی‌نهایت کافی است.

$$\lim_{x\to+\infty}(-5x^3-x^2+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-5x^3=-5(+\infty)^3=-\infty$$

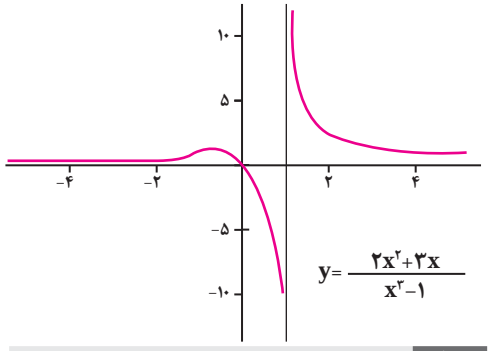


نمودار ۴

و در تابع‌های گویا نیز جمله‌های پیشرو را از صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. در این مثال درجهٔ جملهٔ پیشرو مخرج از صورت بیشتر است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{+\infty}=0$$



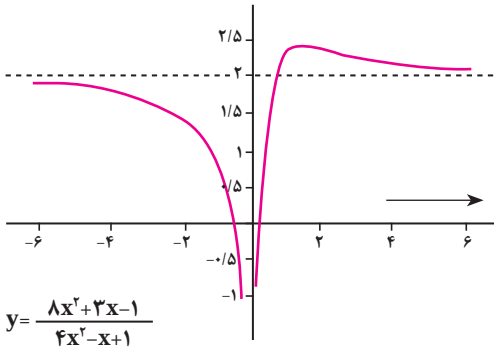
نمودار ۵

در مثال فوق مقدار تابع از بالا (با مقادیر مثبت) به صفر نزدیک می‌شود. پس در مثبت بی‌نهایت، نمودار تابع بالای محور طول‌ها قرار دارد.

مثال ۲. در این مثال، درجهٔ جملهٔ پیشرو صورت و مخرج مساوی هستند.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+3x-1}{4x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2}{4x^2}=2$$

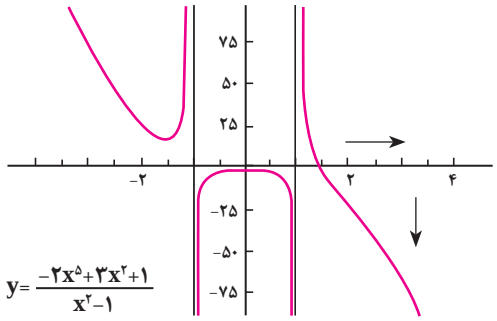
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



نمودار ۶

مثال ۳. در این مثال درجهٔ جملهٔ پیشرو صورت از مخرج بیشتر است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^5+3x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^5}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-2x^3=-2(+\infty)^3=-\infty$$



نمودار ۷

حد در بی‌نهایت و جدول تعیین علامت

«علامت تابع بعد از بزرگ‌ترین ریشهٔ ساده، علامت حد تابع در مثبت بی‌نهایت است.» این مطلب بدیهی در نمودارهای مثال‌های قبل به‌خوبی مشهود است. لذا با توجه به رابطه‌ای که بین علامت این حد و ضرایب جملات پیشرو وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت: «اولین خانهٔ سمت راست مربوط به جدول تعیین علامت، در چندجمله‌ای‌ها موافق علامت ضریب جملهٔ پیشرو و در عبارت‌های گویا موافق علامت ضریب حاصل از ضرایب جمله‌های پیشرو در صورت و مخرج است.»[۳]

برای مثال، در تعیین علامت $y=(x-1)^3(x+3)$، اولین خانهٔ سمت راست مثبت است؛ زیرا ضریب جملهٔ پیشرو (x^4) مثبت است.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

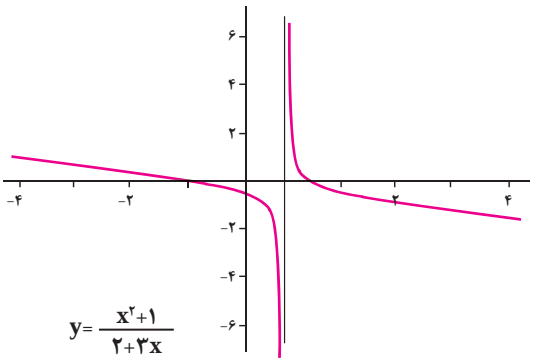
و در تعیین علامت $y=-(x+1)^2(x-2)$، اولین خانهٔ سمت راست منفی است؛ زیرا ضریب جمله پیشرو $(-x^3)$ منفی است.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		+	۰	−	

لازم به ذکر است که در این مثال، یک ریشهٔ مضاعف هم داریم. با اینکه این ریشه‌ها تأثیری در تعیین علامت ندارند، ولی در حل برخی از مسائل وجود آن‌ها را نباید نادیده گرفت. برای مثال، جواب نامعادلهٔ $-(x+1)^2(x-2)\le 0$ عبارت است از: $\{-1\}\cup[2,+\infty)$

در تعیین علامت $y=\frac{x^2-1}{-3x+2}$، اولین خانهٔ سمت راست با توجه به علامت ضریب برآیند جملات پیشرو صورت و مخرج یعنی $-\frac{1}{3}$، منفی است.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
y		+	۰	−	تعریف نشده	+	۰	−	



نمودار ۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

و در تابع $y=\frac{-x^2}{1+x^2}$، صفر ریشهٔ مضاعف است. علامت تابع با توجه به علامت $\frac{-1}{1}=-1$ همواره منفی است و تنها در صفر، مقدار تابع صفر است.

x	$-\infty$		$+\infty$
y		$-$	

نکتهٔ بسیار مهم

در صورتی که در یک تابع گویا صورت و مخرج، ریشه یا ریشه‌های یکسان داشته باشند، باید عامل یا عامل‌های مشترک را ساده و سپس تعیین علامت کرد.

برای مثال، تابع $y=\frac{x^2-9}{3-x}$ با شرط $x\neq 3$ (تابع در $x=3$ تعریف نشده است.)، به $y=-(x+3)$ تبدیل می‌شود. بنابراین:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	

لازم به ذکر است که تعیین علامت را می‌توان با محاسبهٔ حد در منفی بی‌نهایت از سمت چپ در جدول شروع کرد. اما این کار مستلزم وقت و دقت بیشتری است، زیرا در منفی بی‌نهایت، تنها ضریب یا ضرایب جملات پیشرو نیستند که علامت حد را معین می‌کنند.

پی‌نوشت

۱. یک راه برای انجام مرحلهٔ دوم این است که مانند تعیین علامت تابع‌های مثلثاتی، عدد دلخواهی از دامنهٔ تابع (غیر از ریشه‌ها) را در ضابطهٔ تابع قرار دهیم. علامت عدد حاصل، علامت تابع را در ناحیه‌ای که آن عدد از آن انتخاب شده است، مشخص می‌کند.

۲. در چندجمله‌ای $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$، جمله‌ای که بیشترین توان را دارد، a_nx^n است که به آن جملهٔ پیشرو گویند.

۳. دانش‌آموزانی که با حد در بی‌نهایت آشنایی ندارند نیز می‌توانند از این نتیجه برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و عبارات گویا استفاده کنند.

* afrouzan@yahoo.com

ایستگاه اول:
بازی و ریاضی!

هوشنگ شرقی

معماهای عدد سال نو

به روال سال‌های گذشته، امسال هم به یمن فرارسیدن بهار دل‌انگیز و حلول سال نو خورشیدی (۱۳۹۴) معماهایی دربارهٔ عدد سال نو داریم. بعد از چالش با این معماها می‌توانید برای مطابقت، به بخش پاسخ‌ها مراجعه کنید. پس این شما و این هم هفت معمای برگزیدهٔ عدد سال نو:

۱. می‌توان نوشت: $1394=2\times17\times41$. لااقل چند سال دیگر باید منتظر بمانیم تا عدد سال، بار دیگر به‌صورت حاصل‌ضرب سه عدد اول متمایز درآید؟

۲. آیا می‌توانید دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف رسم کنید که طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه آن‌ها عددهایی طبیعی و طول وتر آن‌ها $\sqrt{1394}$ باشد؟

۳. آیا می‌توانید مکعب مستطیلی رسم کنید که ابعاد آن همگی اعداد طبیعی و طول قطر آن $\sqrt{1394}$ باشد؟

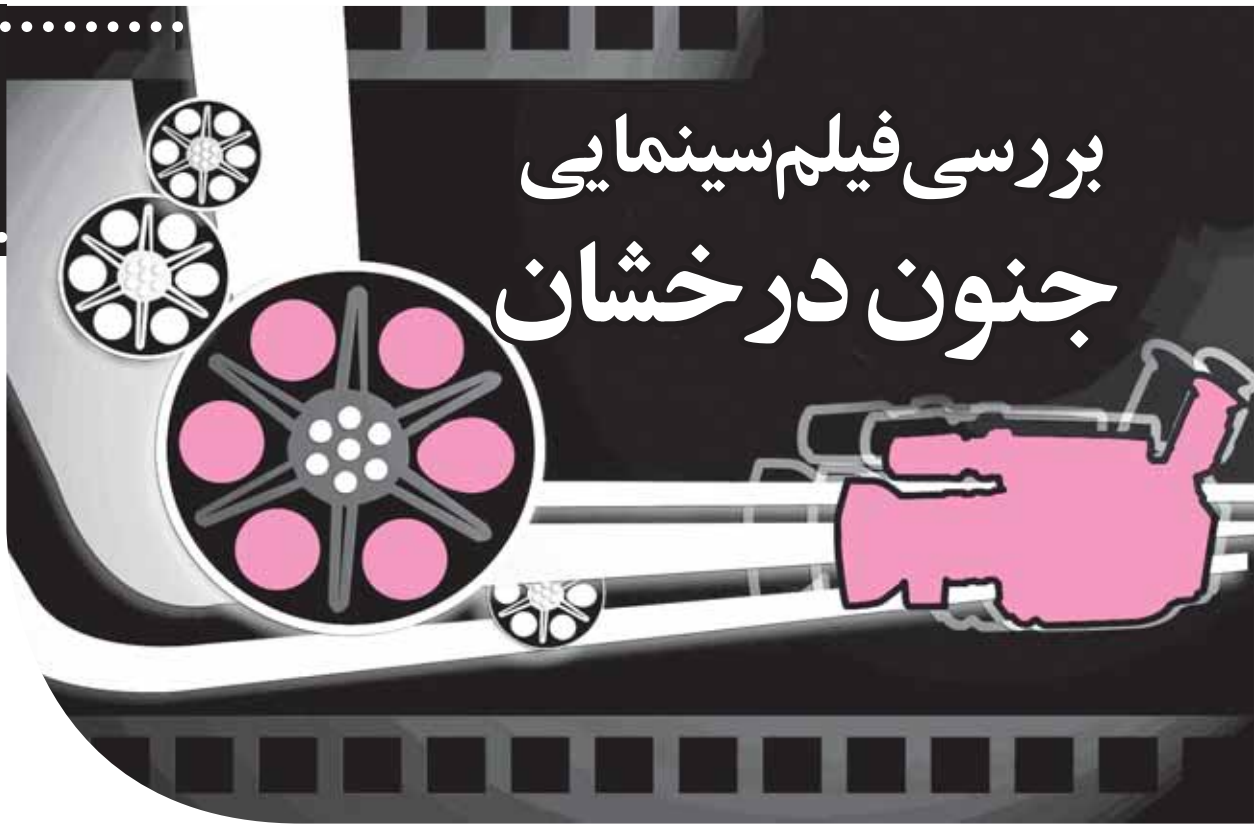
۴. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع دو عدد اول بنویسید؟

۵. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع سه عدد اول متمایز بنویسید؟ یا به‌صورت مجموع چهار عدد اول متمایز؟

۶. حداکثر چند عدد اول می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟

۷. حداکثر چند عدد طبیعی متوالی می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟

احسان یارمحمدی*



بررسی فیلم سینمایی جنون درخشان

- **اسم فیلم:** جنون درخشان[1]
- **کارگردان: مارک سامِلز**[2]
- **تهیه‌کننده: رَندال مَک لوری**[3]
- **نویسندگان:** مارک سامِلز و رَندال مَک لوری
- **زبان:** انگلیسی

فیلم مستند «جنون درخشان» گوشه‌ای از زندگی پرفراز و نشیب ریاضی‌دان برجسته و معاصر آمریکایی **جان فوربس نَش**[4] را در قالب گفت‌وگوهایی با وی و هم‌کلاسی‌های دورهٔ تحصیلش در دانشگاه، همکاران سابقش در دانشگاه، روان‌شناس و روان پزشکش، و همسر، پسر و خواهرش به تصویر می‌کشد. از آنجا که ممکن است دانش‌آموزان برای درک بهتر و بیشتر این فیلم نیازمند آگاهی‌هایی در مورد جان نَش و زندگی او باشند، نخست قسمتی از زندگی‌نامهٔ او را که در این فیلم نیز اکیداً مورد توجه قرار گرفته است نقل می‌کنیم.

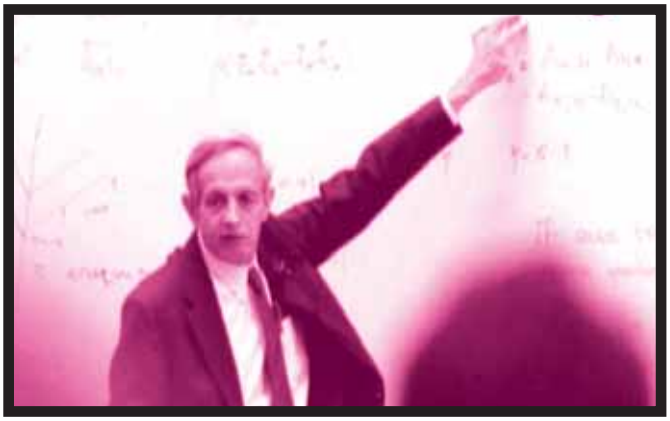
جان فوربس نَش در سیزدهم ژوئن سال ۱۹۲۸ در «بُلوفیلدِ» ویرجینیای غربی در ایالات متحدهٔ آمریکا چشم به جهان گشود. او موفق به اخذ درجهٔ دکترای ریاضیات از «دانشگاه پرینستون» شد. هر چند که زمینهٔ اصلی کار او در ریاضیات شاخه‌های نظریهٔ بازی‌ها، هندسهٔ دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل جزئی بود، اما به‌واسطهٔ ارائهٔ نظریاتی ارزشمند در اقتصاد بازار، هوش مصنوعی، علم سیاست، نظامی‌گری، حسابداری و زیست‌شناسی، همواره از او به‌عنوان دانشمندی برجسته یاد می‌شود. جان نَش در سال ۱۹۹۴ در کنار **رِینهارد سِلتِن**[5] و **جان هارسِنی**[6] موفق به اخذ جایزهٔ نوبل اقتصاد شد.

پدر جان نَش مهندس برق و مادرش تا قبل از ازدواج با پدر او، معلم مدرسه بود. والدین، پدربزرگ و مادربزرگ او همواره برای جان نَش کتاب‌ها و دایرةالمعارف‌های گوناگونی تهیه می‌کردند تا او به مطالعهٔ آن‌ها بپردازد و مطالب زیاد و متنوعی را فرابگیرد.

جان نَش در جوانی به بیماری روان‌گسیختگی از نوع پارانوئید مبتلا شد. وی صداهایی غیرواقعی را می‌شنید که او را از خطراتی

موهوم حـذر می‌دادند و وادارش می‌کردنـد کارهایـی برخـلاف خواسته‌اش انجام بدهد. رفته‌رفته بر شـدت توهمات او افزوده شد و زندگی‌اش در آستانهٔ فروپاشی قرار گرفت. سمت استادی خود را در دانشگاه از دست داد و بالاخره در بیمارسـتان بستری شد. ولی در این دوران همسـرش کنار او بـود و به وی بسـیار کمک کرد. پزشـکان بیمـاری‌اش را نوعی از روان‌گسـیختگی حاد تشـخیص دادنـد که بـا افسـردگی خفیف و کاهـش اعتمادبه‌نفـس همراه شده بود. اما او با تمام توان سعی کرد محتـوای ذهن بیمار خود را ذره‌ذره اصلاح کنـد. این فرایند جبرانـی، چیزی نزدیـک به ۳۰ سـال از بهترین سال‌های عمر او را گرفت. اما امید و اراده‌ای که او از خود نشـان داد، کار خودش را کرد و ریاضی‌دان نابغه بالاخره از بند بیماری نجات پیدا کرد.

خـودش این‌گونـه بیـان می‌کنـد: «به مرور زمان سـعی کـردم بخش بیمار ذهن خودم را شناسایی و پاک کنم. سعی کردم رفته‌رفته ذهنیت عالمانه‌ای را که از قبل داشتم، بازسازی کنم. این کار خیلی طول کشـید و خیلی چیزهـا را از من گرفـت. اما فکر می‌کنم الان دیگـر بخش اعظم آن هذیان‌هـا و توهمـات را دور ریخته‌ام. اینکه در این سن و سال هنوز می‌توانـم یک ریاضی‌دان و نظریه‌پـرداز فعال باشـم، به این معنی اسـت که من در مبارزه با بیماری‌ام موفق شده‌ام.»



جـان نَش در تکامـل نظریهٔ بازی‌ها نقش بسیار مؤثری داشت و به‌خاطـر تلاش‌هایـش در این زمینـه، در سـال ۱۹۹۴ برنـدهٔ جایزهٔ نوبل اقتصاد شد. او در سال ۱۹۹۹ از دانشـگاه کارنِگی ملون دکترای افتخـاری علوم و فناوری دریافـت کرد. همچنین در سـال ۲۰۰۳ از دانشـگاه فدریکوی دوم شهر ناپلِ ایتالیا دکترای افتخاری اقتصـاد و در سـال ۲۰۰۷، از دانشگاه آنتورپ در کشور بلژیک، دکترای افتخاری دیگری در رشتهٔ اقتصاد گرفت. در حال حاضر، جان نَش یکی از معروف‌ترین استادان ریاضیات در دانشـگاه پرینستون ایالات متحدهٔ آمریکاست.

* ehsan.yarmohamadi @yahoo.com

پی‌نوشت‌ها

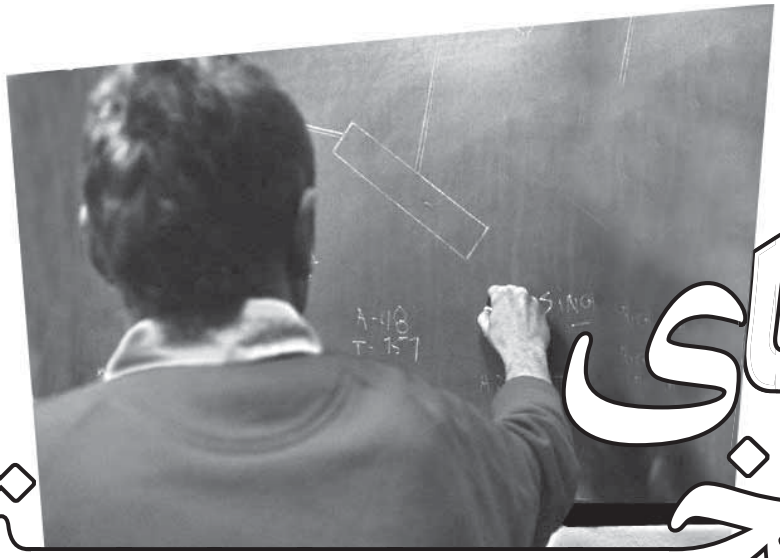
۱. فیلم مستند جنون درخشان با نام جنون معقول از شبکهٔ چهار سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است. علاقه‌مندان بـه ایـن مجموعـه می‌توانند آن را در بسـته‌ای شـامل یک عدد «دی‌وی‌دی» از شـرکت صوتـی و تصویری سـروش به نشانی‌های زیر دریافت کنند.

- نشانی پسـتی: تهران، خیابان ولی‌عصر، روبه‌روی پارک ملت، برج سایه، فروشـگاه صوتی و تصویری سروش.
- وبگاه: http://www.soroush-media.tv
- پیام‌نگار: info@soroush-media.tv
- شمارهٔ تلفن: ۲۴۹۶۰-۰۲۱

2. Mark Samels
3. Randall Mac Lowry
4. John Forbes Nash
5. Reinhard Selten
6. John Harsanyi

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

محرم نژاد ایردموسی*



پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله که نشانی آن در صفحه فهرست مجله موجود است به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

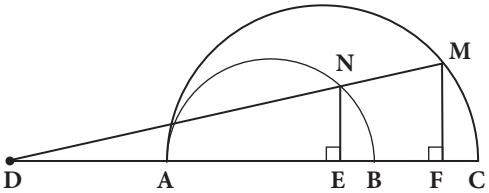
بخش اول: مسئله‌ها

۱۱۱. دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. پاره‌خط‌های مساوی BE و CF را روی AC جدا می‌سازیم و عمودهای EN و FM را در این نقاط بر AC اخراج می‌کنیم تا نیم‌دایره‌ها را در N و M قطع کنند. اگر امتدادهای AC و MN یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، ثابت کنید:

الف) $AD^2=AE.AF$

ب) $NE.MF=AD.BE$

(طراح مسئله: هوشنگ شرقی، دبیر ریاضی و عضو هیئت تحریریه)



شکل ۱

۱۱۲. یک مربع را داخل یک مربع دیگر انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت‌های دو ناحیه با مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ دیگر برابر است (طراح مسئله: نفیسه آغویی، دانش‌آموز مرکز فرزانگان چهاردانگه).

۱۱۳. چهار نفر ماهی‌گیر روی هم ۱۱ ماهی صید کردند، به‌طوری که هر کدام حداقل یک ماهی صید کردند. درستی جملات زیر را بررسی کنید:

۱. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۲ ماهی صید کرده است.

۲. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۳ ماهی صید کرده است.

۳. حداقل یک ماهی‌گیر هست که کمتر از ۳ ماهی صید کرده است.

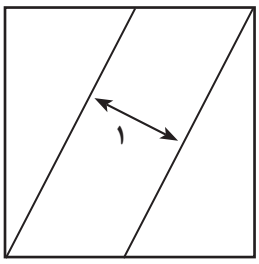
۴. حداقل یک ماهی‌گیر هست که بیشتر از ۳

ماهی صید کرده است.

۵. حداقل ۲ ماهی‌گیر هستند که بیشتر از ۱ ماهی صید کرده‌اند.

۱۱۴. در یک چایخانه سنتی چهار نوع کیک تهیه می‌شود. پنج نفر از دوستانم دیروز به آنجا رفتند و هر کدام دو کیک متفاوت برای خود سفارش دادند. مبالغی که آن‌ها پرداخت کردند عبارت بود از: ۶، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ هزار تومان. امروز من به آنجا خواهم رفت و از هر نوع کیک یک عدد سفارش خواهم داد. چه‌قدر باید بپردازم؟

۱۱۵. مطابق شکل مربعی را با کشیدن دو خط موازی که فاصله‌شان یک متر است، به سه ناحیه با مساحت یکسان تقسیم کرده‌ایم. مساحت مربع را بیابید.



شکل ۲

۱۱۶. عمل * روی اعداد صحیح به‌گونه‌ای تعریف شده است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد. همچنین، می‌دانیم برای هر $a\in Z$، $a*0=a$ و برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:

$a*(b+1)=(a*b)+(1-a)$.

الف) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $a*1=1$.

ب) حاصل $(-4)*(-3)$ چه عددی است؟

ج) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $4*a=4-3a$.

د) برای هر $a\in Z$ و هر $b\in N$ ثابت کنید: $a*b=a+b-ab$.

۱۱۷. تصاعدی حسابی با چهار جمله پیدا کنید که همهٔ جملاتش عدد اول باشند و بین تمام چنین تصاعدهایی کمترین مجموع جملات را داشته باشد.

۱۱۸. آقای **نوبخت** ۴ فرزند دارد که یکی از آن‌ها (علی)، سنی بین ۱۳ تا ۱۹ سال دارد و حاصل‌ضرب سن فرزندانش ۱۸۴۸ است. سن علی را پیدا کنید.

۱۱۹. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که ثلث و سه برابرش هم صحیح است؟

۱۲۰. هواپیمایی با سرعت ثابت ۸۱۰ کیلومتر بر ساعت از شهر x به شهر y می‌رود و این مسیر را ظرف ۴ ساعت طی می‌کند؛ اما هنگام بازگشت، این مسیر را در ۵ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت باد از سمت x به y را ثابت فرض کنیم، سرعت باد را به‌دست آورید.

بخش دوم:

راه‌حل‌ها

* راه‌حل مسائل ۵۱ تا ۵۶ از آقای **محمد طبیعی**، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی (واحد کارگر) و راه‌حل مسائل ۵۷ تا ۶۰ از آقای **مهدی قربانی**، دبیر ریاضی منطقهٔ ۹ تهران است.

۵۱. برای هر چهار ضلعی با طول اضلاع a، b، c و d و مساحت S ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4S$$

نامساوی برای کدام چهارضلعی‌ها به تساوی تبدیل خواهد شد؟

می‌دانیم: $S(ABC)=\frac{1}{2}ab\sin\angle ABC$

و $S(ADC)=\frac{1}{2}cd\sin\angle ADC$. در نتیجه:

$$S(ABCD)=\frac{1}{2}(ab\sin\angle ABC+cd\sin\angle ADC)$$

چون: $\sin\alpha\leq 1$، پس: $S(ABCD)\leq\frac{ab+cd}{2}$.

همچنین، می‌دانیم: $a^2+b^2\geq 2ab$ و $c^2+d^2\geq 2cd$. در نتیجه: $S(ABCD)\leq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$. با توجه به نامساوی‌هایی که استفاده کردیم. تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b$، $c=d$ و دو زاویهٔ B و D، قائمه هستند. در نتیجه چهارضلعی باید مربع باشد.

۵۲. عدد طبیعی M را جادویی می‌نامیم، هرگاه حاصل‌ضرب ارقام آن با مجموع ارقام آن برابر باشد.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

الف) ثابت کنید برای هر $n = ۱,۲,...,۱۰$، عددی n رقمی و جادویی وجود دارد.

ب) ثابت کنید بی‌شمار عدد طبیعی جادویی وجود دارد.

الف) اعداد زیر جواب قسمت (الف) هستند:

۱ ,۲۲, ۳۳۳, ۴۴۴۴, ... ,۹۹۹۹۹۹۹۹۹, ۴۴۱۱۱۱۱۱۱۱

ب) ثابت می‌کنیم، از روی هر عدد جادویی مانند x، می‌توان عددی جادویی و بزرگ‌تر از x ساخت. فرض کنید: $X = \overline{y_۱y_۲...y_n}$. عدد $M = \overline{y_۱y_۲...y_n ۱۱۱...۱۲}$ را که در آن تعداد رقم‌های ۱ برابر است با: $۲-y_۱+y_۲+...+y_n$، در نظر بگیرید. مجموع ارقام M برابر است با: $۲(y_۱+y_۲+...+y_n)$ و حاصل‌ضرب ارقام M نیز برابر است با: $۲y_۱y_۲...y_n$. چون x جادویی است، پس M نیز جادویی خواهد شد.

۵۳. مستطیلی با طول و عرض m و n به مربعات واحد افراز شده است و $m,n \in N$، به‌طوری که مجموع مساحت مربعات واحدی که مجاور اضلاع مستطیل هستند، برابر است با نصف مساحت مستطیل. مقادیر طبیعی m و n را بیابید.

باید داشته باشیم: $\frac{mn}{۲} = ۲m + ۲n - ۴$. در نتیجه: $(m-۴)(n-۴)=۸$. با فرض $m \geq n$، داریم: $m-۴=۴$ و $n-۴=۲$ یا $m-۴=۸$ و $n-۴=۱$. پس برای m و n چهار دسته جواب داریم: (۶,۸)، (۸,۶)، (۵,۱۲) و (۱۲,۵).

۵۴. فرض کنید x، y و z اندازه‌های زوایای یک مثلث برحسب درجه باشند. ثابت کنید:

الف) اگر $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ اعدادی گویا باشند، آن‌گاه x، y و z نیز گویا هستند.

ب) اگر تنها یکی از اعداد $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ گویا باشد، آن‌گاه x، y و z گنگ هستند.

الف) از تساوی $x+y+z=۱۸۰^\circ$ داریم: $y(\frac{x}{y}+۱+\frac{z}{y}) = ۱۸۰^\circ$. چون $\frac{x}{y}$ و $\frac{z}{y}$ گویا هستند، پس $\frac{x}{y}+۱+\frac{z}{y}$ نیز گویا و در نتیجه y نیز گویاست. به طریق مشابه، گویا بودن x و z را هم می‌توان ثابت کرد.

ب) فرض کنید $\frac{x}{y}$ گویا باشد. حال از برهان خلف، مسئله را اثبات می‌کنیم:

۱. اگر z گویا باشد، آن‌گاه $y+x=۱۸۰-z$ نیز گویا خواهد بود. در نتیجه از گویا بودن $\frac{x}{y}$، گویا بودن $\frac{x}{x+y}$ را نتیجه می‌گیریم. و چون: $x+y \in Q$، پس: $x \in Q$. بنابراین $y \in Q$ است که تناقض دارد.

۲. اگر $x \in Q$، آن‌گاه چون: $y = \frac{y}{x} \times x$، پس: $y \in Q$. و چون $x+y \in Q$، در نتیجه $z=۱۸۰-x-y \in Q$ که باز هم به تناقض می‌رسیم.

۳. اگر $y \in Q$، به‌طور مشابه ثابت می‌شود x و z هم گویا هستند که تناقض است. در نتیجه هیچ‌کدام از اعداد x، y و z گویا نیستند.

۵۵. در یک مدرسه ۱۰ کلاس وجود دارد. هر دانش‌آموز از یک کلاس دقیقاً با یک دانش‌آموز از هر یک از ۹ کلاس دیگر آشناست. ثابت کنید تعداد دانش‌آموزان کلاس‌ها یکسان است.

فرض کنید کلاس $C_۱$ کم‌ترین تعداد دانش‌آموز را داشته باشد. تعداد زوج‌های آشنایی را می‌شماریم که یکی از آن‌ها در کلاس $C_۱$ و دیگری خارج از کلاس $C_۱$ باشد. چون هر عضو $C_۱$ با ۹ نفر از دیگر کلاس‌ها آشناست، پس تعداد زوج‌های مذکور برابر است با: $۹n_۱$ که در آن، $n_۱$ تعداد دانش‌آموزان $C_۱$ است. از طرف دیگر، هر دانش‌آموز از کلاس‌های $C_۲$ تا $C_{۱۰}$، دقیقاً با یک دانش‌آموز از کلاس $C_۱$ آشناست. پس مجموع تعداد دانش‌آموزان $C_۲$ تا $C_{۱۰}$ برابر است با $۹n_۱$. اگر n_i نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان کلاس C_i باشد، داریم: $۹n_۱=n_۲+n_۳+...+n_{۱۰}$ و $n_۱ \leq n_j$ $(۲ \leq j \leq ۱۰)$. در نتیجه باید: $n_۱=n_۲=...=n_{۱۰}$.

۵۶. مستطیل L را می‌توان به ۲۰۰ مربع یکسان افراز کرد. همچنین می‌توان L را به ۲۸۸ مربع یکسان افراز کرد. ثابت کنید L را می‌توان به ۳۹۲ مربع یکسان افراز کرد.

فرض کنید ۲۰۰ مربع در k ستون ´kتایی مستطیل را افراز کرده باشند و ۲۸۸ مربع در s ستون ´sتایی. در نتیجه $kk'=۲۰۰$، $ss'=۲۸۸$. حال اگر قرار باشد

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مستطیل با ۳۹۲ مربع به ضلع T پوشانده شود، باید: $392T^2=200x^2$ و در نتیجه: $T=\frac{5}{7}x$ که در آن، x ضلع مربعی است که با ۲۰۰ تا از آن‌ها مستطیل را پوشانده‌ایم. شرط لازم و کافی برای پوشاندن مستطیل با مربع‌هایی به ضلع T آن است که طول و عرض مستطیل مضرب T باشند. در نتیجه اگر m و n طول و عرض مستطیل باشند، باید: $\frac{m}{T}=\frac{7m}{5x}=\frac{7}{5}k$ و $\frac{n}{T}=\frac{7n}{5x}=\frac{7}{5}k'$. پس کافی است ثابت کنیم k و k′ مضرب ۵ هستند. چون $kk'=200$، دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول: k و k′ هر دو مضرب ۵ هستند که در این حالت حکم برقرار می‌شود.

حالت دوم: فقط یکی از دو عدد k و k′ مضرب ۵ هستند (مثلاً k). در این حالت k مضرب ۲۵ است و k′ عامل ۵ را ندارد. در نتیجه چون: $\frac{k}{k'}=\frac{s}{s'}$، پس $ss'=288=\frac{k}{k'}s^2$ و یا $288k'=ks^2$. اما طرف اول این تساوی عامل پنج را ندارد، در صورتی‌که طرف دوم تساوی مضرب ۲۵ است (تناقض). بنابراین تنها حالت اول اتفاق می‌افتد.

۵۷. ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی، عددی است که مجموع مکعبات آن سه عدد را می‌شمارد.

اگر سه عدد متوالی n−1، n و n+1 را در نظر بگیریم، مجموع آن‌ها برابر 3n است و:

$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+1)$

در نتیجه مجموع مکعبات سه عدد بر مجموع آن‌ها بخش‌پذیر است.

۵۸. x و y دو عدد حقیقی هستند، به‌طوری که: $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$. کمترین مقدار x^2+y^2 را بیابید.

معادلهٔ $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$، معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز (−۵,۱۲) و به شعاع ۱۴. با فرض $x^2+y^2=r^2$، نقطهٔ (x,y) روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r قرار دارد. پس (x,y) روی نقاط مشترک دو دایره است. در نتیجه کمترین مقدار r زمانی است که دو دایره مماس داخل باشند. در این حالت نقطهٔ تماس T، مبدأ و نقطهٔ A(−۵,۱۲) در یک امتداد هستند و داریم: AT=OA+r. در نتیجه: $r=14-\sqrt{5^2+12^2}=14-13=1$. پس کمترین مقدار x^2+y^2 برابر یک است.

۵۹. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$S=\frac{1}{1!1391!}+\frac{1}{3!1389!}+\dots+\frac{1}{1391!1!}$$

دو طرف تساوی را در !۱۳۹۲ ضرب می‌کنیم:

$$1392!S=\binom{1392}{1}+\binom{1392}{3}+\dots+\binom{1392}{1391}$$
$$=2^{1392-1}=2^{1391}$$

در نتیجه: $S=\frac{2^{1391}}{1392!}$.

اتحاد زیر (که در حل مسئله از آن استفاده شد) از اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots=2^{n-1}$$

۶۰. k و n دو عدد طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$1\times2\times\dots\times k+2\times3\times\dots\times(k+1)+\dots$$
$$+n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)=\frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1}$$

طرف اول حکم را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{k!}{0!}+\frac{(k+1)!}{1!}+\dots+\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}$$
$$=k!\left(\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\dots+\binom{k+n-1}{n-1}\right)$$

اما از طرف دیگر، برای هر $k,r\in N$ داریم:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\dots+\binom{k+r}{r}=\binom{k+r+1}{r}$$

در نتیجه عبارت داده شده برابر است با:

$$k!\binom{k+n}{n-1}=\frac{k!(k+n)!}{(n-1)!(k+1)!}=\frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1}$$

* iradmusa@yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه نااقلیدسی

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به‌کار نرود.
نیکلای لباچفسکی

سیداحسان حسینی *
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی
شهرستان دره‌شهر، ایلام

مقدمه

در اوایل قرن نوزدهم، نگرش به هندسهٔ اقلیدسی، که قدمتی ۲۱۰۰ ساله داشت و یگانه هندسهٔ موجود بود، تغییر کرد و علم هندسه دگرگون شد و در واقع علم هندسهٔ جدیدی متولد شد. مفاهیم خط، دایره و... تغییر کردند و مفاهیم جدیدی به‌وجود آمدند؛ مفاهیمی که ابتدا شگفت‌انگیز بودند، ولی توانستند نگرش همه را نسبت به محیط اطراف تغییر دهند. در هندسهٔ جدید، مفاهیم و تعاریف ریاضی، مانند مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر و یا بیشتر از ۱۸۰ درجه است، دو خط متمایز که یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، ... و همچنین مفاهیم فیزیکی مانند انحنای فضا، انحنای انتشار نور و... به‌راحتی قابل تحلیل بودند. به این ترتیب هندسه وارد دورهٔ جدیدی از مفاهیم و کاربردهای منطقی شد.

هندسهٔ نااقلیدسی که *لباچفسکی* و ریمان از پرچم‌دارانش بودند، در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد پیدا کرد. یکی از اساسی‌ترین کاربردهای این هندسه، تشریح نظریهٔ نسبیت انیشتین بود که فیزیک را متحول کرد و پیوند میان ریاضی و فیزیک بار دیگر پررنگ‌تر شد.

کلیدواژه‌ها: هندسهٔ نااقلیدسی، هندسه ریمانی، هندسهٔ لباچفسکی، نظریهٔ نسبیت انیشتین

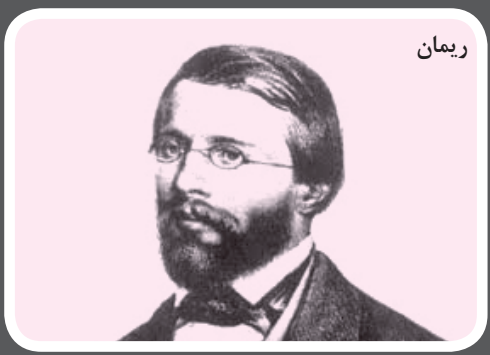
هندسه اقلیدسی (سهموی)

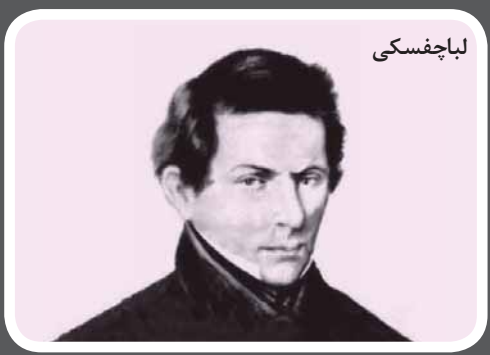
هندسه در آغاز بر دانسته‌های تجربی استوار بود و مردم تمدن‌های اولیه، در زندگی روزمره از هندسه استفاده می‌کردند. برای مثال، مساحت زمین‌های کشاورزی و یا محدودهٔ زندگی خود را تعیین می‌کردند، از علائم خط، نقطه، دایره و... برای نشانه‌گذاری بهره می‌گرفتند و در نقشه‌ها و سندها از مفاهیمی مانند مساحت و فاصله استفاده می‌کردند. برخی از این مفاهیم نیز پیچیده بودند. مثلاً مصریان و بابلیان «قضیهٔ **فیثاغورث**» را در ۱۵۰۰ سال قبل از فیثاغورث، در عمل، می‌شناختند و به‌کار می‌بردند.

نخستین‌بار دانشمندی به نام **اقلیدس** که در اسکندریه زندگی می‌کرد، هندسه را به‌صورت یک علم درآورد. وی حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد **مسیح**، تمام اصول و قضایای هندسی را که تا آن زمان شناخته بود گردآورد و آن‌ها را به‌طور منظم، در یک مجموعهٔ ۱۳ جلدی قرار داد.

در زمان اقلیدس، هندسه در تب و تاب بود و نظریات مختلفی در زمینهٔ این علم مطرح می‌شد. کتاب اقلیدس که «اصول» نام داشت، روش‌های بنیادی و منسجمی را ارائه داد که تا امروز هم از منسجم‌ترین بنیادهای نظری بشر محسوب می‌شود. روش اقلیدس ساده بود. او چند

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir


ریمان


لباچفسکی

ساکری

خیام

اقلیدس

اصل (اصــل موضوعه) را بدون اثبات به‌عنوان اصل‌های بدیهی پذیرفت و سپس براساس آن‌ها صدها قضیهٔ دیگر را اثبات کرد که بسیاری از آن‌ها دور از ذهن بودند.

اصول موضوعی اقلیدس عبارت‌اند از:

۱. از هر دو نقطه یک خط راست می‌گذرد.

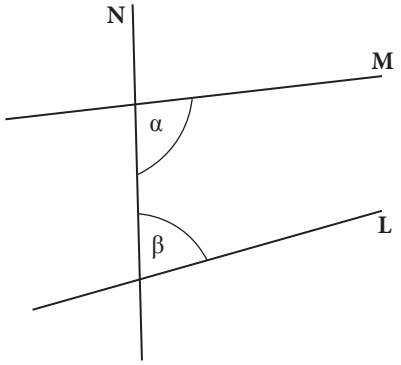
۲. هر پاره‌خط می‌تواند تا بی‌نهایت روی خط راست امتداد یابد.

۳. با یک نقطه به‌عنوان مرکز و یک پاره‌خط به‌عنوان شعاع می‌توان یک دایره رسم کرد.

۴. همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. اگر خط راست N دو خط راست L و M را قطع کند، و مجموع زوایــای داخلی در یک طرف N کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، خط‌های L و M در آن طرف N یکدیگر را قطع می‌کنند.

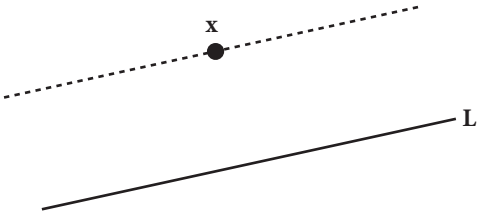
اگــر مجمــوع α و β کمتر از ۱۸۰ درجه باشــد، آن‌گاه خطوط M و L یکدیگر را در سمت α و β قطع می‌کنند.



شکل ۱

قضیه‌های زیر نیز بیانگر اصل پنجم اقلیدس‌اند:

۱. از یــک نقطه خارج از یک خط، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.



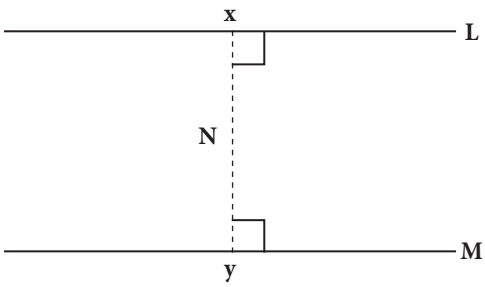
شکل ۲

اصل پنجم اقلیدس چندان بدیهی به‌نظر نمی‌رسید. گروهی از ریاضی‌دانان معتقد بودند که اصل پنجم را می‌توان به‌عنوان یک قضیه اثبات کرد. در این راه ریاضی‌دانان زیادی تلاش کردند، اما نتیجه نگرفتند.

از نقطهٔ x یک و تنها یک خط موازی با خط L می‌توان رسم کرد.

۲. اگر بین دو خط مفروض بتوان خطی رسم کرد که بر هر دو خط عمود باشد، آن دو خط با هم موازی‌اند.

دو خط L و M در نقاط x و y بر خط N عموداند، پس دو خط L و M با هم موازی‌اند.



شکل ۳

۳. اگر دو خط با هم موازی باشند و یکی از آن‌ها با خط سومی موازی باشد، خط دیگر نیز با خط سوم موازی خواهد بود.

پیدایش تفکرات نوین هندسی

اصل پنجم اقلیدس چندان بدیهی به‌نظر نمی‌رسید. گروهی از ریاضی‌دانان معتقد بودند که اصل پنجم را می‌توان به‌عنوان یک قضیه اثبات کرد. در این راه ریاضی‌دانان زیادی تلاش کردند، اما نتیجه نگرفتند.

خیام، ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی، در یکی از آثار ریاضی خود به‌نام «*رسالهٔ فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس*»، اصل موضوعهٔ پنجم اقلیدس را دربارهٔ قضیه خطوط متوازی که شالودهٔ هندسهٔ اقلیدسی است مورد مطالعه قرار داد و اصل پنجم را نیز اثبات کرد. به این ترتیب، خیام راه را برای دانشمندان بعد از خود هموار ساخت، به‌طوری که **ساکری** (ریاضی‌دان ایتالیایی) اساس نظریهٔ خود را دربارهٔ خطوط موازی، مطالعات خیام دانسته است. با مطالعات خیام و نظریه‌های ساکری و **والیس** (ریاضی‌دان انگلیسی) که چند قرن بعد از خیام بیان شدند، راه برای پایه‌ریزی هندسه‌ای جدید؛ با رویکردی نااقلیدسی، هموار شد.

هندسهٔ نااقلیدسی

در نیمهٔ اول قرن نوزدهم دو رویداد ریاضی مهم و انقلابی به‌وقوع پیوست:

- کشف هندسه‌ای خودسازگار، غیر از هندسهٔ اقلیدسی؛
- کشف جبری متفاوت با جبر معمولی دستگاه اعداد حقیقی.

هندسهٔ نااقلیدسی که از مطالعهٔ عمیق‌تر موضوع توازی در هندسهٔ اقلیدسی شکل گرفت، به دو موضوع در مورد این اصل می‌پردازد: موضوع اول این است که از یک نقطهٔ خارج یک خط، هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسه بیضوی). موضوع دوم این است که از یک نقطه خارج یک خط بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسهٔ هذلولوی).

اما چگونه ممکن است دو خط که بر یک خط دیگر عمودند (بیان دوم اصل پنجم اقلیدس) با هم موازی نباشند؟ و یا اگر دو خط که با هم موازی هستند و خط سومی نیز با یکی از آن‌ها موازی باشد، ممکن است با دیگری موازی نباشد؟ برای پاسخ‌گویی به این سؤالات و درک بهتر هندسهٔ نااقلیدسی بهتر است که مفهوم خط را که با شنیدن آن یک خط راست به ذهنمان می‌رسد، اندکی تغییر دهیم. به‌عبارت دیگر، بهتر است به سطح یک کره فکر کنیم.

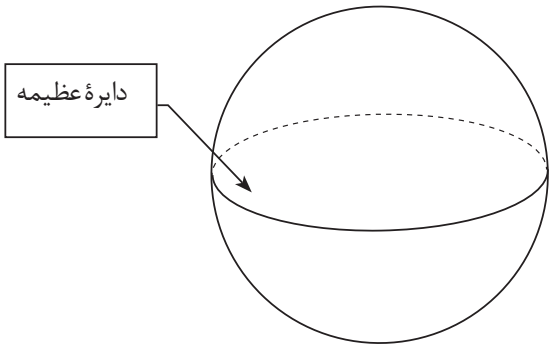
هندسهٔ بیضوی (ریمانی)

هندسهٔ ریمانی نوعی هندسهٔ نااقلیدسی است. در هندسهٔ بیضوی اصل توازی این‌گونه بیان می‌شود: «از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان خطی به موازات خط مفروض رسم کرد.» در واقع در هندسهٔ بیضوی، خطوط موازی وجود ندارند. با تجسم سطح یک کره می‌توان سطحی شبیه به سطح بیضوی در نظر گرفت.

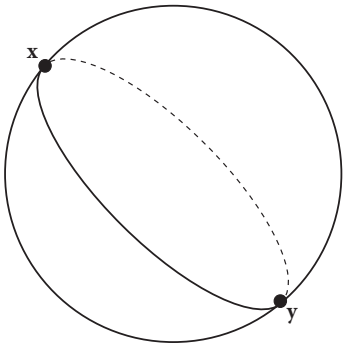
اصل توازی روی سطح کره برقرار نیست، چرا که روی سطح کره اصلاً خط راستی وجود ندارد. در واقع روی سطح کره مفهوم خط از آنچه در ذهن ماست (خط راست) تغییر کرده و به منحنی تبدیل می‌شود. در واقع خط، روی سطح کره، قسمتی از یک «دایرهٔ عظیمه» است (دایرهٔ عظیمه دایره‌ای است که کره را دقیقاً دو نیم می‌کند).

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



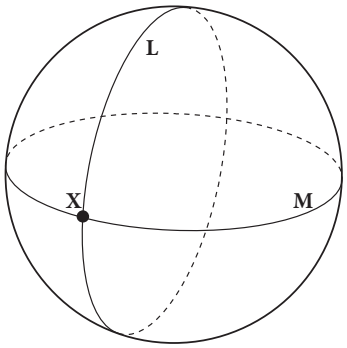
xy خطی روی کره است.



در هندسهٔ کروی اصل توازی برقرار نیست.

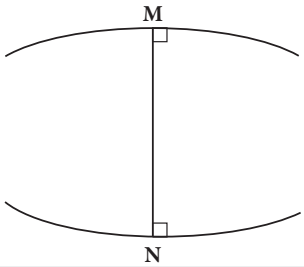
شکل ۴

دو دایره عظیمهٔ L و M (خط روی کره) در نقطهٔ x یکدیگر را قطع کرده‌اند. به‌عبارت دیگر، هیچ خطی نیست که از x بگذرد و L را قطع نکند.



شکل ۵

شکل ۶ اصل توازی در هندسهٔ بیضوی را نشان می‌دهد که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند. به‌عبارت دیگر، با اینکه این دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، ولی هیچ‌گاه با هم موازی نیستند (امتداد آن‌ها یک دیگر را قطع می‌کند.)



شکل ۶

همهٔ چهار اصل اول اقلیدس روی کره درست نیستند. مثلاً روی کره دایره‌ای به شعاع دلخواه بزرگ وجود ندارد. اصل سوم نیز برقرار نیست. مثلاً از بالای کره (قطب شمال) تا پایین کره (قطب جنوب) بیش از یک کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد.

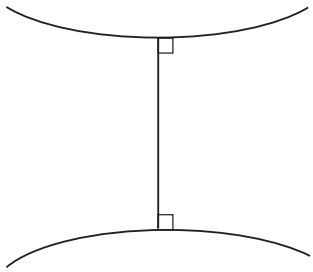
هندسهٔ هذلولوی (لباچفسکی)

لباچفسکی، ریاضی‌دان روس، هر چند دربارهٔ موضوعات مختلف پژوهش‌های فراوانی انجام داد، ولی فعالیت او در زمینهٔ هندسه و ابداع هندسهٔ نااقلیدسی در تاریخ ریاضیات ماندگار شد. امروزه هندسهٔ هذلولوی را هندسهٔ لباچفسکی می‌نامند.

لباچفسکی اولین کسی بود که مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت. **بویوئی** (دیگر ریاضی‌دان روس) نیز بدون اطلاع از کار لباچفسکی، دو سال بعد مقاله‌ای دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت.

اصل توازی در هندسهٔ هذلولوی دقیقاً عکس هندسهٔ بیضوی تعریف می‌شود: «از یک نقطه خارج از یک خط، بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.»

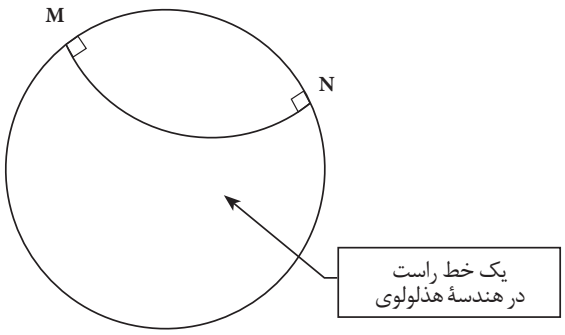
همان‌طور که در شکل ۷ نیز معلوم است، همچنان که دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، اما با هم موازی نیستند، یعنی چنین نیست که امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نکند). همچنین بی‌شمار خط نیز می‌توان به این شکل اضافه کرد.



شکل ۷

امروزه هندسهٔ هذلولوی را هندسهٔ لباچفسکی می‌نامند. لباچفسکی اولین کسی بود که مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت

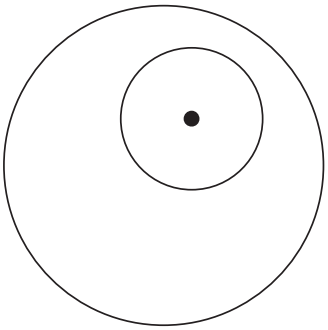
در هندسهٔ هذلولوی مانند هندسهٔ کروی، باید مفهوم خط را اندکی تغییر دهیم. خط راست و کوتاه‌ترین مسیر از دیدگاه هندسهٔ هذلولوی، کمانی از یک دایره است که بر دایرهٔ اصلی در مرز آن عمود است.



شکل ۸

خط MN (شکل ۸) شاید از دید ما که تا به حال خط را تنها یک خط راست در نظر می‌گرفتیم، عجیب باشد و واقعاً خط به‌نظر نرسد. اما در حقیقت این‌ها پاره‌خط‌های هذلولوی‌اند. «حقیقت یک مفهوم ریاضی بیشتر وابسته به چیزی است که انجام می‌دهد، نه آنچه که هست» (**تیموری گاورز**، ریاضی‌دان معاصر).

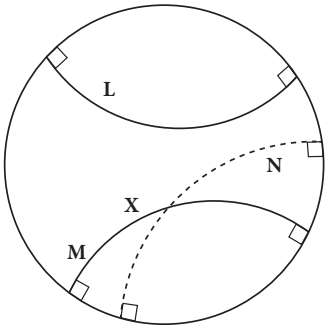
دایره‌های هذلولوی شبیه به دایره‌های معمولی‌اند، ولی مرکزشان کمی متفاوت است.



شکل ۹ دایرهٔ هذلولوی و مرکز آن

در هندسهٔ هذلولوی نیز اصل پنجم اقلیدس نادرست است.

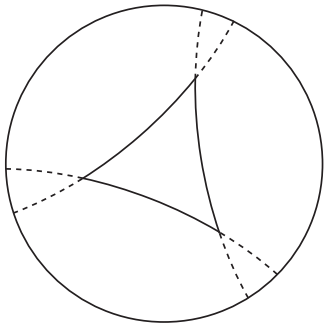
دو خط L و M با هم موازی‌اند، چون امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کند. از طرف دیگر، دو خط L و N نیز چون یکدیگر را قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند. بنابر اصل پنجم اقلیدس، چون دو خط L و M با هم موازی‌اند، خط N باید با خط M موازی باشد. اما با توجه به شکل خطوط، N و M یکدیگر را در x قطع می‌کنند که در این صورت اصل پنجم اقلیدس نادرست می‌شود.



شکل ۱۰

یک مثلث جدید!

از دوران تحصیل ما در دبستان، یکی از به‌یادماندنی‌ترین ویژگی‌های مثلث، مجموع زوایای داخلی آن بود که همه می‌دانیم برابر با ۱۸۰ درجه است. اما اکنون که با هندسه‌های نااقلیدسی آشنا شدیم، تصور مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، زیاد مشکل نیست. برای رسم این مثلث به هندسهٔ هذلولوی مراجعه می‌کنیم.



شکل ۱۱ مثلث هذلولوی

کاربرد هندسه نااقلیدسی

هندسهٔ نااقلیدسی که بعدها **گاوس** و ریمان آن را در قالب هندسهٔ کلی‌تری بسط دادند، در نظریهٔ نسبیت انیشتین مورد استفاده قرار گرفته است.

در واقع اهمیت این دو هندسه زمانی آشکار شد که نظریهٔ نسبیت عام انیشتین به‌عنوان جایگزینی برای نظریات **نیوتن** از مکان، زمان و گرانش انتخاب شد. زیرا ساختار نظریهٔ نسبیت انیشتین مبتنی بر هندسهٔ ریمانی بود. در این نظریه، هندسهٔ مکان ـ زمان به‌جای آنکه صاف باشد، منحنی است.

منابع

۱. ایوز، هاورد و.، (۱۳۹۰). آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج ۲). ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۲. گاورز، تیموتی (۱۳۸۸). مقدمه‌ای کوتاه بر ریاضیات. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی. تهران.

۳. بیرشک، احمد و دیگران. خلاصهٔ زندگی‌نامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانش‌نامهٔ بزرگ فارسی.

۴. ماروین جی، گرینبرگ. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ترجمهٔ م.ه. شفیعیها. ویرایش احمد بیرشک. حمید کاظمی و همایون معین. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

*Ehsan.Hossyni@chmail.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حمیدرضا امیری*

مجموعه‌های عددی

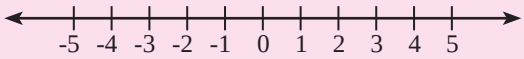
Number Sets

Here are some important number sets used in mathematics:

- N={1,2,3,...} is the set of *counting numbers, or naturals*.
- W={0,1,2,3,...} is the set of *whole numbers*.
- Z={...,–3,–2,–1,0,1,2,3,...} is the set of *integers*.
- $Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|p,q\in Z,q\neq 0\right\}$ is the set of *rational numbers, or fractions*.

This set can also be described as containing all terminating or non-terminating but repeating decimals.

- I is the set of *irrational numbers*. This set can also be described as containing all non-terminating and non-repeating decimals. Some of the most important numbers in mathematics belong to this set, including π, $\sqrt{2}$, e and ϕ.
- R is the set of *real numbers*. These are all the numbers that can be placed on a one-dimensional number line extending with no end on both the negative and positive sides.



Set Equality

Two sets A and B are said to be *equal* (denoted, as expected, by A=B) if and only if both sets have the exact same elements. Here, *if and only if* means that both parts of the statement ("A=B" and "both sets have the exact same elements") are interchangeable. Logically speaking, this means that each part of the statement implies the other.

در اینجا تعدادی از مجموعه‌های عددی مهم را که در ریاضیات از آن‌ها استفاده می‌شود، معرفی کرده‌ایم:

- N={۱,۲,۳,...} مجموعهٔ اعداد شمارشی یا طبیعی است.
- W={۰,۱,۲,۳,...} مجموعهٔ اعداد درست [حسابی] است.
- Z={...,–۳,–۲,–۱,۰,۱,۲,۳,...} مجموعهٔ اعداد صحیح است.
- $Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|p,q\in Z,q\neq ۰\right\}$ مجموعهٔ اعداد گویا یا کسری است.

همچنین، این مجموعه می‌تواند بیان‌کننده یا شامل همهٔ اعداد اعشاری با پایان [مختوم] یا بی‌پایان، اما با تکرار [اعداد اعشاری متناوب] باشد.

- I مجموعهٔ اعداد ناگویا [گنگ] است. این مجموعه همچنین می‌تواند بیان‌کننده یا شامل همهٔ اعداد اعشاری بی‌پایان و بدون تکرار [غیرمتناوب] باشد. تعدادی از اعداد بسیار مهم در ریاضیات که متعلق به این مجموعه هستند، عبارت‌اند از: π، $\sqrt{۲}$، e و ϕ.
- R مجموعهٔ اعداد حقیقی است. این‌ها همهٔ اعدادی هستند که می‌توان روی خط اعداد یک‌بعدی قرار داد، خطی که از هر دو طرف مثبت و منفی بی‌پایان است.

تساوی مجموعه

دو مجموعهٔ A و B را مساوی می‌گوییم (و آن را با نماد A=B نمایش می‌دهیم) «اگر و فقط اگر» دو مجموعه دقیقاً اعضایی یکسان داشته باشند.

اینجا، «اگر و فقط اگر» به این معنی است که دو بخش گزاره («A=B» و «دو مجموعه دقیقاً اعضای یکسان دارند») قابل تعویض‌اند. به زبان منطقی، این به این معناست که هر بخش از این گزاره، بخش دیگر را نتیجه می‌دهد.

اصطلاحات و لغات مهم:

1. Natural Numbers اعداد طبیعی
2. Whole Numbers اعداد درست
3. Integers اعداد صحیح
4. Rational Numbers اعداد گویا
5. Irrational Numbers اعداد گنگ
6. Real Numbers اعداد حقیقی
7. terminating مختوم
8. Interchangeable تعویض‌پذیر

* h66amiri@yahoo.com

تنظیم: ارغوان غلامی ـ هوشنگ شرقی

۱

تدریس و معلمی لذت‌بخش است

پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار دکتر عین‌الله پاشا

اشاره

برای دانش‌آموزانی که هر سال از پشت میزهای چوبی به تخته زل می‌زنند، کلمهٔ «احتمال» چه معنایی می‌تواند داشته باشد؟ شاید، فقط شیر یا خط آمدن یک سکه! کلمهٔ «آمار» چه‌طور؟ آیا برای آن‌ها، آمار، جز یک جزوهٔ پر از اعداد و ارقام است که به دستشان می‌دهند؟

متأسفانه چنین است! احتمال و آمار سال‌هاست که مهجور، گوشهٔ کلاس‌های درس افتاده‌اند، در حالی‌که این دو مبحث جوان ریاضیات، می‌توانند دیدی نو و تازه به دانش‌آموزان بدهند.و این بهانه‌ای لازم و کافی بود برای مصاحبه‌ای نه‌چندان کوتاه با *دکتر عین‌الله پاشا*، استاد آمار و احتمال. در این مصاحبه آقایان *حمیدرضا امیری*، سردبیر؛ *هوشنگ شرقی*، مدیر داخلی؛ *سیدمحمدرضا هاشمی موسوی* و *غلامرضا یاسی‌پور* اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ «ریاضی رشد برهان ۲» حضور داشتند.

دکتر عین‌الله پاشا در سال ۱۳۵۰ از دانشگاه تهران، در رشتهٔ ریاضی، فارغ‌التحصیل شد و پس از اتمام دورهٔ مدرسی ریاضی در مؤسسهٔ ریاضیات و چهار سال تدریس در دانشسرای عالی (آن موقع) برای ادامهٔ تحصیلات به آمریکا اعزام شد. در سال ۱۳۶۳ مدرک دکترای خود را از دانشگاه ایالتی میشیگان گرفت و بعد از بازگشت به ایران، علاوه بر تألیف کتاب‌ها و مقالات متعدد، استاد دانشگاه تربیت معلم، رئیس مؤسسه ریاضیات این دانشگاه، مدیر گروه آمار دانشگاه پیام‌نور، عضو انجمن آمار ایران و همچنین عضو «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» بوده و ده‌ها سمت دیگر نیز داشته است.

قسمت اول، گفت‌گو با دکتر پاشا را در این شماره و قسمت دوم را در شمارهٔ ۸۶ می‌خوانید.

● **شرقی:** به‌نام خدا. امروز چهارشنبه هفدهم اردیبهشت ۹۳، به همراه اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ برهان، در خدمت استاد گرامی، دکتر عین الله پاشا هستیم. به‌عنوان مقدمه یادآور می‌شوم که مطابق زندگی‌نامه‌ای که چند سال پیش خود من برای درج در مجله‌ای که این‌جانب در آن به‌عنوان عضو هیئت تحریریه در خدمت استاد بودم، از ایشان دریافت کردم، آقای دکتر پاشا تاکنون دارای ده‌ها عنوان و سمت علمی و دانشگاهی بوده‌اند و اکنون نیز جزو برجسته‌ترین استادان ریاضی کشورمان هستند. ولی در کنار این پیشینهٔ سنگین، ایشان امتیاز بزرگ دیگری هم دارند که شاید با همهٔ آن‌ها برابری می‌کند و آن انسانیت، اخلاق و تواضع مثال‌زدنی ایشان است. در این زمینه اگر نگوییم سرامد، لااقل در زمرهٔ سرامدان هستند و من می‌خواهم تعبیر خودم را از این موضوع از کتاب معروف «گفت‌وگو با دانش‌آموزان دبیرستان» از *سرژ لانگ* وام بگیرم. در مقدمهٔ این کتاب آمده است که این‌بار سرژ لانگ که یک استاد بزرگ دانشگاهی است، از عرش به فرش آمده و در گفت‌وگویی صمیمی با دانش‌آموزان شرکت کرده است. من می‌خواهم بگویم که دکتر پاشا امروز از عرش به فرش آمده و با یک مجلهٔ دانش‌آموزی به

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مصاحبه نشسته‌اند.

پاشـا: همین‌جا و قبل از هر چیز یک جمله بگویم و آن اینکـه اگر من با مجله و بـا بدنهٔ آموزش‌وپرورش همـکاری کـرده و می‌کنم، در واقع بـه عرش صعود کرده‌ام، نه اینکه به فرش آمده باشم، از اینکه صحبت شما را قطع کردم، عذر می‌خواهم.

● **شرقی:** این از بزرگواری شماست. ما نهایت سپاس خـود را از اینکه دعوت ما را بـه مصاحبه پذیرفتید، اعلام می‌کنیم و مصاحبه را شروع می‌کنیم.

● **غلامی:** اجازه بدهید گفت‌وگو را با سـؤالی دربارهٔ زندگی دکتر پاشـا شـروع کنیم. جناب دکتر پاشـا، داستان زندگی شما چه بود و چه شد که سرنوشتتان این‌طور به ریاضیات گره خورد؟

■ **پاشـا:** ابتدا اجازه می‌خواهم به‌خاطر دعوتی که از من به‌عمل آوردید، تشـکر کنم و سـپس روز و هفتهٔ معلم را نیز خدمت همکارانم تبریک بگویم.

من در سال ۱۳۲۸ در مهرشهر کرج متولد شدم. حالا مهرشهر برای خودش شهری است، اما آن روزها ده کوچکی بود به نام حسـین‌آباد. مدرسـهٔ من هم اولین مدرسه‌ای بود که در این ده ساخته بودند. یک مدرسه نوساز که چهار کلاس بیشتر نداشت. به‌خاطر شـغل پدرم ما در مدرسـه زندگی می‌کردیم (تمام کارکنان مدرسـه که ضمناً دو خانوار و بعضی مواقع یک معلم مجرد هم اضافه می‌شد، همگی در مدرسه زندگـی می‌کردند) و من افتخـار می‌کنم که بگویم در مدرسـه به‌دنیا آمـده‌ام و از بچگـی در کلاس‌ها می‌نشسـتم. هنوز به کلاس اول نرفته بودم، اما همهٔ درس‌هـای کلاس اول را از حفظ بودم. مرا نشـانده بودند کلاس دوم، اما کارنامهٔ کلاس اول را برایم زده بودند. تا کلاس چهارم را در آن مدرسـه بودم و بعد از آن منتقل شدیم به‌جای دیگری. سال چهارم برایم سال سـختی بود. یکی از دلایلش هم این بود که از دوستان دوران کودکی‌ام جدا شده بودم.

بعدها کـه زندگی *مولانا* را می‌خواندم که در ۱۱ سـالگی از بلخ مـی‌رود، با خـودم می‌گفتم بی‌دلیل نیست که می‌گوید:

«بشنو از نی چون حکایت می‌کند
از جدایی‌ها شکایت می‌کند»

آن وقت‌هـا خیلـی دلتنگـی می‌کـردم، یـک وقت‌هایی اگر می‌خواسـتم کمی بلندتر حرف بزنم، بغضی در گلویم گره می‌خورد.

در مدرسه قبلی شـاگرد آزادی بودم و هیچ‌کس با من کاری نداشـت. می‌رفتم، می‌آمدم و درسـم را می‌خواندم. اما اینجا مقررات سـخت و خاصی داشت که من متوجه نمی‌شـدم. مثلاً معلـم می‌گفت فردا نقشـه ایران را بکشـید و بیاورید. فـردا که می‌رفتم بـه من می‌گفت نقشـه‌ات کـو؟ و مرا هـم که اصلاً نمی‌فهمیدم قضیه چیست می‌برد بیرون کلاس و دو تا چوب نوش‌جانمان می‌کرد. خلاصه اینکه آن سال،

اگر من با بدنهٔ آموزش‌وپرورش همکاری کرده و می‌کنم، در واقع به عرش صعود کرده‌ام، نه اینکه به فرش آمده باشم

تا توانستم خودم را پیدا کنم خیلی سخت گذشت. اما کم‌کم اخت شدم و تا کلاس هشتم را در همان مدرسه ادامه دادم. مدرسهٔ خوبی بود و معلم‌های خوبی داشت؛ مخصوصاً معلم ادبیات و معلم طبیعی. آنجا بود که برای اولین‌بار کار با میکروسکوپ را در کلاس‌های چهارم و پنجم به ما یاد دادند.

از من پرسیدید که چه‌طور به ریاضی علاقه‌مند شدم. خاطرهٔ شیرینش در این زمینه هنوز به‌یادم می‌آید. معمولاً موقع امتحانات کتاب را نمی‌خواندیم. می‌رفتیم و هرچه معلم در کلاس یادمان داده بود، می‌نوشتیم. یک شب کلاس هشتم، نمی‌دانم چه‌طور شد که با خودم گفتم بگذار کتاب هندسه را بیاورم و ببینم که چی نوشته است. یادم می‌آید که در کتاب علاوه بر سایر مطالب، نوشته بود: دو شکل را معادل می‌گوییم، اگر دارای مساحت‌های برابر باشند.

فردا که روز امتحان بود، معلم سؤال داده بود که دو خط موازی داریم. پاره‌خطی روی یکی از آن‌ها قرار دارد و یک نقطهٔ متغیر روی خط دیگر حرکت می‌کند. آن نقطه را به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم و یک مثلث تشکیل می‌شود. ثابت کنید همهٔ این مثلث‌ها معادل‌اند. با خودم گفتم یعنی باید مساحت‌هایشان برابر باشد. مساحت مثلث هم که می‌شود قاعده ضربدر نصف ارتفاع و اینجا هم که قاعده ثابت است. پس ارتفاع‌هایشان باید با هم برابر باشد که برابر است و... تمام شد، من این مسئله را حل کردم. این اولین جرقه‌ای بود که در ذهنم خورد. فهمیدم که اگر کتاب بخوانم، می‌توانم خیلی چیزها را یاد بگیرم و خیلی کارها را انجام دهم.

من همیشه از این خاطره به‌نام میوهٔ ممنوعه یاد می‌کنم. چون مرا از آن عوالم کودکی آورد بیرون. من با این مسئله آمدم به دنیای دیگری؛ به دنیای ریاضیات. از آن روز به بعد حتی در تابستان‌ها ریاضی می‌خواندم.

از این دست خاطرات زیاد دارم. یادم می‌آید سال بعد از آن، کلاس نهم، معلم هندسه‌ای داشتیم به‌نام آقای *ملک‌پور*. معلم بسیار خوبی بود. هر وقت سؤالی را مطرح می‌کرد و کسی جواب درستی می‌داد (هر چند هم که سؤال ابتدایی بود)، می‌گفت بارک‌الله! یک ۲۰ برایش بگذارید. به‌خاطر همین ۲۰ گرفتن‌ها و تشویق‌ها بود که سعی می‌کردم جواب سؤال‌ها را بدهم. یکی دو تا مسئله را هم من آن سال‌ها حل کردم. یادم می‌آید که یکی از مسئله‌ها این بود: دو تا دایره مماس داخل‌اند. تفاضل شعاع‌هایشان مثلاً ۲ سانتی‌متر است. مساحت بینشان هم این‌قدر است. شعاع هر کدام چه‌قدر است؟ من یک معادلهٔ دومجهولی نوشتم و مسئله را حل کردم.

● **شرقی:** همین الان راه‌حلش به ذهنم آمد و حلش کردم. چون مساحت بین دو دایره را داریم، یعنی $\pi(R^2-R'^2)$ و در نتیجه $R^2-R'^2$ را داریم و چون طول خط‌المرکزین، یعنی $R-R'$ را داریم...

■ **پاشا:** بله، با اتحاد مزدوج $R^2-R'^2$ را تجزیه می‌کنیم و به $R+R'$ می‌رسیم و از آنجا دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی تشکیل می‌شود.

● **شرقی:** خیلی جالب است! می‌شود این مسئله را در مجله بیاوریم.

■ **پاشا:** بله، خیلی جالب بود و همین‌ها باعث شد که من بیشتر به ریاضی علاقه‌مند شوم. تابستان هم همهٔ وقتم را با حل مسئله گذراندم و وقتی به کلاس دهم آمدم و گفتند چه رشته‌ای می‌خواهی بخوانی، بدون تردید و تأمل، فوری گفتم: رشتهٔ ریاضی؛ بی‌برو برگرد!

مرا ترساندند که ریاضیات کار هر کسی نیست؛

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بیا برو یک رشتهٔ دیگر بخوان و از این حرف‌های عجیب و غریب که فقط عطشم را بیشتر می‌کرد. سال ششم دبیرستان، تفریح من رسم ملخص و یا اپور در درس‌های هندسه رقومی و ترسیمی بود، که در این سال‌ها این دو درس از برنامه درسی حذف شده‌اند. منابع مسائل علاوه بر کتاب‌های درسی کتاب‌های مهندس خویی و آقای پرتوی بود که آن‌ها را به سختی تهیه می‌کردم، مسئله‌هایش را حل می‌کردم و لذت می‌بردم. با این چیزها خستگی‌ام در می‌آمد.

یادم می‌آید وقتی به «دبیرستان فارابی کرج» رفتم تا ریاضیات بخوانم، این دبیرستان دو معلم هندسه داشت: آقای *مظاهری* و آقای *اعتمادی*. همهمه‌ای بین بچه‌ها افتاده بود که هر طور شده است، سر کلاس آقای اعتمادی بنشینیم. چون خوش‌اخلاق‌تر و مهربان‌تر است و شاید نمره هم بهتر می‌دهد. این شد که همهٔ ما رفتیم سر کلاس آقای اعتمادی و در هر نیمکت، پنج شش نفر تنگ هم نشستیم. آمدند جدایمان کردند و به دو کلاس تقسیم شدیم. ما هم با خودمان گفتیم چه باک! و رفتیم و سر کلاس آقای مظاهری نشستیم. ایشان هم آن سال مزهٔ خوب ریاضی را به ما چشاند. ایشان یک کتاب روسی داشت و با خودش می‌آورد سرکلاس و من یک دفعه، هفت هشت دقیقه مانده بود که کلاس تمام شود، این کتاب را گرفتم و نگاه کردم. دو صفحه رسم مثلث داشت. نوشته بود مثلثی را با این اطلاعات رسم کنید و مثلاً با داشتن h_a، h_b و h_c (سه ارتفاع) و این سخت‌ترینش بود...

● **شرقی:** بله مسئلهٔ معروفی است.

■ **پاشا:** ما زبان روسی نمی‌دانستیم، ولی می‌دانستیم که داستان مربوط به رسم مثلث است. تمام این دو صفحه را نوشتم و تا کنکور دانشگاه این خوراکم بود. آن سال، رسم مثلث و این‌جور مسائل را کار کردیم. سال بعد هم هندسه مسطحه و کلاس یازدهم هندسه فضایی داشتیم، آن سال معلم هندسه‌مان آقای *اختر خاوری* بودند و من هندسه را خوب می‌فهمیدم. مثلاً کنج سه قائمه را با نگاه کردن به گوشهٔ اتاق خانه‌مان مجسم می‌کردم. خیلی هم لذت‌بخش بود. وقتی مادرم فهمید، گفت: من گاهی که به تو نگاه می‌کردم، با خودم می‌گفتم این بچه چه شده! نکنه مشکلی داره که به سقف نگاه می‌کنه و با انگشت‌هاش شکل‌های عجیب و غریب در هوا می‌سازه!

در سال ششم دبیرستان من دیگر در بحث هندسهٔ رقومی و ترسیمی مسلط شده بودم و برای رفع خستگی مسئلهٔ رسم حل می‌کردم. کتاب‌های متفاوتی در این زمینه بود؛ از جمله کتاب‌های آقای باقر ازگمی و آقای مهندس خویی که به‌سختی آن‌ها را گیر می‌آوردم و مسائل آن‌ها را حل می‌کردم و لذت می‌بردم. این‌جور که من شروع کردم، ظاهراً فقط از هندسه گفتم. البته درست است که برای حل آن مسئلهٔ هندسه از اتحاد مزدوج، که اتحاد جبری است، استفاده کردم، ولی به‌طور کلی توی جبر و این‌جور شاخه‌های ریاضی تبحر زیادی نداشتم.

● **امیری:** آنالیز چه‌طور؟

■ **پاشا:** آنالیز نداشتیم. مشتق و این بحث‌ها را هم، در درس جبر می‌خواندیم. ولی توی جبر من مهارت چندانی نداشتم. یادم می‌آید، همان کلاس نهم دستگاهی را داده بودند حل کنیم. من حل می‌کردم، می‌دیدم جواب‌هایش، خیلی عجیب و غریب درمی‌آیند.

مثلاً $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{۲}$ و این خیلی عجیب بود. جواب باید ۱، ۲، ۳ و خلاصه رُند درمی‌آمد. این حس در من بود که یک جای کار اشکال دارد.

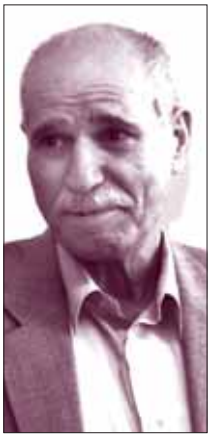
● **یاسی‌پور:** با این همه، تعجب‌آور است شما در رشتهٔ آمار و احتمال تحصیل کرده‌اید.

■ **پاشا:** از جلسهٔ امتحان که آمدم بیرون، سه‌بار این مسئله را حل کردم و هر سه‌بار گفتم: دو شیش‌تا می‌شه هجده تا! و همین باعث می‌شد که جواب آن‌طور به‌دست بیاید. اما در امتحان نهایی، در هندسهٔ مخروطات ۲۰ و در هندسهٔ رقومی ترسیمی ۱۹ گرفتم. حالا یک نمره را چرا از دست دادم؟ گفته بودند یک متوازی‌السطوح بسازید که یک ضلع آن AF باشد. اما پلی‌کپی سؤال اشکال داشت و من آن را BF خواندم و شکل عوض شد. این‌طور شد که یک نمره از دست دادم و خیلی حسرت خوردم.

● **شرقی:** استاد اگر اجازه بدهید، بحث را کمی عوض کنیم و من سؤالی بپرسم: آیا شما در آن دوره با مجلهٔ یکان هم آشنایی داشتید؟

■ **پاشا:** بله، با مجلهٔ یکان از همان کلاس دهم آشنا شدم. اولین شماره‌ای که خریدم و همیشه به آن رجوع کردم، یکان شمارهٔ ۱۱ بود. جلد زردرنگی داشت و مسئله‌های خوبی هم در آن نوشته شده بود. حتی وقتی دانشگاهم تمام شد، من هنوز مشترک مجلهٔ یکان بودم.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



احتمال علمی قیاسی است؛ در واقع از کل به جزء می‌آید در صورتی که آمار علمی استقرایی است و از جزء به کل می‌رود

مجلهٔ یکان ویژه‌نامه‌هایی هم داشت، از جمله ویژه‌نامهٔ شب عید و ویژه‌نامهٔ امتحان نهایی و کنکور و... انتشارات یکان هم کتاب‌های خوبی داشت، از جمله کتاب «هندسهٔ دوایر» پروفسور **هشترودی** که آن را هم تهیه کرده بودم. الان که این مصاحبه پیش آمد، یاد یکی از نویسندگان یکان، یعنی مرحوم آقای **غیور** افتادم. خدا رحمت کند ایشان را. در مصاحبه‌ای که مجلهٔ رشد ریاضی با ایشان داشت، وقتی از ایشان خواستند خودش را معرفی کند، گفتند: «بنابر آنچه در شناسنامه من نوشته شده، نامم **حسین** و فامیلی من غیور و متولد همدان...» من وقتی که این جواب را خواندم، بعد از آن سر کلاس‌ها بارها گفتم که آدمی به‌نام حسین غیور نبود که داشت جواب می‌داد، این هندسه بود که داشت جواب می‌داد. در کتاب هندسهٔ دوایر، پروفسور هشترودی به آقای غیور ارجاع می‌دهد که مثلاً این مسئله را غیور این‌گونه حل کرده است. شخصیت ایشان از همان دوران دبیرستان که می‌شناختمشان تا بعدها که آمدیم توی مجلهٔ رشد و همکار شدیم، برای من بسیار قابل احترام بود.

● **یاسی‌پور:** ایشان جامع‌الاطراف هم بودند. معلومات اضافه بر هندسه هم داشتند. به لحاظ ادبی و...

● **شرقی:** اصلاً شاعر بودند.

● **یاسی‌پور:** بله، معلم خود ما بود و هیئت درس می‌داد. یک‌بار از ایشان دربارهٔ کتاب «نصاب‌الصبیان» پرسیدم که کتابی خیلی مهجور و قدیمی است و بیشتر در مکتب‌خانه‌ها تدریس می‌شد. نام مؤلف آن را سؤال کردم. زنگ تفریح بود که پرسیدم و ایشان بلافاصله گفتند: چنین گوید **ابونصر فراهی:** کتاب من بخوان گر علم خواهی، ابونصر فراهی قرن هفتمی بود. منظورم این است که آقای غیور بسیار جامع‌الاطراف و متواضع بود. اصلاً توی چشم کسی نگاه نمی‌کرد، سرشان پایین بود و این‌قدر مأخوذ به حیا بود که همیشه وقتی سؤالی از ایشان می‌پرسیدیم، سر پایین و جواب می‌داد. به زبان ساده، معلم بود.

● **شرقی:** آقای دکتر پاشا، آیا شما در دورهٔ دبیرستان آقای **پرویز شهریاری** را می‌شناختید؟

■ **پاشا:** آقای شهریاری را من سال آخر دبیرستان با کتاب «مسابقات اتحاد جماهیر شوروی» شناختم و آن کتاب را هم تهیه کردم. از طریق آن کتاب با آموزش ریاضی شوروی سابق آشنا شدم و دیدم که واقعاً سخت کار می‌کنند. اگرچه قبلاً هم آن کتاب روسی را که آقای مظاهری داشت، دیده بودم و مسئله‌هایش را هم که واقعاً دشوار بود حل کرده بودم.

● **یاسی‌پور:** برای تغییر فضا، اگر اجازه بدهید من با یک سؤال آن هم در حیطهٔ فلسفهٔ ریاضی شروع کنم سؤالم این است که؛ آیا احتمال همان آمار است؟

● **شرقی:** من هم سؤالی نزدیک به این داشتم. آیا آمار و احتمال بخشی از ریاضیات است و یا علمی مستقل است؟

■ **پاشا:** آمار یک شاخه از ریاضیات و یا بخشی از آن است. همان‌طور که جبر و هندسه داریم، آمار هم داریم و در کنار آن احتمال هم داریم. ولی این دو با هم متفاوت‌اند. در استدلال ما یک استدلال قیاسی داریم و یک استدلال استقرایی. احتمال علمی قیاسی است؛ در واقع از کل به جزء می‌آید در صورتی که آمار علمی استقرایی است و از جزء به کل می‌رود.

● **یاسی‌پور:** چون خیلی خوب پاسخ دادند، جریمه‌شان این است که یک سؤال دیگر هم بکنیم (خنده). سؤالم این است که آیا درصدهای احتمال، ذاتی اشیا هستند؟ یعنی ذاتاً این‌ها درصد هستند یا ما این درصدها را به آن‌ها نسبت می‌دهیم؟ در واقع آیا ریاضیات به اشیا این‌ها را داده است، یا خود ذات اشیا این‌ها را دارد؟

■ **پاشا:** حدود پنج سال پیش، کتاب «نظریهٔ احتمال» را نوشتم که انتشارات دانشگاه تربیت معلم آن را به چاپ رساند. اتفاقاً کتاب سال هم شد و کتاب خوبی است؛ چرا تبلیغ نکنیم (خنده). در همین کتاب چند موضوع مشخص می‌شود: اول اینکه پیشامد خاصیت ذاتی یک مجموعه نیست. اگر شما یک زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را در نظر بگیرید، نمی‌توانید بگویید که این ذاتاً یک پیشامد است. در واقع ما می‌گوییم که پیشامد نسبت به یک سیگما میدان تعریف می‌شود. وقتی که سیگما میدان عوض شود، پیشامد هم عوض می‌شود. پس ذاتی نیست.

همین تعریف را برای متغیر تصادفی نیز می‌دهیم که این هم خاصیت ذاتی تابعی که بر فضای نمونه تعریف می‌شود، نیست. احتمال هم تابعی است که خودمان تعریف می‌کنیم. پس این هم نمی‌تواند ذاتی باشد. برای مثال، وقتی یک تاس را می‌اندازیم، شما فضای نمونه‌ای را می‌نویسید {۱,۲,...,۶}. چرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

نمی‌نویسید فرد و زوج، یا چرا نمی‌نویسید آمدن عدد اول و غیر اول؟ یعنی لزومی ندارد که حتماً اعداد ۱ تا ۶ را بنویسید. وقتی که ما مثلاً می‌نویسیم عدد کمتر از ۵ یا بیشتر، فضای نمونه‌ای ما دو عضو بیشتر ندارد. بعد سؤال می‌کنیم: احتمال اینکه از این دو حالت عددی کمتر از ۵ بیاید چه‌قدر است؟ همه می‌گویند $\frac{1}{2}$. اما دو حالت نیست. پس فضایمان را مناسب در نظر نگرفته‌ایم. بنابراین با توجه به اینکه مسئله‌مان چیست، ما به فضایمان تخصیص احتمال می‌دهیم. پس این درصدها و احتمال‌ها ذات آن پیشامد نیستند.

● **یاسی‌پور:** آیا در آموزش ریاضیات، آموزش تاریخ آن هم لازم است؟

■ **پاشا:** بله، خیلی هم مهم است. اگر ما بدانیم که یک مفهوم چه‌طور شکل گرفته است، یا خاستگاهش کجا بوده است، در تفهیمش به دانش‌آموزان کمک می‌کند. اینکه بدانیم مفهومی که با آن سروکار داریم، یک‌دفعه پدید نیامده و یک‌جورهایی قبلاً با زندگی ما سروکار داشته است، به خود ما هم کمک می‌کند. بله تاریخ ریاضیات باید گفته بشود و شاگرد باید این داستان را بشنود. خود من وقتی احتمال درس می‌دهم، اگر به مبحثی برسم که داستان آن را بدانم، برای دانشجویان بازگو می‌کنم.

● **یاسی‌پور:** فلسفهٔ ریاضیات چه‌طور؟ آن هم باید آموزش داده شود؟

■ **پاشا:** خب، باید اول مطلبی بگویم که شاید مستقیماً به این سؤال شما ارتباط پیدا نکند. ما سال آخر دبیرستان درس «منطق و فلسفه» داشتیم. این درس را که خواندم، روی طرز فکر و بیانم تأثیر می‌گذاشت و از همان سال به بعد بود که متوجه شدم، دارم جور دیگری فکر می‌کنم. متأسفانه با اینکه درس خوبی بود، آن را حذف کردند. در حالی‌که از نظر من وجود آن لازم بود. بعدها یکی دو ترم فلسفهٔ علم درس دادم که شامل فلسفهٔ ریاضی هم بود. کلاس پرشور و نشاطی بود که دانشجویان در آن مشارکت خوبی داشتند، فعال بودند، حرف می‌زدند و خلاصه اینکه کلاس زنده‌ای بود.

● **امیری:** آقای دکتر، من سؤالی دارم که مشخصاً برمی‌گردد به کتاب‌های درسی. چند سالی بود که در پایهٔ چهارم ابتدایی و دوم راهنمایی (هشتم) آزمون‌های تیمز برگزار می‌شد. ما دوبار در این آزمون‌ها شرکت کردیم. بچه‌های ما، به نسبت، با دو دسته از سؤالات غریبه بودند؛ آمار و احتمال. حالا آمار تاحدی در کتاب‌های دورهٔ دبستان (چهارم و پنجم) آموزش داده می‌شود، ولی احتمال نه. در برنامهٔ درسی جدیدی که کتاب‌هایش به تازگی تألیف شده، از سال دوم بحث احتمال وارد کتاب‌ها شد. امسال نیز در کتاب‌های پایه‌های چهارم و هشتم تألیف شد. من خودم شخصاً در تألیف آن‌ها مسئولیت‌هایی برعهده داشتم.

در برنامهٔ درسی کشورهایی مثل کانادا، احتمال از دورهٔ دبستان وارد کتاب‌های درسی شده است. حالا در اینجا دو سؤال پیش می‌آید: اول اینکه اصلاً به چه صورت باید این درس آموزش داده شود؟ آیا باید فقط آن را به‌صورت تجربی مطرح کنیم یا استدلال ریاضی را هم باید مطرح کنیم؟ دوم اینکه اصلاً بچه‌ها در این سن، پذیرای این مفهوم هستند یا خیر؟

■ **پاشا:** به امتحان‌های تیمز اشاره کردید. یادم می‌آید دههٔ هفتاد، اولین یا دومین‌باری بود که این امتحانات را برگزار می‌کردند. اوایل دههٔ هشتاد، من دو دانشجوی کارشناسی ارشد را انتخاب کردم تا روی داده‌های این آزمون کار کنند. من فهرست نمرات را که نگاه می‌کردم، بیشتر صفر می‌دیدم. خیلی تأسف می‌خوردم که چرا این‌قدر صفر داریم. یعنی بچه‌های ما تا این حد آمادگی ندارند؟!

دیگر اینکه در احتمال آن دیدی که باید باشد، وجود ندارد؛ البته هم در آمار و هم در احتمال. شما خودتان این را بهتر از من می‌دانید که آمار و مدل‌سازی را در کنار درس هندسه قرار داده‌اند و آن را معلم هندسه تدریس می‌کند. حالا می‌دانید چه بلایی بر سر این درس می‌آید؟ دو هفته آخر می‌آیند یک جزوه می‌دهند و همین، تمام شد و رفت. در کلاس‌های بازآموزی، دبیرها از ما می‌پرسیدند: چرا وقت بچه‌ها را می‌گیرید و یک سال به بچه‌ها آمار درس می‌دهید؟ ما این آمار را در ظرف دو هفته به بچه‌ها یاد می‌دهیم. من هم در جواب می‌گفتم در کمتر از نصف روز هم می‌شود اصول رانندگی را یاد داد، اما آیا فرد راننده می‌شود؟

آمار هم به تمرین احتیاج دارد. در صورتی که موقع تدریس تمام این تمرین‌ها و پروژه‌ها را حذف می‌کنند و فقط یک سلسله اصول را یاد می‌دهند. این درس باید یک هویت مستقل داشته باشد و تدریسش از ابتدا شروع بشود تا دانش‌آموز کم‌کم درگیرش شود.

اگر ما بدانیم که یک مفهوم چه‌طور شکل گرفته است، یا خاستگاهش کجا بوده است، در تفهیمش به دانش‌آموزان کمک می‌کند. اینکه بدانیم مفهومی که با آن سروکار داریم، یک‌دفعه پدید نیامده و یک‌جورهایی قبلاً با زندگی ما سروکار داشته است، به خود ما هم کمک می‌کند

توضیح و پوزش
در شمارهٔ ۸۳ مجله (پاییز ۱۳۹۳)
در متن مصاحبه با استاد محمدعلی شیخان، چند اشتباه رخ داده بود که به این وسیله اصلاح می‌گردد: در صفحهٔ ۴۲، ستون سوم، سطر چهارم به‌جای آقای «گل جان»، «عیسی حبیب‌الله خیر» و در سطر هشتم به جای «عباس شریفی‌مقدم»، «عباس شعری‌مقدم» صحیح است.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

محاسبهٔ انتگرال به کمک مساحت

محمد رحمانی *
دبیر ریاضی از تاکستان

کلیدواژه‌ها: انتگرال، مساحت دایره، تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت

برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع خطی می‌توان از تعبیر آن‌ها به‌عنوان مساحت استفاده کرد و جواب انتگرال معین را به‌دست آورد. مثلاً برای محاسبهٔ انتگرال زیر داریم:

$$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

با توجه به حدود انتگرال‌گیری باید $\frac{1}{4}$ مساحت دایره را برای محاسبهٔ این انتگرال معین به‌دست آورد:

$$\frac{1}{4}\pi(2)^2=\pi$$

که شبیه این مثال را در تمرین ۹ صفحهٔ ۲۴۲ کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، چاپ ۱۳۹۱ داریم.

در حالتی که زاویهٔ موردنظر برای محاسبهٔ مساحت قطاع جزء زاویه‌های متعارف مثلثاتی باشد نیز می‌توان این انتگرال را محاسبه کرد که آن‌را با مثال زیر توضیح می‌دهیم:

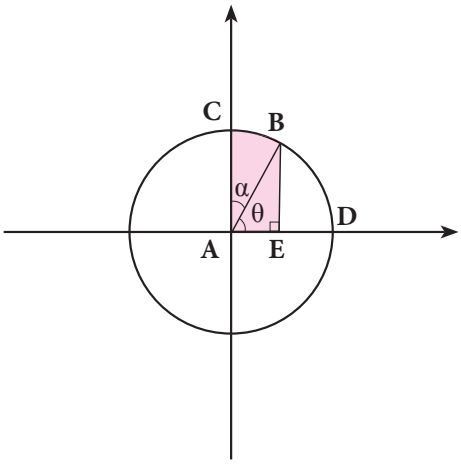
مثال ۱. با تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

برای رسم ناحیهٔ انتگرال‌گیری مثال بالا می‌دانیم که تابع زیر علامت انتگرال به‌صورت زیر است:

$$y=\sqrt{4-x^2} \qquad (1)$$

که با به توان ۲ رساندن تساوی به رابطهٔ $x^2+y^2=4$ می‌رسیم که دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ است. با توجه به رابطهٔ (۱)، y عبارتی مثبت است. پس نیم‌دایرهٔ بالایی برای آن انتخاب می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به حدود تغییرات x ناحیهٔ زیر (هاشورزده) را برای محاسبهٔ مساحت داریم:



شکل ۱

برای محاسبهٔ مساحت قطاع داریم:

$$AE=1,\ \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\angle CAB=\frac{\pi}{6}$$

بنابراین مساحت قطاع (با زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{6}$) برابر

است با:

$$S_{CAB}=\frac{1}{2}r^2\alpha=\frac{1}{2}(2)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

از طرف دیگر، برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABE داریم:

$$BE=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

$$S_{ABE}=\frac{1}{2}\sqrt{3}(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

که با جمع مساحت قطاع و مساحت مثلث، مساحت کل و جواب انتگرال را به‌صورت زیر داریم:

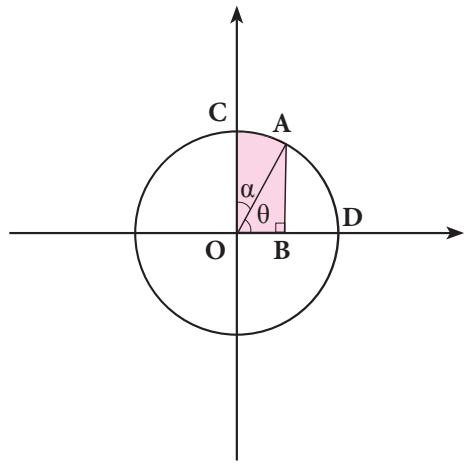
$$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

البته این انتگرال را با تغییر متغیر $x=2\sin\theta$ نیز می‌توان حل کرد. که این تغییر متغیر جزو بحث‌های کتاب دیفرانسیل نیست. اما زمانی‌که زاویهٔ موردنظر برای محاسبهٔ مساحت قطاع جزو زاویه‌های متعارف مثلثاتی نباشد می‌توان این انتگرال را نیز محاسبه کرد که آن‌را با مثال زیر توضیح می‌دهیم:

مثال ۲. با تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2\sqrt{9-x^2}\,dx$$

با رسم ناحیهٔ انتگرال‌گیری، ناحیهٔ هاشورزده را با پاره‌خط AB به یک مثلث و یک قطاع تبدیل می‌کنیم:



شکل ۲

مساحت مثلث OAB عبارت است از:

$$r=3\Rightarrow OA=3,\ AB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB عبارت است از:

$$\frac{\sqrt{5}\times 2}{2}=\sqrt{5}$$

همچنین برای محاسبهٔ مساحت قطاع OAC داریم:

$$\cos\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

با توجه به شکل، زاویهٔ α برابر است با:

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر، بنا به رابطهٔ $\cos^{-1}\theta+\sin^{-1}\theta=\frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\sin^{-1}\theta=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\theta$$

$$\Rightarrow\sin^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

حال با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت قطاع، مساحت تشکیل شده توسط زاویهٔ $\alpha=\sin^{-1}\frac{2}{3}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S=\frac{1}{2}r^2\alpha=\frac{1}{2}\times 3^2\times\sin^{-1}\frac{2}{3}=\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

بنابراین مساحت کل قسمت هاشورزده (مجموع مساحت مثلث OAB و قطاع OAC) برابر است با:

$$S_{\text{کل}}=\sqrt{5}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

و بنابراین:

$$\int_0^2\sqrt{9-x^2}\,dx=\sqrt{5}+\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع خطی می‌توان از تعبیر آن‌ها به‌عنوان مساحت استفاده کرد و جواب انتگرال معین را به‌دست آورد

* Rahmani2014Hmohammad@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تعمیم یک مسئله در هندسه

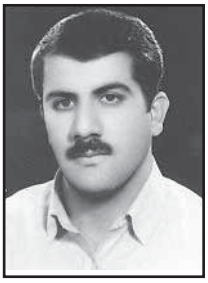
اشاره

درس هندسه به‌خاطر شهودی بودن مفاهیم آن، در مقایسه با درس‌های دیگر ریاضی، از جایگاه خاصی در آموزش ریاضی برخوردار است؛ از جمله در کشف بسیاری از ویژگی‌های هندسی و حتی تعمیم بسیاری از ویژگی‌های پنهان شکل‌های هندسی کارامد است. از طرف دیگر، بسیاری از مفاهیم جبری، ترکیبیاتی و غیره را می‌توان به کمک اشکال هندسی تبیین کرد و بسیاری از خواص جبری و ترکیبیاتی را به کمک اشکال هندسی حدس زد و در بعضی موارد، اثباتی هندسی برای آن‌ها ارائه داد.

در مقالهٔ «یک مسئله و چند راه‌حل» به قلم *مهدی قربانی* که در «رشد آموزش ریاضی» (زمستان ۱۳۸۳) به چاپ رسیده، یک مسئلهٔ هندسی مربوط به تعیین مساحت ناحیهٔ داخل یک مربع به پنج روش حل شده که در تمام روش‌ها، تقارن موجود در شکل مورد استفاده قرار گرفته است. با این تفاوت که در سه راه‌حل اول از روش هندسی، در راه‌حل چهارم از روش جبری حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، و در راه‌حل پنجم از مبحث انتگرال در حسابان استفاده شده است.

در اینجا ما به کمک روش ساده‌ای این مسئله را حل می‌کنیم. این روش ما را قادر می‌سازد که این مسئله را به هر چندضلعی منتظم، و نه فقط مربع، تعمیم دهیم. تعمیم این مسئله برای هر n ضلعی منتظم، رفتار غیرقابل پیش‌بینی برای حالت‌های n=۳ و n=۶ را روشن می‌سازد. چنانچه برای n=۳، مساحت ناحیهٔ موردنظر بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است و برای n=۶، مساحت ناحیهٔ موردنظر صفر است.

لازم به ذکر است، راه‌حلی که در اینجا داده می‌شود به‌طور اساسی به بررسی حالت n=۳ بستگی دارد.

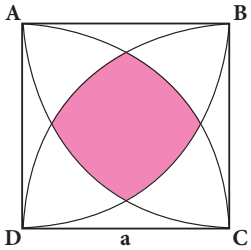


مرتضی بیات*
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان

زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

کلیدواژه‌ها: تقارن، تعمیم مسئلهٔ هندسه، مساحت n ضلعی منتظم

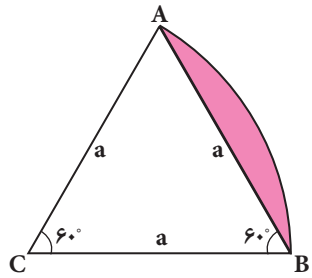
مسئلهٔ ۱. در شکل ۱ چهارضلعی ABCD مربع است. به مرکز هر یک از رأس‌های مربع، ربع دایره‌هایی، به شعاع a، ضلع مربع، رسم شده است. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.



شکل ۱

قبل از آنکه به حل این مسئله بپردازیم، به حل مسئله‌ای در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع می‌پردازیم. قابل ذکر است که این مسئله یک مسئلهٔ درون مسئله برای حل مسئلهٔ ۱ و نیز حالت n ضلعی منتظم خواهد بود.

مسئلهٔ ۲ (مسئلهٔ درون‌مسئله). در شکل ۲، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به مرکز C کمانی به شعاع a، رسم می‌کنیم. کمان از دو رأس مثلث می‌گذرد. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.

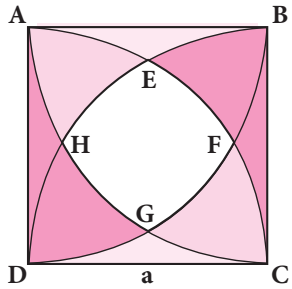


شکل ۲

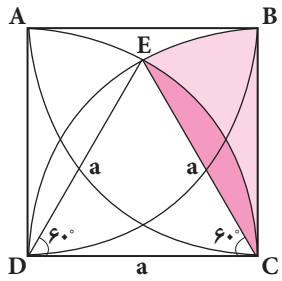
حل: مساحت ناحیه رنگ شده برابر است، با تفاضل مساحت قطاع از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع؛ بنابراین داریم:

$$\text{(مساحت قطعهٔ هاشورخورده)} = a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

حل مسئلهٔ ۱. شکل ۳ را در نظر می‌گیریم. اگر از مساحت مربع ABCD مساحت چهار مثلث منحنی‌الضلع CEB، BHA، AGD و DFC را کم کنیم، مساحت چهارضلعی منحنی‌الضلع EFGH به‌دست می‌آید. بنابراین کافی است تنها مساحت یک مثلث منحنی‌الضلع مانند CEB را به‌دست آوریم. بدین منظور شکل ۴ را در نظر می‌گیریم.



شکل ۳



شکل ۴

چون ED=DC=CE=a، پس مثلث DEC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و زاویه‌های ECD و EDC برابر °۶۰ هستند. برای به‌دست آوردن مساحت مثلث منحنی‌الضلع CEB، از مساحت قطاع ECB مساحت «قطعهٔ نقطه نشان شده» را کم می‌کنیم. حال طبق مسئلهٔ ۲، مساحت قطعهٔ نقطه نشان شده به‌دست می‌آید، بنابراین:

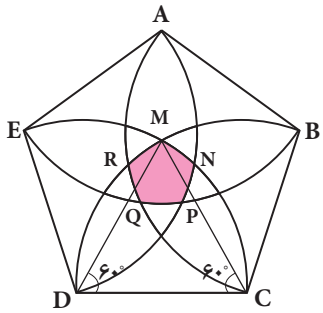
$$\text{(مساحت قطعهٔ نقطه نشان شده)} = \frac{a^{۲}\pi}{۱۲} - a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right) - \text{(مساحت قطاع ECB)} = \text{(مساحت مثلث منحنی‌الضلع CEB)}$$

پس:

$$\text{(مساحت ناحیهٔ EFGH)} = a^{۲} - ۴\left[\frac{a^{۲}\pi}{۱۲} - a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

اینک به‌جای چهارضلعی مربع در مسئلهٔ بالا، یک پنج‌ضلعی را در نظر می‌گیریم و به حل مسئلهٔ ۳ می‌پردازیم.

مسئلهٔ ۳. در شکل ۵، ABCDE یک پنج‌ضلعی منتظم است. به مرکز هر یک از رأس‌های پنج‌ضلعی کمانی به شعاع a، اندازهٔ ضلع پنج‌ضلعی، رسم می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.



شکل ۵

حل مسئلهٔ ۳. مشابه حل مسئلهٔ ۱، برای به‌دست آوردن مساحت MNPQR، باید از مساحت پنج‌ضلعی منتظم، مساحت مثلث‌های منحنی‌الضلع AQE، EPD، CMB، BRA و DNC را کم کنیم. در شکل ۵، رأس M را با پاره‌خط‌های MC و MD به‌ترتیب

بسیاری از مفاهیم جبری، ترکیبیاتی و غیره را می‌توان به کمک اشکال هندسی تبیین کرد و بسیاری از خواص جبری و ترکیبیاتی را به کمک اشکال هندسی حدس زد و در بعضی موارد، اثباتی هندسی برای آن‌ها ارائه داد

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

به C و D وصل می‌کنیم، بنابراین داریم:

(مساحت قطعه MCN) =

(مساحت مثلث MDC)-(مساحت قطاع MDC)

$$=\frac{\pi a^{۲}}{۶}-\frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}=a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

هر زاویهٔ یک پنج‌ضلعی (مثلاً $\angle DCB$) برابر $\pi-\frac{۲\pi}{۵}$ است که در آن $\frac{۲\pi}{۵}$ همان زاویهٔ مرکزی مقابل به هر ضلع پنج‌ضلعی در داخل دایرهٔ محاطی است.

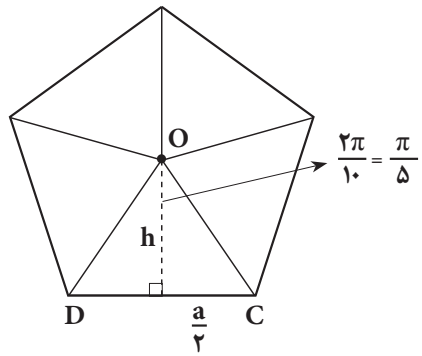
(مساحت مثلث منحنی‌الضلع CMB)=

(مساحت قطعهٔ MCN) - (مساحت قطاع MCB)

$$=\frac{a^{۲}}{۲}\left[\pi-\frac{۲\pi}{۵}-\frac{\pi}{۳}\right]-a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

اینک برای به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ MNPQR، از مساحت پنج‌ضلعی، پنج برابر مساحت مثلث منحنی‌الضلع CMB را کم می‌کنیم. مساحت یک پنج‌ضلعی به ضلع a از دستور زیر به‌دست می‌آید:

(مساحت پنج‌ضلعی ABCDE) $=۵\times\frac{a^{۲}}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})$



شکل ۶

(زیرا با توجه به شکل ۶ داریم:

$$h=\frac{a}{۲}\cot(\frac{\pi}{۵})$$

و نیز:

$$S(\Delta ODC)=\frac{a}{۲}h=\frac{a^{۲}}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})$$

اینک خواهیم داشت:

(مساحت ناحیهٔ منحنی‌الضلع MNPQR)

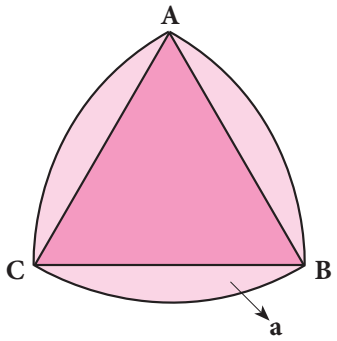
$$=۵\left[\frac{a^{۲}}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})\right]-۵\left[\frac{a^{۲}}{۲}\left(\pi-\frac{۲\pi}{۵}-\frac{\pi}{۳}\right)-a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

حال برای n ضلعی منتظم، مشابه آنچه که برای یک پنج‌ضلعی انجام دادیم، تنها با تغییر عدد پنج به n به دستور کلی زیر می‌رسیم (امتحان کنید!):

S=

$$n\left[\frac{a^{۲}}{۴}\cot(\frac{\pi}{n})\right]-n\left[\frac{a^{۲}}{۲}\left(\pi-\frac{۲\pi}{n}-\frac{\pi}{۳}\right)-a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

با توجه به دستور به‌دست آمده ملاحظه می‌شود، در حالت n=۶ مقدار عبارت بالا برابر صفر است. یعنی هیچ ناحیهٔ هاشورخورده‌ای به‌وجود نمی‌آید. در ضمن در حالت n=۳، مقدار این عبارت بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. مطابق شکل ۷ این امر کاملاً قابل توجیه است.



شکل ۷

* Baayyaatt@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ایستگاه دوم:
معماهایی از سرزمین ایران باستان!

نوروز باستانی در راه است. به این مناسبت، ما برایتان معماهایی از یک سرزمین باستانی داریم. حتماً می‌دانید که ایرانیان باستان مردمانی یکتاپرست بودند و *اهورامزدا* را منشأ خیر، و اهریمن یا همان شیطان را منشأ شر می‌دانستند. در جزیره‌ای دورافتاده از این سرزمین، دو دسته مردم زندگی می‌کردند: مزدائیان و اهریمنیان! مزداییان راستگو و اهریمنیان دروغگو بودند. همهٔ اعضای یک خانواده هم از یک نوع بودند؛ اهریمنی یا مزدایی. حالا چند معما از مردم این جزیرهٔ دورافتاده داریم.

● **معمای اول:** از دو برادر به نام‌های بهمن و پرویز دربارهٔ ازدواجشان سؤال شد.

بهمن گفت: «ما هر دو ازدواج کرده‌ایم.»

پرویز گفت: «من ازدواج نکرده‌ام.»

آیا بهمن ازدواج کرده است؟ پرویز چه‌طور؟

● **معمای دوم:** یک روایت دیگر از همین داستان وجود دارد! مطابق این روایت، بهمن گفت: «ما هر دو ازدواج کرده‌ایم یا اینکه هر دو ازدواج نکرده‌ایم.»

پرویز گفت: «من ازدواج نکرده‌ام.»

حالا چه می‌توان گفت؟ آیا بهمن ازدواج کرده است؟ پرویز چه‌طور؟

● **معمای سوم:** قاضی این جزیرهٔ عجیب، یک مزدایی خردمند بود. روزی مردی را که متهم به دزدیدن یک شتر بود پیش او آوردند. قاضی از آن مرد پرسید: «آیا این درست است که شما یک‌بار گفته‌اید که هرگز شتر ندزدیده‌اید؟»

متهم پاسخ داد: «بله.»

قاضی دوباره از او پرسید: «آیا شما تا به‌حال گفته‌اید که آن را دزدیده‌اید؟»

و متهم به این سؤال پاسخ بله (یا خیر) داد. بعد از کمی تفکر قاضی توانست نتیجه بگیرد که متهم بی‌گناه (یا مجرم) است.

متهم بی‌گناه بود یا مجرم؟

● **معمای چهارم:** جزیره یک و فقط یک جارچی داشت و قاضی می‌خواست بداند این جارچی مزدایی است یا اهریمنی. از بین اشخاص محتمل، سه نفر، که آن‌ها را A، B و C می‌نامیم، احضار شدند و در دادگاه این سخنان را گفتند:

A: من جارچی جزیره نیستم؛

B: جارچی جزیره یک اهریمنی است؛

C: ما هر سه نفر اهریمنی هستیم.

آیا جارچی جزیره مزدایی بود یا اهریمنی؟ آیا قاضی با این اطلاعات توانست جارچی را شناسایی کند؟

● **معمای پنجم:** در ادامهٔ همان جملات، A گفت: «C اهریمنی است.» حالا بگویید جارچی جزیره کیست؟

● **معمای ششم:** بار دیگر سه نفر دیگر که آن‌ها را هم A و B و C می‌نامیم، به دادگاه رفتند و قاضی می‌خواست بداند کدام‌یک از آن‌ها اهریمنی و کدام یک مزدایی است. آن‌ها جملات زیر را در دادگاه گفتند:

A: دقیقاً دو تا از ما مزدایی هستیم.

B: نه این‌طور نیست، فقط یکی از ما مزدایی است.

C: درست است!

کدام‌یک از آن‌ها مزدایی و کدام یک اهریمنی بود؟

● **معمای هفتم:** این‌بار ۱۰ نفر به دادگاه رفتند! آن‌ها را A_1، A_2، ... و A_{10} می‌نامیم. آن‌ها جملات زیر را گفتند:

A_1: دقیقاً یکی از ما اهریمنی است.

A_2: دقیقاً دو نفر از ما اهریمنی هستند.

A_3: دقیقاً سه نفر از ما اهریمنی هستند.

.

.

.

A_9: دقیقاً نه نفر از ما اهریمنی هستند.

A_{10}: همهٔ ما اهریمنی هستیم.

هر یک از این افراد چگونه بودند؟ اهریمنی یا مزدایی؟

غلامرضا یاسی‌پور*

۹

رشد آموزش ریاضی

شماره‌های ۲۵ تا ۲۸

کلیدواژه‌ها: عدد اویلر، نپر، گروه و تقارن، حدس گلدباخ، اصول اقلیدس، المپیاد بین‌المللی ریاضی

در گشت و گذارمان در مجله رشد آموزش ریاضی، به شمارهٔ ۲۵، بهار ۱۳۶۹ سال هفتم رسیده‌ایم. بهای این شماره همچنان ۱۰۰ ریال است و صفحهٔ۲ جلد آن با تصویری از دانش‌آموزان المپیاد ریاضی در حال امتحان مرحلهٔ نهایی مزیّن شده است.

بعضی از مقاله‌های این شماره عبارت‌اند از: *گروه تقارن، یادداشتی در مورد مشتق بدون حد، خطاها، معرفی عدد e، مباحثی دربارهٔ هندسه، و تازه‌های کتب و نشریات ریاضی.* لازم به ذکر است که در نقل مطالب این مقالات، آن‌ها را بدون ویرایش، یا ویرایش بسیار جزئی، می‌آوریم.

در مقالهٔ معرفی عدد e از *جواد لآلی* چنین آمده است:

«عدد e یکی از اعداد مهم ریاضی، هم‌ردیف عدد π است. اهمیت آن نه فقط در ریاضیات محض است، بلکه در ریاضیات کاربسته نیز نقش حیاتی دارد. این عدد اولین‌بار به‌وسیلهٔ *لئونارد اویلر*[1] کشف شده است. نمادی که برای این عدد به‌کار رفته، از اویلر است، و آن حرف اول کلمهٔ «Euler» می‌باشد. او پیشنهاد نمود که این عدد به‌عنوان مبنای لگاریتم به‌کار رود. از سال ۱۷۲۸ به بعد، زمانی که اویلر حدود ۲۰ سال عمر داشت، این عدد و نماد آن را در مقاله‌های منتشر نشدهٔ خود به‌کار می‌برد. البته امروزه این عدد را به‌عنوان مبنای لگاریتم *نپر*[2] (یا طبیعی) به‌کار می‌برند، و انتخاب صفت [!] نپر، برای آن، تنها بدین‌خاطر است که جان نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰) اولین فردی بود که به اختراع [!] لگاریتم پرداخت. نپر بحث خود را دربارهٔ لگاریتم‌ها در سال ۱۶۱۴، در رساله‌ای تحت عنوان «شرح قانون شگفت‌انگیز لگاریتم‌ها»، شروع و منتشر کرد. این اثر حاوی جدولی است که لگاریتم سینوس زوایا را برای دقیقه‌های متوالی یک کمان به‌دست می‌دهد. از بین لگاریتم‌ها، با مبناهای مختلف، آن‌هایی که بیش از دیگران اهمیت دارند، یکی با مبنای ۱۰ است که به *لگاریتم معمولی*[3] معروف است، و دیگری با مبنای عدد

e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸...

است که به *لگاریتم طبیعی*[4] (یا لگاریتم نپری) مشهور است.»

در مقالهٔ «*مباحثی در هندسه*» از حسین غیور آمده است:

«هندسهٔ اقلیدسی به‌نام «اصول»، نخستین دانش با روش اصل موضوعی است که در ۳۰۰ سال قبل از میلاد به‌وسیلهٔ *اقلیدس* تدوین و تألیف شده است. کتاب اصول که از بزرگ‌ترین کشفیات در تاریخ علم به‌شمار می‌آید، شامل پنج اصل موضوع و هشت اصل متعارفی و تعدادی تعریف و قرارداد و قضایاست. اصول پنج‌گانهٔ آن عبارت‌اند از:

۱. از دو نقطه تنها یک خط راست می‌گذرد؛
۲. هر پاره‌خط را می‌توان از هر یک از دو طرف به اندازهٔ پاره‌خط معلومی امتداد داد؛
۳. به مرکز هر نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که شعاع آن مساوی پاره‌خط معلومی باشد؛
۴. همهٔ زاویه‌های قائمه قابل انطباق بر یکدیگرند؛
۵. اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند و با آن‌ها دو زاویه بسازد، چنانچه مجموعشان کمتر از دو قائمه باشد، آن‌گاه که دو خط مفروض را از دو طرف امتداد دهیم، در طرفی که زاویه‌های کوچک‌تر از دو قائمه واقع شده‌اند، متقاطع می‌شوند.

در تلاش و کوششی که بعدها برای اثبات اصل پنجم به‌کار رفت، برای این اصل، هم‌ارزهایی پیدا شده که یکی از آن‌ها همان اصلی است که امروزه به‌جای اصل پنجم به‌کار می‌رود؛ یعنی: از نقطه‌ای واقع در خارج خط، تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.

تبصره: از دانشمندان ایرانی، حکیم عمر *خیام نیشابوری* اولین کسی بود که برای اثبات اصل پنجم اقدام کرد.»

یکی از بخش‌های جالب این شماره بخش «*تازه‌های کتب و نشریات ریاضی*» است. در این بخش از سه منبع نام برده شده است که عبارت‌اند از:

۱. *مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا*، از سری کتب ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۲۹، گردآوری و حل توسط آرتینو، گاگلیون و

۲۵

شل، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۰۰۰ ریال.

۲. *آشنایی با نظریهٔ حلقه‌ها*، از منصور معتمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۶۷، ۱۰۵۰ ریال.

۳. شمارهٔ ۱۷ مجلهٔ «*پژوهش در علم و صنعت*»، از انتشارات سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران.

سردبیر شمارهٔ ۲۵، دکتر محمدحسن *بیژن‌زاده* و مدیر داخلی آن، *میرزا جلیلی* است. در مقالهٔ *گزارش بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور* به قلم سردبیر چنین می‌خوانیم:

«بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ ۲۲ لغایت ۲۶ اسفندماه ۱۳۶۸ در دانشگاه اصفهان برگزار گردید. کنفرانس سالانهٔ ریاضی کشور بزرگ‌ترین حادثهٔ ریاضی است که طی یک سال در کشور اتفاق می‌افتد. در این کنفرانس علمی بیش از ۱۰۰۰ نفر از اساتید و دبیران ریاضی کشور و ۱۸ تن از ریاضی‌دانان و اساتید خارجی از کشورهای ژاپن، فرانسه، شوروی، انگلستان، آمریکا، آلمان، اطریش، هند و پاکستان شرکت داشتند. جلسهٔ افتتاحیهٔ کنفرانس باشکوه و زیبایی خاصی تشکیل شد که ضمن آن ریاست محترم دانشگاه اصفهان، آقای دکتر *رزمجو* و وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی، برادر دکتر *مصطفی معین*، در اهمیت ریاضیات و سهم ریاضی‌دانان اسلامی در بسط و گسترش این علم سخنانی ایراد کردند.»

در مقالهٔ «*گروه و تقارن*» از دکتر م. ر. درفشه می‌خوانیم:

«یکی از مهم‌ترین مفاهیم در علوم، به‌خصوص بیولوژی، شیمی، فیزیک و ریاضیات، مفهوم تقارن است. این مفهوم برای هنرمندان هنرهای زیبا نیز یکی از مفاهیم اساسی است. معمولاً همراه این مفهوم کلمهٔ متقارن نیز آورده می‌شود. بیشتر اشخاص شکلی را متقارن می‌نامند که خوش‌ترکیب و دارای تعادل باشد. به‌عبارت دیگر، شکلی را متقارن می‌نامند که دارای محور تقارن یا صفحهٔ تقارن باشد. در صورتی که اگر به تعریف این مفهوم ریاضی که در زیر می‌آید توجه کنیم، چنین نیست. با وجود این، اشکالی که از تقارن‌های بیشتری برخوردار باشند، بیشتر زیبا و خوش‌ترکیب به‌نظر می‌آیند. نقش‌هایی که روی ظروف به‌جا مانده از عهد باستان دیده می‌شوند، و یا مجسمه‌های بناهای تاریخی و یا نقش و نگارهایی که روی دیوارهای این بناها حک شده‌اند، همگی بیانگر این نکته است که بشر از قرن‌ها پیش با این مفهوم آشنا بوده است و هنرمندان اهمیت آن را درک کرده‌اند.

یکی از اشیای متقارن که بیشتر اشخاص آن را می‌شناسند، بدن انسان است. اگر صفحه‌ای را در نظر بگیرید که از روبه‌رو از وسط بدن انسان گذشته باشد، آن‌گاه بدن انسان به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. تساوی به این معناست که اگر به‌جای صفحه یک آینهٔ m قرار دهیم، آن‌گاه تصویر یکی از این قسمت‌ها در m درست مساوی قسمت دیگر است. یعنی تصویر دست چپ دست راست می‌شود و برعکس. در واقع تساوی که ما آن‌را *تساوی نسبی* یا قابلیت انطباق می‌نامیم، اساس تعریف *تقارن ریاضی* است. تقارن مفهومی هندسی است که وارد جبر شده است. در اینجا ترجیحاً تقارن را برای اشکال هندسی تعریف می‌کنیم و ارتباط آن را با گروه‌ها بیان می‌نماییم.»

مطالب دیگر مجله عمدتاً در مورد مسائل و حل آن‌هاست. البته مجله *اسامی خوانندگانی که حل مسائل ۲۳ و اسامی همکاران و دانش‌آموزان را که حل صحیح مسائل ۲۲ و شماره‌های قبل را فرستاده‌اند*، آورده است.

***

شمارهٔ ۲۶ مجله در تابستان ۱۳۶۹ انتشار یافته است. اعضای هیئت تحریریه عبارت بوده‌اند از دکتر *اسماعیل بابلیان*، *ابراهیم دارابی*، *حسین غیور*، *جواد لآلی*، دکتر *علیرضا مدقالچی*، *میرزا جلیلی*، دکتر *محمدحسن بیژن‌زاده* و *محمودنصیری*.

در پیش‌گفتار این شماره مقاله‌ای در مورد نقد مطالب شش سالهٔ مجله به قلم آقای *امیراکبر مجدآبادنو* نوشته شده است که در آن به‌طور مختصر چنین می‌خوانیم:

«هیئت تحریریهٔ مجله، ضمن تشکر از آقای مجدآبادنو، مراتب خوش‌حالی خود را از اینکه نقد و بررسی در مجموع منصفانه و ماهرانه بوده است، ابراز داشته‌اند. در حاشیهٔ این امر نکاتی ملحوظ است که ذیلاً به اختصار یادآوری می‌گردد.

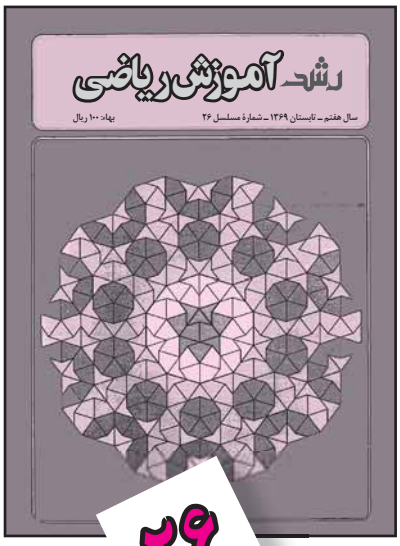
نقد و بررسی منصفانه نوشتارها، کتب تألیفی و ترجمه‌ای، و مجلات علمی امری است که به‌خودی خود نشانه‌ای از رشد تعالی یک جامعهٔ سالم فرهنگی و پویا می‌باشد. در دنیای پرتکاپوی علم، نه‌تنها این مهم امری عادی و پذیرفتنی است، بلکه در اغلب موارد برای بهتر عرضه کردن محتوای کتب و مقالات تخصصی، خاصه در ریاضیات، بیشتر مجلات علمی بخشی از کار خود را به نقد و بررسی اختصاص داده‌اند و برخی نیز منحصراً به انتشار نقد و بررسی‌های انجام شده در مورد مقالات علمی تازه منتشره، مشغول‌اند.»

این شماره با «*تدریس نظریهٔ اعداد به روش دیگر*» از *جواد لآلی* آغاز می‌شود که در آن می‌خوانیم:

«قضیهٔ اصلی علم حساب ثابت می‌کند که اعداد اول، به انضمام عمل ضرب، *عناصر سازه‌ای* برای اعداد طبیعی نا-یک است و هر عدد طبیعی نا-یک را می‌توان به کمک اعداد اول و عمل ضرب تولید کرد. *هاردی* گفته‌ای نزدیک بدین مضمون دارد که طبیعی‌ترین عملی که برای اعداد صحیح مثبت می‌توان تعریف کرد، عمل ضرب است، نه جمع و تفریق و به‌همین جهت است که مسائلی که در نظریهٔ اعداد مطرح می‌شوند و به نحوی در آن‌ها عمل جمع و یا تفریق به‌کار رفته است، از مسائل مشکل نظریهٔ اعدادند. نمونه‌ای از این نوع مسائل «قضیهٔ بزرگ *فرما*» و «حدس *گولدباخ*» است. گولدباخ در یکی از نامه‌های خود به اویلر که در سال ۱۷۴۲ نوشت، دو حدس به‌صورت زیر عرضه کرد:

۱. هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ حاصل جمع دو عدد اول است.

۲. هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۵ مجموع سه عدد



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

اول است.

همچنین، احکام (۱) و (۲) با یکدیگر معادل‌اند. اگرچه صورت احکام فوق ساده است، ولی هنوز به‌عنوان مسئله‌های باز در قلمروی ریاضیات مطرح‌اند.

قضیهٔ اصلی علم حساب مجموعهٔ اعداد صحیح را به سه دستهٔ کاملاً متمایز تقسیم می‌کند.»

مقالهٔ «*اعداد مختلط*» با این جملات آغاز می‌شود:

«ابتدایی‌ترین نوع عدد، اعداد طبیعی هستند که کودکان آن‌ها را برای شمارش اشیا یاد می‌گیرند. کوشش برای اینکه عمل تفریق، یعنی حل معادلهٔ x+a=b نسبت به x وقتی که a و b معلوم‌اند، میسر باشد، به معرفی صفر و اعداد منفی منجر می‌شود. در این صورت مجموعه اعداد صحیح «...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...» ساخته می‌شود. وقتی می‌خواهیم عمل تقسیم را انجام دهیم، باید معادلهٔ ax=b را که در آن a و b معلوم و a مخالف صفر است، حل کنیم. برای اینکه حل این معادله در تمام حالات ممکن باشد، احتیاج به معرفی اعداد گویا (کسرها) داریم. این اعداد را با نماد $\frac{b}{a}$ که در آن a و b صحیح و $a\neq 0$، نشان می‌دهیم.

اکنون چهار عمل اصلی حساب، یعنی اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم (به‌جز تقسیم بر صفر) قابل استفاده هستند.

اعداد گویا تاحدودی نیاز ما را در مسائل ابتدایی حساب برطرف می‌کند، اما باز برای حل معادلهٔ $x^2=2$ دچار مشکل خواهیم شد. زیرا می‌توانیم ثابت کنیم که عدد $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به‌صورت $\frac{p}{q}$ که در آن p و q صحیح باشند، نوشت. بنابراین این نوع اعداد، گویا نیستند. این اعداد را «گنگ» می‌نامیم. با اضافه کردن این اعداد به مجموعه اعداد گویا، مجموعهٔ اعداد حقیقی را داریم.»

مقالهٔ «*مسئله حل کردن در برنامهٔ ریاضی (۱)*» با پیشنهاداتی برای مسئله حل کردن آغاز می‌شود. پیشنهاداتی که در آن آمده [از این قرار] است:

«روش صحیحی جهت حل مسئله وجود ندارد. خیلی باید با شهامت بود، تا راه یا راه‌هایی برای بررسی مسائل پیشنهاد کرد. تعداد راه‌های خوب و مؤثر برای یاد دادن تفکر ریاضی برابر با تعداد معلمین خوب است. علاوه بر این، روش‌هایی که در یک کلاس به‌کار گرفته می‌شود نیز یک مسئلهٔ شخصی است. آنچه برای یک معلم کارایی دارد، شاید برای یک معلم دیگر قابل استفاده نباشد و یا برای استفاده از آن باید مورد بازنگری قرار داده شود. پیشنهادات زیر با توجه به این واقعیت‌ها تنظیم می‌شوند. این پیشنهادات کارایی خوبی در کلاس‌های مختلف داشته است. خواهش این است که این پیشنهادات را مثل پیشنهادهای یک همکار نزدیک مورد بررسی قرار دهید. سعی کنید آن‌هایی را که به نظرتان درست و مناسب می‌آیند، آزمایش کرده سپس آن‌ها را طوری طراحی نمایید که به‌راحتی بتوانید با آن‌ها کار کنید.

الف. پیشینه و منطق اساسی

اختلاف زیادی بین راهی که ما در ریاضی به‌کار می‌بریم و راهی که دانش‌آموزان آن را می‌بینند، وجود دارد. کار ریاضی یک کار اساسی است و آن پیشروی در مراحل عمل، کشف و رسیدن به درک طبیعت خاص هدف‌ها و دستگاه‌های ریاضی است. ما ابتدا به یک مطلب ریاضی برمی‌خوریم. همان‌طور که در آن غور می‌کنیم، این تصور در ما رشد پیدا می‌کند و این گمان تقویت می‌شود که در آن چیز درستی باید وجود داشته باشد. با مثال‌هایی آن را آزمایش می‌کنیم و به جست‌وجوی مثال نقض می‌پردازیم. سعی داریم که درک کنیم که چرا آن چیز باید درست باشد. این کوشش‌ها ممکن است موفق یا ناموفق باشد. در شروع ممکن است بارها اشتباه کنیم، راه‌های عوضی برویم، کم‌حوصله و مأیوس شویم و یا بازنگری‌های پیگیر و موفقی داشته باشیم تا اینکه به نتیجه برسیم.»

این مقاله از انتشارات «انجمن ریاضی آمریکا» و ترجمهٔ *میرزا جلیلی* است و ما خواننده را به مطالعهٔ کل آن سفارش می‌کنیم.

مقالهٔ «*مطالبی راجع به هندسه*» از *حسین غیور* ادامهٔ مطلب شمارهٔ قبل در این مورد است. این مقاله با ایراد *خیام* آغاز [می‌شود] و به این ترتیب است:

«*ایراد خیام و خواجه نصیرالدین طوسی به اصل پنجم اقلیدس*

هندسهٔ اقلیدسی در قرون اولیهٔ اسلامی همراه با فلسفه و سایر علوم از یونانی به عربی ترجمه شد و از قرن سوم تا هشتم هجری قمری مورد توجه شدید دانشمندان ایرانی که مؤلفات خود را به زبان عربی می‌نوشتند، بوده است.

شرح ما اشکل من مصادر اقلیدس تألیف *حکیم عمر خیام*، رساله‌ای است که در آن این دانشمند اولین‌بار (لااقل در ایران) به اصل پنجم اقلیدس ایراد می‌گیرد که چرا اقلیدس این اصل را بدیهی فرض کرده، در صورتی‌که برای احکامی بدیهی‌تر از آن اقامهٔ برهان نموده است. خود [خیام] برای اثبات این اصل، هشت قضیه مطرح می‌کند و در اثبات قضیهٔ هشتم (دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند)، برهان فلسفی می‌آورد.

دو قرن بعد، *خواجه نصیرالدین طوسی* ایراد خیام را به اقلیدس می‌پذیرد و می‌گوید خیام برای اثبات قضیهٔ هشتم دلیل فلسفی آورده است، در صورتی که باید برهان آن هندسی، و متکی به چهار اصل قبلی کتاب اقلیدس باشد؛ و خود [خواجه نصیر] برای اثبات اصل پنجم برهانی اقامه می‌کند که بعدها مورد قبول واقع نمی‌شود. خواجه نصیرالدین طوسی از حکما و ریاضی‌دانان بزرگ قرن هفتم هجری قمری است که کتاب *تحریر اقلیدس* او که به زبان عربی نوشته شده، از جمله کارهای بزرگ ایرانیان در این رشته است... .

شک خیام و نوشته‌های خواجه نصیرالدین دربارهٔ اصل پنجم در زمان‌های بعد ادامه پیدا می‌کند تا در قرن نوزدهم منتهی به کارهای گاوس و پیدایش فضاهای جدید و هندسه‌های *لباچفسکی* و *ریمانی* می‌شود.»

مقالهٔ «*تعریف عدد e به کمک اصل تمامیت (کمال)*» از *جواد لآلی* در مورد عدد e چنین آورده است:

«*مقدمه*: در شمارهٔ قبل، تحت عنوان معرفی عدد e، به روش مقدماتی، این عدد را تعریف کردیم. در اینجا می‌خواهیم به روشی دیگر و با مقدمات لازم، به معرفی این عدد بپردازیم. اگرچه برای بیان چنین مقدماتی نیاز به مقالات جداگانه است، ولی به‌خاطر کوتاهی مطلب و رسیدن به بیان اصلی که همان معرفی عدد e است، فهرست‌وار از مفاهیم ارائه شده می‌گذریم.

۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی با نسبت کوچک‌تری، یعنی «<» باشد. این نسبت مجموعهٔ A را مرتب می‌کند، به‌گونه‌ای که هر دو نقطهٔ متمایز آن مقایسه‌پذیرند. یعنی اگر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

x و y دو نقطهٔ متمایز A باشند، آن‌گاه $x<y$ یا $y<x$. همین موضوع می‌تواند مبنای تعریف ذیل باشد.

۱.۱ تعریف: فرض کنید که A زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی باشد. در این صورت:

الف. عدد حقیقی a را یک کران بالای A خوانیم در صورتی که، به ازای هر x از A داشته باشیم: $x\leq a$. اگر چنین aای موجود نباشد، این مجموعه را از بالا بیکران خوانیم.

ب. عدد b را یک کران پایین A خوانیم در صورتی‌که، به ازای هر x از A داشته باشیم: $b\leq x$. اگر چنین bای موجود نباشد، این مجموعه را از پایین بیکران خوانیم.

ت. مجموعهٔ A را کران‌دار خوانیم در صورتی‌که از پایین و بالا کران‌دار باشد. در غیر این صورت، A را بیکران می‌خوانیم. اگر مجموعه‌ای بیکران باشد، این مجموعه از بالا یا پایین کرانی ندارد. یعنی اگر از بالا (از پایین) بیکران باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی a، A عضوی بزرگ‌تر از آن (کوچک‌تر از آن) دارد.»

مابقی مطالب مجله بیشتر در مورد مسائل ریاضی و حل آن‌هاست که خوانندهٔ علاقه‌مند خود می‌تواند به آن‌ها رجوع کند. آخرین مطلب مجله *جواب نامه‌ها* از ابراهیم دارابی و جواد لآلی است و به این ترتیب مجله به پایان می‌رسد.

***

شمارهٔ ۲۷ مجله در سال هفتم انتشار آن، در پاییز ۱۳۶۹ به‌دست خوانندگان آن رسید. در پیش‌گفتار مجله چنین می‌خوانیم:

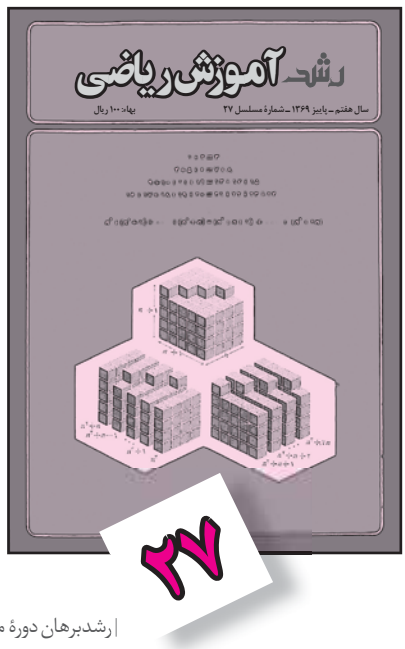
«همچنان که بارها گفته شده است، یکی از اهداف انتشار مجلهٔ رشد، انعکاس یافته‌های تجربی و پژوهشی دبیران محترم در زمینهٔ آموزش ریاضی و نتایج تحقیق آن‌ها و نیز سایر مدرسین این رشته می‌باشد. به‌علاوه، پویایی در امر آموزش خود مستلزم مطالعه و تحقیق بیشتر و تبادل‌نظرهای علمی بین همهٔ مدرسین و اساتید آموزش ریاضی است. انتظار ما بر این است که از سوی دبیران محترم مقالات بیشتری دریافت نماییم. در حالی که مجله بیشتر به‌سوی یک مجلهٔ علمی ـ تحقیقی در زمینه‌های مختلف ریاضی، به‌خصوص وجوه آموزشی آن حرکت می‌کند، شایسته است که همکاران محترم دبیر سعی و اهتمام بیشتری نموده و با ارسال مقالات پرمحتواتر، سهم مهم‌تری از صفحات مجله را به خود اختصاص دهند.»

*

در مقالهٔ «*مسئله حل کردن در ریاضی (۲)*» که ادامهٔ همین بحث در شمارهٔ قبل است، می‌خوانیم:

«نوع مسائلی که ما در کلاس مورد بحث قرار می‌دهیم و تجاربی که از آن‌ها می‌آموزیم، در طول سال تغییر می‌کند. مقایسهٔ تشابه یادگیری یک بازی ورزشی با یک مسئلهٔ فکری، مراحل پیشرفت یادگیری را نشان می‌دهد. در اوایل سال که دانش‌آموزان مهارت کمتری در تکنیک‌های حل مسئله دارند، در آن دسته از تکنیک‌های اساسی که بعداً در طول دوره به‌کار گرفته می‌شوند، آموزش می‌بینند و تمرین می‌کنند (جست‌وجو برای استدلال‌های استقرایی، بررسی و آزمایش حالات خاص، استفاده از مسائل ساده‌تر در رابطه با مسئلهٔ اصلی، تخصیص و تعمیم)؛ درست به‌همان طریقی که مثلاً یک مبتدی در تنیس آموزش می‌بیند و تمرین می‌کند که چگونه سرو بزند و یا چگونه با جلو و پشت دست آبشار بزند. زمانی که مهارت‌های اساسی خوب فراگرفته شد می‌توان از آن‌ها در شرایط مختلفی که پیش می‌آید، به‌طور گسترده و متنوعی استفاده کرد. مسائلی که ما کار می‌کنیم، به‌تدریج مشکل‌تر و وقت‌گیرتر می‌شوند. در حقیقت دانش‌آموزان دیگر تنها اصول حل مسئله را نمی‌بینند، بلکه یک آموزش خوب ریاضی محض به آن‌ها داده می‌شود.

مطلبی که اکنون رودرروی دانش‌آموزان قرار می‌گیرد، انتخاب تکنیک‌های مناسب برای برخورد با مسائل و استفادهٔ مفید و مؤثر از آن‌هاست. بحث‌های کلاسی نیز به‌تدریج، همان‌طور که پیش می‌رویم، تغییر می‌کنند و تأکید بیشتر روی طرح‌ریزی راه‌حل‌ها و ارزشیابی آن‌ها قرار می‌گیرد. بعضی از مسائل نمونهٔ کلاس در زیر مطرح شده است...»



در این شماره تحت عنوان «*المپیادهای ریاضی بین‌المللی*»، در حاشیهٔ نقد کتاب چنین می‌خوانیم:

«جهت آشنایی با محتوای کتاب *المپیادهای ریاضی بین‌المللی*، و به انگیزهٔ تألیف و ترجمهٔ آن، بی‌مناسبت نیست که نظری اجمالی به تاریخچهٔ این نوع المپیادها و نحوهٔ گزینش و انتخاب و جمع‌آوری مسائل آن داشته باشیم.

در سال ۱۹۵۹، کشور رومانی، از کشورهای بلوک شرق (رومانی، مجارستان، چکسلواکی، لهستان، شوروی و آلمان‌شرقی) دعوت نمود تا در یک مسابقهٔ ریاضی شرکت کنند. این ابتکار کشور رومانی موجب گردید که مبنای یک مسابقهٔ ریاضی بین‌المللی در جهان گذاشته شود و تاکنون، هر ساله، این مسابقه در یکی از کشورهای شرکت‌کننده برگزار شده است. اگرچه در شروع آن تعداد کشورهای شرکت‌کننده اندک بود، ولی به مرور زمان، سال به سال به تعداد آن‌ها افزوده گردید به‌گونه‌ای که در سال ۱۹۷۷ به ۲۱ کشور، و در سال ۱۹۸۷، که ایران برای اولین‌بار در آن شرکت کرده بود[5]، به ۴۲ کشور رسید. هر کشور یک تیم هشت نفره، شامل شش دانش‌آموز و یک سرپرست اول و یک سرپرست دوم، به کشور میزبان اعزام می‌دارد. سرپرستان اول هیئتی به‌نام هیئت ژوری تشکیل می‌دهند که مهم‌ترین مرجع تصمیم‌گیری در این نوع مسابقات است. هر یک از سرپرستان اول، حداکثر پنج مسئله به هیئت ژوری ارائه می‌دهند. اعضای هیئت ژوری براساس علاقهٔ خویش به عضویت پنج کمیتهٔ هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز ترکیبی، توابع و نامساوی‌ها درمی‌آیند. مسائل برحسب محتوای علمی خود بین این کمیته‌ها توزیع می‌گردد. پس از بحث و تبادل‌نظر بر روی مسائل در کمیته‌ها، از هر کمیته یک مسئله برای مسابقه برگزیده می‌شود. بالاخره، در یک جلسهٔ نهایی بین کمیته‌ها، ششمین مسئله نیز انتخاب می‌شود. ملاک اصلی در انتخاب مسائل

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ضرورت به‌کارگیری نوعی از ابتکار و خلاقیت در راه‌حل مسئله، عدم چاپ آن مسئله در کتب و نشریات علمی است. مسابقات ظرف دو روز، هر روز سه مسئله، به مدت چهار ساعت و نیم برگزار می‌شود.»

از مقاله‌های «*مماس بر منحنی‌ها*»، «*مثلث‌های فیثاغورس*»، «*قضیهٔ سینوس‌ها و کسینوس‌ها در کنج‌های سه‌وجهی*» و «*تعمیم یک فرمول در هندسه*» می‌گذریم. بقیهٔ مطالب مجله هم عمدتاً در مورد مسئله و حل آن است. در مقالهٔ «*مسابقهٔ ریاضی دانشجویان کشور*» سؤالات این مسابقه آورده شده است. جواب نامه‌های رسیده، خواننده را به پایان مجله می‌رساند.

***

اکنون به شمارهٔ ۲۸ مجله رسیده‌ایم که در زمستان ۱۳۶۹ به بهای ۱۰۰ ریال انتشار یافته است. مجله با مقالهٔ «*نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت*» آغاز می‌شود که در آن چنین می‌خوانیم:

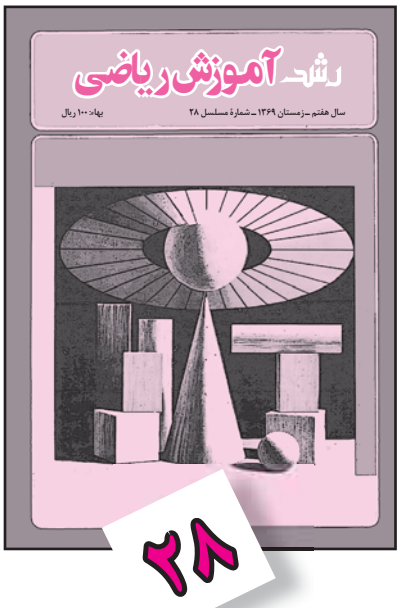
«پرسشی که کراراً به‌وسیلهٔ دانش‌آموزان، دانشجویان و حتی دبیران مطرح می‌شود، این است که چرا ریاضیات می‌خوانیم؟ و یا چرا ریاضیات تا این حد تدریس می‌شود؟ و یا چرا ریاضیات باید مورد توجه هر محصلی باشد؟ و اینکه اصولاً ریاضیات چه نقشی در زندگی روزمره دارد؟ این پرسشی است که همیشه مطرح بوده است و متأسفانه پاسخ قانع‌کننده‌ای که بتوان آن را در یک جمله یا در یک عبارت خلاصه کرد، نمی‌توان داد. هدف ما در این مقاله و مقالات بعدی پاسخ به این پرسش است.

شاید عمده‌ترین انگیزهٔ مطالعه و گسترش ریاضیات و نخستین دلیل برای اهمیت دادن به آن، به‌کار گرفتن این دانش در مطالعهٔ طبیعت به منظور شناخت محیط‌زیست و بهره‌برداری از آن در جهت زندگی بهتر و راحت‌تر باشد. هوایی که استنشاق می‌کنیم و یا پاکیزگی آن و نیز شرایط جوی که همراه می‌آورد، در زندگی روزانهٔ ما اهمیت دارد. آب طبعاً یکی از عوامل مهم حیات است. هم از نظر استفاده از آن در مصرف روزانه، کشاورزی و دریانوردی و هم از دیدگاه یک منبع عظیم غذایی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زمین منبع تولید مواد غذایی و مواد اولیهٔ صنعتی است و برای ما ارزش حیاتی دارد. برای زندگی متعادل و سالم و بهره‌برداری از موهبت‌های خدادادی، به تندرستی و بهداشت خوب و شرایطی که آن را بهبود بخشد، نیاز داریم. در جدال انسان برای رسیدن به این هدف‌ها، ریاضیات نقش اساسی دارد و به حد زیادی مورد استفاده قرار گرفته است.»

خواندن تمام این مقاله را به خوانندگان علاقه‌مند توصیه می‌کنیم. مقالهٔ «*آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر*» با این پیشگفتار آغاز می‌شود:

«اینک که، در آستانهٔ عصر *انفورماتیک* قرار گرفته‌ایم، بهتر است اطلاعات بیشتری در زمینهٔ مهم‌ترین ابزار انفورماتیکی که کامپیوتر می‌باشد، داشته باشیم.

انفورماتیک روی جنبه‌های مختلف زندگی بشر و به‌ویژه آموزش و فعالیت‌های علمی تأثیرات بنیادی گذاشته است. نظام آموزش‌وپرورش در کشور ما نیز برای حفظ پویایی و کم کردن فاصله با کشورهای پیشتاز در جهان معاصر به این امر مهم، یعنی وارد کردن موضوع آشنایی با کامپیوتر و انفورماتیک در برنامهٔ آموزشی مدارس، پرداخته است. گام نخست در سال سوم رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک در حال شکل گرفتن است. درس آشنایی با کامپیوتر و انفورماتیک مبتنی بر آموزش کارگاهی و استفاده از کامپیوتر هفته‌ای دو تا چهار ساعت از برنامهٔ رسمی آموزش سال سوم ریاضی فیزیک را به خود اختصاص خواهد داد. تألیف کتاب درسی توسط کارشناسان مجرب، مراحل اولیه را پشت‌سر گذاشته است. کلاس‌های بازآموزی و نوآموزی برای دبیران طبق برنامه‌ریزی‌های انجام شده، تشکیل شده است، و بالاخره با تجهیز دبیرستان‌های کشور به کارگاه‌های کامپیوتر، طی یک برنامهٔ پنج ساله، ان‌شاءالله این درس جای خود را بین دروس دبیرستانی باز خواهد کرد.



گام‌های بعدی تسری درس آموزش کامپیوتر به سایر رشته‌های تحصیلی و سایر مقاطع است و پرداختن به مقولهٔ استفاده از کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار کمک‌آموزشی که نیرو و توان زیادی را طلب می‌کند.»

این مقاله نیز یکی از مقاله‌های خواندنی این شماره است. مقاله‌های «*خاصیت هفت‌گانهٔ تابع*» و «*اثبات برخی پدیده‌های اعداد*»، مقاله‌هایی هستند که مکمل مطالب ریاضیات دبیرستانی‌اند. بقیهٔ موضوعات مطرح در این شماره نیز مانند شماره‌های قبلی دربارهٔ مسائل و حل مسائل است.

مجله با «*اخبار گروه ریاضی و کامپیوتر*»، «*جواب نامه‌ها*» و «*معرفی کتاب*» پایان می‌پذیرد.

در مقالهٔ «*معرفی کتاب*»، در مورد کتاب معلم (ریاضی) چنین می‌خوانیم: «*کتاب معلم (ریاضی)*: مسعود فرزان، محمدتقی دیبایی، صفر با همت شیروانده، پرویز فرهودی‌مقدم. ناشر: وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۶۹. این کتاب شامل روش تدریس کتب ریاضی دورهٔ راهنمایی تحصیلی است و مطالعهٔ آن به همهٔ معلمین و دبیران ریاضی توصیه می‌گردد.»

و به این ترتیب به پایان مطالب این شماره از مجله می‌رسیم.

*** پی‌نوشت‌ها**

1. Leonhard Euler
2. Napier
3. common logarithms
4. natural logarithms

۵. ایران در سال ۱۳۶۶، تیمی از دانش‌آموزان را برای شرکت در بیست‌وهفتمین مسابقهٔ المپیاد ریاضی، که در هاوانا، پایتخت کوبا، برگزار می‌شد، فرستاد. در این مسابقه بین ۴۲ کشور شرکت‌کننده، کشور ایران با ۷۰ امتیاز مقام بیست و ششمین کشور را نصیب خود کرد. این موفقیت دور از انتظار بود. زیرا ما برای اولین‌بار در این نوع مسابقات شرکت می‌کردیم، به‌ویژه که کشورهای نروژ، ایتالیا، لهستان و فنلاند را پشت‌سر گذاشتیم. این مسابقه نشان داد که سطح ریاضی در کشور، و توان علمی جوانان ما، به‌گونه‌ای است که می‌توانند با کشورهایی که سال‌های سال در ریاضیات صاحب نام و مقامی بوده‌اند، برابری کنند. سال بعد به همت و کوشش مسئولان آموزش‌وپرورش، در المپیاد ریاضی آلمان شرکت کردیم و بین ۵۱ کشور، با جمع امتیاز ۱۴۷ (۲ مدال نقره، ۳ مدال برنز و یک دیپلم افتخار) مقام چهاردهمین کشور را از آن خود ساختیم. این موفقیت نیز بیش از پیش برای ما با ارزش بود، چرا که بعد از فرانسه قرار گرفتیم و کشورهای بزرگی چون ایتالیا، بریتانیا، کانادا و استرالیا را هم پشت‌سر گذاشتیم.

* aban_mehr@yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حالا بعد از کلنجار رفتن با معماهای عدد سال نو (ایستگاه اول) و معماهای منطقی (ایستگاه دوم) وقت تفریح کردن با شنیدن چند لطیفهٔ زیباست.

● **لطیفهٔ اول:** یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک مهندس؛ هر کدام را با سه توپ کوچک فلزی و یک میزگرد، در یک اتاق جدا تنها گذاشتند و یک ساعت بعد به آنجا رفتند تا ببینند در این مدت، هر یک، چه کرده‌اند. در اتاق ریاضی‌دان دیدند که او سه توپ را رئوس مثلثی قرار داده است که مرکز ثقل آن، دقیقاً مرکز دایرهٔ روی میز است! در اتاق فیزیک‌دان دیدند که او سه توپ را روی هم سوار کرده و روی مرکز میز گذاشته است! اما وقتی وارد اتاق مهندس شدند، دیدند که یکی از توپ‌ها نیست، دومی شکسته است و سومی را هم مهندس توی ظرف غذایش گذاشته است تا با خود ببرد!

● **لطیفهٔ دوم:** دو ریاضی‌دان در یک کافه نشسته بودند. اولی به دومی گفت: «من فکر می‌کنم بیشتر مردم عادی با ریاضیات مقدماتی آشنایی‌هایی دارند»، اما دومی مخالف این موضوع بود. اولی ادامه داد: «من این را به تو ثابت می‌کنم!» در این لحظه دومی از جا بلند شد و به دست‌شویی رفت. اولی به سرعت پیشخدمت را صدا زد و به او گفت: «بیا این اسکناس را بگیر و یادت باشد، هر وقت صدایت زدم و چیزی از تو پرسیدم، تو فقط بگو یک سوم مکعب x!»

پیشخدمت گفت: «یک‌سوم مکعب x؛ درست است؟»

ریاضی‌دان گفت: «بله درست است» و پیشخدمت در حالی‌که زیر لب و پشت‌سرهم می‌گفت یک‌سوم مکعب x، دور شد. کمی بعد ریاضی‌دان دوم برگشت. پیش اولی نشست و به او گفت: «خب می‌خواستی آن موضوع را برایم ثابت کنی!»

اولی گفت: «بله درست است. حالا یک نمونهٔ عملی به تو نشان می‌دهم.»

بعد پیشخدمت را صدا زد و به او گفت: «بگو ببینم، انتگرال x^2 چه می‌شود؟»

و پیشخدمت بی‌درنگ گفت: «یک‌سوم مکعب x» و بعد دور شد و در همان حال، یک لحظه سرش را برگرداند و با لبخند گفت: «البته به اضافهٔ یک مقدار ثابت!»

● **لطیفهٔ سوم:** یک استاد بازنشستهٔ ریاضی و نوهٔ پنج ساله‌اش هم‌بازی و هم‌صحبت بودند. نوهٔ استاد به کودکستان رفت و روزی به پدربزرگ گفت: «امروز معلممان یک مسئلهٔ سخت ریاضی به ما داد که هنوز فکرم را مشغول کرده است!»

استاد گفت: «عزیزم، چی فکر تو را مشغول کرده؟»

کودک گفت: «مسئله این است: چهار هواپیما از باند فرودگاه به هوا بلند شدند. کمی بعد دو هواپیمای دیگر هم از باند بلند شدند و به آن‌ها پیوستند. حالا چند هواپیما در هوا هستند؟»

استاد گفت: «اینکه کاری نداره، عزیزم...»

و کودک گفت: «آره بابابزرگ من هم می‌دانم که ۶=۴+۲، ولی نمی‌فهمم که چرا هواپیماها باید این‌طوری عمل کنند!»

یک تساوی و چند نامساوی

اشاره

گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس[1]، فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان شهیر آلمانی کارهای مهمی در زمینهٔ محاسبات دیفرانسیل و انتگرال انجام داد. در هندسه نیز قضیه‌ای منسوب به اوست که رابطهٔ میان فاصلهٔ یک نقطه تا مرکز یک مثلث را برحسب اضلاع و فاصلهٔ آن نقطه تا رئوس مثلث بیان می‌کند. هر چند اثبات‌های جبری متعددی برای این قضیه موجود است، اما در اینجا قصد داریم این قضیه را به روش هندسی اثبات کنیم و چند نامساوی مهم را از آن نتیجه بگیریم.

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ لایب نیتس، نامساوی لایب‌نیتس، نامساوی اویلر

محمد طبیعی*
دانش‌آموز سال چهارم رشتهٔ ریاضی
دبیرستان علامه طباطبایی تهران

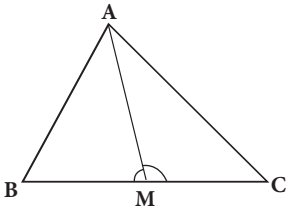
قضیهٔ لایب‌نیتس: فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. در این صورت برابری زیر برقرار است:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

قبل از بیان اثبات این مسئله لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم: در مثلث ABC اگر AM میانهٔ وارد بر BC باشد، داریم:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

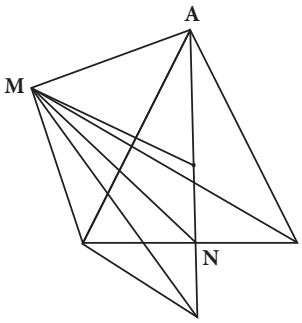


شکل ۱

برای اثبات لم فوق قضیهٔ کسینوس‌ها را در دو مثلث AMB و AMC نوشته و با توجه به اینکه $\cos(A\hat{M}C) = -\cos(A\hat{M}B)$ و از جمع دو رابطه، به حکم برسید.

حال قصد داریم قضیهٔ داده شده را با استفاده از لم مطرح شده اثبات کنیم. مطابق شکل، فرض کنید N وسط BC است. از آنجا که G نقطهٔ همرسی میانه‌هاست، AG=۲GN. حال GN را به اندازهٔ خودش امتداد دهید تا به G´ برسید. سپس از M به A و B و C و G و N و G´ وصل کنید.

از آنجا که $\frac{AG}{GN} = 2$ پس ۲GN=GG´=AG



شکل ۲

لذا در مثلث $\overset{\Delta}{AMG'}$، MG میانه است پس بنابر لم گفته شده داریم:

$$MG^2 = \frac{MA^2 + MG'^2}{2} - \frac{AG'^2}{4} \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم N وسط GG´ قرار دارد پس باز هم با استفاده از لم مذکور داریم:

$$MN^2 = \frac{MG^2 + MG'^2}{2} - \frac{GG'^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MG'^2}{2} = MN^2 - \frac{MG^2}{2} + \frac{GG'^2}{4} \quad (2)$$

همچنین N در وسط BC نیز واقع است لذا می‌توان نوشت:

$$MN^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad (3)$$

حال در تساوی (۲) به‌جای MN^2 مقدار $\frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

را قرار دهید، پس خواهیم داشت:

$$\frac{MG'^2}{2}=\frac{MB^2+MC^2}{2}-\frac{MG^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\frac{GG'^2}{4}$$

اکنون اگر در تساوی (۱) به‌جای $\frac{MG'^2}{2}$ مقدار به‌دست آمده در بالا را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$MG^2=\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{2}-\frac{MG^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\frac{GG'^2}{4}-\frac{AG'^2}{4}\quad(4)$$

حال با توجه به اینکه $AG=GG'$ پس $AG'=2AG$، در نتیجه

$$\frac{GG'^2}{4}-\frac{AG'^2}{4}=-\frac{3}{4}AG^2$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$ پس $\frac{GG'^2}{4}-\frac{AG'^2}{4}=-\frac{AN^2}{3}$

همچنین با توجه به اینکه N وسط BC است، پس $AN^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}$ در نتیجه می‌توان گفت:

$$\frac{GG'^2}{4}-\frac{AG'^2}{4}=-\frac{AN^2}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{GG'^2}{4}-\frac{AG'^2}{4}=\frac{BC^2}{12}-\left(\frac{AB^2+AC^2}{6}\right)\quad(5)$$

حال با جایگذاری تساوی (۵) در تساوی (۴) خواهیم داشت:

$$MG^2=\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{2}-\frac{MG^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\frac{BC^2}{12}-\left(\frac{AB^2+AC^2}{6}\right)$$

پس

$$\frac{3}{2}MG^2=\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{2}-\left(\frac{AB^2+BC^2+AC^2}{6}\right)$$

لذا با ضرب طرفین تساوی در عدد ۲ داریم:

$$3MG^2=MA^2+MB^2+MC^2-\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

حال به نتایج جالب توجه زیر از این قضیه توجه کنید:

نامساوی (۱): مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مفروض است. M نقطه دلخواهی در صفحه است آنگاه:

$$MA^2+MB^2+MC^2\geq\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

و حالت تساوی تنها زمانی برقرار است که M بر G منطبق باشد.

اثبات: بنابر قضیه لایب‌نیتس داریم:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

حال از آنجا که $3MG^2\geq 0$ پس

$$MA^2+MB^2+MC^2\geq\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که $3MG^2=0$ یا به‌عبارت دیگر M و G برهم منطبق باشند.

نامساوی (۲): مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با شعاع دایره محیطی R مفروض است. آنگاه خواهیم داشت:

$9R^2\geq BC^2+AC^2+AB^2$ (نامساوی لایب‌نیتس)

اثبات: در قضیه لایب‌نیتس قرار دهید M=O آنگاه خواهیم داشت:

$$OG^2=R^2-\left(\frac{AB^2+AC^2+BC^2}{9}\right)$$

$$=\frac{9R^2-AB^2-AC^2-BC^2}{9}$$

حال با توجه به اینکه $OG^2\geq 0$ پس $\frac{9R^2-AB^2-AC^2-BC^2}{9}\geq 0$

لذا $9R^2\geq AB^2+AC^2+BC^2$

نامساوی (۳): در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی زیر برقرار است: $a^2+b^2+c^2\geq 18Rr$ (a و b و c اضلاع مثلث‌اند).

اثبات: می‌دانیم $R=\frac{abc}{4s}$ و $r=\frac{s}{p}$ پس

$$18Rr=\frac{9abc}{2p}=\frac{9abc}{a+b+c}$$

لذا باید ثابت کنیم که $a^2+b^2+c^2\geq\frac{9abc}{a+b+c}$

اما از آنجا که $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ و $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ پس $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$ و نامساوی اثبات می‌گردد.

نامساوی (۴): در مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی $R\geq 2r$ برقرار است. (نامساوی اویلر)

اثبات: از نامساوی‌های (۲) و (۳) داریم

$9R^2\geq AB^2+AC^2+BC^2\geq 18Rr$

پس $R\geq 2r \Leftarrow 9R^2\geq 18Rr$

پی‌نوشت

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

* htabiee@yahoo.com

منابع

۱. دایرةالمعارف هندسه. جلد پنجم. مؤلف: محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. مؤلفان: هـ.س.م.کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. مترجم عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۳. هندسه مسطحه از مقدمات تا المپیاد. مؤلفان: سیامک احمدپور، مصطفی مسگری مشهدی، انتشارات خوشخوان.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

احسان یارمحمدی

حل مسائل جبری با روش‌های هندسی

- **تألیف و تدوین:** ابراهیم دارابی
- **ناشر:** انتشارات مدرسه (تلفن: ۸۸۸۰۰۳۲۴)

این کتاب دارای هفت فصل به شرح زیر است:

فصل ۱: نمایش اتحادهای جبری در قالب‌های هندسی

فصل ۲: قضایا و فرمول‌های آشنا در شکل‌های هندسی

فصل ۳: محاسبهٔ عبارت‌های جبری

فصل ۴: ماکزیمم و می‌نیمم

فصل ۵: ویژگی‌های توابع معکوس مثلثاتی

فصل ۶: روش‌های محاسبهٔ چند سری اعداد

فصل ۷: مسائل مختلف

با مطالعه یا مرور هر یک از فصل‌های هفت‌گانهٔ مزبور درخواهیم یافت که هدف اصلی مؤلف و گردآورنده مطالب این کتاب آن بوده است که ریاضی‌آموزان را بر آن دارد، با استفاده از خلاقیت هندسی، قدرت اِنگاره‌سازی هندسی و درک شهودی، به ارائهٔ راه‌حل‌های هندسی برای مسائل جبری‌ای بپردازند که همواره با آن‌ها در کتاب‌های درسی خود مواجهه می‌شوند. در واقع، مؤلف و گردآورندهٔ کتاب «حل مسائل جبری با روش‌های هندسی»، با استفاده از روش مزبور به ارائهٔ خط‌مشی و چارچوبی برای برخورد با مسائل جبری پرداخته است که باعث اشتیاق ریاضی‌آموزان به یادگیری می‌شود. چون زمانی که دانش‌آموزی توانایی ابداع و تجسم شکل یا تصویری مناسب و مورد استفاده را برای حل مسئله‌ای داشته باشد، اثرات استفاده از این روش در مقایسه با استفاده از روش جبری به مراتب مفیدتر و پویاتر است.

بنابراین ریاضی‌آموزان می‌توانند با مطالعه و یادگیری مطالب گنجانده شده در این کتاب، توانایی و هنر حل مسئلهٔ (ریاضی) خود را با دیدگاه هندسی ارتقا دهند و در آینده نیز برای پاسخ‌گویی و ارائه راه‌حل به مسائل جبری، از دست‌آویزی جدید بهره‌مند شوند. در ضمن، مطالعهٔ این کتاب می‌تواند توانمندی‌های ریاضی‌آموزان را در درس هندسه افزایش دهد و ایشان با بهره‌مندی از نمونه‌هایی متنوع و منسجم، دانش هندسهٔ خود را محک بزنند. علاقه‌مندان به مسائل المپیادهای ریاضی نیز می‌توانند از مطالب و مسائل این کتاب به‌عنوان تمرین‌هایی قاعده‌مند برای کسب آمادگی‌های لازم در راستای روش‌ها و هنر حل مسئله استفاده کنند. معلمان و مدرسان ریاضی نیز می‌توانند از مسائل این کتاب، به‌ویژه مسائلی که نمونه‌هایی از آن‌ها در کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ دوم آموزش متوسطه با رویکرد جبری گنجانده شده است، در کلاس‌های درسشان در چارچوب یک مسئله با دو راه‌حل جبری و هندسی استفاده کنند و دانش‌آموزان علاقه‌مند به حل مسائل با چند روش را تشویق کنند و یاری رسانند. البته از آنجا که مسائل این کتاب دربرگیرندهٔ موضوع‌های گوناگون و نیز تلفیق و ترکیبی از آن‌هاست، دانش‌آموزان می‌باید بر تمامی موضوع‌های کتاب‌های درسی‌شان تسلط لازم و کافی را داشته باشند.

در ادامه چند نمونه از مسائل این کتاب را بیان می‌کنیم تا قبل از تهیه و مطالعهٔ کتاب و بررسی مسائل آن، توانایی حل مسئلهٔ خود را با رویکرد هندسی بسنجید.

مسئلهٔ ۱. اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، به روش هندسی ثابت کنید: $a^2+b^2\geq 2ab$

مسئلهٔ ۲. اگر a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند، به روش هندسی ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

مسئلهٔ ۳. اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، به روش هندسی ثابت کنید:

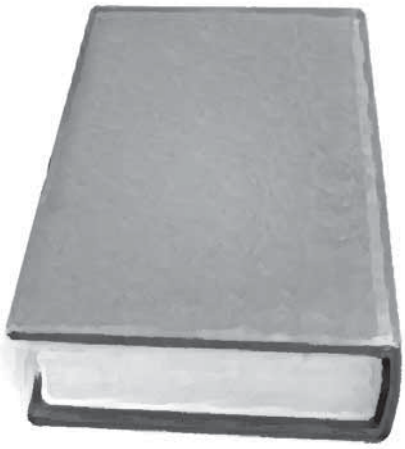
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

مشابه مسائل ۱، ۲ و ۳ را می‌توانید در صفحات ۸۳ و ۸۴ کتاب درسی «ریاضی ۲»[1] دورهٔ دوم آموزش متوسطه مشاهده کنید که دانش‌آموزان می‌باید با رویکرد جبری درستی آن‌ها را ثابت کنند.

مسئلهٔ ۴. مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی را که جملهٔ اول آن n و قدرنسبت آن d است، به روش هندسی به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۵. مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را که جملهٔ اول آن a و قدرنسبت آن q است، به روش هندسی به‌دست آورید.

دانش‌آموزان می‌توانند مسائل ۴ و ۵ را در فصل اول کتاب «حسابان»[2] مورد استفاده قرار دهند.



آمار دانش حیاتی است!

مطابق یک آمار علمی تمساح‌ها در سراسر جهان هر سال ۴۲ میلیون تخم می‌گذارند. باز مطابق همان آمار، فقط نیمی از این تخم‌ها، به تمساح زنده تبدیل می‌شوند؛ و باز مطابق آمار، سه چهارم این تمساح‌ها در همان ۳۶ روز نخست زاده شدن، شکار حیوانات دیگر می‌شوند. از باقی‌ماندهٔ نوزادها نیز، به دلایل متفاوت، تنها پنج درصدشان به یک سالگی می‌رسند. پس اگر به‌خاطر علم آمار نبود، حالا همهٔ ما طعمهٔ تمساح‌ها بودیم!

پی‌نوشت‌ها

۱. ریاضی ۲ (رشته‌های علوم تجربی، ریاضی ـ فیزیک و فنی ـ حرفه‌ای). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۹۳.

۲. حسابان (رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۹۳.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

غلامرضا یاسی‌پور

فرض ضمنی

ملانصرالدین، کانتور و غزها!*

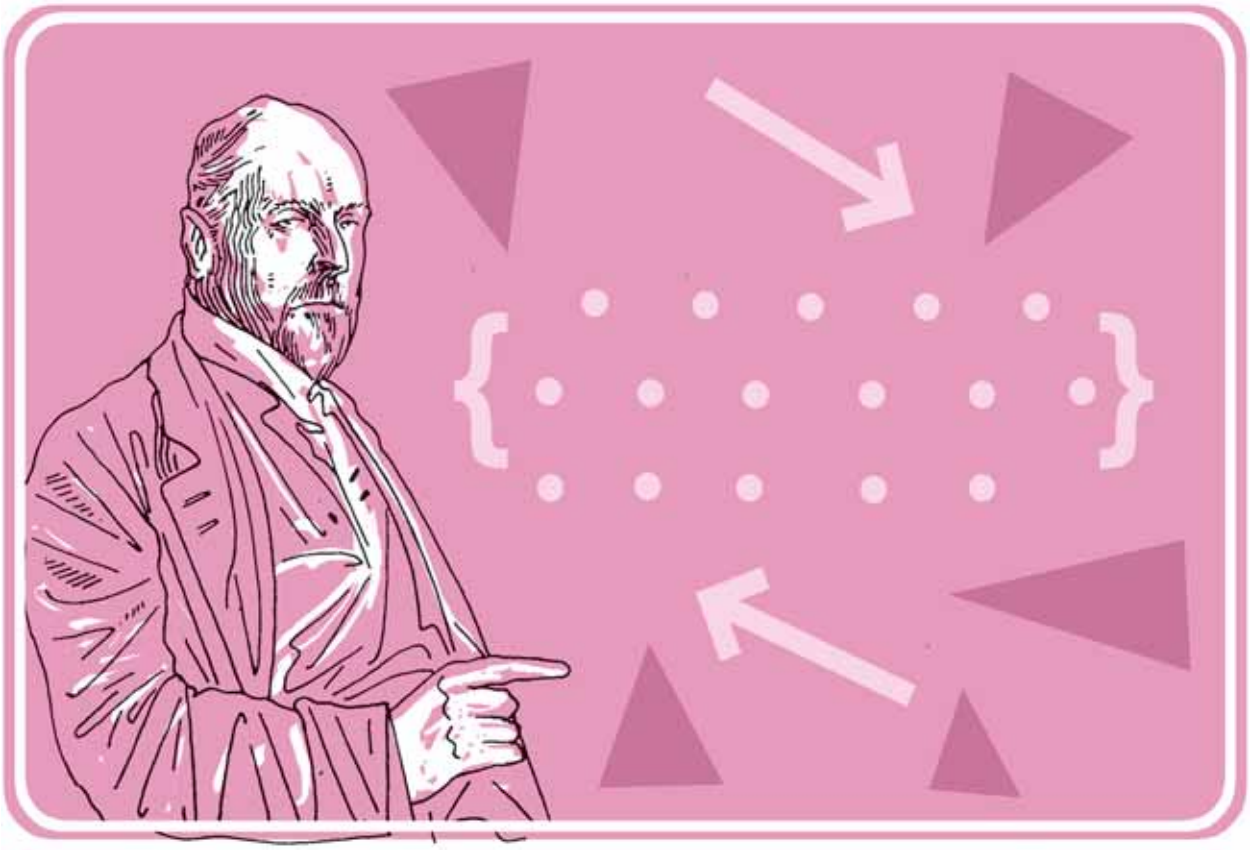
لابد از خود می‌پرسید: **ملانصرالدین** چه نسبتی با **ژرژ کانتور**[1] دارد و از آن مهم‌تر، کانتور چه رابطه‌ای با غُزها دارد؛ و در این میان، «فرض ضمنی»[2] که در صدر مقاله نشسته، کیست و ارتباطش با این‌ها چیست؟ و آن‌وقت، چرا در عنوان مقاله پای غُزها به میان کشیده شده است؟

برای پاسخ به این پرسش‌ها، نخست به ذکر چند حکایت واقعی، نیمه‌واقعی، و ساختگی می‌پردازیم، و آن‌گاه به سراغ فرض ضمنی و ارتباطش با این سه گروه می‌رویم.

و اما اول حکایت ساختگی، که داستانی است از ملانصرالدین:

می‌گویندملانصرالدین،انگشترش را در اتاق گم کرده بود، و در حیاط به دنبالش می‌گشت. گفتند: «ملا تو انگشترت را در اتاق گم کرده‌ای، چرا در حیاط به دنبالش می‌گردی؟» ملا جواب داد: «اتاق تاریک بود و حیاط روشن. به‌همین خاطر در حیاط دنبالش می‌گردم.»

اما داستان نیم‌واقعی، که به این دلیل آن را نیمه‌واقعی نامیده‌ایم که ممکن است راست یا دروغ باشد.



این داستان چنان که در «مثنوی معنوی» آمده، چنین است:

غزها برای غارت به دهی ریختند، و دو نفر از بزرگان ده را پیدا کردند و قصد کشتن یکی از آن دو را کردند. مرد پرسید: «برای چه مرا می‌کشید؟»

گفتند: «برای اینکه رفیقت بترسد و بگوید طلا و جواهرات را کجا مخفی کرده است.»

مرد گفت: «حال که چنین است چرا او را نمی‌کشید تا من بترسم و جای طلا و جواهرات را نشان دهم؟»[3]

***

اکنون به حکایت واقعی می‌رسیم. این حکایت، که چندان هم حکایت نیست! در حوزهٔ ریاضیات رخ داده و آن را ژرژ کانتور بیان کرده است:

«*تناظر یک‌به‌یک*»[4]، نیز معروف به نگاشت دوسو یا «*دوسویی*»[5]، بین دو مجموعهٔ A و B، روش جفت کردن هر عضو A با عضوی از B است. این‌ها توابع خاصی از A به B اند، که تضمین می‌کنند، هر عضو B متناظر با یک، و تنها یک عضو A است.

دوسویی‌ها در همه جای ریاضیات وجود دارند. برای مثال، هر «جایگشت»[6]، همین‌طور هر «یکریختی»[7] یک نگاشت دوسوست.

در نظریهٔ مجموعه‌ها، اهمیت دوسویی‌ها از این موضوع نشئت گرفته است که: دو مجموعه دارای یک اندازه‌اند؛ اگر، و تنها اگر، بینشان تناظری یک‌به‌یک موجود باشد. این مطلب در مورد مجموعه‌های متناهی آشکار است؛ در واقع به این گونه است که اشیا را می‌شماریم.

برای مثال، با تشکیل یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴,۵,۶} و حروف واقع در کلمهٔ «کانتور»، تعداد حروف را می‌شماریم. همین موضوع بود که وقتی ژرژ کانتور شروع به استفاده از این اصل در سری‌های نامتناهی کرد، بنیان ریاضیات قرن نوزدهم را به لرزه درآورد.[8]

***

در هر سهٔ این داستان‌ها از این فرض که به آن «فرض ضمنی»[9] می‌گویند، استفاده شده است.

در داستان ملا، فرض ضمنی پرسنده‌ها این است که وقتی شیئی در جایی ـ در این مثال انگشتر ملا در اتاق ـ گم شد، باید در همانجا به دنبالش گشت نه در جای دیگر. ملا این فرض را قبول ندارد. به‌همین دلیل در جای دیگری ـ در این مثال در حیاط ـ به دنبال انگشتر گم شدهٔ خود می‌گردد.

در داستان غزها، فرض ضمنی این است که اگر کسی را برای مال و ثروتش در مقابل چشم کس دیگری شکنجه کنند یا بکشند، او می‌ترسد و جای مال و ثروت خود را نشان می‌دهد. غزها و شخص دوم، هر دو از این فرض استفاده می‌کنند.[10]

و اما در داستان کانتور، این فرض ضمنی در میان ریاضی‌دانان‌های آن زمان در نظر گرفته می‌شد که جمیع مجموعه‌های نامتناهی به‌یک‌اندازه‌اند. به این معنی که، هر دو مجموعهٔ نامتناهی در تناظری یک‌به‌یک هستند. قضیهٔ کانتور و «استدلال قطری»[11] او، با ابطال این عقیده، به افراد بسیاری شوک وارد کرد.[12]

* قبایل ترک تباری که در قرن ششم هجری قمری در محدودهٔ دریای خزر تا حدود کشور چین به‌صورت پراکنده سکونت داشتند و هر از گاهی به شهرهای ایران تجاوز می‌کردند.

* پی‌نوشت‌ها

۱. Georg Cantor (۱۹۱۸-۱۸۴۵). کانتور در «سن پطرزبورگ» تولد یافت، اما بیشتر عمر خود را در «هال» به‌سر برد. قسمت آخر عمرش با بیماری‌های روانی مکرر تیره و تار بود و اوقات بسیاری را در آسایشگاه گذراند. عمیق‌ترین کارهایش در ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهی‌اش بود، و تمایز بین مجموعه‌های شمارا و ناشمارایش از اهمیت خاصی برخوردار است. او را می‌توان به‌عنوان ریاضی‌دانی که بی‌نهایت را آزاد ساخت، در نظر گرفت.

2. tacit assumption

۳. آن غُزانِ تُرکِ خونریز آمدند — بهر یغما در یکی ده در شدند
دو کس از اعیان آن ده یافتند — در هلاک آن یکی بشْتافتند
دست بستندش که قربانش کنند — گفت ای شاهان و ارکان بلند
قصد خون من به چه رُو می‌کنید — از چه آخر تشنهٔ خون منید
چیست حکمت چه غرض در کشتنم — چون چنین درویشم و عُرْیان تنم
گفت تا هیبت بر این یارت زند — تا بترسد او و زر پیدا کند
گفت آخر او ز من مسکین‌تر است — گفت قاصد کرده است او را زر است
گفت چونِ وهم است ما هر دو یکیم — در مقام احتمال و در شکیم
خود ورا بکْشید اول ای شهان — تا بترسم من دهم زر را نشان

(مثنوی معنوی، دفتر دوم، ۵۴-۳۰۴۶)

4. one to one correspondence

5. bijection

۶. permutaion. در مرحله‌ای مقدماتی، می‌توان جایگشت n شیء را به‌عنوان ترتیب یا ترتیب دوبارهٔ n شیء در نظر گرفت. تعداد جایگشت‌های n شیء برابر $n!$ است. تعداد «جایگشت‌های r به r، n شیء» با $p(n,r)$ نمایش داده می‌شود، و برابر است با: $n(n-1)...(n-r+1)$، که آن هم برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$. برای مثال، در مورد A، B، C و D، چون دوبه‌دو در نظر گرفته شوند، ۱۲ جایگشت موجود است: AB، AC، AD، BA، BC، BD، CA، CB، CD، DA، DB و DC. فرض می‌کنیم که n شیء از k نوع متفاوت و چنان‌اند که r_1 شیء از یک نوع، r_2 شیء از نوع دوم، و غیره‌اند. در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز n شیء مزبور برابر $\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}$ با $r_1+r_2+...+r_k=n$ است. مثلاً تعداد کلمات متفاوتی که از کلمهٔ cheeses می‌توان ساخت، برابر است با $\frac{7!}{3!2!}$، که آن هم برابر است با: ۴۲۰. در سطوح پیشرفته‌تر، جایگشت مجموعهٔ X به‌صورت نگاشت یک‌به‌یک پوشای از X به X تعریف می‌شود. (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستفر کلافام، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور).

۷. isomorphism (of groups). یکریختی (گروه‌ها). فرض می‌کنیم <G, o> و <G', *> گروه‌هایی باشند، به این ترتیب که o عمل بر G و * عمل بر G' است. یکریختی بین <G, o> و <G', *> نگاشت یک‌به‌یک پوشای f از مجموعهٔ G به مجموعهٔ G' و چنان است که، به ازای جمیع a و bهای واقع در G، $f(aob)=f(a)*f(b)$. این مطلب بدان معنی است که، اگر a، f را بر a' و b را بر b' بنگارد، در این صورت aob را بر a'*b' می‌نگارد. اگر یکریختی‌ای بین دو گروه موجود باشد، دو گروه مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند. دو گروه که نسبت به یکدیگر یکریخت باشند، در اساس یک ساختار دارند: ممکن است عناصر واقعی یک گروه، اشیایی کاملاً متفاوت از عناصر دیگری باشند. اما طریقی که طبق آن نسبت به عمل مربوطه برخورد می‌کنند، یکسان است. برای مثال، گروه اعداد مختلط ۱، i، ۱-، i- با ضرب، نسبت به گروه عناصر ۰، ۱، ۲ و ۳، با جمع به پیمانهٔ ۴ یکریخت است.

(isomorphism (of rings. یکریختی (حلقه‌ها). فرض می‌کنیم که (R , + , *) و (R' , ⊕ , ⊗) حلقه‌هایی می‌باشند. در این صورت، یکریختی بین آن‌ها نگاشت یک‌به‌یک و پوشای از مجموعهٔ R به مجموعهٔ R' و چنان است که، به ازای جمیع a و bهای واقع در R، $f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$ و $f(a\times b)=f(a)\otimes f(b)$. اگر بین دو حلقه یک یکریختی موجود باشد، حلقه‌های مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند و مانند مورد گروه‌های یکریخت، در اساس دارای یک ساختار هستند (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستفر کلافام، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور).

8. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010

۹. فرض ضمنی، فرضی است که استدلال‌کننده بدون اینکه متوجه باشد آن را به‌کار می‌برد، و ملا و کانتور هر دو در استدلال خود این فرض را کنار گذاشته‌اند.

۱۰. البته باید توجه داشت که در هر یک از این سه حکایت، ارزش فرض ضمنی با دیگری تفاوت دارد.

11. diagonal argument

12. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

کاربرد ترکیبیات در فیزیک

محمدمقدسی*
گروه فیزیک،
دانشکده علوم، دانشگاه
فردوسی مشهد

چکیده

در این نوشتار کوتاه برآنیم تا ضمن توضیح مختصری دربارهٔ اصول حاکم بر شمارش، مثال‌های ساده‌ای ارائه دهیم که کاربرد آن اصول را در فیزیک نشان می‌دهند. این مثال‌ها بارها و بارها در شاخه‌های مختلف فیزیک، همچون مکانیک آماری، نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، نسبیت عام و غیره ظاهر می‌شوند و چون مخاطب این نوشتار دانش‌آموزان دبیرستانی هستند، سعی کرده‌ایم آن‌ها را گام‌به‌گام حل کنیم.

کلیدواژه‌ها: ترکیبیات، ماتریس، مکانیک آماری، نمودارهای فاینمن، کاربرد ریاضی در فیزیک

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین چیزهایی که در زندگی بشر نقش داشته، شمارش بوده است. در سال‌های اول کودکی ما، شمردن کار سختی به نظر نمی‌رسید و حداکثر مجبور بودیم تعداد سیب‌های موجود در بشقاب را بشماریم! ولی کم‌کم با مسائل عجیب و غریبی مواجه شدیم. از ما پرسیدند: «اگر برای رفتن از شهر A به شهر B دو راه وجود داشته باشد، و برای رفتن از شهر B به شهر C سه راه وجود داشته باشد، آن‌گاه به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم؟»

البته این مسئله چندان هم سخت نیست و حتی شاید بگویید: «هر بچه‌ای می‌داند که جوابش ۶ طریق است!» در واقع شما بدون آنکه از ریاضیات پیچیده‌ای استفاده کنید و فقط با استفاده از یک منطق ساده، جواب را در ذهنتان حلاجی می‌کنید. اما به‌هر حال یک چیزی دارد عوض می‌شود: نحوهٔ شمارش. گاهی ما نمی‌توانیم مستقیماً بشماریم. طبیعت همیشه به ما اجازه نمی‌دهد تا اجزایش را در بشقاب بگذاریم و یکی‌یکی آن‌ها را بشماریم! بنابراین مجبوریم به ترفندهایی متوسل شویم که شمارش را برای ما آسان، یا حتی ممکن کنند. این ترفندها را با عنوان کلی «ترکیبیات» می‌شناسند که با روی کار آمدن علوم رایانه و الکترونیک دیجیتال، اهمیت خاصی پیدا کردند.

این نوشتار می‌خواهد شما را با موقعیت‌هایی آشنا کند که معمولاً فیزیک‌دان‌ها با آن‌ها مواجه می‌شوند و طی آن مجبورند چیزی را بشمارند. پس از ذکر چند قانون بنیادی، مثال‌هایی مطرح و سعی کرده‌ایم تا حد امکان توضیحات مفصلی ارائه دهیم. به یاد داشته باشید که روش‌های ما یکتا نیستند و شما می‌توانید روش خودتان را داشته باشید. در ترکیبیات مهم‌ترین کار فکر کردن دربارهٔ نحوهٔ شمارش است، وگرنه قوانین حاکم بر آن‌ها بسیار ساده است. ضمناً فرض شده است که شما با یک سلسله مفاهیم اولیه، همچون «مجموعه» یا «ماتریس»، آشنا هستید.

۲. قانون‌های بنیادی

• **قانون ۲.۱ (قانون ضرب):** اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن‌گاه هر دو کار را می‌توانیم به m×n روش انجام دهیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

• **قانون ۲. ۲ (قانون جمع):** اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن‌گاه n+m روش هست که می‌توانیم یکی از این دو کار را انجام دهیم.

برای توضیح بیشتر به این مثال دقت کنید. می‌خواهیم از میان ۵ کتاب فارسی، ۷ کتاب انگلیسی و ۱۰ کتاب چینی، دو کتاب را طوری انتخاب کنیم که زبانشان یکی نباشد. ببینیم چه‌طور فکر می‌کنیم:

قرار است ما دو کتاب با زبان‌های متفاوت انتخاب کنیم. پس یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». بیایید مورد اول را در نظر بگیریم؛ یعنی «فارسی و انگلیسی». کتاب فارسی ۵ تا چیز می‌تواند باشد و کتاب انگلیسی ۷ تا چیز. اما قانون ضرب می‌گوید که اگر بخواهیم یک کتاب فارسی و یک کتاب انگلیسی برداریم، به ۵×۷ روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم. با همین استدلال «فارسی و چینی» را به ۵×۱۰ روش، و «انگلیسی و چینی» را به ۷×۱۰ روش می‌توانیم انتخاب کنیم. حال دوباره به این جمله دقت کنید: یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». اما این همان چیزی است که قانون جمع فرض می‌کند. پس چیزهایی را که یافتیم با هم جمع می‌زنیم:

۵×۷+۵×۱۰+۷×۱۰ =۱۵۵

• **قانون ۲. ۳ (انتخاب (ترکیب)):** معنای انتخاب در خود کلمه نهفته است. وقتی چیزی را انتخاب می‌کنیم، اولاً اهمیتی ندارد که با چه ترتیبی انتخاب کنیم، و ثانیاً تکرار صورت نمی‌گیرد.

مثلاً در بالا ما می‌خواستیم دو زبان از سه زبان را انتخاب کنیم. آیا می‌توانستیم دو زبان یکسان انتخاب کنیم؟ آیا مهم بود که اول یک کتاب فارسی برداریم و بعد یک کتاب چینی؟ مسلماً پاسخ هر دو منفی است و دیدید که به سه طریق توانستیم این دو زبان را انتخاب کنیم. ریاضی‌دان‌ها برای این کار اصطلاح و فرمول خاصی دارند. آن‌ها می‌گویند: «می‌خواهیم ترکیب ۲ شیء را از ۳ شیء حساب کنیم» و می‌نویسند:

$$C(۳,۲) \equiv \binom{۳}{۲} \equiv \frac{۳!}{(۲!)\times(۳-۲)!}$$

و در حالت کلی:

$$c(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

• **قانون ۲. ۴ (چیدن (جایگشت)):** مفهوم این واژه نیز در خود آن مستتر است. وقتی کتاب‌هایتان را در قفسه می‌چینید، مسلماً ترتیب آن‌ها برایتان مهم است.

نمی‌توانید کتابی را تکرار کنید. پس اگر بخواهیم از بین سه کتاب، دو تای آن‌ها را در قفسه بچینیم، ابتدا باید آن دو کتاب را انتخاب کنیم و سپس آن‌ها را بچینیم.

ما به سه طریق می‌توانیم دو کتاب را انتخاب کنیم، و به دو طریق می‌توانیم دو کتاب را در قفسه بچینیم (یعنی مثلاً اول کتاب انگلیسی بعد فارسی، یا اینکه اول کتاب فارسی بعد انگلیسی). پس طبق اصل ضرب به ۶ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. به زبان ریاضی: «جایگشت ۲ شیء از ۳ شیء می‌شود ۶». جایگشت را با این رابطه مشخص می‌کنند:

$$P(۳,۲) \equiv \frac{۳!}{(۳-۲)!}$$

و در حالت کلی:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

واضح است که اگر انتخابی در کار نباشد و بخواهیم همهٔ کتاب‌ها را در قفسه بچینیم، در رابطهٔ فوق ۲ به ۳ تبدیل می‌شود و می‌گوییم: «کل جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با !۳».

و در حالت کلی تمام جایگشت‌های n شیء برابر است با !n

• **قانون ۲. ۵ (قید):** گاهی قیدهایی بر شمارش اعمال می‌شوند. اگرچه واضح است که قیدها چگونه بر شمارش تأثیر می‌گذارند، ولی بد نیست حرف‌هایمان را در قالب نظریهٔ مجموعه‌ها نیز بیان کنیم. ما از اصول اولیهٔ منطق و اساسی‌ترین اصل شمارش -تناظر یک به یک بین مجموعهٔ مورد نظر و مجموعهٔ اعداد طبیعی- کمک می‌گیریم. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه‌ای (به‌نام W) را بشماریم که قیدی بر آن اعمال شده است. این قید مجموعه ما را به دو زیرمجموعه

افراز می‌کند: زیرمجموعه‌ای که اعضای آن در قید صدق می‌کننـد (مجموعـهٔ T)، و زیرمجموعـه‌ای که اعضای آن در قید صدق نمی‌کننـد (مجموعهٔ F). اکنون کاملاً مشخص است که با اعمال قید باید تعداد اعضای F را از تعداد اعضای W کم کرد.

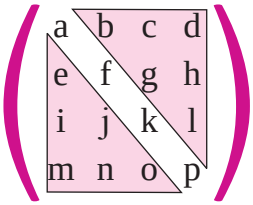
۳. مثال‌ها

پیش از ارائهٔ مثال‌ها دو نکته را یادآوری می‌کنیم:

- منظور از «مؤلفهٔ مستقل»، مؤلفه‌ای است که برحسب مؤلفهٔ دیگری به‌دست نمی‌آید و ضمناً صفر هم نیست[1]. ما تعداد آن‌ها را با N نمایش می‌دهیم.
- در این نوشتار مهم نیست که تعریف دقیق «تانسورها» چیست. برای ما فقط این نکته حائز اهمیت است که آن‌ها هم مؤلفه‌هایی دارند که تعدادشان به تعداد اندیس‌ها و تعداد ابعاد فضا بستگی دارد. مثلاً یک تانسور مرتبهٔ ۳ که آن را با F_{ijk} نشان می‌دهیم، در فضای ۱۰بعدی ۱۰۰۰=۱۰×۱۰×۱۰ مؤلفه دارد. می‌توانید آن‌ها را شبیه ماتریس‌های غول‌پیکر بپندارید!
- **مثال ۳. ۱ (ماتریس متقارن):** ماتریس S را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$S_{ij} = S_{ji}, \qquad i, j = ۱,\cdots,۴ \qquad (۳.۱)$$

این ماتریس چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟



شکل ۱ ماتریس چهاربعدی

روش اول: شکل ماتریس را با تمام مؤلفه‌هایش مجسم کنید (شکل ۱). این ماتریس ۴×۴ مؤلفه دارد. اما شرط تقارن باعث می‌شود تا اعضای مثلث پایینی برحسب اعضای مثلث بالایی نوشته شوند. پس اعضای یکی از این دو مثلث مستقل نیستند (فرضاً می‌گوییم مثلث پایینی). اکنون اگر قطر اصلی ماتریس را کنار بگذاریم، اعضای مثلث بالایی نصف کل اعضای باقی‌مانده هستند؛ یعنی این مثلث، $\frac{(۴\times۴)-۴}{۲}$ عضو دارد. از طرف دیگر، مؤلفه‌های قطر اصلی هم مستقل هستند (قیدی روی آن‌ها نداریم). پس کل مؤلفه‌های مستقل عبارت‌اند از:

$$N = \frac{(۴\times۴)-۴}{۲} + ۴ = \frac{۴\times(۴+۱)}{۲} = ۱۰ \qquad (۳.۲)$$

روش دوم: قیدی که روی ماتریس گذاشته‌ایم، به ما می‌گوید که اگر قرار باشد دو تا عدد (i و j) کنار هم بنشینند، ترتیب آن‌ها اهمیتی ندارد، اما این امکان وجود دارد که هر دو یکسان باشند. پس یا ما دو عدد را از بین ۴ عدد انتخاب می‌کنیم، یا هر دو عدد یکسان هستند. بنابراین طبق قانون جمع:

$$N = \binom{۴}{۲} + ۴ = ۱۰ \qquad (۳.۳)$$

اگر بخواهیم در حالت کلی بیان کنیم، کافی است در استدلال بالا ۴ را به n تبدیل کنیم. پس در حالت کلی تعداد مؤلفه‌های مستقل یک ماتریس متقارن n×n، $\binom{n}{۲}+n$ و یا $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

- **مثال ۳. ۲ (ماتریس پادمتقارن):** ماتریس A را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \qquad i, j = ۱,\cdots, n. \qquad (۳.۴)$$

این ماتریس چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟

روش اول: تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که این بار عناصر روی قطر اصلی صفر هستند و نیازی به اضافه کردن آن‌ها نیست (چون به ازای این عناصر داریم: $A_{ii} = -A_{ii}$ که نتیجه می‌گیریم $A_{ii}=۰$). بنابراین:

$$N = \frac{(n\times n)-n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \qquad (۳.۵)$$

روش دوم: تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که امکان ندارد هر دو عدد یکسان باشند (بدون ترتیب، بدون تکرار)؛ یعنی باید فقط دو عدد را از n عدد انتخاب کنیم:

$$N = \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \qquad (۳.۶)$$

- **مثال ۳. ۳ (تانسور کاملاً پادمتقارن):** یک تانسور مرتبهٔ r کاملاً پادمتقارن را در فضای n بعدی در نظر بگیرید (تانسورهای شدت میدان مغناطیسی از این نوع‌اند). بدین معنا که جای هر دو اندیس آن را عوض کنیم، یک علامت منفی ظاهر می‌شود. این تانسور چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟

با تعمیم رابطهٔ (۳. ۴) به یک تانسور r اندیسی، می‌فهمیم که اولاً هیچ دو اندیسی نمی‌توانند

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

یکسان باشند. ثانیاً ترتیب این r عدد مهم نیست. پس کافی است r عدد از میان n عدد انتخاب کنیم. به‌عبارت دیگر:

$$N = \binom{n}{r} \qquad (۷.۳)$$

به‌عنوان تمرین سعی کنید، تعداد مؤلفه‌های مستقل یک تانسور مرتبهٔ r کاملاً متقارن را در فضای n بعدی به‌دست آورید. شما باید به عبارت C(n+r-۱, r) برسید.

● **مثال ۳. ۴ (تانسور ریمن):** در مطالعهٔ کیهان به تانسوری برخورد می‌کنیم که خمیدگی فضا- زمان را نشان می‌دهد. این تانسور از مرتبهٔ ۴ است و در فضای n بعدی با خواص زیر مشخص می‌شود:

(۸.۳)

a) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

b) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,

c) $R_{ijkl} = R_{klij}$,

d) $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = ۰$.

تعداد مؤلفه‌های مستقل این تانسور را بیابید.

پادمتقارن بودن نسبت به دو اندیس اول باعث می‌شود تا تنها s مؤلفهٔ مستقل ایجاد کنند که داریم: $s = \frac{n(n-۱)}{۲}$؛ به‌همین ترتیب در مورد دو اندیس دوم. اکنون با توجه به خاصیت (c) می‌توانیم بگوییم موجودی با دو اندیس داریم که هر کدام از آن‌ها s حالت دارد و نسبت به تعویض آن‌ها هم متقارن است. بنابراین تا اینجا $\frac{s(s+۱)}{۲}$ مؤلفهٔ مستقل داریم. حال می‌خواهیم ببینیم خاصیت (d) چند معادلهٔ قیدی به ما می‌دهد. آن را با توجه به خواص (a) تا (c) کمی تغییر شکل می‌دهیم و بدین صورت می‌نویسیم:

$$R_{iikl} - R_{ijlk} + R_{iljk} - R_{ikil} + R_{iklj} - R_{ilkj} = ۰ \qquad (۹.۳)$$

حال اگر در این رابطه جای هر کدام از سه اندیس آخر را با یکدیگر عوض کنیم (مثلاً j با k، یا k با l) یک منفی ظاهر می‌شود. بنابراین هیچ‌کدام از سه اندیس آخر نمی‌توانند با هم برابر باشند، چون در این صورت سمت راست تساوی فوق خود به خود صفر می‌شود. اما اندیس اول چه‌طور؟ فرض کنیم i با یکی از سه اندیس دیگر برابر باشد، در این صورت:

$$R_{iikl} + R_{ilik} + R_{ikli} = R_{ikil} + R_{ikli}. \qquad (۱۰.۳)$$

اما این عبارت نیز خود به خود صفر است و به قید جدیدی نمی‌رسیم[۲]. پس هر چهار اندیس باید با هم متفاوت باشند که نتیجه می‌گیریم باید ۴ عدد را از میان n عدد انتخاب کنیم. یعنی رابطهٔ (d) معادل با C(n, ۴) قید است. اکنون اطلاعاتمان را خلاصه می‌کنیم:

$$N = \frac{۱}{۲}\left[\frac{n(n-۱)}{۲}\right]\left[\frac{n(n-۱)}{۲}+۱\right] - \frac{n!}{(۴!)(n-۴)!}$$

$$= \frac{n^۲(n^۲-۱)}{۱۲} \qquad (۱۱.۳)$$

● **مثال ۳. ۵ (انرژی نوسانگر هماهنگ):** دستگاهی متشکل از N نوسانگر هماهنگ کوانتومی یکسان (مانند اتم‌های بلور) در نظر بگیرید. انرژی این دستگاه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$E = (M + \frac{N}{۲})\hbar w \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن:

$$M = n_۱ + n_۲ + ... + n_N \quad n_i = ۰, ۱, ۲, ... \qquad (۱۳.۳)$$

بنا به دلایلی مهم است که بدانیم به چند حالت تساوی فوق برقرار می‌شود، یعنی چند دسته $(n_۱, ..., n_N)$ وجود دارد که در این تساوی صدق می‌کند. بیایید به خاطرات کودکی برگردیم و مسئله را با همان سیب‌های قدیمی حل کنیم! فرض کنید N جعبه داریم که در هر کدام تعدادی سیب گذاشته‌ایم. تعداد کل سیب‌ها M است. حال جعبه‌ها را در یک ردیف بچینید و سیب‌های داخل آن‌ها را نیز در یک ردیف بگذارید. چیزی شبیه شکل ۲ حاصل می‌شود. می‌بینید که در اولین جعبه از سمت چپ ۳ سیب هست، در دومی ۴ سیب، و همین‌طور الی آخر.

شکل ۲ جایگشت‌های سیب‌ها و دیواره‌های جعبه‌ها

حال اینکه ما بگوییم n_iها مقادیر متفاوتی دارند، معادل این است که بگوییم تعداد سیب‌های داخل جعبه‌ها تغییر می‌کند. یعنی مثلاً جای سیب سوم و دیوار اول (از سمت چپ) عوض می‌شود. یک فرض اساسی مسئله این است که نوسانگرها (سیب‌ها) با هم تفاوتی ندارند و همگی یکسان هستند. بنابراین ترتیب

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

سیب‌ها معنایی ندارد. دیواره‌های جعبه‌ها هم که ساختهٔ ذهن ما بودند، پس ترتیب آن‌ها هم اهمیتی ندارد. ضمناً دقت کنید که در این شکل تعداد دیوارها (N-۱) است.

حالا حرف‌هایمان را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم.

کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با (M+N-۱)!. اما نه جایگشت‌های سیب‌ها اهمیتی دارد و نه جایگشت‌های دیواره‌ها. پس باید با آن‌ها طبق قانون ضرب رفتار کنیم و با تقسیم کردن، اثر آن‌ها را در شمارش از بین ببریم؛ یعنی:

$$N=\frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}=\binom{M+N-1}{M}=\binom{M+N-1}{N-1} \quad (۱۴.۳)$$

• **مثال ۳. ۶ (نمودارهای فاینمن):** فیزیک‌دانان برای توصیف اثر دو ذرهٔ باردار بر یکدیگر، نظریه‌ای دارند که در بخشی از آن با چنین عبارتی مواجه می‌شوند:

$$\phi(x)\phi(y)\underbrace{\phi(z)\ldots}_{\text{تا } m}\underbrace{\phi(w)\ldots}_{\text{تا } n}\underbrace{\phi(t)\ldots}_{\text{تا } k}. \quad (۱۵.۳)$$

ϕها توابعی هستند که در اینجا شکل دقیق آن‌ها برای ما اهمیتی ندارد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که تعداد کل آن‌ها عددی زوج باشد. قاعدهٔ بازی ساده است. ابتدا ϕها را دو به دو به‌هم وصل کنید. سپس برای هر اتصال اسمی انتخاب کنید. مثلاً اگر $\phi(z)$ را به $\phi(t)$ وصل کرده‌اید، به‌جای آن موجودی به‌نام $D(zt)$ بگذارید. واضح است که $D(zt)=D(tz)$، یعنی ترتیب مهم نیست. وقتی تمام توابع به‌هم وصل شدند، می‌گوییم یک نمودار فاینمن ساخته‌ایم. حال سؤال این است که هر نمودار فاینمن به چند طریق می‌تواند ساخته شود.

بیایید ترکیب خاصی را در نظر بگیریم؛ برای مثال:

$$\phi(x)\ \phi(y)\ \phi(z)\ \phi(z)\ \phi(z)\ \phi(w)\ \phi(w)\ \phi(w). \quad (۱۶.۳)$$

قبل از اینکه ببینیم هر نمودار به چند طریق می‌تواند ساخته شود، اجازه دهید حساب کنیم که در مجموع چند نمودار خواهیم داشت. در مرحلهٔ نخست باید یکی از توابع را بردارید و به یک تابع دیگر وصل کنید. این کار را می‌توانید به ۷ طریق انجام دهید. وقتی اتصال اول انجام شد، ۶ تابع می‌ماند که باید دومین اتصال را برقرار کنید. این بار به ۵ حالت می‌توانید این کار را انجام دهید. اگر به‌همین ترتیب این روند را ادامه دهید، نتیجه می‌گیرید تعداد کل نمودارها ۱۰۵ است.

در حالت کلی اگر ۲m تابع داشته باشیم، تعداد کل نمودارها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(2m-1)!!\equiv(2m-1)\times(2m-3)\times\ldots3\times1. \quad (۱۷.۳)$$

حال ببینیم چند نوع نمودار می‌توانیم داشته باشیم. یک نوع از آن‌ها به این صورت است:

$$D(xy)D(zz)\ D(zw)\ D(ww), \quad (۱۸.۳)$$

در این ترکیب اتصال x به y به ۱ طریق ممکن است. وقتی x را به y وصل کردیم، ۳ تا z داریم که دو تا از آن‌ها باید به‌هم وصل شوند. برای این کار باید آن دو را انتخاب کنیم که به C(۳, ۲) طریق امکان‌پذیر است. اکنون یک z داریم که به ۳ طریق می‌تواند به یکی از w ها وصل شود. نهایتاً دو w باقی می‌مانند که تنها به یک طریق می‌توانند به‌هم وصل شوند. بنابراین تعداد نمودارهایی که به این شکل هستند، با توجه به اصل ضرب به‌دست می‌آید:

$$\underbrace{D(xy)}_{1}\ \underbrace{D(zz)}_{3}\ \underbrace{D(zw)}_{3}\ \underbrace{D(ww)}_{1} \Rightarrow \quad (۱۹.۳)$$

تعداد نمودارها = ۱×۳×۳×۱=۹.

هفت نوع نمودار دیگر می‌توانیم داشته باشیم که به‌عنوان تمرین سعی کنید هر نوع را بیابید. سرانجام می‌توانید تعداد کل نمودارها را به انواع آن‌ها تقسیم کنید و بنویسید:

$$105=4\times18+3\times9+1\times6 \quad (۲۰.۳)$$

۴. حالت‌های پیچیده‌تر

علاوه بر آنچه گفته شد، مسائل پیچیده‌تری در فیزیک هستند که برای حل آن‌ها لازم است از روش‌های ترکیبیات استفاده کنیم.

گاهی برای شمردن تعداد حالت‌ها از توابعی کمک می‌گیرند که به توابع **مولد** مشهورند. اگرچه شمردن عملی گسسته است، ولی چون در این موارد تعداد حالت‌ها بسیار زیاد است، می‌توان آن‌ها را تقریباً پیوسته در نظر گرفت و از روابط حسابان کمک گرفت. چنین مسائلی در نظریهٔ ریسمان مشاهده می‌شوند.

علاوه بر این، شمردن تعداد حالت‌های ممکن برای گازهای فرمیونی یا بوزونی نیز اهمیت ویژه‌ای دارد که به توابع توزیع فرمی- دیراک و بوز- اینشتین منجرمی‌شود.

به‌هر حال آنچه ما گفتیم تنها نمونه‌هایی از مسائلی بودند که کاربرد استدلال‌های سادهٔ ریاضی در آن‌ها مشهود است و دیگر جایی برای این پرسش باقی نمی‌گذارد که «این درس‌های ریاضی به چه درد می‌خورند»!

پی‌نوشت

۱. برخی آن را مؤلفهٔ مستقل غیرصفر می‌نامند.

۲. چرا لازم نیست برابری i را با سایر اندیس‌ها بررسی کنیم؟

* M.moghadassi@chmail.ir

منابع

1. C.L.Liu, Introduction to combinatorial mathematics, McGraw Hill, 1968.
2. S.M.Carrol, "Lecture notes on general relativity." gr-qc/9712019.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

جراید و نقش آن‌ها در عمومی‌سازی ریاضیات

بررسی تاریخی طرح چند پرسش ریاضی در جراید کشور، از دوران ناصری تا پایان عصر پهلوی اول

(قسمت اول)

دکتر فرید قاسملو*

اشاره

دکتر فرید قاسملو، دانش‌آموختهٔ تاریخ و از محققان برجستهٔ بنیاد دایرةالمعارف اسلامی است. ایشان با همکاری دانشگاه آزاد اسلامی تحقیق جامعی دربارهٔ تاریخ ریاضی معاصر ایران انجام و آن را در اختیار ما و خوانندگان مجلهٔ برهان قرار دادند. بخش اول این تحقیق در قالب چند گفت‌وگو در شماره‌های پیشین آمد. در ادامه، به بررسی نقش جراید در تاریخ ریاضی معاصر کشورمان، طی دو شماره، می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: روزنامهٔ علمی، خلاصةالحساب، شیخ بهایی، میرزا عبدالرحیم مهندس، ریاضی در دورهٔ قاجار

مقدمه

یکی از موضوع‌هایی که در بررسی‌های تاریخ علم، و از جمله تاریخ ریاضی، در ایران لازم است مورد توجه قرار گیرد، تبیین جایگاه «مردم» در این بررسی‌هاست. به عبارت دیگر، پرداختن به این موضوع که «مردم» کجای مطالعات تاریخ علوم قرار دارند و نقش آن‌ها در تکوین دانش در جامعه چیست؟

مدتی است که بحث مربوط به مردم و تاریخ علم در زبان فارسی شروع شده و خوش‌بختانه، کتاب‌ها و مقالات چندی در حوزه‌های گوناگون «تاریخ علوم (از جمله تاریخ پزشکی) و مردم» به فارسی ترجمه یا تألیف شده است[1].

با لایه‌بندی کردن تاریخ ریاضیات در ایران، به‌ویژه تبیین دوره‌های تاریخ ریاضیات ایران به سه دورهٔ عصر باستان، مربوط به دوران پیش از اسلام، تا حدود قرن اول هجری، عصر اسلامی، از قرن دوم تا دوازدهم هجری، و دورهٔ معاصر، از قرن سیزدهم تاکنون، می‌توان جایگاهی نیز برای «مردم» در این دوره‌ها در نظر گرفت. در این میان، جایگاه دورهٔ سوم یعنی دورهٔ معاصر، با در نظر گرفتن تنوع منابع مطالعه در تاریخ ریاضیات این دوره پررنگ‌تر می‌شود.

از دیگر سو، هنوز خیلی زود است که به بررسی عوامل گوناگونی که می‌توانند به مطالعهٔ رابطهٔ «مردم- ریاضی» در تاریخ ریاضیات در ایران معاصر کمک کنند، پرداخته شود، چراکه هنوز بحث‌های نظری لازم در این خصوص صورت نگرفته است. اما چند نمونه از این عوامل را می‌توان شامل گسترش مدارس، تغییر شکل آموزش ریاضی در ایران، رواج صنعت چاپ و همچنین، ابداع جریده‌نگاری در این بخش از تاریخ ریاضی در ایران دانست. این عوامل که تا پیش از آن، در دوره‌های متفاوت تاریخ ایران وجود نداشت، به دلایل متعدد و از نگاه‌های گوناگون، نقش مهمی در بسط و گسترش دانش ریاضیات در کشور ما داشته است. بر همین اساس، پرداختن به این پدیده جایگاه مهمی در مطالعات مربوط به تاریخ ریاضیات در ایران خواهد داشت.

به‌طور خلاصه باید گفت، اگر مؤلفهٔ «مردم» در مطالعات تاریخ علم حذف شود، آنچه باقی می‌ماند، بیش از هر چیز، نه مطالعهٔ تاریخ علم در کشور، بلکه مطالعه در تاریخ تولید متون و منابع تاریخ علم خواهد بود. موضوعی که اگرچه بخش مهمی از دانش تاریخ علم در هر جامعه به‌شمار می‌آید، اما همهٔ تاریخ علم هر سرزمین (و از آن میان، ایران) نخواهد بود.

طرح موضوع

پدیدهٔ جریده‌نگاری، یکی از ویژگی‌های جامعهٔ مدرن، و یکی از ابزارهای مهم کشورها برای عبور از دوران کهن و رسیدن به دوران معاصر به حساب می‌آید. از دیگر سو، جراید اگرچه در نگاه «هم‌زمانی» بیان‌کنندهٔ دغدغه‌ها، مشکلات و ویژگی‌های اجتماع به حساب می‌آیند، در نگاه «در زمانی» بیان‌کنندهٔ دغدغه‌هایی هستند که در گذشته «موضوع روز» زندگی مردم بوده‌اند و امروز «منبع تاریخی (یا تاریخ علمی)» برای پرداختن به تاریخ (یا تاریخ علم) به حساب می‌آیند. البته، یکی از منابع مهم برای مطالعهٔ نقش مردم در تاریخ علم، همین جراید خواهند بود.

از زوایای متعددی می‌توان به جراید و تاریخ علم پرداخت. اما به‌طور کلی جراید می‌توانند منبع بسیار مهمی، برای بررسی طیف وسیعی از موضوعات تاریخ علم، (و از آن میان، تاریخ ریاضیات) و تبیین رابطهٔ «مردم» با این تاریخ باشند.

آنچه در مقالهٔ حاضر مورد توجه بوده، نگاهی به نقش جراید برای عمومی‌سازی ریاضیات در تاریخ این دانش در دوران معاصر ایران بوده است. مؤلف این سطور در بررسی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر، به نمونه‌هایی برخورده است که جراید گام‌هایی برای عمومی کردن ریاضیات برداشته‌اند. حال اگر این موضوع را نیز در نظر بگیریم که خود موضوع «جراید» در بررسی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر می‌تواند (و باید) از دو منظر مورد توجه قرار گیرد: جراید عمومی و با مخاطب عام مردم و جراید اختصاصی که به‌ویژه و تنها در موضوع «ریاضیات» در کشور تولید شده و می‌شوند، تا اندازه‌ای به جایگاه بسیار مهم «جراید» در بررسی‌های مربوط به تاریخ ریاضیات در ایران معاصر پی می‌بریم.

پدیدهٔ جریده‌نگاری، یکی از ویژگی‌های جامعهٔ مدرن، و یکی از ابزارهای مهم کشورها برای عبور از دوران کهن و رسیدن به دوران معاصر به حساب می‌آید

بررسی داده‌های تاریخی، نگاهی به ریاضی در دوران قاجار

آنچه تاکنون مؤلف این سطور، دربارهٔ کوشش جراید برای عمومی‌سازی دانش ریاضی در ایران، حد فاصل افتتاح دارالفنون تا پایان دوران حکومت پهلوی اول به‌دست آورده، دو نمونهٔ تاریخی از جریده‌نگاری در ایران است که هر کدام از نمونه‌ها، خود مجموعه‌ای از پرسش‌های ریاضی را برای راه‌اندازی بحث و فحص دربارهٔ ریاضیات و با موضوع ریاضیات در میان اوراق خود درج کرده‌اند.

نخستین نمونه‌ای که مؤلف این سطور از این دست موفق به یافتن آن شده، چند پرسش ریاضی است که در چند شماره از «روزنامهٔ علمی» طی سال‌های ۱۲۹۶-۱۲۹۴ قمری/ ۱۸۷۸-۱۸۷۶ میلادی به چاپ رسیده‌اند. روزنامهٔ علمی، جریده‌ای دولتی بود که وظیفهٔ انتشار علوم جدیده را در کشورمان به عهده داشت[۲] و این موضوع، یعنی «انتشار علوم جدیده»، از آن حیث اهمیت پیدا می‌کند که به‌نظر می‌رسد، یکی از رفتارهای اصلاحی ایرانیان، در دوران پس از شکست‌های پی در پی ایران از روسیه در سلسله جنگ‌های ایران و روس، آن بوده است که دریافته بودند، دستیابی به علوم جدید و روزآمدسازی دانش، یکی از راهکارهای اصلاحی مهم در حیطهٔ مملکت‌داری به حساب می‌آید.[۳]

از دیگر سو، روزنامهٔ علمی، خود، ادامهٔ حرکتی در راستای بسط و گسترش دانش در کشور است که برای نخستین بار با روزنامهٔ علمیهٔ دولت علیه ایران در سال ۱۲۸۱ هجری قمری، یعنی حدود ۱۳ سال پس از افتتاح دارالفنون پا گرفت. به عبارت دیگر، این کوشش ایرانیان برای بسط دانش جدید در کشور از طریق انتشار جریده از سال ۱۲۸۱ و با انتشار روزنامهٔ علمیه دولت علیه ایران آغاز شد. روزنامهٔ علمیه تا سال ۱۲۸۸ حدود هشت سال انتشار یافت. این روزنامه در کنار «روزنامهٔ دولت علیه ایران» و «روزنامهٔ ملتی»، سه روزنامه‌ای بودند که در ایران دوران ناصری و به‌ویژه دوران بعد از افتتاح دارالفنون در ایران منتشر می‌شدند[۴]. در هر صورت، روزنامهٔ علمیه که وظیفهٔ «انتشار علوم که فواید بزرگ بر او مترتب است» برعهده داشت، روی هم رفته در ۵۳ شماره منتشر شد. با پنج سال فترت، روزنامهٔ علمی در سال ۱۲۹۳ هـ.ق و به کوشش **محمدحسن‌خان صنیع‌الدوله** (مشهور به

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

اعتمادالسلطنه، مرگ در سال ۱۳۱۳هـ.ق) بار دیگر در تهران منتشر شد[۵].

آنچه دربارهٔ تاریخ ریاضیات در ایران معاصر و ارتباط آن با روزنامهٔ علمی مهم است، مجموعه‌ای از پرسش‌های ریاضی و پاسخ‌های آن‌هاست که در دست‌کم شش شماره از این جریده (که اگرچه عنوان روزنامه داشت، اما با فاصلهٔ انتشاری نامنظم منتشر می‌شد) به ترتیب زیر درج شده:

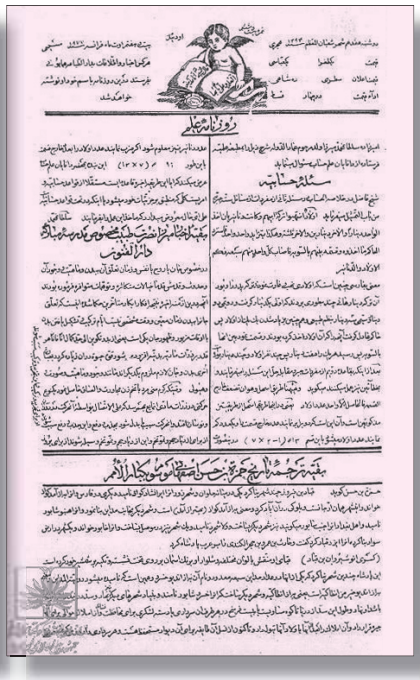
* شمارهٔ ۲۶، دوشنبه ۱۷ شعبان ۱۲۹۴
* شمارهٔ ۲۹، دوشنبه ۱۵ رمضان ۱۲۹۴
* شمارهٔ ۳۰، دوشنبه ۷ شوال ۱۲۹۴
* شمارهٔ ۳۵، دوشنبه ۴ ذی‌حجه ۱۲۹۴
* شمارهٔ۵۳، دوشنبه ۱۹ محرم ۱۲۹۶
* شمارهٔ ۵۵، سه‌شنبه ۱۷ ربیع‌الاول ۱۲۹۶

به‌نظر مؤلف این سطور، این پرسش‌ها و پاسخ‌های ارسال شده به روزنامه از جمله داده‌های مهم مربوط به تکوین ریاضیات در ایران معاصر به حساب می‌آیند و از جنبه‌های متفاوت می‌توان به آن‌ها پرداخت؛ ازجمله، اصطلاحات به‌کار رفته در آن‌ها (که جملگی تحت تأثیر کتاب بسیار مهم آموزش ریاضی در مدارس علوم دینی ایران در آن دوران، خلاصة‌الحساب شیخ بهایی شکل گرفته‌اند)، علائم ریاضی به‌کار گرفته در آن‌ها که برخلاف مؤلفهٔ قبلی برگرفته از دانش ریاضی نوین هستند، و البته موضوع پرسش‌ها.

نخستین پرسش‌ها (که در شمارهٔ ۲۶ روزنامه درج شدند)، ترجمه‌ای است از یکی از مثال‌هایی که در کتاب «خلاصة‌الحساب» **شیخ بهایی** (باب هشتم، در به‌دست آوردن مجهولات با استفاده از جبر و مقابله) آمده است[۶]. مقاله با امضای **سلطان محمد** در روزنامه درج شده است و این سلطان محمد، یکی از درس‌خواندگان دورهٔ ناصری و از شاهزادگان دربار **ناصرالدین‌شاه**، فرزند **امام قلی میرزا عمادالدوله** بوده است. این را می‌دانیم که سلطان محمدمیرزا نزد **آقا علی مدرس تهرانی** درس خوانده و ریاضی را از او آموخته و در عین حال موسیقی، عکاسی و خوش‌نویسی نیز می‌دانسته و شاعر نیز بوده است[۷].

این موضوع که پرسش مطرح شده در روزنامهٔ علمی، در سال ۱۲۹۴ و حدود ۲۶ سال پس از افتتاح دارالفنون و ورود مباحث جدید ریاضی به ایران، همچنان از مسائل مطروحه در کتاب خلاصة‌الحساب است، یکی از موضوع‌های قابل توجه در تکوین دانش ریاضی در دوران معاصر تاریخ ایران به حساب می‌آید. مؤلف این سطور، در جایی دیگر، به تفصیل کوشیده است نشان دهد کتاب خلاصة‌الحساب تا ده‌ها سال پس از ورود دانش ریاضی در ایران، همچنان بین عامهٔ مردم سیادت داشت و به‌ویژه، با توجه به تدریس آن در مدارس علوم دینی، یکی از پایه‌های بررسی دانش ریاضی بین مردم (و نه تحصیل‌کردگان دانش‌های جدید، و از آن جمله

به‌طور کلی جراید می‌توانندمنبع بسیار مهمی، برای بررسی طیف وسیعی از موضوعات تاریخ علم، (و از آن میان، تاریخ ریاضیات) و تبیین رابطهٔ «مردم» با این تاریخ باشند



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مهندسین ثابت نموده‌اند که هر زاویه قطعهٔ منفرجه است، اگر چنانچه قطعهٔ بزرگ‌تر از نصف باشد، و حاده است اگر بزرگ‌تر از نصف نباشد

ریاضی، به‌شمار می‌آید[8].

در ادامهٔ این مقاله، به یکی دیگر از نمونه‌های کوشش در عمومی‌سازی دانش ریاضی در ایران از طریق نشر جراید که در سال ۱۳۱۹ هـ.ش انجام شده است، اشاره خواهم کرد. اما نکتهٔ مهم این است که حد فاصل سال‌های ۱۲۹۴ هـ.ق/ ۱۸۷۶ میلادی تا ۱۳۱۹ هـ.ش/ ۱۹۴۰ میلادی، یعنی حد فاصل تقریباً ۶۴ سالهٔ بین پرسش‌های درج شده در روزنامهٔ علمی، تا پرسش‌های بعدی، دانش ریاضی در ایران بیش از هر زمان دیگری در تاریخ خود دچار تغییر شده است. کما اینکه پرسش‌های طرح شده در سال ۱۳۱۹هـ.ش جملگی از جنس ریاضیات نوین و اروپایی بودند و این تغییر از نگاه سنتی به ریاضی تا نگاه امروزین را در مقایسهٔ بین این دو دسته پرسش می‌توان مشاهده کرد.

در هر صورت، پس از پرسش طرح شده توسط سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی، سه دسته پاسخ به روزنامه رسید و در سه شمارهٔ متفاوت درج شد. این موضوع که سلطان محمدمیرزا از مردم و مخاطبان روزنامهٔ علمی خواسته است، نظر خود را دربارهٔ این پرسش به مجله ارسال کنند. همان رویکرد کوششی برای عمومی‌سازی دانش ریاضی در کشور است.

از میان پاسخ‌های ارسال شده برای این پرسش، آنچه در شمارهٔ ۲۹ روزنامهٔ علمی درج شده از همه مفصل‌تر است. در این شماره از روزنامه (صفحهٔ ۲) روی‌هم‌رفته سه نفر کوشیده‌اند به پرسش پاسخ دهند: شخصی به نام محمد *طاهرمیرزا*، شخصی ناشناس و میرزا عبدالرحیم مهندس، فرزند *صدیق‌الملک*. این سه پاسخ روی هم‌رفته تقریباً یک صفحه از حجم چهار صفحه‌ای شمارهٔ ۲۹ روزنامهٔ علمی را به خود اختصاص داده‌اند.

چه چیز را دوست میدارید؟

چرا خوش بود؟

در شمارهٔ ۳۰ روزنامهٔ علمی، *حسام‌الدین* فرزند *حاج میرزا* محمد که به «حکیم‌باشی شیرازی» نیز مشهور بوده، گزارشی دربارهٔ حل پرسش به‌دست داده است.

سلطان محمدمیرزا، یعنی همان کسی که برای نخستین بار در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی پرسش مطروحه در کتاب خلاصة‌الحساب را چاپ کرده بود، خود لازم دیده است دربارهٔ چهار پاسخی که برای حل مسئله فرستاده شده است، توضیحی دهد. بنابراین، در شمارهٔ ۳۵ روزنامهٔ علمی شرحی موسع برای چگونگی حل مسئله و توضیح کوشش چهار نفر قبلی برای حل مسئله به‌دست داده است که این توضیح نیز بیش از یک صفحه از حجم چهار صفحه‌ای روزنامه را به خود اختصاص داده بوده است. جالب اینجاست که خود سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی، وقتی به طرح مسئله می‌پردازد، جواب آن را نیز آورده است و دغدغهٔ او آن بوده است که چگونگی حل مسئله به پرسش گذاشته شود. همچنین، توضیحات همین سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۳۵ روزنامهٔ علمی، ناظر بر راه‌حل‌های متفاوت حل مسئله است.

در مقام پایان دادن به این بخش، عین پرسش را به نقل از نوشتهٔ سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی ذکر می‌کنیم. قابل ذکر است که او ابتدا منبع مسئله را ذکر کرده، بعد متن عربی آن را از خلاصة‌الحساب درج کرده، آن‌گاه ترجمهٔ فارسی مسئله را آورده و در نهایت، گزارشی شامل حل مسئله را به‌دست داده است. پرسش این است: ***«اولادی نهب و غارت نمودند ترکهٔ پدر را. او بود آن ترکه دینارهایی چند، به‌طوری بردند که اولی یک دینار گرفت و دومی دو دینار و سومی سه دینار به‌نظم طبیعی و همچنین به زیاد شدن یک یک از اولاد. پس حاکم عادل گرفت آنچه را که آن اولاد اخذ نموده بودند و قسمت نمود بین آن‌ها بالسویه. پس رسید هر یک را هفت دینار. پس چند نفر اولاد و چند دینار بوده است؟»*** ■

پرسش‌هایی که در شمارهٔ ۵۳ روزنامهٔ علمی درج شده‌اند، اگرچه همان فضای عمومی ریاضی ایران در دوران اسلامی را دارند، اما بیش از آن‌که پرسش‌هایی هندسی به‌شمار آیند، مجموعهٔ داده‌هایی فلسفی هستند.

این را می‌دانیم که یکی از مسائل مهم مطروحه در کتب کلامی که البته مورد توجه فلاسفه اسلامی قرار نگرفت. اندیشهٔ «جزء لایتجزا» و بحث‌های اتم‌گرایانه[9] بود. در حالی‌که فلاسفهٔ اسلامی موضوع جزء لایتجزاء را نپذیرفته و معتقد به کوچک‌ترین جزئی از ماده که

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

غیرقابل تقسیم باشد، نبودند، این اندیشه بسیار مورد توجه متکلمین اسلامی قرار گرفت و از آن برای اثبات قضایای کلامی کمک گرفته شد. بر همین اساس، براهین هندسی چندی نیز، براساس مفاهیم کوچک‌تر یا بزرگ‌تر و نیز کم کردن یا افزودن به اندازه‌ای که از نصف آن کمتر شود یا بیشتر، برای استفاده از مفهوم جزء لایتجزا بین متکلمین اسلامی طرح شد. مسائلی که در شمارهٔ ۵۳ روزنامهٔ علمی طرح شده‌اند، از این دست از مسائل به‌شمار می‌آیند.

از میان دو پرسش طرح شده در این شماره از روزنامه، که هر دو با امضای *شجاع‌الدین میرزا* درج شده‌اند. اولی به کلی ماهیتی فلسفی ـ کلامی دارد و به موضوع **طفره** اختصاص دارد[۱۰] و همان‌گونه که ذکر شد، بحثی است برای بررسی موضوع نامتناهی بودن تقسیم‌پذیری ذره که البته مورد علاقهٔ متکلمین است. اما پرسش دوم، استدلالی هندسی است برای بحث پیرامون جزء لایتجزا و تقسیم‌پذیر بودن یا نبودن ذره. پاسخی که در شمارهٔ ۵۵ روزنامهٔ علمی به این پرسش داده شده است، باز یکی دیگر از جنبه‌های مهم و البته جالب سرشت دانش ریاضی در ایران دوران قاجار را نشان می‌دهد؛ آنجایی که متکلمین از براهین هندسی، و البته تحت سیطرهٔ دانش ریاضی اقلیدسی به بحث پیرامون نظام طبیعت می‌پردازند.

در این شماره، *شمس‌الدین حکیم الهی* لواسانی، از فلاسفه و متکلمان مکتب فلسفی تهران که در سبزوار نزد *حاج ملاهادی سبزواری* درس خوانده بود (مرگ در سال ۱۳۳۶ هـ. ق) به تفصیل به دو پرسش مطرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا پاسخ داده است[۱۱]؛ اگر چه سه چهارم حجم نوشته‌های او به موضوع مسئلهٔ طفره و تنها یک چهارم به پرسش هندسی شجاع‌الدین‌میرزا اختصاص دارد.

روح حاکم بر پرسش طرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا، همچنین پاسخ‌های طرح شده توسط شمس‌الدین حکیم الهی و نیز توجه به این موضوع که این شمس‌الدین حکیم الهی لاجرم از نگاه حاج ملاهادی سبزواری به طرح مسائل می‌پردازد (البته بدون آنکه نامی از سبزواری در این میان آورده شود)، خود نظام فکری حاکم بر بحث‌های کلامی ایران دوران قاجار و نیز استفاده‌های آن زمان از مباحث هندسه برای استدلال‌های کلامی را می‌رساند. با توجه به این موضوع که هیچ‌کدام از این مسائل تازگی نداشته‌اند و همچنان دنباله‌رو بحث‌های کلامی و هندسی دورهٔ میانهٔ تاریخ ایران به حساب می‌آیند. مسائل طرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا در شمارهٔ ۵۳ روزنامهٔ علمی به شرح زیر هستند:

«مسئلهٔ اول آن است که حکمای اشراقیین و مشائین ثابت نموده‌اند که طفره محال است و مهندسین ثابت نموده‌اند که هر زاویه قطعهٔ منفرجه است، اگر چنانچه قطعهٔ بزرگ‌تر از نصف باشد، و حاده است اگر بزرگ‌تر از نصف نباشد. پس بنابراین، اگر چنانچه زاویهٔ حاده را حرکت بدهیم، هنوز به قائمه نرسیده به منفرجه خواهد رسید. پس باید طفره را جایز بدانیم و جایز دانستن طفره لیس معقول عند ارباب العقول.

مسئلهٔ ثانی آن است که مهندسین اثبات نموده‌اند که زاویهٔ نصف دایره بزرگ‌تر است از هر حاده مستقیمة‌الخطین، و حال آنکه زاویهٔ حاده سیال است و هر سیال متوقف به حدی یا حدودی نخواهد شد، محال است متوقف به حدی شود.»

■توضیح هیئت تحریریه:
صورت ریاضی این مسئله، که در سال‌های بعد و حتی اخیر، بارها در منابع مختلف و به اشکال گوناگون مورد استفاده قرار گرفته است، حل این معادله است:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=7$$

*** پی‌نوشت‌ها**

۱. یکی از بهترین نمونه‌های ادبیات علمی دربارهٔ نقش مردم در تاریخ علوم این کتاب است که می‌تواند مبدأ خوبی برای نظریه‌پردازی در این حوزه به‌شمار آید: کلیفورد کانر (۱۳۹۰). تاریخ علم مردم. ترجمه حسن افشار. تهران.

۲. دربارهٔ روزنامهٔ علمی از جمله نگاه کنید به: صدر هاشمی (۱۳۲۴). «چند روزنامهٔ مهم در زمان ناصرالدین شاه». مجلهٔ یادگار. سال ۲. شمارهٔ ۳. آبان ماه. بسیاری از شماره‌های این جریده روی بخش الکترونیک کتاب‌خانه ملی ایران قابل دستیابی است. برای راهنمایی بیشتر، نشانی شماره نخست این جریده را روی پایگاه درج می‌کنیم:
htt:// dl. nlai. ir/Ul/13409c8f- a25b-42f2- 93cf- f1803863b6e4/LRRView. aspx

۳. از جمله بهترین تحلیل‌ها در این حوزه به وسیلهٔ رینگر ارائه شده است: مونیکا رینگر (۱۳۸۱). آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی دوران قاجار. ترجمهٔ مهدی حقیقت‌خواه. تهران.

۴. درباره این جراید دوران ناصری، از جمله نگاه کنید به: ماشاالله آجودانی (۱۳۸۷). مشروطهٔ ایرانی. تهران.

۵. از جمله نگاه کنید به: صدر هاشمی، همان ص ۶۲-۶۰؛ نیز: جعفر خمامی زاده (۱۳۸۰). روزنامه‌های ایران، از آغاز تا سال ۱۳۲۹ هـ ق/ ۱۲۸۹ هـ ش، برداشتی از فهرست هـ ل. رابینو. تهران.

۶. شکل اصلی مسئله در خلاصة‌الحساب آمده و البته بدون کم و کاستی (چه در متن عربی و چه در متن فارسی) به وسیلهٔ سلطان محمد نیز درج شده است. برای متن اصلی نگاه کنید به: شیخ بهایی(۱۳۹۰). خلاصة‌الحساب. چاپ یوسف بیگ باباپور. قم.

۷. برای آگاهی بیشتر دربارهٔ زندگی سلطان محمد نگاه کنید به: ایرج افشار (۱۳۸۲). چهل سال تاریخ ایران. تهران.

۸. این موضوع را در نوشتهٔ خویش که امیدوارم طی سال ۱۳۹۳ منتشر شود، بحث کرده‌ام: فرید قاسملو (۱۳۹۳). رهیافتی به تاریخ ریاضیات در ایران معاصر. تهران.

۹. دربارهٔ جزء لایتجزی از جمله نگاه کنید: به دایرة‌المعارف بزرگ اسلامی، زیر نظر محمد کاظم موسوی بجنوردی، جلد ۱۸ ذیل مدخل جزء لایتجزی (نوشتهٔ حسین معصومی همدانی).

۱۰. دربارهٔ جزء مسئلهٔ طفره، از جمله نگاه کنید به: ابوالحسن اشعری (۱۹۸۴). مقالات الاسلامیین و اختلاف المصلیین. چاپ هلموت ریتر. ویسبادن.

۱۱. دربارهٔ شمس الدین حکیم الهی نگاه کنید به: محمد قزوینی (۱۳۲۱). «وفیات معاصرین». مجلهٔ یادگار، سال ۳. شمارهٔ ۵. دی ماه.

* ghassemlou@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

در این ایام که مشغول بستن صفحات «مجلهٔ برهان» بودیم، نامه‌ها و ایمیل‌های زیادی از عزیزان مخاطب، اعم از همکاران گرامی و یا دانش‌آموزان عزیز خوانندهٔ مجله داشتیم که لازم دانستیم، لااقل به برخی از آن‌ها اشاراتی گذرا داشته و پاسخ‌گوی محبت دوستان باشیم. لازم به تکرار نیست که این‌ها تنها بخشی از مطالب رسیده است و لذا پیشاپیش از همهٔ عزیزانی که در این شماره مجال پاسخ‌گویی به آنان فراهم نیامده است، عذرخواهی می‌کنیم.

● همکاران محترم، آقای دکتر مرتضی بیات، عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد واحد زنجان، و خانم زهرا خاتمی، دبیر آموزش‌وپرورش زنجان

مقاله‌هایتان به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما عزیزان، مقالهٔ «تعمیم یک مسئلهٔ هندسه» را در این شماره مورد استفاده قرار داده‌ایم و از مقالهٔ دیگرتان با عنوان «اثبات ترکیبیاتی قضیه‌های ابن‌هیثم و فرما» در یکی از شماره‌های بعد استفاده خواهیم کرد. حتماً باز هم برایمان از مقالات و مطالب خوبتان بفرستید.

● همکار محترم آقای حسینعلی کثیری، دبیر بازنشستهٔ ریاضی، از شهرستان بهشهر

با تشکر از شما بابت ارسال مسائل، آن‌ها را برای استفاده در بخش «پای تخته» به مسئول این قسمت تحویل دادیم. انتظار داریم که شما همکار گرامی و پیشکسوت عرصهٔ آموزش ریاضی ما را از مقالات و مطالب خوبتان که گره‌گشای مشکلات دبیران و دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی است، محروم نفرمایید. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار گرامی، آقای شهریار رضایی‌نیکو، از استان خوزستان

مقاله‌تان با عنوان «الگوریتمی برای محاسبهٔ ریشهٔ سوم اعداد» به دستمان رسید. امیدواریم در یکی از شماره‌های آینده مورد استفاده قرار گیرد. با سپاس فراوان از شما، منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

پاسخ به

● همکار گرامی، آقای محمد شریفی روشناوند، دبیر ریاضی از شهرستان گناباد

مقاله‌تان با عنوان «برهان دیگر برای $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$» به دستمان رسید. استدلالی که ارائه کرده‌اید، این نقطهٔ ابهام اساسی را دارد که در نتیجه‌گیری نهایی خود، بعد از آنکه نشان دادید: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{(\frac{2\pi}{n})}=1$، فرض کردید که: $x=\frac{2\pi}{n}$ و بنابراین: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

اما اینجا یک سؤال مهم پیش می‌آید: آیا همهٔ اعداد حقیقی موجود در همسایگی (راست و چپ) $x=0$ را می‌توان مساوی $\frac{2\pi}{n}$ در نظر گرفت؟

از اعداد منفی همسایگی چپ $x=0$ هم که صرف‌نظر کنیم، باز هم همهٔ اعداد حقیقی مثبت را نمی‌توان معادل $\frac{2\pi}{n}$ $(n\in N)$ در نظر گرفت. یعنی هر عدد حقیقی مثبت، لزوماً به‌صورت حاصل تقسیم عدد گنگ 2π بر یک عدد طبیعی دلخواه n قابل نمایش نیست. اما ایده‌ای که به‌کار گرفته‌اید، همان روشی است که برای اثبات دستور مساحت دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی با در نظر گرفتن مساحت‌های n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی و این واقعیت که مساحت دایره بین مساحت‌های آن‌ها قرار دارد و با توجه به قضیهٔ فشردگی، می‌توان دستور مساحت دایره را اثبات کرد. این موضوعی است که در کتاب‌های درسی ما متأسفانه مورد توجه قرار نگرفته است.

توصیهٔ ما این است که شکل مقالهٔ خود را تغییر دهید و به‌جای آنکه دستور مساحت دایره $(S=\pi r^2)$ را بدون اثبات بپذیرید و از آن برای اثبات دستور $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ استفاده کنید، دستور مساحت دایره را اثبات کنید. در این صورت حتماً می‌توانیم از مقاله‌تان استفاده کنیم. با سپاس مجدد و آرزوی توفیق برای شما، منتظر کارهایتان هستیم.

نامه‌ها و پیام‌نگارها

● دوست دانش‌آموز، خانم فاطمه میرزایی، از شهرستان خرم‌آباد، استان لرستان

مطالبتان به دستمان رسید. با سپاس از توجهتان به مجلهٔ برهان، باید به اطلاعتان برسانیم که کشف الگوهای مختلف در میان عددهای طبیعی، از دیرباز مورد توجه ریاضی‌دانان حرفه‌ای و آماتور بوده است و جاذبهٔ زیادی برای عدهٔ بسیاری از علاقه‌مندان ریاضیات داشته است. اما حدس زدن در این زمینه به‌جز جنبه‌های سرگرم کنندهٔ آن، نمی‌تواند به‌تنهایی چندان مفید باشد. اگر به واقع به رشتهٔ ریاضیات علاقه‌مند هستید، باید بیشتر مطالعه کنید. نامهٔ دیگرتان را که بیشتر به مباحث زیست‌شناسی مربوط می‌شد، به مسئولان مجلهٔ «رشد آموزش زیست‌شناسی» تحویل دادیم.

● همکار محترم، آقای اسحق حسین‌پور، دبیر ریاضی از شهرستان بابل

مقالاتتان با عناوین «گراف‌های فازی و بررسی خواص آن‌ها» و «عملگرها در مجموعه‌های فازی و بررسی خواص آن‌ها» به دستمان رسید. ضمن تشکر از توجهتان به مجله و نیز داشتن روحیهٔ تحقیق و مطالعه که از نوع کارهایتان کاملاً مشهود و شایان تقدیر است، در عین حال که سعی می‌کنیم حتماً از این مقالات در شماره‌های آتی استفاده کنیم، باید یادآور شویم که مخاطبان اصلی مجلهٔ ما، دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه هستند. لذا تقاضا می‌کنیم در مقالات بعدی که حتماً برای ما می‌فرستید، به نیازهای این گروه توجه بیشتری مبذول دارید.

● همکاران عزیز، آقایان بهرام دستوریان و احمد الهی، دبیران ریاضی از شهرستان کهگیلویه

مطلب مشترکتان با عنوان «نامساوی مثلثی در ماتریس‌ها» به دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آتی از آن استفاده می‌کنیم. با تشکر فراوان از شما، باز هم با ما در تماس باشید.

● همکار محترم، خانم عابده مرادی، از آموزش‌وپرورش شهرستان پیشوا

مقاله‌تان با عنوان «استدلال و اثبات»، به دستمان رسید. با سپاس فراوان از لطفتان، به اطلاع شما می‌رسانیم، اگر شماره‌های دو سال اخیر را مطالعه کرده باشید، حتماً تصدیق می‌فرمایید که مطالب مشابه در این شماره‌ها بسیار داشته‌ایم. ضمن تشکر مجدد از شما، بابت توجهتان به مجلهٔ برهان، از شما می‌خواهیم که روی مقالات مرتبط با مباحث کتاب‌های درسی که نیاز دانش‌آموزان است، تمرکز نمایید.

● همکار گرامی آقای محمد مهدوی، دبیر ریاضی از شهرستان میانه

لطف شما تا به‌حال چندبار شامل حال ما شده و مقالهٔ «تعیین علامت» از شما در شمارهٔ زمستان به چاپ رسید. مقالات دیگرتان هم انشاءالله در شماره‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند. با تشکر فراوان از شما منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

● همکار گرامی، آقای هیثم دیناروند، از شهرستان شوش دانیال(ع)

مقالهٔ خوبتان با عنوان «استفاده از مثال‌های نقض در آموزش ریاضی دورهٔ متوسطه» به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما، در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌کنیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

ساخت انیمیشن برای آموزش ریاضی

فرزاد حمزه‌پور*
دبیر ریاضی بانه
قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

چکیده

معلم ریاضی چگونه می‌تواند مفاهیم ریاضی را به‌صورت انیمیشن بیان کند، بدون اینکه در انیمیشن‌سازی تخصصی داشته باشد؟ آیا هر انیمیشنی می‌تواند برای آموزش ریاضی مناسب باشد؟ با توجه به تغییرات سریعی که در علم و آموزش علوم توسط رایانه به‌وجود آمده، پاسخ به سؤالات بالا برای هر معلم ریاضی لازم است. در این مختصر سعی شده است که به این سؤالات پاسخی مناسب داده شود.

کلیدواژه‌ها: انیمیشن‌سازی، انیمیشن آموزشی، وسایل کمک‌آموزشی

مقدمه

بر همهٔ مدرسان ریاضی در همهٔ سطوح واضح است که استفاده از وسایل کمک‌آموزشی در امر تدریس بسیار اهمیت دارد. اما مسئله این است که ساخت چنین وسایلی، هزینه‌بر، سخت و در مواردی غیرممکن است که البته برخی از این مشکلات به‌دلیل ساختار درس ریاضی است. غیر از این، نگهداری این وسایل نیز موضوع دیگری است و در کمتر مدرسه‌ای مکانی برای آن وجود دارد. خوش‌بختانه استفاده از رایانه برخی از این مشکلات را از بین برده است.

نرم‌افزارهای ریاضی، به‌ویژه نرم‌افزار mathematica امکانات فوق‌العاده‌ای دارند که طراحی شکل و ساخت انیمیشن در آن‌ها بسیار آسان صورت می‌گیرد. همچنین، ابزار بسیار مناسبی برای تولید محتوای الکترونیکی در درس‌های ریاضی و فیزیک هستند. البته نرم‌افزارهای بسیاری از جمله Flash هم وجود دارند که برای ساخت انیمیشن‌های آموزشی مفیدند، اما کار با آن‌ها خارج از محیط ریاضی است و در واقع اطلاعات ذهن طراح به نمایش درمی‌آیند. در صورتی‌که نرم‌افزارهای ریاضی نمایشگر محیط واقعی ریاضی هستند و در بسیاری از موارد از این انیمیشن‌ها برای حل و درک مسئله هم استفاده می‌شود. علاوه بر این، برای کاربر ریاضی محیط این نرم‌افزارها محیطی آشناست.

برای ساخت یک قطعهٔ انیمیشن به چند تصویر مرتبط نیاز داریم که با نمایش متوالی آن‌ها حرکت ایجاد شود. نرم‌افزار mathematica8، هم امکان ایجاد این تصویرها و هم امکان نمایش متوالی آن‌ها را دارد. به این منظور ابتدا به معرفی چند دستور مورد نیاز می‌پردازیم.

دنباله

برای تولید جملات یک دنباله یا فهرست از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

A=Table[F(n),{n,a,b}]

برای مثال، «برنامهٔ ۱» فهرستی از اعداد مربع کامل از ۱ تا ۱۰۰ را تولید می‌کند:

Table[n^2,{n,1,15}]

{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225}

برنامهٔ ۱

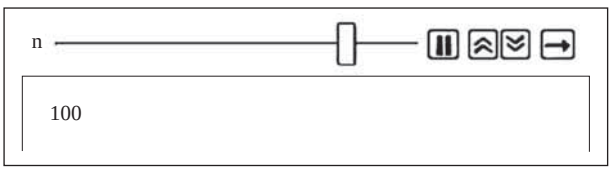
Animate

این دستور جملات دنبالهٔ f(n) را پشت‌سر هم نمایش می‌دهد و از آن برای ساخت انیمیشن استفاده می‌شود.

A=Animate[f(n),{n,a,b}]

f(n) می‌تواند یک دستور محاسباتی و یا یک دستور گرافیکی باشد.

Animate[n^2,{n,1,12,1}]



برنامهٔ ۲

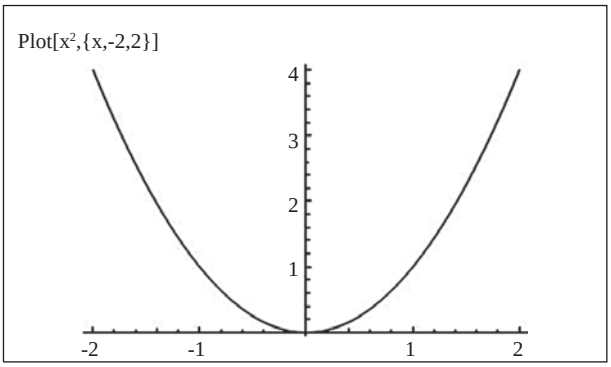
در خروجی برنامهٔ ۲ امکانات افزایش یا کاهش سرعت نمایش و تغییر جهت نمایش مشاهده می‌شود. به زبان ساده، Animate نوعی حلقه است. در این حلقه، n عامل ایجاد حرکت محسوب می‌شود.

رسم نمودار تابع به‌صورت متحرک

فرض کنیم می‌خواهیم قطعه انیمیشنی بسازیم که نمودار $y=x^2$ را در صفحه رسم کند؛ بدون اینکه قلم دیده شود.

دستور Plot نمودار تابع f را در فاصلهٔ [a,b] به‌صورت زیر رسم می‌کند.

Plot[f(x),{x,a,b}]



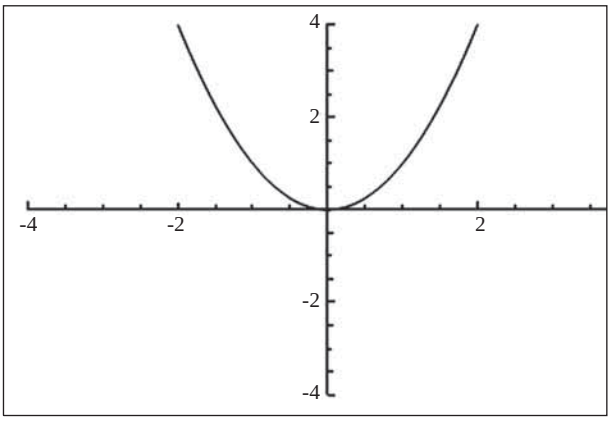
شکل ۱

کنترل دوربین

ساخت انیمیشن کنترل دوربین بسیار مهم است که توسط دستور PlotRange انجام می‌شود. این دستور شکل موجود در مستطیل [c,d]*[e,f] را نمایش می‌دهد که به‌صورت PlotRange→{{c,d},{e,f}} در دستور Plot قرار می‌گیرد.

مثال:

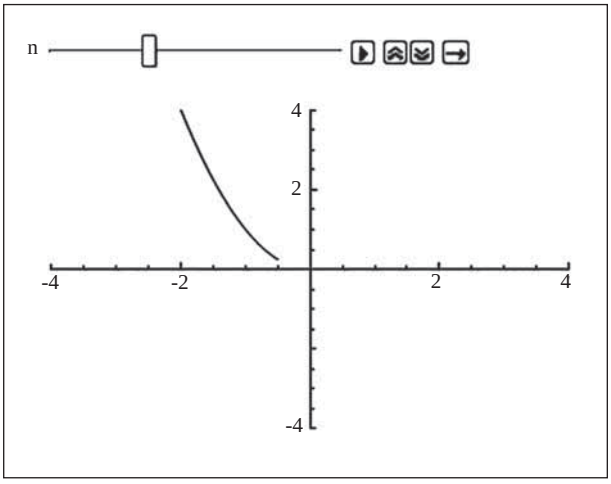
Plot[x², {x,-2,2}, PlotRange →{{-4,4},{-4,4}}]



شکل ۲

در انیمیشن موردنظر عامل ایجاد حرکت دامنهٔ تابع است که به‌صورت [-۲,n] درمی‌آید؛ در شرایطی که دوربین ثابت است.

Animate[Plot[x², {x,-2,n}, PlotRange →{{-4,4},{-4,4}}], {n , $\frac{-7}{4}$, 2 , $\frac{1}{4}$ }]



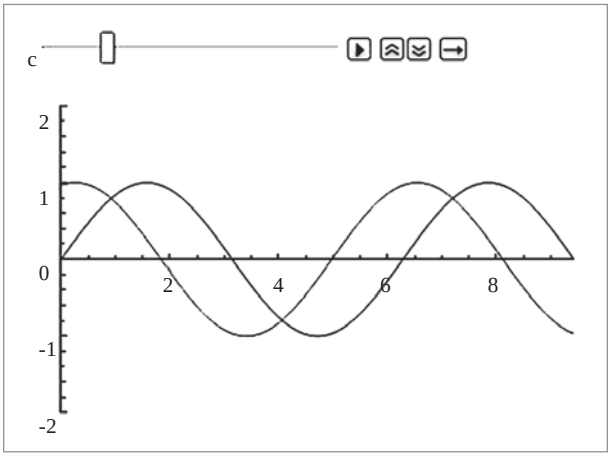
شکل ۳

در برنامهٔ بالا گام حلقه به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ است و در صورتی که طول گام کمتر شود، کیفیت نمایش بالاتر می‌رود.

انتقال تابع سینوس

می‌دانیم که نمودار تابع y=sin(x+c) انتقال تابع y=sin(x) روی محور طول‌هاست. بنابراین در این مورد عامل ایجاد حرکت c محسوب می‌شود که باید در حلقهٔ Animate قرار بگیرد.

Animate[Plot[{sin[x], sin[x+c], {x,0,3π}, PlotRange →{{0,3π}, {{0,3π}}], {c ,0 , 2π , $\frac{\pi}{12}$ }]



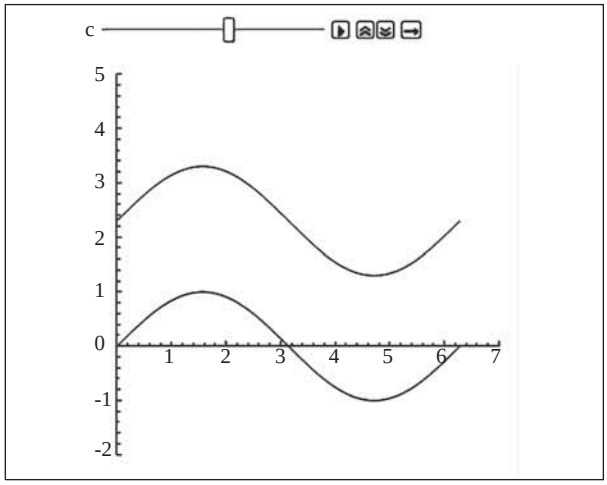
شکل ۴

در انیمیشن بالا برای مشاهدهٔ حرکت و حل مسئله، نمودار دو تابع y=sin(x+c) و y=sin(x) با هم رسم شده‌اند. در شرایطی که دوربین ثابت است، y=sin(x)+c نیز انتقال یافتهٔ تابع y=sin(x) در راستای محور عرض‌هاست. بنابراین عامل ایجاد حرکت در حلقهٔ Animate، «c»

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

است. همچنین نمودار دو تابع را با هم در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

```
Animate[Plot[{sin[x], sin[x]+c},{x,0,2π}, PlotRange →{{0,7},
{-2,5}},AspectRatio → 1],{c ,0 , 4 , 1}]
```



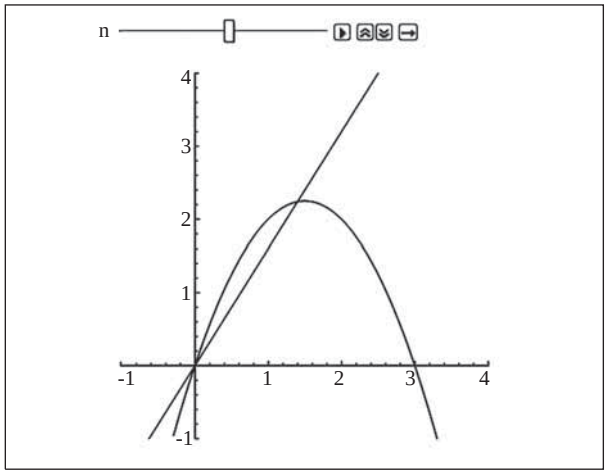
شکل ۵

روش نیوتن برای محاسبهٔ شیب خط مماس بر منحنی

در این روش تاریخی، برای محاسبهٔ شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطهٔ A، نقطهٔ B را روی منحنی در نظر می‌گیریم و شیب خط AB را حساب می‌کنیم. این شیب، تقریبی از شیب خط مماس است و هرچه B به A نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر خواهد بود.

به فرض می‌خواهیم محاسبهٔ شیب خط مماس بر $f(x)=-x^2+3x$ را در مبدأ به‌صورت انیمیشن درآوریم. بنابراین مبدأ نقطهٔ A است و: $B=(n,-n^2+3n)$. همچنین، معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=(-n+3)x$ است که این دو تابع را با هم در یک دستگاه رسم می‌کنیم. عامل ایجاد حرکت n است که باعث می‌شود نقطهٔ B و خط AB حرکت کند.

```
Animate[Plot[{-x²+3x, (-n+3)x}, {x,-1,4c}, PlotRange →{{-1,4},
{-1,4}},AspectRatio → 1],{n , 3 , 0 ,.04}]
```



شکل ۶

محاسبهٔ سطح زیر منحنی با روش مستطیل‌بندی

در این قسمت هم به چند دستور نیاز داریم:

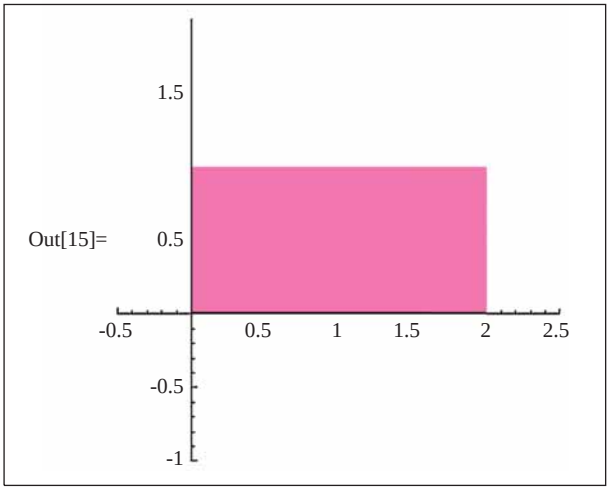
رسم مستطیل

برای رسم یک مستطیل موازی محورها که رئوس روی یکی از قطرهای آن (a,b), (c,d) است، با دستور

A=Rectangle[{a,b}, {c,d}]

مستطیل را معرفی و نام‌گذاری می‌کنیم. سپس با دستور «Graphics[A]» آن را رسم می‌کنیم.

```
In[14]=A= Rectangle[{0,0}, {2,1}]
Graphics[A,Axes → True PlotRange→{{-.5,2.5},
{-.1,2}},{AspectRatio → 1],{n , 3 , 0 ,.04}]
Out[14]= Rectangle[{0,0}, {2,1}]
```



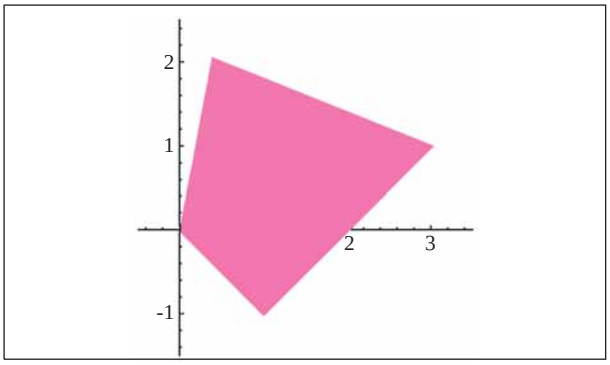
شکل ۷

چندضلعی

یک n ضلعی را به‌صورت A=Polygon[{{x_1,y_1},...,{x_n,y_n}}] معرفی می‌کنیم و با دستور Graphics[A] آن را نمایش می‌دهیم.

مثال:

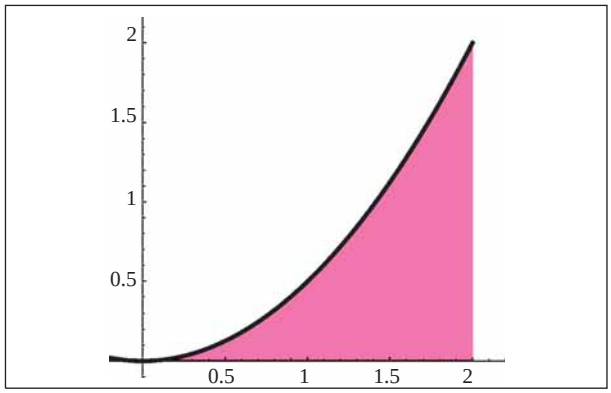
```
A= Polygon[{{0,0},{1,-1},{2,0},{3,1},{.4,2}}]
Graphics[A,PlotRange→{{-.5,3.5},{-1.5,2.5}},
{AspectRatio → 1,Axes → True]
Polygon[{{0,0}{1,-1},{2,0},{3,1},{0.4,2}}]
```



شکل ۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

برای محاسبهٔ سطح زیر یک منحنی مثل $y=\frac{x^2}{2}$، از x=۰ تا x=۲ (شکل ۹) فاصلهٔ [۰,۲] را برای مثال به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس روی هر قسمت یک مستطیل می‌سازیم. مجموع مساحت این مستطیل‌ها تقریبی از مساحت اصلی است. این مستطیل‌ها می‌توانند پایین‌تر از منحنی یا بالاتر از منحنی باشند. به‌عبارت دیگر، تقریب نقصانی یا اضافی باشد.



شکل ۹

تقریب نقصانی

مستطیل‌های تقریب نقصانی برای چهار مستطیل به‌صورت زیر هستند:

$$R_0 = Rectangle\left[\{0,0\},\left\{\frac{1}{2},f[0]\right\}\right]$$

$$R_1 = Rectangle\left[\left\{\frac{1}{2},0\right\},\left\{\frac{2}{2},f\left[\frac{1}{2}\right]\right\}\right]$$

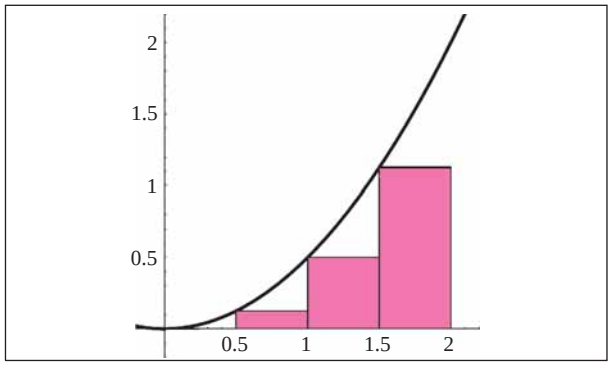
$$R_3 = Rectangle\left[\left\{\frac{2}{2},0\right\},\left\{\frac{3}{2},f\left[\frac{2}{2}\right]\right\}\right]$$

$$R_4 = Rectangle\left[\left\{\frac{3}{2},0\right\},\left\{\frac{4}{2},f\left[\frac{3}{2}\right]\right\}\right]$$

و این مستطیل‌ها با دستور

Graphics[{{R.},{R۱},{R۲},{R۳}}]

نمایش داده می‌شوند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

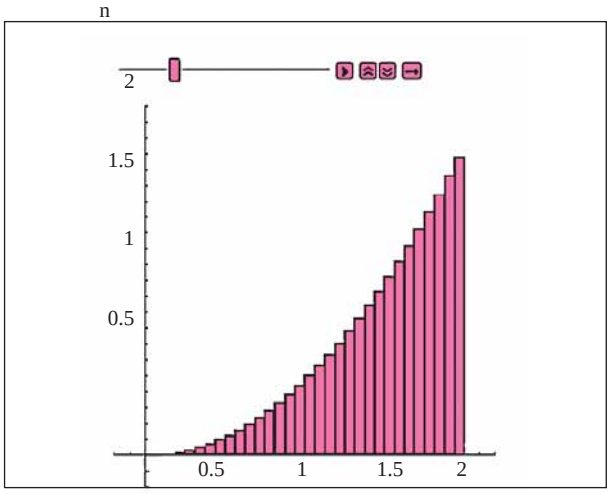
اما این مستطیل‌ها در حالت کلی به شکل $R_k = Rectangle\left[\left\{\frac{k}{2},0\right\},\left\{\frac{k+1}{2},f\left[\frac{k}{2}\right]\right\}\right]$ هستند که $d=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$ و دامنه را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

اما اگر بخواهیم دامنه را به n قسمت تقسیم کنیم، با توجه به اینکه $d=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$، مستطیل‌ها به شکل کلی $Rectangle\left[\left\{k\frac{2}{n},0\right\},\left\{(k+1)\frac{2}{n},f\left[k\frac{2}{n}\right]\right\}\right]$ خواهند بود و با دستور $Table\left[Rectangle\left[\left\{k\frac{2}{n},0\right\},\left\{(k+1)\frac{2}{n},f\left[(k)\frac{2}{n}\right]\right\}\right],\{k,0,n-1\}\right]$ دنبالهٔ آن‌ها تولید می‌شود و Animate نیز تصاویر این دنباله را به‌صورت متحرک درمی‌آورد که در برنامهٔ ۳ آن را می‌بینیم:

```
b = 2 ,
a = 0,
F[x_ ] = x^2/x
Animate[Graphics[Table[{EdgeForm[Thick], Blue, Rectangle[{k^2/n,0},
{(k+1)}, 2/n , F[(k) 2/n ]}]},{k,0,n-1}]
PlotRange →{{-.2 , 2.2}, {-.2 , 2.2}}, AspectRatio→1,Axes→True],
{n , 2, 120, 2}]
```

برنامهٔ ۳

برنامهٔ ۳ به آسانی قابلیت گسترش به هر تابعی را دارد. تنها کافی است که ضابطهٔ تابع و دامنه را تغییر دهیم. خروجی این برنامه شکل ۱۱ است.

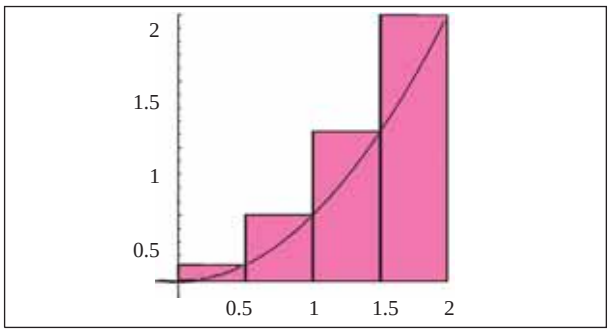


شکل ۱۱

تقریب اضافی

در تقریب اضافی (شکل ۱۲)، مساحت مستطیل‌ها از مساحت زیر منحنی بیشتر است.

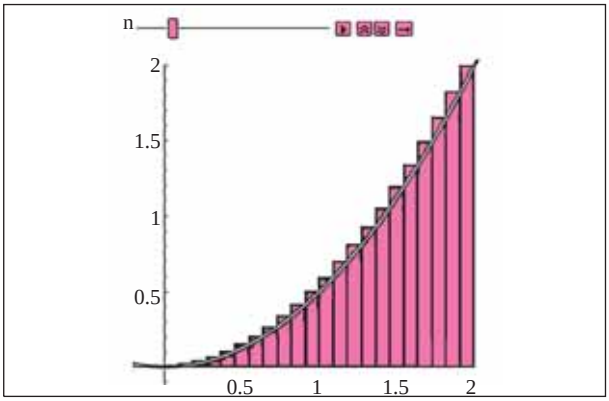
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



شکل ۱۲

با تغییر کوچکی در برنامهٔ ۲ می‌توانیم مفهوم تقریب اضافی را هم به‌صورت انیمیشن درآوریم. همچنین برای کامل شدن کار، منحنی را هم همراه مستطیل‌ها رسم می‌کنیم (شکل ۱۳).

```
b = 2,
a = 0,
F[x_ ] = x^2/2,
Animate[Show[Graphics[Table[EdgeForm[Thick], Blue, Rectangle
[{k^2/n,0}, {(k+1) 2/n , F[(k+1) 2/n ]}]},(k,0,n-1)],
PlotRange →{{-.2 , 2}, {-.2 , 2}}, AspectRatio→1,Axes→True],
Plot[ x^2/2,{x,-1,3}, PlotRange →{{-.2 , 2.2}, {-.2 , 2.2}},
AspectRatio →1,Axes →True,Plotstyle →{Thinkness[.01],Red}]],
{n , 2 , 120 , 2}]
```



شکل ۱۳

در برنامهٔ فوق از دستور Show استفاده شده است. این دستور وقتی به‌کار می‌رود که بخواهیم دو شکل را با هم در یک دستگاه نمایش دهیم. در دستور Show[A,B] .

A و B برای نرم‌افزار شناخته شده‌اند.

نکتهٔ آموزشی

برای یاد گرفتن سریع‌تر برنامه‌نویسی برای انیمیشن‌ها بهتر است برنامه‌های نوشته شده در مقاله را در رایانهٔ خود بنویسید و اجرا کنید. سپس با تغییر اجزای آن برنامه، از قبیل تابع، دامنه و... با برنامه‌ها و ساختار آن‌ها آشنا شوید.

منابع

۱. قنبری، قاسم‌حسین (۱۳۸۳). **ریاضیات هنری و انیمیشن‌سازی همراه با نرم‌افزار mathematica**. انتشارات یکان.

۲. توماس، جرج و فینی، راس (۱۳۷۰). **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی**. ترجمهٔ مهدی بهزاد و سیامک کاظمی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

farzad23@yahoo.com

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه

ایستگاه اول

۱. خیلی نباید انتظار بکشیم! تنها چهار سال دیگر:

$۱۳۹۸=۲\times۳\times۲۳۳$

۲. بله، به‌عبارت دیگر باید با توجه به قضیهٔ فیثاغورس، عددهای طبیعی x و y را طوری بیابیم که داشته باشیم: $x^۲+y^۲=۱۳۹۴$. دو جواب متمایز برای این مسئله چنین است:

$۵^۲+۳۷^۲=۱۳^۲+۳۵^۲=۱۳۹۴$

۳. شبیه مسئلهٔ قبل است. باید عددهای طبیعی x، y و z را طوری بیابیم که داشته باشیم: $x^۲+y^۲+z^۲=۱۳۹۴$. به‌راحتی از همان جواب مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم. از آنجا که $۵^۲=۳^۲+۴^۲$، پس داریم: $۳^۲+۴^۲+۳۷^۲=۱۳۹۴$.

۴. بله به سادگی! یک جواب این است: $۱۳+۱۳۸۱=۱۳۹۴$.

۵. بله به سادگی! از همان جواب مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم: $۲+۱۱+۱۳۸۱=۱۳۹۴$ جواب‌های بسیار دیگری هم وجود دارد؛ مثلاً این جواب: $۱۹+۲+۱۳۷۳=۱۳۹۴$. به‌صورت مجموع چهار عدد نیز می‌توان نوشت؛ از جمله: $۱۳+۵+۳+۱۳۷۳=۱۳۹۴$.

۶. بهترین الگوریتم برای این منظور، آن است که عددهای اول را از پایین به بالا مرتب کنیم تا جایی که مجموع آن‌ها از ۱۳۹۴ بیشتر یا با آن مساوی شود. با این کار به مجموع زیر می‌رسیم:

$۲+۳+۵+۷+۱۱+۱۳+۱۷+۱۹+۲۳+۲۹+۳۱+۳۷+۴۱+۴۳+۴۷$
$+۵۳+۵۹+۶۱+۶۷+۷۱+۷۳+۷۹+۸۳+۸۹+۹۷+۱۰۱+۱۰۳$
$۱۰۷+۱۰۹=۱۴۸۰$

و این مجموع، ۸۶ واحد بیشتر از ۱۳۹۴ است. چون ۸۶ عدد اول نیست. پس نمی‌توان با حذف یکی از این عددها، به مجموع ۱۳۹۴ رسید. اما چون: $۳+۸۳=۸۶$، پس با حذف دو عدد ۳ و ۸۳، از بین عددهای فوق، می‌توان به مجموع ۱۳۹۴ رسید:

$۲+۵+۷+۱۱+۱۳+۱۷+۱۹+۲۳+۲۹+۳۱+۳۷+۴۱+۴۳+۴۷$
$+۵۳+۵۹+۶۱+۶۷+۷۱+۷۳+۷۹+۸۹+۹۷+۱۰۱+۱۰۳+۱۰۷$
$+۱۰۹=۱۳۹۴$

یعنی می‌توان ۲۷ عدد اولِ متمایز مشخص کرد که مجموعشان مساوی ۱۳۹۴ شود. ممکن است تصور شود که

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

می‌توان با حذف یک یا دو عدد و اضافه کردن عدد اولی دیگر، همین مجموع را به‌دست آورد که تعداد عددهای اول بیشتری را در بربگیرد. اما این تصور نادرست است، زیرا با جایگزین کردن عددهای اول بزرگ‌تر از ۱۰۹ با یکی از این عددها، مجموع فوق بیشتر می‌شود. اما با جایگزین کردن یک عدد بزرگ‌تر از ۱۰۹ با دو تا از این عددها هم نمی‌توان به مجموع ۱۳۹۴ رسید. چون به فرض که دو عدد اول $x,y \geq ۱۰۹$ را حذف کنیم و عدد اول $z>۱۰۹$ را به‌جای آن‌ها بگذاریم، باید داشته باشیم:

$$۱۴۸۰-x-y+z=۱۳۹۴ \Rightarrow x+y-۸۶=z$$

و اگر x و y هر دو فرد باشند، x+y زوج و در نتیجه x+y-۸۶ هم زوج می‌شود که با اول بودن z تناقض دارد. مگر اینکه یکی از دو عدد x و y زوج، یعنی ۲ باشد که در این صورت خواهیم داشت: z=y-۸۴. این هم با فرض $z>۱۰۹$ تناقض دارد. پس تنها راه ممکن حذف سه‌تا از عددهای فوق و اضافه کردن یک عدد اول بزرگ‌تر از ۱۰۹ است که این کار ممکن است. مثلاً حذف سه عدد آخر، یعنی ۱۰۳، ۱۰۷ و ۱۰۹ و اضافه کردن ۲۳۳ به‌جای آن‌ها که باز هم مجموع ۱۳۹۴ را می‌دهد:

$$۲+۳+۵+...+۸۹+۹۷+۱۰۱+۲۳۳=۱۳۹۴$$

ولی باز هم ۲۷ عدد خواهیم داشت. پس حداکثر ۲۷ عدد اول متمایز می‌توان مشخص کرد.

۷. با فرض اینکه مجموع عددهای طبیعی متوالی n+۱، n+۲ و... و n+m، ۱۳۹۴ باشد، داریم:

$$n+۱+n+۲+...+n+m=۱۳۹۴$$

$$\Rightarrow mn+\frac{m(m+۱)}{۲}=۱۳۹۴$$

$$\Rightarrow ۲mn+m^۲+m=۱۳۹۴\times ۲$$

$$\Rightarrow m(m+۱+۲n)=۲^۲\times ۴۱\times ۱۷$$

بنابراین مقادیر متفاوتی را می‌توان به m نسبت داد و از آنجا n را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} m=۴ \\ n=۳۴۶ \end{cases} \text{غیرقابل قبول} \quad \begin{cases} m=۲ \\ n=۶۹۹/۵ \end{cases} \quad \begin{cases} m=۱ \\ n=۱۳۹۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=۶۸ \\ n=-۱۴ \end{cases} \text{غیرقابل قبول} \quad \begin{cases} m=۳۴ \\ n=۲۳/۵ \end{cases} \text{غیرقابل قبول} \quad \begin{cases} m=۱۷ \\ n=۷۳ \end{cases}$$

و مقادیر $m>۶۸$ هم به‌همین صورت غیرقابل قبول هستند. پس حداکثر ۱۷ عدد طبیعی از ۷۴ تا ۹۰ را می‌توان یافت که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ است:

$$۷۴+۷۵+۷۶+...+۹۰=۱۳۹۴$$

اپیستگاه دوم

معمای اول:

بدیهی است که بهمن و پرویز می‌توانند هر دو مزدایی یا هر دو اهریمنی باشند. حال، با توجه به تناقض در گفتارشان، نمی‌توانند هر دو مزدایی باشند. پس هر دو اهریمنی هستند. یعنی هر دو دروغگویند. پس گفتهٔ بهمن دروغ است و لااقل یکی از آن‌ها ازدواج نکرده است. گفتهٔ پرویز هم دروغ است. یعنی پرویز ازدواج کرده و بهمن ازدواج نکرده است.

معمای دوم:

اگر این روایت درست باشد و بهمن و پرویز هر دو مزدایی باشند، آن‌گاه باید هر دو جمله درست باشد. در این صورت با توجه به گفتهٔ پرویز، او ازدواج نکرده و در نتیجه با توجه به گفتهٔ بهمن، او هم ازدواج نکرده است. اما اگر هر دوی آن‌ها اهریمنی باشند، باید هر دو جمله نادرست باشد. در این صورت جملهٔ بهمن

برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوهٔ اشتراک:
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شمارهٔ حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

◆ نام مجلات درخواستی: .....
◆ نام و نام خانوادگی: .....
◆ تاریخ تولد: ..... ◆ میزان تحصیلات: .....
◆ تلفن: .....
◆ نشانی کامل پستی: .....
استان: ..... شهرستان: ..... خیابان: .....
شمارهٔ فیش بانکی: ..... مبلغ پرداختی: .....
پلاک: ..... شمارهٔ پستی: .....
◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید: .....
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۵۹۵۶۱/۱۱۱
● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
● اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶ / ۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

نادرســت اســت و نتیجه می‌شــود که یکی از آن‌ها ازدواج کرده و دیگری ازدواج نکرده اســت. با توجه به نادرســتی جملهٔ پرویز، او باید ازدواج کرده باشــد ولی بهمن ازدواج نکرده باشــد. پس در هر دو حالــت بهمن ازدواج نکرده اســت، ولی در مورد پرویز نمی‌توان نتیجهٔ قطعی گرفت.

معمای سوم:

اگر جواب دوم متهم، بله بوده باشــد، آن‌گاه واضح خواهد بود که او یک اهریمنی اســت (زیرا دو جملهٔ او متناقض می‌شوند). در آن صورت هر دو جملهٔ او نادرست است و هیچ راهی برای تشخیص اینکه او شتر را دزدیده یا نه، باقی نمی‌ماند. پس باید پاسخ دوم او خیر بوده باشد. حالا فرض کنید که او یک مزدایی بوده است. پس طبق آنچه که او گفت که شــتر را ندزدیده اســت، از ارتکاب جرم مبراست. اما اگر او اهریمنی بوده باشد چه‌طور؟ آن‌گاه هر دو پاسخ او نادرست است. این یعنی او هرگز نگفته که هرگز شتر را ندزدیده است. لذا او یک‌بار گفته که شتر را دزدیده است. اما اهریمنی بودن او باعث می‌شــود که جملهٔ او دروغ باشد؛ یعنی او شتر را ندزدیده اســت. لذا صرف‌نظر از اینکه او اهریمنــی یا مزدایی بوده، گناهکار نیست (اهریمنی یا مزدایی بودن او قابل تشخیص نیست).

معمای چهارم:

بدیهی است که C اهریمنی است، زیرا هیچ مزدایی این جملهٔ نادرســت را بیان نمی‌کند که هر سهٔ آن‌ها اهریمنی هستند. پس C اهریمنی است و در نتیجه جملهٔ او نادرست است و لااقل یکی از دو نفر A و B مزدایی هســتند. اما B نمی‌تواند جارچی جزیره باشد. زیرا یک جارچی مزدایی، دروغ نمی‌گوید که بگوید جارچی جزیره، اهریمنی اســت و یک جارچی اهریمنی، راست نمی‌گوید که بگوید جارچی جزیره، اهریمنی است. پس B جارچی نیست.

اگر A مزدایی باشد، جملهٔ او درست است. بنابراین او جارچی جزیره نیســت و چون B هم نیســت، پس C جارچی و اهریمنی است. لذا اگر A مزدایی باشد، جارچی جزیره، اهریمنی است.

اما اگر اهریمنی باشــد، جملهٔ او نادرست است و لذا جارچی جزیره است و باز هم جارچی جزیره، اهریمنی است.

به‌طــور خلاصــه، جارچــی جزیره یکــی از دو نفــر A و C و اهریمنی است، ولی نمی‌توان جارچی جزیره را تشخیص داد.

معمای پنجم:

چون A گفت C اهریمنی اســت، پس راست گفت و در نتیجه A مزدایی است و جارچی نیست. لذا جارچی جزیره، C است.

معمای ششم:

چون C با B موافقت کرده است، پس آن‌ها هر دو از یک جنس (اهریمنی یا مزدایی) هســتند. اگر B مزدایی بوده باشد، آن‌گاه C هم مزدایی بوده اســت. اما این فرض، جملهٔ B را نادرست می‌کند و این ممکن نیســت که جملهٔ یک مزدایی نادرســت باشد. پس B اهریمنی اســت و لذا C هم اهریمنی و جملهٔ A نادرست است. در نتیجه او هم اهریمنی است. یعنی هر سه نفر اهریمنی هستند.

معمای ششم:

حداکثر یکی از ۱۰ جمله می‌تواند درست باشد. بنابراین لااقل ۹ نفر از آن‌ها اهریمنی هستند. A_{10} نمی‌تواند مزدایی باشد، پس جملهٔ A_{10} دروغ اســت. یعنی لااقل یکی از ۱۰ نفر مزدایی است. بنابراین دقیقاً نه نفر از آن‌ها اهریمنی هســتند. پس A_9 درســت گفته و مزدایی است و بقیه اهریمنی‌اند.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و نه شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول)
رشد جوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی
◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی
(به صورت فصل‌نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول) ◆ رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه دوم) ◆ رشد آموزش قرآن ◆ رشد آموزش معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد آموزش زمین‌شناسی ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.
◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۰۲۱

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات