دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

رشد برهان ریاضی

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

دورهٔ بیست‌وچهارم
شمارهٔ پی‌درپی ۸۶
تابستان ۱۳۹۴
شماره ۴
۶۴ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

حرف اول / مطالعهٔ اثربخش: تعادل در کمیت و کیفیت / حمیدرضا امیری ۲
آموزشی / اعداد عجیب و خانواده‌هایشان! / مروارید جعفری ۳
نامساویِ اویلر / محمد طبیعی ۱۸
پای تخته / محرم نژاد ایردموسی ۲۰
دسته‌بندی داده‌های پیوسته در آمار توصیفی / رضا زینی‌وند ۲۴
مختصات قطبی / لیلا افتخاری ۲۸
استفاده از مثال‌های نقض در آموزش ریاضی دورهٔ متوسطه / هیثم دیناروند ۳۵
اثبات ترکیبیاتی / مرتضی بیات ـ زهرا خاتمی ۳۸
یافتن مساحت مثلث با داشتن مختصات رئوس آن / مهدی میرزافام ۴۰
راز کارت‌های سن و سال / روح‌الله حسنی ۴۶
یك اثبات ساده برای دستورهای محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ / هوشنگ شرقی ۵۳
به‌دست آوردن مجموع جملات با استفاده از روابط بازگشتی / بهرام دستوریان ۵۶
کاربرد انتگرال در محاسبهٔ احتمال در فضای پیوسته / آسیه رضائی گرجی ۶۰
ریاضیات در سینمای جهان / معلمی را دوست دارم! / احسان یارمحمدی ۶
آموزش ترجمهٔ متون ریاضی / مجموعه‌های عددی / حمیدرضا امیری ۸
گفت‌وگو / تدریس و معلمی لذت‌بخش است (پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار، دکتر عین‌الله پاشا) / ارغوان غلامی ـ هوشنگ شرقی ۱۰
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: جدول واژه‌های ریاضی / مریم حیدری ۱۹
ایستگاه دوم: معماهایی از سرزمین ایران باستان! / باز هم مزداییان و اهریمنیان! ۲۷
ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۵۰
پاسخ ایستگاه‌های اندیشه و ادب ریاضی ۶۳
تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران / رشد آموزش ریاضی شماره‌های ۲۹ تا ۳۰ / غلامرضا یاسی‌پور ۴۲
معرفی کتاب / هوش مصنوعی / غلامرضا یاسی‌پور ۵۲
مجلات ریاضی جهان / اسم مجله: Parabola Mathematics Magazine / احسان یارمحمدی ۵۴
بازتاب / پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها ۵۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی و با یاد همکار عزیزمان زنده‌یاد پرویز شهریاری
وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار*: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله: http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۰۲۱
۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
شمارگان: ۹۷۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

*تذکر مهم:
نشانی پیام‌نگار سابق مجله (Borhanm@roshdmag.ir) از این به بعد معتبر نیست. لطفاً مقاله‌ها و سایر پیام‌های خود را به این نشانی ارسال کنید:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

مطالعهٔ اثربخش: تعادل در کمیت و کیفیت

شما به‌طور متوسط در هر هفته چند ساعت درس می‌خوانید؟ منظورم ساعت‌هایی است که خارج از مدرسه به مطالعه می‌پردازید. ۲۰ ساعت، ۳۰ ساعت یا بیشتر از ۳۰ ساعت درس می‌خوانید؟ حتماً می‌دانید که این تعداد ساعت «کمیت» مطالعهٔ شما را نشان می‌دهد، اما اینکه چگونه درس می‌خوانید و آیا هنگام درس خواندن تمرکز کافی دارید، «کیفیت» درس خواندن شما را مشخص می‌کند.

مطالعه و درس خواندن در صورتی ثمربخش است که کمیت و کیفیت با هم در تعادل باشند. اگر شما زمان زیادی را صرف درس خواندن کنید، ولی حواس جمع و تمرکز کافی نداشته باشید، و یا اینکه تمرکز داشته باشید، ولی وقت کافی برای درس خواندن صرف نکنید، در هر دو صورت نتیجهٔ مطلوبی به‌دست نمی‌آورید. رسیدن به این تعادل، یعنی درس خواندن با تمرکز و به مقدار کافی، به چندین عامل بستگی دارد؛ شناختِ دقیق و کافی از خودتان، از ماهیت و ساختار درس‌ها و کتاب‌های درسی‌تان و وضوح و شفافیت در هدف‌هایتان از مهم‌ترین این عامل‌ها به‌شمار می‌روند.

شما وقتی نسبت به خود و ماهیت درس‌هایتان معرفت کافی داشته باشید، به‌راحتی برای اوقات مطالعه و چگونگی آن، برنامه‌ریزی می‌کنید. مثلاً بعضی‌ها درس‌های عمومی را با نوشتن و بعضی با بلند خواندن متن‌ها بهتر یاد می‌گیرند. بعضی‌ها صبح زود آمادگی بیشتری برای یادگیری دارند و بعضی دیگر، بعدازظهرها بهتر می‌آموزند.

روش شما، لزوماً برای یادگیری مطالب درسی بهتر از روش دوستتان نیست و روش او هم از روش شما بهتر نیست. هر دو روش، خوب و مناسب‌اند، زیرا هرکدام از شما با توجه به شناختی که از خود دارید آن روش را انتخاب کرده‌اید.

البته شما می‌توانید با استفاده از تجربیات دیگران و روش‌هایی که مورد استفاده قرار می‌دهند و شاید با تلفیق آن‌ها، به روشی مناسب‌تر برای خود دست پیدا کنید.

اهداف واضح و شفاف به این روش‌ها و استفاده از آن‌ها سمت و جهت می‌دهند و باعث انگیزهٔ بیشتر و استمرار در به‌کارگیری آن‌ها می‌شوند. موفق باشید.

سردبیر

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اعداد عجیب و خانواده‌هایشان!

مروارید جعفری*

چکیده

این مقاله عدد عجیب و ویژگی‌های آن را معرفی کرده و سپس چند عدد دیگر با تقریباً همین ویژگی‌ها را ارائه داده است که نشان می‌دهد عدد عجیب منحصربه‌فرد نیست. در ادامه روشی را برای ساختن یا در واقع شناختن عدد عجیب و اعداد عجیب مشابه با آن، به‌طور کامل توضیح می‌دهد که با وجود اینکه اثبات نمی‌کند، ولی خواننده این احساس را پیدا می‌کند که تمام اعداد عجیب را از این راه می‌توان به‌دست آورد و به‌خاطر سپرد.

کلیدواژه‌ها: عدد عجیب، جایگشت دایره‌ای، دورهٔ تناوب، سرگرمی، ریاضی

مقدمه

فراگیری علوم گوناگون، جدا از اینکه لازمهٔ بهتر زیستن است، همواره دارای زیبایی‌هایی است که جویندگان علم را دچار چنان لذتی می‌کند که از همهٔ لذات دیگر دست می‌کشند و شیفته و مفتون تعلیم و تعلم می‌شوند. در این بین لذت درک زیبایی‌های ریاضی در ورای مادیات عمیق‌تر و جذاب‌تر است و به خاطر استحکام و حقیقت ذاتی آن، ماندگاری بیشتری دارد.

ریاضی شانه‌ای بر زلف پریشان عالم است؛ نه اینکه زلف عالم، پریشان است! نه، بلکه ریاضیات، آنچه را که ما پریشان می‌بینیم به‌گونه‌ای جلوه می‌دهد تا نظم جاری در آن و زیبایی آن را بهتر ببینیم و پریشان حالی خود را در لذت درک نظام هستی غرق کنیم. تنها ابزار برای بارز و آشکار کردن این زیبایی‌ها، اعداد و ارقام ریاضی است که ابزاری غیرمادی و در عین حال واقعی و در همه‌جا موجود است.

یک عدد عجیب!

چندی پیش، یکی از استادان دانشگاه آتن، پایتخت یونان، عددی را کشف کرد که ویژگی‌های عجیبی دارد. آن عدد ۱۴۲۸۵۷ است.

اگر این عدد را در دو ضرب کنیم، حاصل ۲۸۵۷۱۴ می‌شود.

اگر آن را در سه ضرب کنیم، حاصل ۴۲۸۵۷۱ می‌شود.

اگر آن را در چهار ضرب کنیم حاصل ۵۷۱۴۲۸ می‌شود.

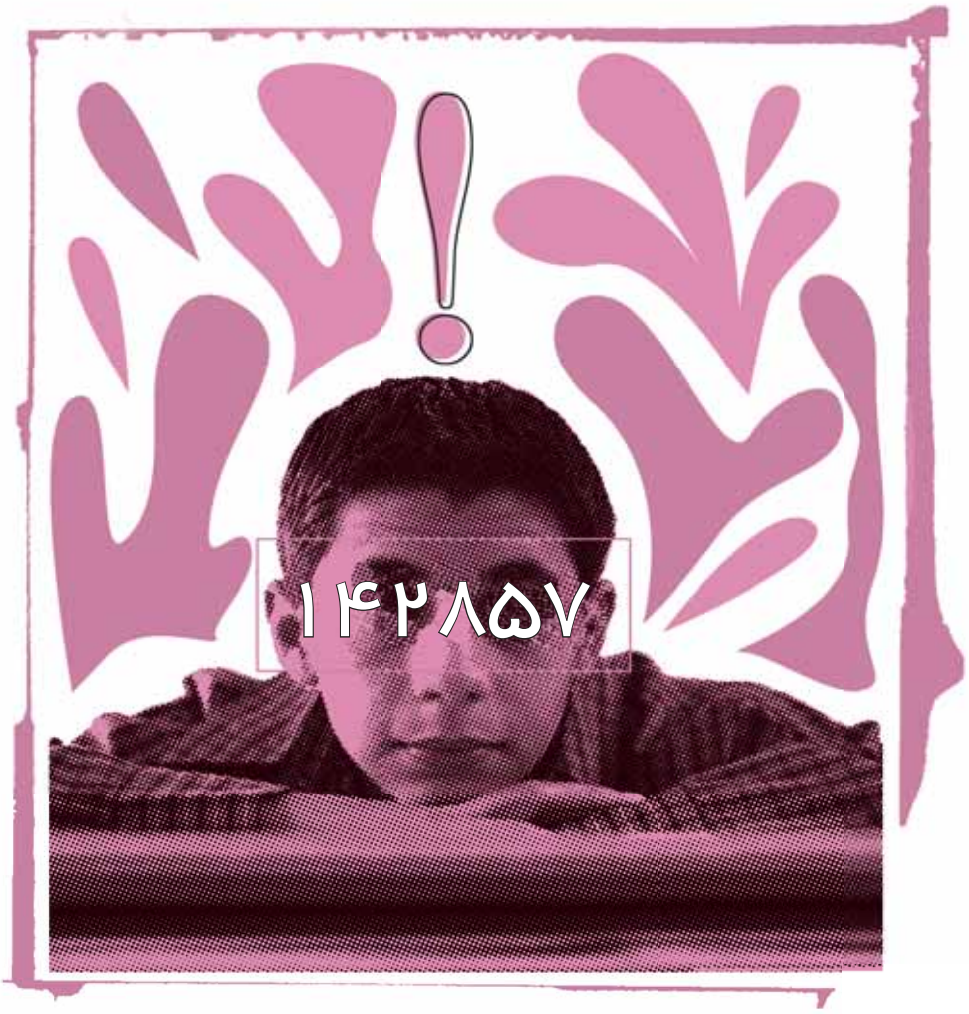
اگر آن را در پنج ضرب کنیم، حاصل ۷۱۴۲۸۵ می‌شود.

اگر آن را در شش ضرب کنیم، حاصل ۸۵۷۱۴۲ می‌شود.

اگر آن را در هفت ضرب کنیم، حاصل ۹۹۹۹۹۹ می‌شود.

می‌بینیم که حاصل‌ضرب این عدد عجیب در ۲، جایگشت دایره‌ای از ارقام همین عدد است

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir



که با دومین رقم آن عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود.

حاصل‌ضرب همین عدد در ۳، جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد است که با سومین رقم همین عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود.

همین رویّه ادامه دارد تا عدد۶ـ تعداد ارقام عدد عجیبـ که حاصل آن باز هم جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد عجیب است که با ششمین رقم آن عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود. شگفت‌آور اینکه وقتی به عدد ۷ می‌رسیم، اگرچه بار دیگر «جایگشت دایره‌ای» تکرار نمی‌شود ولی باز هم حاصل، عدد ۹۹۹۹۹۹ است که عددی چشم‌گیر است!

آیا عدد عجیب منحصربه‌فرد است؟

اگر بخواهیم این سؤال را جواب بدهیم، یکی از راه‌هایش این است که این خصوصیت را در مورد تمامی اعداد بررسی کنیم؛ که بدیهی است کاری دشوار و در عین حال غیرعملی است. حال برای نمونه، عدد ۰۷۶۹۲۳ را که همراه با صفر، شش رقمی است، بررسی می‌کنیم و آن را در اعداد ۱ تا ۱۳ ضرب می‌کنیم و حاصل را به‌دست می‌آوریم:

۰۷۶۹۲۳×۲=۱۵۳۸۴۶
۰۷۶۹۲۳×۳=۲۳۰۷۶۹
۰۷۶۹۲۳×۴=۳۰۷۶۹۲
۰۷۶۹۲۳×۵=۳۸۴۶۱۵
۰۷۶۹۲۳×۶=۴۶۱۵۳۸
۰۷۶۹۲۳×۷=۵۳۸۴۶۱
۰۷۶۹۲۳×۸=۶۱۵۳۸۴
۰۷۶۹۲۳×۹=۶۹۲۳۰۷
۰۷۶۹۲۳×۱۰=۷۶۹۲۳۰
۰۷۶۹۲۳×۱۱=۸۴۶۱۵۳
۰۷۶۹۲۳×۱۲=۹۲۳۰۷۶
۰۷۶۹۲۳×۱۳=۹۹۹۹۹۹

دقت روی حاصل‌ضرب‌ها نشان می‌دهد که ضرب عدد ۰۷۶۹۲۳، در ۲، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۱۱ جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد ۱۵۳۸۴۶ است که خود دو برابر عدد ۰۷۶۹۲۳ است و حاصل‌ضرب آن عدد در اعداد ۱، ۳، ۴، ۹ و ۱۰، جایگشت دایره‌ای از ارقام خود عدد ۰۷۶۹۲۳ است. حاصل‌ضرب آن در عدد ۱۳ هم

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

عدد ۹۹۹۹۹۹ را نتیجه می‌دهد که به این دلایل ما را به یاد ویژگی‌های عدد عجیب می‌اندازد.

عدد عجیب دیگر

عدد پیشنهادی بعدی، عدد ۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ همراه با صفر قبل از آن است که حاصل‌ضرب آن در اعداد از یک تا هفده این نتایج را باعث می‌شود:

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۲=
۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۳=
۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۴=
۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۵=
۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۶=
۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۷=
۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۸=
۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۹=
۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۰=
۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۱=
۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۲=
۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۳=
۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۴=
۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۵=
۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۶=
۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷×۱۷=
۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹

این عدد واقعاً تمام ویژگی‌های عدد عجیب را دارد، پس عدد عجیب، منحصربه‌فرد نیست. ولی حتماً برایتان این سؤال پیش می‌آید که چگونه این عدد بزرگ با این ویژگی‌های ظریف کشف شده و آیا باز اعداد دیگری از این نوع وجود دارند یا خیر.

روش پیدا کردن اعداد عجیب

گفتیم که استفاده از روش آزمون و خطا در اینجا بسیار دشوار و نیز غیرعملی است. بنابراین باید دنبال روشی علمی برای جست‌وجوی اعداد عجیب باشیم. مطلبی که شاید برای خواننده جالب باشد، ارتباط عدد عجیب با تساوی یا اتحاد ۱=۰/۹۹۹۰۰۰ است. این تساوی را با استفاده از روش تبدیل کسر اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی می‌توان به‌دست آورد. تکرار عدد ۹ در حاصل‌ضرب عدد عجیب در عدد ۷، و تکرار عدد ۹ بعد از ممیز در عدد سمت راست این اتحاد، تساوی‌های زیر را یکی پس از دیگری به ذهن متبادر می‌کند:

۱۴۲۸۵۷ × ۷=۹۹۹۹۹۹

برای هر دو عدد شش رقمی موجود در دو طرف این تساوی، ممیز با دورهٔ تناوب در نظر می‌گیریم. داریم:

۰/۱۴۲۸۵۷ × ۷=۰/۹۹۹۹۹۹

۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷...
×۷ =۰/۹۹۹ ...

اگر از تساوی ۱=۰/۹۹۹۰۰۰ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷...×۷=۱

دو طرف معادله را بر هفت تقسیم می‌کنیم:

$\frac{۱}{۷}$ = ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷...

یعنی عدد عجیب در واقع دورهٔ تناوب در کوچک‌ترین نمایش اعشاری یک‌هفتم است. قطعاً برای شما نیز جالب و هیجان‌انگیز بود. حالا اگر علاقه‌مند هستید می‌توانید دورهٔ تناوب نمایش اعشاری معکوس ۱۳، ۱۷ و... را حساب کنید. خواهید دید که جواب همان دو عددی هستند که قبلاً در اینجا معرفی کرده‌ایم.

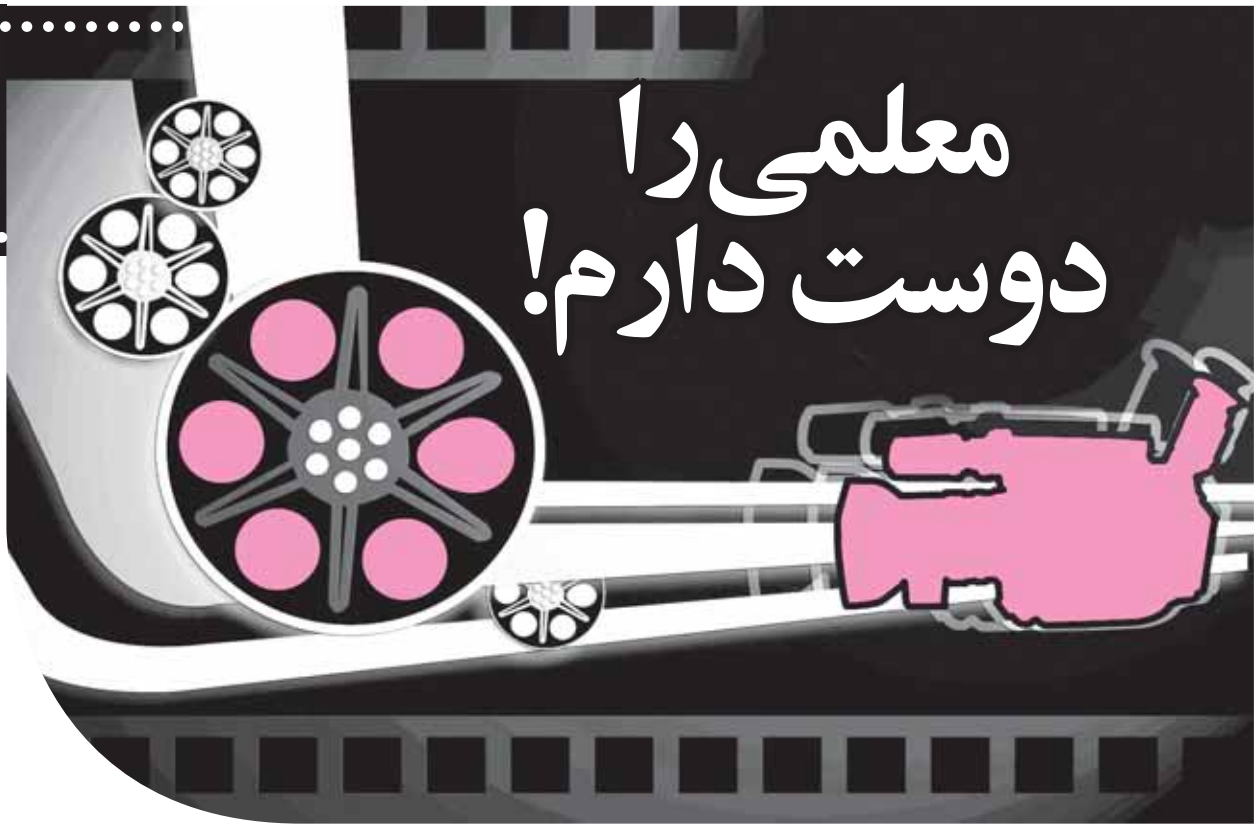
اگر دورهٔ تناوب نمایش اعشاری معکوس اعداد ۱۹، ۲۳ و دیگر اعداد اول را به‌دست آورید. با کمال تعجب خواهید دید که بسیاری از آن‌ها ویژگی عدد عجیب را دارند و تعداد اعداد عجیبی که می‌توانید بسازید، بسیار زیاد می‌شود. اکنون که به روش ساخت اعداد عجیب به‌صورت انبوه دست یافته‌اید، در صورت فراموش کردن عدد عجیب به‌راحتی می‌توانید با تقسیم یک بر هفت آن را به‌خاطر بیاورید. به این نکته هم اشاره کنم که شاید معکوس اعداد دیگری که اول نیستند نیز ویژگی‌های عدد عجیب را داشته باشد. برای مثال می‌توانید تحقیق کنید، اگر معکوس عدد ۱۴ را در ۲ یا ۳ یا... تا ۱۴ ضرب کنید، آیا باز هم دورهٔ تناوب همان ارقام عدد عجیب را خواهد داشت یا خیر. اگر ارقام دورهٔ تناوب معکوس ۱۴ را در اعداد از یک تا ۱۴ ضرب کنیم چه‌طور؟

* منابع
۱. نیک‌صالحی، کامی (۱۳۹۲). عدد عجیب.
2. www. niksalehi.com/goonagoon/archives/061200

morvaridjaafary40@yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

احسان یارمحمدی*



معلمی را دوست دارم!

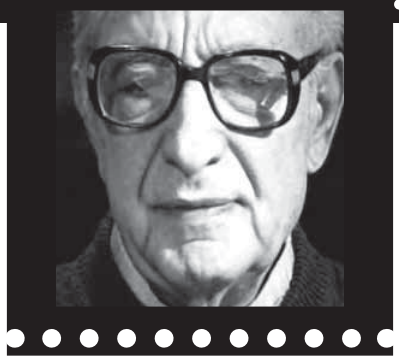
دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

- **اسم فیلم:** معلمی را دوست دارم
- **نویسنده و کارگردان:** منوچهر مشیری
- **تهیه‌کننده و محقق:** عصمت شاکری
- **تدوین:** میترا کارآگاه
- **موسیقی:** سعید انصاری
- **گویندهٔ متن:** هوشنگ آزادی‌ور
- **سال تولید:** ۱۳۸۲
- **مدت فیلم:** ۳۲ دقیقه
- تهیه شده در گروه دانش شبکه یک سیمای جمهوری اسلامی ایران

پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) معلم، مؤلف و مترجمی توانمند بود که عمری را در خدمت اعتلای دانش و فرهنگ ایران گذراند. او پایه‌گذار آموزش نوین ریاضی در ایران بود. شهریاری طی ۶۰ سال فعالیتش در کسوت معلم، مؤلف و مترجم، چهره‌ای تازه به آموزش ریاضی ایران بخشید و آن را از دایرهٔ نخبگان خارج کرد و به میان مردم آورد. او بود که با تألیف و ترجمهٔ بیش از ۲۰۰ جلد کتاب و حدود ۱۰۰۰ مقاله، سردبیری چندین مجله مانند «سخن علمی و فنی»، «چیستا»، «دانش و مردم»، «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» در راستای عمومی کردن دانش در ایران گام‌هایی ارزنده برداشت. علاوه بر این‌ها، با تأسیس «گروه فرهنگی خوارزمی» و «گروه فرهنگی مرجان» که هریک از آن‌ها شامل چندین دبستان و دبیرستان دخترانه و پسرانه بودند و در زمان خود از نظر سطح علمی و آموزشی اعتبار زیادی داشتند، به آموزش‌وپرورش چندین نسل از فرزندان این مملکت پرداخت. پرویز شهریاری در خانواده ای تهی‌دست اما آکنده از لطف و صفا به‌دنیا آمد و رشد یافت. او با تلاش و کوشش بی‌نظیرش نام نیکو و آوازه‌ای بی‌بدیل یافت و آن را برای همیشه بین ایرانیان به یادگار گذاشت. شخصیتی داشت چند بعدی و به معنای تام کلمه انسان. فردی بود عاشق معلمی و در تمام عمر به این حرفه و شاگردانش عشق ورزید، تا جایی که خود وی می‌گوید:

- «من معلمی را دوست دارم. آن‌قدر دوست دارم که گمان می‌کنم، هیچ حرفهٔ دیگری نمی‌تواند از نظر شایستگی با آن برابری کند.
- معلمان خوب عاشقانی هستند که روح و جان خود را فدای عشق خود می‌کنند.
- من به جوان‌ها اعتقاد دارم و باید اعتراف کنم که هم از کلاس‌هایم و هم از دانش‌آموزانم خیلی چیزها آموخته‌ام. در واقع معلمی یک جریان دوطرفه است. اگر معلم به کار خودش عشق داشته باشد، هم یاد می‌دهد و هم یاد می گیرد و من همیشه به کار معلمی عشق می‌ورزیده‌ام.»

با این مقدمه که از متن فیلم «معلمی را دوست دارم» برداشته شده، باید متوجه شده باشید که این فیلم مستند دربارهٔ زنده‌یاد پرویز شهریاری، چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی ایران است. فیلم با صحنه‌ای شروع می‌شود که استاد شهریاری را در حرکت به سوی شهر



بابل به‌منظور شرکت در مراسم بزرگداشتی که برای ایشـان با همکاری «دانشگاه مازندران»، «انجمن ریاضی ایـران» و «خانهٔ ریاضی بنیاد علمی حریری» تدارک دیده شـده بود نشان می‌دهـد. در صحنـهٔ پایانی آن هـم، تعدادی از دانش‌آمـوزان «دبیرسـتان فیـروز بهرام»، مدرسه‌ای که استاد شهریاری سالیان طولانی در آن تدریس داشـت- به‌منظور ارج نهادن به مقام والا و کارهای برجستهٔ استاد دسته گلی به ایشان تقدیم می‌کنند.

این فیلم آکنده از لحظات تحسین‌برانگیز از زندگـی زنده‌یاد شـهریاری و پندآموز برای مخاطبان است و جایگاه قدرت اراده و پایداری را در لحظات سخت و پیچیدهٔ زندگی وی هویدا می‌سازد.

زنده‌یاد پرویز شـهریاری در این مسـتند دربـارهٔ دوران کودکـی و نوجوانی خود چنین می‌گوید: «کودکی من خیلی سـخت گذشت. پدرم در ۴۶ سالگی، بعد از عمری که در روستا کار می‌کرد، در اولین کارخانهٔ ریسـندگی که **خورشـید** نام داشت، مشغول کار شد. اما بعد از یک سـال‌ونیم دچار بیماری شد و با داروی اشتباهی که به او دادند، فوت کرد. از آن به بعد مـادرم، من و برادرانم و خواهرم به فکر افتادیم که به نوعی زندگـی را اداره کنیم. انواع کارها را کردیـم. من از بنایی گرفتـه تا کوزه‌گری و کارهای دیگر را به سـختی انجام دادم. دوازده سالم بود، کلاس ششـم ابتدایی بودم. کسانی که از شش دبسـتان فارغ‌التحصیل می‌شدند، معمولاً صاحبان سرمایه می‌آمدند سراغ خانوادهٔ آن‌ها و می‌گفتند این بچه را ما **اجیر** می‌کنیم، برای پنج سال یا ده سال. در پایان پنج سال یا ده سـال مبلغی می‌دادنـد و در آن مدت فقط لبـاس و غذا به بچه می‌دادند. من خیلی از این کار راضی بودم، برای اینکه حداقل مطمئن بودم که غذایی خواهم داشـت. ولی مادرم مخالفت می‌کرد و گفت من تا زنده هسـتم نمی‌گذارم. بچه‌هایم باید درس بخوانند.»

***

خسـرو باقری، مترجم و مدرس دانشگاه، دربارهٔ آثار ترجمه‌ای ایشان در این فیلم چنین می‌گوید: «یکی از بزرگ‌ترین بخش‌های فعالیت ایشان در زمینهٔ ترجمه است. نزدیک به ۱۲۰ اثر ترجمه کرده‌اند و ما که در دنیای ترجمه به سر می‌بریم، می‌دانیم این چه معنی ژرف و عمیقی دارد و بیانگر چه کوشـش و پایداری عظیمی اسـت. آثار ترجمه‌ای ایشـان چندین بخش را شامل می‌شود که از جملهٔ آن‌ها تاریخ ریاضیات و کتاب‌هایـی در مورد خود ریاضیات اسـت و کتاب‌هایی به زبان سـاده برای جوانان مطرح کرده‌انـد. در واقـع آثار ایشـان، از نظری‌ترین آثار ریاضی تـا کاربردی‌ترین آثار ریاضی را در برمی‌گیرد...»

استاد شهریاری، خود، دربارهٔ کتاب‌هایی که تألیف یا ترجمه کرده و مجلاتی که سردبیری

آن‌ها را برعهده داشـته است، چنین می‌گوید: «تا حالا چهار کتـاب من و یک مجله‌ام، مجلهٔ «دانش و مردم»، لوح تقدیر گرفته‌اند. این نتیجهٔ زحمات من است. ولی در حقیقت خیلی بیش از آنچـه که من انتظار دارم، در مورد من رعایت می‌شود. آنچه که انجام داده‌ام مقداری ترجمه یا تألیف است؛ کتاب‌هایی از کتاب‌های دبیرستانی، راهنمایی و دبستان گرفته تا کتاب‌های متفرقه که به‌خاطر مجموعهٔ ریاضی کشـور می‌خوانم. عـلاوه بر آن، کتاب‌هایی هم در زمینهٔ ادبیات و داسـتان ترجمه کرده‌ام. بخشی از این کتاب‌ها لوح تقدیر گرفته‌اند که احتمالاً آن‌ها را می‌بینید. به‌جز لوح تقدیر کتاب‌ها، مقداری هم لوح‌تقدیر بابت کارهایی که کـرده‌ام، گرفته‌ام. یا مثلاً در «دانشگاه کرمان» دکترای افتخاری به من دادند. بابت کارهایی که کردم همه جا روی کتاب‌های ریاضی من تکیه می‌شـد. قریب به دویسـت و خرده‌ای کتاب نوشته‌ام و در حدود هزار مقاله.»

به این دلیل که شـما دوستداران زنده‌یاد پرویز شهریاری و علاقه‌مندان به ریاضیات، خود صحنه‌ها و گفته‌های ارزشمند دیگر این مستند را پیگیـری کنیـد، از ارائهٔ آن‌هـا در این مقاله خودداری می‌کنیم و شما را به تهیهٔ این فیلم و مشاهدهٔ آن تشویق می‌نماییم.

* ehsan_yarmohammadi @yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

حمیدرضا امیری*

۷

مجموعه‌های عددی

یک رابطهٔ دوتایی R از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، زیرمجموعه‌ای از A^*B است. اگر $(a,b)\in R$ باشد می‌نویسیم: aRb و می‌خوانیم (می‌گوییم): a رابطه دارد با b؛ و اگر a رابطه نداشته باشد با b، می‌نویسیم: $a\not R b$. در حالتی هم که A=B، می‌گوییم R یک **رابطهٔ دوتایی** روی A است.

مجموعهٔ {برای بعضی از $b\in B$، $Dom(R)=\{a\in A|(a,b)\in R$ **دامنهٔ R** نامیده می‌شود.
مجموعهٔ {برای بعضی از $a\in A$، $Range(R)=\{b\in B|(a,b)\in R$ **بُرد R** نامیده می‌شود.

مثال ۱۸.۵

الف. فرض کنیم $A=\{۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$. رابطهٔ R را به‌صورت aRb اگر و فقط اگر a می‌شمارد b را تعریف می‌کنیم. R، دامنهٔ R و بُرد R را بیابید.

ب. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. رابطهٔ R را به‌صورت aRb اگر و فقط اگر $a\leq b$ تعریف می‌کنیم. R، دامنهٔ R و بُرد R را بیابید.

حل:

الف. $R=\{(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴)\}$ و
$Dom(R)=\{۲,۳,۴\}$ و $Range(R)=\{۳,۴,۶\}$

ب.
$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴),\}$ و $Dom(R)=A$ و $Range(R)=A$ ■

تابع حالت خاصی از یک رابطه است. یک تابع از A به B، که با $f:A\to B$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای است از A به B به‌طوری که برای هر $x\in A$ یک $y\in B$ منحصربه‌فرد (یکتا) وجود داشته باشد، به قسمی که: $(x,y)\in f$. عضو y را تصویر x می‌نامیم و می‌نویسیم: $y=f(x)$. مجموعهٔ A **دامنهٔ** f و مجموعهٔ همهٔ تصویرهای توسط f را «بُرد f» می‌نامیم. توابع با جزئیات بیشتر در بخش ۲۰ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

مثال ۱۸.۶

الف. نشان دهید که رابطهٔ $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,a)\}$ تابعی است تعریف شده از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c\}$. بُرد این تابع را بیابید.

ب. نشان دهید که رابطهٔ $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۱,b)\}$ تابعی تعریف شده از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c\}$ نیست.

حل:

الف. توجه دارید که هر عضو A دقیقاً یک تصویر دارد. بنابراین، f یک تابع است با دامنهٔ A و بُرد $Range(f)=\{a,b\}$.

ب. رابطهٔ f یک تابع تعریف نمی‌کند (تعریف یک تابع را ندارد)، زیرا عضو ۱ دو تصویر دارد، یعنی a و b.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

واژه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Binary relation رابطهٔ دوتایی
2. Domain دامنه
3. Range بُرد
4. Subset زیرمجموعه
5. Example مثال
6. If, and only if اگر، و فقط اگر
7. Function تابع
8. Special case حالت خاص
9. Such that به‌طوری‌که
10. Element (عنصر) عضو
11. Image تصویر
12. Unique (یکتا) منحصر به‌فرد
13. Detail جزئیات
14. Section بخش
15. Let فرض می‌کنیم
16. Divides می‌شمارد، عاد می‌کند
17. Exactly دقیقاً

A binary relation R from a set A to a set B is a subset of A^*B. If $(a,b)\in R$ we write aRb and we say that a is related to b. If a is not related to b we write $a\not R b$. In case $A=B$ we call R a **binary relation** on A.

The set

$Dom\ (R)=\{a\in A|(a,b)\in R \text{ for some } b\in B\}$

is called the **domain** of R. The set

$Range\ (R)= \{b\in B|(a,b)\in R \text{ for some } a\in A\}$

is called the **range** of R.

Example 18.5

a. Let $A=\{2,3,4\}$ and $B=\{3,4,5,6,7\}$. Define the relation R by aRb if and only if a *divides* b. Find, R, $Dom(R)$, $Range(R)$.

b. Let $A=\{1,2,3,4\}$. Define the relation R by aRb if and only if $a\leq b$. Find, R, $Dom(R)$, $Range(R)$.

Solution.

a. $R=\{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$, $Dom(R)= \{2,3,4\}$, and $Range(R)=\{3,4,6\}$.

b. $R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, $Dom(R)=A$, $Range(R)=A$. ■

A function is a special case of a relation. A function from A to B, denoted by $f: A\rightarrow B$, is a relation from A to B such that for every $x\in A$ there is a unique $y\in B$ such that $(x,y)\in f$. The element y is called the **image** of x and we write $y=f(x)$. The set A is called the **domain** of f and the set of all images of f is called the **range** of f. Functions will be discussed in more detail in Section 20.

Example 18.6

a. Show that the relation

$f=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$

defines a function from $A=\{1,2,3\}$ to $B=\{a,b,c\}$. Find its range.

b. Show that relation $f=\{(1,a),(2,b),(3,c),(1,b)\}$ does not define a function from $A=\{1,2,3\}$ to $B=\{a,b,c\}$.

Solution.

a. Note that each element of A has exactly one image. Hence, f is a function with domain A and range Range $(f)=\{a,b\}$.

b. The relation f does not define a function since the element 1 has two images, namely a and b. ■

* h66amiri@yahoo.com

تنظیم: ارغوان غلامی ـ هوشنگ شرقی

۲

بخش دوّم و پایانی

تدریس و معلمی لذت‌بخش است

پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار دکتر عین‌الله پاشا

اشاره

اعضای هیئت تحریریهٔ مجله، در اردیبهشت‌ماه سال گذشته، مصاحبه‌ای نسبتاً طولانی با دکتر عین‌الله پاشا، استاد پیشکسوت آمار و احتمال دانشگاه‌های کشور و مؤلف ده‌ها جلد کتاب در زمینهٔ آمار و ریاضیات، داشتند. قسمت اول این مصاحبه که به دوران کودکی و نوجوانی استاد، تا ورود به دانشگاه اختصاص داشت را در شمارهٔ ویژهٔ بهار ۹۴ ملاحظه نمودید. اینک به ادامهٔ این گفت‌وگوی شیرین و خواندنی توجه نمائید.

● **شرقی:** اجازه بدهید برای استراحت لطیفه‌ای بگویم. می‌گویند یک روز استاد آماری در حال رانندگی بود. به هر چهارراهی که می‌رسید، به‌سرعت آن را رد می‌کرد؛ دوستش می‌پرسد: چرا این‌طوری رانندگی می‌کنی؟ خطرناک است. و استاد آمار در جواب می‌گوید: آمار نشان داده است که اکثراً تصادف‌ها در چهارراه‌ها اتفاق می‌افتند. یعنی احتمال وقوع تصادف در چهارراه‌ها از همه‌جا بیشتر است. پس من با سرعت چهارراه را رد می‌کنم. (خنده حاضران).

پاشا: بیشتر مردم در تخت‌خواب می‌میرند. پس تخت‌خواب، برای خوابیدن جای خطرناکی است! (خنده).

● **یاسی‌پور:** شبیه این لطیفه را در مورد استاد فیزیکی هم می‌گویند که از چراغ قرمزها رد می‌شد. پرسیدند: چرا؟ جواب داد: چون من سرعتم نزدیک سرعت نور است، قرمز را سبز می‌بینم. افسر هم در جوابش می‌گوید: پس من هم به‌خاطر سرعت زیاد جریمه‌ات می‌کنم نه به‌خاطر عبور از چراغ قرمز! (خندهٔ حاضران).

● **امیری:** سؤال بعدی من از استاد این است که آیا در احتمال، ۵۰ درصد و یا همان $\frac{1}{2}$، و آیا صفر و یک وجود دارد؟ یا این‌ها حدها هستند؟

پاشا: در بحث احتمال هم که قبلاً صحبتش را کردیم، برای اندازه‌گیری شانس یا وقوع یک حادثه، نسبت می‌گیریم. بنابراین برای مثال، در انداختن چندبار سکه در نصف پرتاب‌ها شیر بیاید، هیچ ضمانتی وجود ندارد. اما وقتی که مدلش را به‌صورت ریاضی درست می‌کنیم، می‌توانیم $\frac{1}{2}$ را بشناسیم و قبول کنیم.

یک نکته‌ای را هم بگویم: همیشه در کلاس‌هایم وقتی می‌پرسم یک مسئلهٔ ساده احتمال بگویید. دانشجو جواب می‌دهد: یک سکه می‌اندازیم، احتمال اینکه شیر بیاید چه‌قدر است؟ خب این غلط است. باید بگوییم «اگر سکه‌ای را بیندازیم». این کلمهٔ «اگر» را باید بگویند. هر مسئلهٔ احتمالی باید با این کلمه اگر شروع شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اگر من سکه‌ای را انداختم، احتمال آمدن شیر چه‌قدر است؟ بعد از اینکه سکه را انداختند که نمی‌پرسند احتمال آمدن شیر چه‌قدر است. چون وقتی دیگر سکه را انداختم یا شیر آمده یا نیامده است، دیگر احتمالی وجود ندارد. در واقع وقتی ما از احتمال حرف می‌زنیم، با چیزی سروکار داریم که هنوز انجام نشده است. به محض اینکه انجام شد، دیگر با احتمال سروکار ندارد و می‌رود در حیطهٔ آمار.

الان می‌گویم اگر این سکه را بیندازیم، احتمال‌آمدن شیر $\frac{1}{2}$ است. اما ممکن است تا ده‌بار هم که این سکه را بیندازیم، شیر بیاید و اصلاً خط نیاید. چون وارد عمل شده‌ایم و داستان عملی با آنچه که قبلاً به‌صورت نظری گفته‌ایم، متفاوت است.

ما احتمال را می‌خواهیم برای برنامه‌ریزی و آمار را می‌خواهیم برای ساختن مدل.

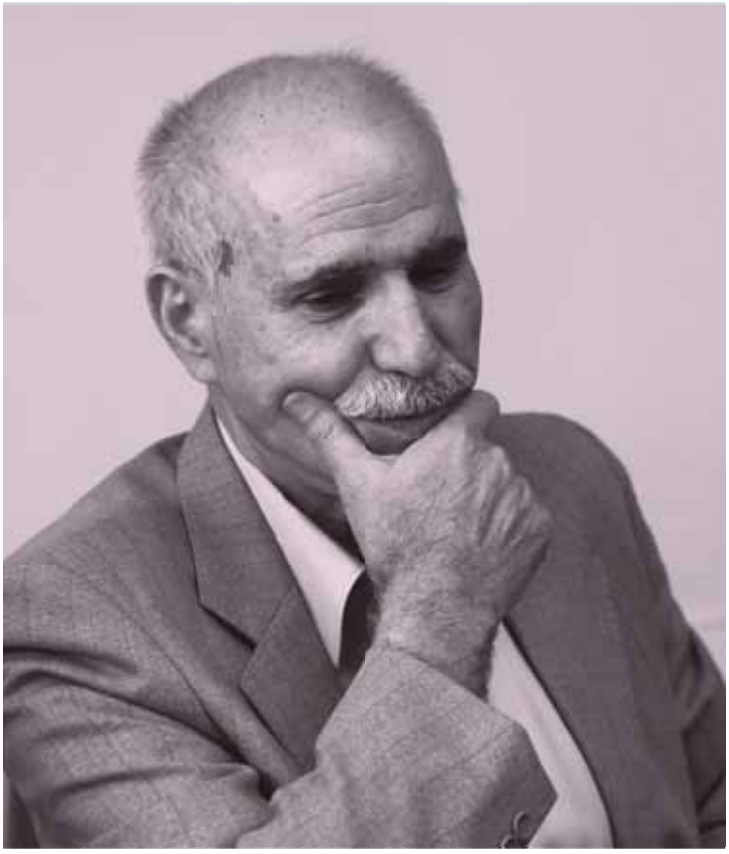
● **یاسی‌پور:** سؤال آخر من این است که آیا برای همهٔ اشیا احتمال وجود دارد؟

پاشا: بله، برای همهٔ پیشامدها وجود دارد. اما برای اشیا، منظورتان دقیقاً چیست؟

● **یاسی‌پور:** ببینید؛ در فیزیک اصلی داریم به‌نام «اصل عدم قطعیت» که به «اصل هایزنبرگ» معروف است. این اصل می‌گوید در دنیای فیزیک عدم قطعیت وجود دارد. حالا سؤالم این است که در احتمال چگونه است؟

پاشا: اگر اشیایی که با آن‌ها سروکار داریم، اعضای فضای نمونه‌ای باشند، برایشان احتمال را تعریف می‌کنیم. اما اگر چیزی به غیر از این باشد، احتمال نداریم. اگر ما بتوانیم این‌ها را به چارچوب خودمان بیاوریم، می‌توانیم احتمال را به آن‌ها نسبت بدهیم.

● **یاسی‌پور:** این تعریف است یا یک قرارداد؟ چون ما در هندسه تعریف و قرارداد را متفاوت از هم می‌دانیم. شما تعریف مثلث یا مربع را قرارداد نمی‌گیرید. این‌ها تعریف‌اند و باید شناساندشان.



پاشا: در احتمال هم «اصول» موثق هستند. احتمالی که نسبت می‌دهیم، باید چنان باشد که در این اصول صدق کند. هر چیزی که در این اصول صدق کند، احتمال است. البته برای مثال، فرض کنید که اصول هندسه را که گذاشتند، این‌ها با شهود مطابقت دارند. یعنی حرف عجیب و غریبی زده نمی‌شود. ما انتظاری که از دو خط موازی داریم، در اصلِ مربوط به آن گنجانده می‌شود. اصول احتمال هم همین‌طور است. یعنی از همین شهود گرفته شده است و آن را براساس اصول و تعریف، مجردش کرده‌اند.

ما احتمال را برای برنامه‌ریزی و آمار را برای مدل‌سازی می‌خواهیم

● **امیری:** آیا این درست است که علم احتمال در میان شاخه‌های ریاضی علمی است که بیش از همه به آنالیز ریاضی نیاز دارد؟

پاشا: وقتی بحث‌های اصول موضوعی احتمال، مثل «اصول کولموگروف» را می‌بینیم، بله ماهیت آنالیزی یا آنالیز حقیقی دارند. اگر به تاریخ احتمال

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

شرقی

نگاه کنیم، مسئلهٔ امتیازها که در تاریخ احتمال (اواسط قرن پانزدهم) مطرح می‌شود، این است که دو نفر دارند بازی می‌کنند. یکی «a» ریال سرمایه گذاشته است و یکی «b» ریال. می‌گویند هرکس زودتر مثلاً به امتیاز ۲۰ برسد، همهٔ پول را می‌برد. وسط بازی یکی امتیازش ۱۶ است و آن یکی ۱۲. بازی را متوقف می‌کنند. این پول چه‌طور باید تقسیم شود؟ این اولین مسئله احتمال است که حدود ۵۰۰ سال پیش در احتمال مطرح شد.

● **امیری:** هیچ ردپایی از بحث احتمال در ریاضیات دورهٔ ایرانی و اسلامی وجود ندارد؟

پاشا: من ندیدم. شاید چون دنبال این موضوع نبودم. شاید آقای یاسی‌پور در این مورد بیشتر بدانند.

● **یاسی‌پور:** البته همهٔ آثار دانشمندان ما به درستی مورد بررسی قرار نگرفته به‌عنوان نمونه، **خواجه نصیرالدین طوسی** ۴۲ اثر ریاضی دارد که ما فقط یکی دوتایش را دیده‌ایم. یک‌بار من از دکتر مهدی حائری که استاد مسلم فلسفهٔ اسلامی بودند، پرسیدم آیا در دورهٔ اسلامی کتابی در حد کتاب «اساس الاقتباس» خواجه نصیر موجود است یا نه؟ ایشان گفت: علاوه بر اینکه این کتاب بسیار منحصربه‌فرد است، در آن نکاتی از فلسفهٔ منطق وجود دارد که برای معاصران هم قابل بیان است.

● **امیری:** منظورم این است که مثلاً ما مفهوم حد را به غرب نسبت می‌دهیم و می‌گوییم ریاضی‌دانان غربی به مفهوم حد رسیدند و آن را گسترش دادند. در صورتی که کسی مثل **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** عدد پی را محاسبه می‌کند و تقریب می‌زند و... خب این خودش ردپایی از حد است. منظور من هم از ردپا همین است.

پاشا: از آنجا که موضوع شانس با احتمال ارتباط دارد، از دیدگاه فلسفی خیلی مورد توجه نبوده است. البته بحث امتیازها ناتمام ماند، ولی از زمان **فرانسیس بیکن** بود که این دیدگاه کمی مورد توجه واقع شد. قبل از آن بر این عقیده بوده‌اند که اگر ما به شانس متوسل می‌شویم، به‌خاطر نداشتن اطلاعات کافی است و اگر همه‌چیز را بدانیم، نیازی نیست که برایش احتمال در نظر بگیریم.

البته قبلاً هم گفته‌ام که اولین جایی که استقرا به‌کار رفت، در آن داستان **لقمان حکیم** است که کسی از او پرسید تا شهر چه‌قدر راه هست و او هم جواب داد راه برو؛ و این نمونهٔ خوبی از کاربرد استقراست. قیاس هم داستان شیطان است که خدا به او گفت: سجده کن. اما شیطان گفت: من از آتشم و آدم از خاک، پس چون آتش از خاک بالاتر است، من هم از آدم بالاتر هستم و سجده نمی‌کنم. در این داستان هم به‌نوعی قیاس وجود دارد، چرا که با چیدن مقدماتی، نتیجهٔ نهایی را به‌دست می‌آورد.

● **شرقی:** این یک نوع استنتاج منطقی است. قیاس به معنی تمثیل نیست. در واقع قیاس به مفهوم استنتاج است.

● **یاسی‌پور:** در منطق قدیم سه نوع استنتاج وجود داشت: اول قیاس، یعنی از کل به جزء رسیدن. دوم استقرا، یعنی از چند جزء یک فرمول کلی پیدا کردن، و سوم هم تمثیل که یعنی از امری جزئی به امری جزئی دیگر رسیدن. معمولاً هم اغلب زندگی ما تمثیل است.

● **امیری:** البته امروزه در کتاب جبر و احتمال، استدلال تمثیلی و استدلال قیاسی یکی در نظر گرفته شده است.

پاشا: اگر بخواهیم مسامحه کنیم، ردپایی از قیاس در این داستان دیده می‌شود. مسئلهٔ امتیازهایی را که مطرح کردم، به‌خاطر دارید؟ اگر از کسی که ریاضی خوانده باشد بپرسید، می‌گوید باید کل این پول را به نسبت ۱۲ و ۱۶، یعنی امتیازها تقسیم کنیم. ۹۰ سال طول کشید تا ریاضی‌دانانی مثل **کاردانو** و **تارتاگلیا** آمدند و گفتند این راه‌حل درست نیست. چرا درست نیست؟ برای اینکه شما چیزی را نادیده گرفته‌اید. صورت مسئله ذکر می‌کند که این‌ها دارند بازی عادلانه می‌کنند، شما عادلانه بودن را کجا دیدید؟ از کجا می‌دانید نتیجهٔ نهایی بازی چه می‌شود؟ شاید آنکه امتیاز ۱۶ آورده در این امتیاز بماند و

اولین جایی که استقرا به‌کار رفت، در آن داستان لقمان حکیم است که کسی از او پرسید: تا شهر چه‌قدر راه است. او جواب داد: راه برو!

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دیگری برندهٔ نهایی شود و از همین نقطه شروع کردند به پیدا کردن راه‌حل و از همین‌جا بود که بحث احتمال مطرح شد. وقتی من این مسئله را خواندم به این نتیجه رسیدم که می‌توانم بگویم احتمال عبارت است از ریاضیات به‌علاوه نوعی قضاوت. چرا قضاوت، چون این کلمهٔ عادلانه را ریاضیات نمی‌فهمد. این ما هستیم که در حل مسئله باید قضاوت کنیم که راه‌حل ما، عادلانه بودن را دربرگرفته است یا خیر.

● **غلامی:** سؤالی که همیشه ذهن مرا درگیر می‌کند، شیوهٔ برخورد دانش‌آموزان ما با درس ریاضی است. در واقع اکثر بچه‌های ما، با اینکه اصل یک مبحث ریاضی را می‌فهمند، اما عمدتاً با مشکل ابتدایی محاسبات در تمرین‌ها مواجه می‌شوند. البته این مشکل در بسیاری از درس‌های دیگر هم مانند فیزیک و شیمی گریبانگیرشان می‌شود. به‌نظر شما چرا پایهٔ ریاضیات در دانش‌آموزان ما آن‌طور که باید قوی نیست و در محاسبات ضعف دارند؟

پاشا: احتمالاً همکارهای من به‌دلیل اینکه با دانش‌آموزان وقت بیشتری را می‌گذرانند، می‌توانند به شما پاسخ شفاف‌تری بدهند. اما شخصاً فکر می‌کنم که دانش‌آموزان ما در وهلهٔ اول از درس خواندن لذت نمی‌برند. در واقع با شوق درس نمی‌خوانند. البته اینکه چرا درس‌ها برای بچه‌ها لذت‌بخش نیست دلایل دیگری هم دارد که خودش بحث جداگانه‌ای را می‌طلبد. از طرف دیگر، دانش‌آموزان برای درس خواندن آن‌طور که باید وقت نمی‌گذارند. یادم می‌آید که یکی از هم‌کلاسی‌هایم یک کتاب حل‌المسائل هندسه داشت. من کتاب را از او قرض گرفتم و شبانه تمام صورت‌مسئله‌ها را نوشتم. صبح کتاب را با چشم‌های خواب‌آلود پس دادم (آن وقت‌ها پلی‌کپی، زیراکس، رایانه، ایمیل، دانلود و این حرف‌ها نبود!) و شروع می‌کردم به حل تمرین‌ها. تمام توانم را برای حل مسئله‌ها می‌گذاشتم. وقتی می‌دیدم مسئله‌ای سخت است و دیگر نمی‌توانم حلش کنم، می‌رفتم سراغ هم‌کلاسی‌ام و به او می‌گفتم من یک مسئلهٔ خوب دارم. می‌خواهی به تو بدهم تا حل کنی؟ او هم مسئله را می‌گرفت و از توی حل‌المسائل جوابش را می‌نوشت و از همه‌جا بی‌خبر برای من می‌آورد. این‌طور می‌شد که جواب مسئله را می‌فهمیدم؛ اما بعد از کلی کلنجار رفتن با صورت مسئله. در واقع منظورم این است که دانش‌آموز اصلاً نباید جلوی یک مسئله بی‌کار بنشیند و نگاهش کند. باید با آن تا جایی که می‌تواند سروکله بزند.

الان متأسفانه بچه‌های ما اگر مسئله را بتوانند حل کنند که هیچ. اما اگر نتوانند، دیگر نمی‌دانند که چه‌کار باید بکنند.

یاسی‌پور

● **شرقی:** شما یک دوره با دانش‌آموزان المپیادی بوده‌اید. آن‌ها چه‌طور بودند؟

پاشا: بله، به من گفتند هفت جلسه با این دانش‌آموزها که گمان می‌کنم اولین دوره بود، کار کنم. همه جمع شدیم در باشگاه استقلال که آن موقع مسئولش مرحوم **حجاریان** بود. قرار شد که من با آن‌ها مسائل آنالیز ترکیبی را کار کنم. از دو ماه قبل شب‌ها تا ساعت دو و سه نیمه شب بیدار می‌ماندم و مسئله‌ها را پیدا و حل می‌کردم. بعضی از این مسائل هم واقعاً سخت بودند. تا اینکه ۳۵ مسئله از کتاب‌های متفاوت انتخاب و آماده کردم. وقتی به کلاس رفتم، ابتدا مقدمه‌ای گفتم و بعد شروع کردم به نوشتن مسئله. هنوز صورت مسئله را بیان نکرده بودم، این‌ها جوابش را می‌گفتند. همین‌طور ادامه دادند تا جواب هر ۳۵ مسئله را گفتند.

کلاس که تمام شد رفتم به مرحوم حجاریان گفتم بعدازظهر کلاس دارم و نمی‌دانم چه کار کنم. دو ماه کار کردم، این‌ها دو ساعته همه‌اش را خوردند (خنده). خلاصه قرار را بر این گذاشتیم که مسائل کتاب‌ها را کپی کنم تا بچه‌ها حل کنند و بیایند دربارهٔ حل مسئله‌ها توضیح بدهند. آنجا بود که فهمیدم این‌ها اصلاً جور دیگری به مسئله نگاه می‌کنند. یادم می‌آید سؤالی بود که باید ثابت می‌کردیم، کسری که داده شده عدد طبیعی نیست (صورت و مخرج شامل عبارت‌هایی برحسب !n و این قبیل عبارات بود). من هم فکر می‌کردم این مسئله را با راه‌حل معلوم و مرسوم باید حل کنیم (یعنی کسر را ساده کنیم). یکی از

فکر می‌کنم که دانش‌آموزان ما در وهلهٔ اول از درس خواندن لذت نمی‌برند. در واقع با شوق درس نمی‌خوانند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانش‌آموز اصلاً نباید جلوی یک مسئله بی‌کار بنشیند و نگاهش کند. باید با آن تا جایی که می‌تواند سر و کله بزند

همین دانش‌آموزان گفت: این واضح است که عدد طبیعی نیست و دلیلش را هم توضیح داد که بعد از ضرب، توان صورت می‌شود ۱۵ و توان مخرج می‌شود ۱۷. پس اگر ساده شود، هیچ «عامل n» در صورت نمی‌ماند و در نتیجه نمی‌تواند عدد طبیعی شود. من با خودم فکر کردم که چه‌قدر قشنگ این مسئله را دید و حل کرد.

چنین چیزی در مدرسه به‌نظر شعبده‌بازی می‌آید، ولی ما باید طوری بچه‌ها را بار بیاوریم که این‌طور به مسئله‌ها نگاه کنند و باید بتوانند محاسبات دستی‌شان را هم به‌خوبی انجام دهند. کاری که گاوس برای جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ کرد.

یک خاطره هم بگویم. در آمریکا یک هم‌اتاقی داشتم. دماسنج‌های آمریکا از نوع فارنهایت بود و وقتی ما می‌خواستیم به سانتی‌گراد تبدیلش کنیم او از ماشین‌حساب کمک می‌گرفت، اما من با دست حساب می‌کردم. نتیجه این بود که من سریع‌تر به جواب می‌رسیدم. یعنی با استفاده از فرمول تبدیل فارنهایت به سانتی‌گراد، به‌سرعت تا او بیاید از ماشین‌حساب کمک بگیرد، کار را تمام می‌کردم. یعنی دست‌هایم روان بودند. آن وقت‌ها قالب بسیاری از محاسبات در ذهنمان بود و می‌توانستیم به سرعت آن‌ها را انجام دهیم.

● **شرقی:** خب اگر موافق باشید، به دانشگاه و استادانتان همچون مرحوم مصاحب اشاره کنیم.

پاشا: البته اجازه بدهید، قبل از آن اشاره‌ای هم به امتحان کنکورم داشته باشم. سال ۱۳۴۶ که من در کنکور شرکت کردم، کنکور مثل امروز متمرکز نبود و سؤال‌ها تشریحی بود (از سال ۱۳۴۹ کنکور سراسری متداول شد) و هر دانشگاه برای خودش کنکور می‌گرفت. آن سال ۲۷ هزار نفر در کنکور دانشگاه تهران در همهٔ رشته‌ها شرکت کرده بودند. با توجه به جمعیت آن موقع ایران، می‌شد حدود یک هزارم جمعیت کشور. من توی کنکور به دادن جواب درست در دو آزمون مطمئن بودم، یکی هندسه و دیگری شیمی آلی. کنکور که تمام شد و نتایج درآمد، در رشتهٔ ریاضی دانشگاه تهران قبول شدم و روزهای زوج از کرج می‌آمدم به تهران و کلاس داشتم. یادم هست که در همان سال اول خیلی از درس‌ها مثل هندسه تحلیلی، مکانیک و... با بردار شروع می‌شدند و من سال دوم بودم که گفتم مثل اینکه ما داریم لیسانس بُرداری می‌گیریم!

یک خاطره هم از سال دوم دانشگاه بگویم: در دورهٔ دبیرستان شیوهٔ مطالعهٔ من در درس‌های نظری مثل هندسه این بود که از آخر به اول می‌آمدم و هر قضیه‌ای که می‌خواندم، اگر برای اثبات به قضیهٔ دیگری ارجاع شده بود، آنجا را یک علامت ستاره می‌زدم و همین‌طور می‌رفتم عقب تا مهم‌ترین قضیه‌ها را که در واقع سنگ‌بنای آن درس بود، تشخیص دهم. در درس‌های خواندنی هم من از روش راه رفتن استفاده می‌کردم. طوری که مثلاً کتاب فیزیک و مکانیک را صفحه به

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

صفحه طی دو ساعت و نیم همه‌اش را می‌گفتم!

در سال دوم دانشگاه که بودم، یک‌بار پسر همسایه‌مان گفت: «عین‌الله‌خان! من چند تا سؤال دارم، بیایم ازت بپرسم؟» گفتم بیا. بحث فیزیک بود. آنجایی را که او مشکل داشت من قبلاً رفتم از کتاب فیزیک خودم که توی زیرزمین بود، برداشتم و خواندم. این مشکل او را که مربوط به دو صفحهٔ کتاب بود، دو ساعت تمام مجبور شدم مطالعه کنم تا بتوانم به او یاد بدهم، در حالی‌که قبلاً کل کتاب را در دو ساعت بیان می‌کردم! اینجا بود که به مفهوم واقعی آموزش پی بردم و فهمیدم که این دو سال دانشگاه روی رفتار من تأثیر گذاشته است.

خلاصه چهار سال دانشگاه ما گذشت و سال آخر بودیم که با دکتر **للّهی** درس «توپولوژی» داشتیم (ایشان شاگرد اول دورهٔ لیسانس شده و با بورس تحصیلی به فرانسه رفته بود و بعدها در تألیف کتاب‌های درسی هم همکاری داشت). ایشان استاد بسیار خوبی بود و تکالیف خوبی هم به ما می‌داد که من همه را مرتب انجام می‌دادم. اواخر دورهٔ لیسانس بود که دانشگاه به‌علت اعتصاب تعطیل بود، زمستان هم بود و من در خانه بودم. یک روز با خودم گفتم بروم ببینم دانشگاه چه خبر است. رفتم کوی دانشگاه و به دوستانم سری زدم. از دوستانم پرسیدم حالا که دانشگاه تعطیل شده، چه می‌کنید؟ یکی از آن‌ها تعریف کرد که رفته‌اند در خیابان تخت‌جمشید (طالقانی فعلی) به «مؤسسهٔ ریاضیات» که تحت مسئولیت دکتر مصاحب اداره می‌شد و دفترچه‌ای را گرفته‌اند. یکی از دوستان گفت من این دفترچه را نمی‌خواهم، اگر می‌خواهی بگیر. من هم آن را گرفتم و به خانه بردم. مطالعه کردم و دیدم بد نیست بروم و در آزمون دکتر مصاحب که در اردیبهشت‌ماه برگزار می‌شد، شرکت کنم، شاید فوق‌لیسانس را آنجا بخوانم.

اردیبهشت ۱۳۵۰ من برای امتحان به آنجا رفتم و اولین‌بار مرحوم دکتر مصاحب را دیدم. حدود ۷۰ نفر برای آزمون آمده بودند که در نهایت ۱۰ نفر از جمع آن‌ها پذیرفته شدند و در آزمونی دیگر، سه نفر دیگر هم حذف شدند و هفت نفر، که من هم یکی از آن‌ها بودم، قبول شدیم و دورهٔ فوق‌لیسانس را از اول مهر شروع کردیم. آن موقع دکتر مصاحب در حال تألیف کتاب معروف سه جلدی «تئوری مقدماتی اعداد» بود و ما آن را به‌عنوان واحد درسی خواندیم. در خاتمهٔ دوره فقط سه نفر فارغ‌التحصیل شدیم: من و آقای دکتر آدینه محمد نارنجانی...

حدود ۷۰ نفر برای آزمون ورود به مؤسسهٔ ریاضیات دکتر مصاحب داوطلب بودند که هفت نفر قبول شدند و من یکی از آن‌ها بودم

● **شرقی:** مترجم کتاب معروف تئوری اعداد مرکز نشر دانشگاهی؟

پاشا: بله، و یک نفر به نام **حاج جعفر** که با ما به آمریکا آمد و دیگر برنگشت. یک خاطره هم بگویم: در پایان سال اول، دکتر مصاحب برای عید ۳۰ مسئله از همان کتاب به ما داد که حل کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

امیری

بعد از تعطیلات که برگشتیم، مصاحب از من پرسید: چند تا مسئله حل کردی؟ گفتم: ۱۶تا. حاج جعفر گفت ۸ تا و نارنجانی گفت: هر سی مسئله را حل کردم! مصاحب حسابی تعجب کرد و بعد از آن دیگر نارنجانی شد نورچشمی مصاحب و حتی در مقدمهٔ کتاب تئوری اعدادش هم از او اسم برده است. البته نارنجانی در تئوری اعداد واقعاً خبره و استاد بود. بعد رفت خارج و تئوری اعداد هم خواند و بعد منتقل شد به مشهد و الان هم بازنشسته شده است.

دکتر مصاحب را بالاتر از ریاضی‌دان می‌دانم، ایشان جامع‌الاطراف بودند

● **شرقی:** قدری هم از خلقیات و خصوصیات دکتر مصاحب بگویید.

پاشا: من تا به حال دو مقاله در مورد مرحوم مصاحب نوشته‌ام. یکی در «کنفرانس بزرگداشت مصاحب و آنالیز»، و دیگری دو سال پیش در مجلهٔ «مهرنامه» به مناسبت سی‌امین سال درگذشت ایشان.

● **امیری:** ما در مجلهٔ برهان در شمارهٔ بهار ۹۲ در صفحهٔ ۲ جلد، زندگی‌نامهٔ مختصری از ایشان به‌عنوان ریاضی‌دان معاصر داشتیم. یک نفر که اسم نمی‌برم، به من گفت: «چرا اسم بعضی‌ها را می‌گذارید ریاضی‌دان، مصاحب ریاضی‌دان نبود!» نظر شما چیست؟ آیا ایشان را ریاضی‌دان می‌دانستید؟ من کسی را ریاضی‌دان می‌دانم که علم ریاضی تولید کرده باشد.

پاشا: می‌خواهم بگویم که ایشان را بالاتر از ریاضی‌دان می‌دانم. همان‌طور که در مورد مرحوم غیور گفتم، ایشان را جامع‌الاطراف می‌دانم.

● **یاسی‌پور:** من پیش آقای دکتر **شفیعی کدکنی** بودم. او گفت: من آدمی به باسوادی مصاحب ندیدم. فلسفهٔ اسلامی را پیش آقای **آشتیانی** خوانده بود و آدم بسیار برجسته‌ای بود.

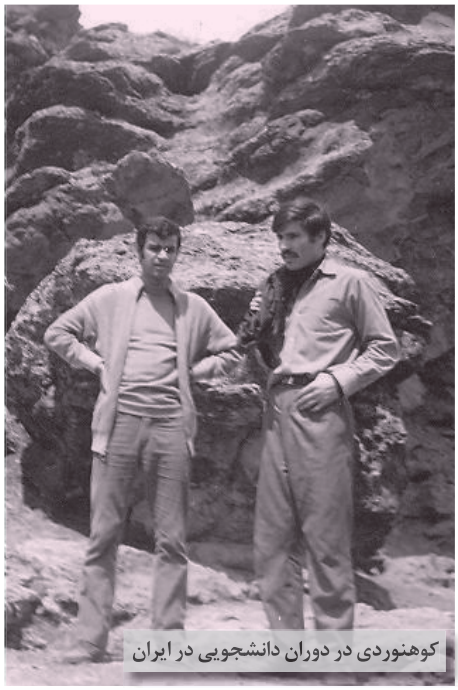
● **امیری:** توی بحث ریاضی چه‌طور؟ مثلاً مقالات ایشان و...

پاشا: ایشان یک مقاله داشت که در مجلهٔ سلطنتی انگلیس چاپ شد. مقالهٔ دیگری نداشت، ولی در ایران کارهای بزرگی کرد. یعنی راه را برای ریاضی خواندن خیلی‌ها باز کرد.

● **یاسی‌پور:** منطق ریاضی را هم برای نخستین‌بار معرفی کرد.

● **امیری:** این کتاب تئوری اعداد، مطالبش بیشتر از خودش بود، یا جمع‌آوری شده بود؟

شرکت‌کنندگان درکنفرانس آمار ایران به‌ترتیب از راست به چپ، آقایان: دکتر محمدزاده ـ دکتر پاشا ـ دکترنور بلوچی ـ دکتر فقیهی



کوهنوردی در دوران دانشجویی در ایران

کلاس ششم ابتدایی

دورهٔ دانشجویی در دانشگاه ایالتی میشیگان

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

پاشا: بیشتر جمع‌آوری بود. هم تئوری اعداد و هم آنالیز، بیشتر جمع‌آوری بود. اما من باید موضوعی را یادآوری کنم. الان این‌طور شایع شده که هر کسی هنوز لیسانس هم نگرفته است، پنج شش مقاله دارد. آن وقت‌ها این حرف‌ها نبود. افراد کمی دنبال چاپ مقاله و کتاب بودند. دیگر اینکه ایشان برای خدمت به ایران آمد، در حالی‌که اگر آنجا می‌ماند، به حد یک فوق ریاضی‌دان می‌رسید.

● **شرقی:** دکتر مصاحب اولین کارهای ریاضی‌اش را به‌صورت کتاب و مجله در ۱۸ سالگی نوشت. تعریف ریاضی‌دان چیست؟ به‌نظر من ریاضی‌دان کسی است که برای پیشرفت یکی از شاخه‌های ریاضی قدمی برداشته باشد، ریاضیات شغلش نباشد، بلکه خودش را وقف ریاضیات کرده باشد. با این تعریف من معتقدم مرحوم **پرویز شهریاری** حتماً ریاضی‌دان بوده است. زیرا به پیشرفت یکی از شاخه‌های ریاضی، یعنی تاریخ ریاضیات کمک کرد و علاوه بر آن، در توسعهٔ آموزش ریاضی کشورمان هم نقش جدی داشت؛ اگرچه تحصیلات خیلی بالایی هم در رشتهٔ ریاضی نداشت. حالا کسی مثل مصاحب که جای خود دارد که تحصیلات عالیه هم داشت و استاد دانشگاه هم بود.

پاشا: من با این برچسب زدن‌ها کاملاً مخالفم، مصاحب خودش بود و کارهای بزرگی کرد. دربارهٔ خلق‌وخویش هم بگویم که ما بعدها فهمیدیم چه آدم مهربانی بوده است. سختگیری‌هایی هم که می‌کرد، به‌خاطر خودمان بود و اینکه می‌خواست ما را تربیت کند. وقتی من از آمریکا به ایران آمدم، رفتم پیش ایشان. ما وقتی دانشجوی‌شان بودیم، خیلی از ایشان ترس و وحشت داشتیم. اما آن روز خیلی خوب از من پذیرایی کرد و دستور داد برایم چای آوردند. بعداً که برایشان به مناسبت عید نوروز کارت تبریک فرستادم، برایم نامه‌ای نوشت و در آنجا مرا با عنوان «نورچشم عزیزم، عین‌الله پاشا» خطاب کرد. آن وقت بود که فهمیدم، ایشان در عین سخت‌گیری، چه قلب رئوف و مهربانی داشته است.

● **امیری:** به‌عنوان آخرین سؤال، شما خودتان از مؤلفان کتاب‌های درسی بوده‌اید. اخیراً تفاوت‌هایی در نگارش کتاب‌های درسی پیدا شده است. از این تفاوت‌ها چه‌قدر اطلاع دارید؟

پاشا: چیزهایی شنیده‌ام، خب باید عوض می‌شد. در دنیایی که این همه تغییرات در آن اتفاق افتاده، حرف ۲۰ ساله کهنه است. به قول مولوی: «چون که با کودک سروکارت فتاد، پس زبان کودکی باید گشاد» باید زبانمان را با بچه‌های این دوره و زمانه مطابق کنیم.

در انتهای مصاحبه، اشاره‌ای هم به دورهٔ دکترا و بعد از آن بکنم. بعد از پایان تحصیلات در مؤسسهٔ ریاضیات، در «دانشگاه تربیت معلم» که الان خوارزمی شده و قبلاً دانشسرای عالی و قبل از آن دارالمعلمین مرکزی بود و سه سال دیگر به صدمین سال تأسیس آن می‌رسیم، استخدام شدم. همین‌جا به سؤالی که آقای یاسی‌پور پرسیدند و اینکه چه‌طور شد که با آن همه علاقه به هندسه، از رشتهٔ آمار و احتمال سردرآوردم، جواب بدهم. آمدن من به مؤسسه همان‌طور که دیدید، امری کاملاً تصادفی بود. بعد از اینکه تحصیل در مؤسسهٔ ریاضی تمام شد، بعد از سه چهار سال که استخدام بودم و درس می‌دادم، بورسی به من دادند که بروم خارج و ادامهٔ تحصیل بدهم. قرار بود بروم هندسهٔ دیفرانسیل بخوانم (می‌بینید که هندسه را رها نکرده بودم)، اما به ما گفتند: استاد آمار نداریم و یکی باید برود و آمار بخواند. من از سه جا پذیرش خواسته بودم: دانشگاه میشیگان رشتهٔ آمار، دانشگاهی دیگر برای هندسه و جای دیگر برای توپولوژی. جواب دانشگاه میشیگان زودتر آمد و در آن دانشگاه مشغول شدم.

بعد از انقلاب فرهنگی برگشتم و به‌کار تدریس رشتهٔ آمار و احتمال در دانشگاه تربیت معلم و دیگر دانشگاه‌ها مشغول شدم، تا حالا که با کمال رضایت به‌کار معلمی و تدریس می‌پردازم.

بعد از انقلاب فرهنگی، به‌کشور برگشتم و به تدریس آمار و احتمال در دانشگاه‌ها مشغول شدم و با کمال رضایت به کار معلمی و تدریس می‌پردازم

● **شرقی:** و حتماً هم از زندگی و کارتان راضی هستید؟

پاشا: البته، خب این کارها لذت‌بخش است.

● **شرقی:** از اینکه به ما وقت دادید، کمال تشکر را از شما داریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

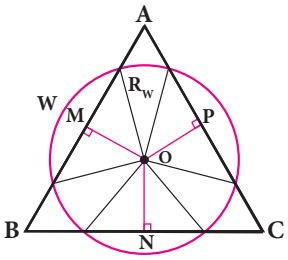
نامساوی اویلر

اشاره

لئونارد اویلر[1] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان برجستهٔ سوئیسی، در سال ۱۷۶۷ قضیه‌ای را در هندسه منتشر کرد که اکنون به رابطهٔ اویلر مشهور است ($OI^2=R^2-2Rr$). از این رابطه می‌توان به نامساوی $R\geq 2r$ پی برد که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی است. از آن به بعد اثبات‌ها و تعمیم‌های متفاوتی برای این نامساوی در مجلات ریاضی دنیا منتشر شد. ما نیز در این مقاله سعی داریم اثباتی ساده و مقدماتی برای این نامساوی مطرح کنیم..

محمد طبیعی*
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی
دبیرستان علامه طباطبایی تهران

قضیه: دایرهٔ W با شعاع R_W با هر سه ضلع مثلث ABC متقاطع است. آن‌گاه داریم: $R_W\geq r$ (r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است).



اثبات: از O (مرکز دایرهٔ W) بر اضلاع AB، BC و AC عمودهای OM، ON و OP را وارد می‌کنیم. از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، پس: $OM\leq R_W$، $ON\leq R_W$ و $OP\leq R_W$. از طرف دیگر داریم:

$$\text{مساحت}\overset{\Delta}{ABC}=\text{مساحت}\overset{\Delta}{AOB}+\text{مساحت}\overset{\Delta}{BOC}+\text{مساحت}\overset{\Delta}{AOC}$$

$$=\frac{OM\times AB}{2}+\frac{ON\times BC}{2}+\frac{OP\times AC}{2}$$

همچنین با توجه به نامساوی‌های گفته شده داریم:

$$\frac{OM\times AB}{2}+\frac{ON\times BC}{2}+\frac{OP\times AC}{2}\leq R_W\left(\frac{AB+AC+BC}{2}\right)$$

در نتیجه:

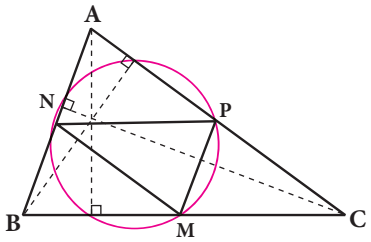
$$S\leq R_W.P$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P}\leq R_W \Rightarrow r\leq R_W$$

(P نصف محیط مثلث است و می‌دانیم که: $r=\frac{S}{P}$ [2])

اکنون قصد داریم با استفاده از این قضیه، نامساوی اویلر را ثابت کنیم.

نامساوی اویلر: در هر مثلث، با شعاع دایرهٔ محیطی R و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی r، داریم: $R\geq 2r$.



اثبات: فرض کنید M، N و P اوساط اضلاع BC و AB و AC باشند. روشن است که دو مثلث MNP و ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ با هم متشابه‌اند. پس شعاع دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{MNP}$ نصف شعاع دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ است. از طرف دیگر، دایرهٔ محیطی MNP با هر سه ضلع مثلث متقاطع است (این دایره از پای ارتفاعات مثلث نیز می‌گذرد). در نتیجه، بنابر قضیهٔ قبل می‌توان گفت:

$$\frac{R}{2}=R_{\overset{\Delta}{MNP}}\geq r\Rightarrow R\geq 2r$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که پای ارتفاعات و اوساط اضلاع برهم منطبق باشند. یا به‌عبارت دیگر، مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. Leonhard Euler
۲. اثبات فرمول $r=\frac{S}{P}$ در کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، ترجمهٔ زنده‌یاد مصحفی از انتشارات مدرسه آمده است.

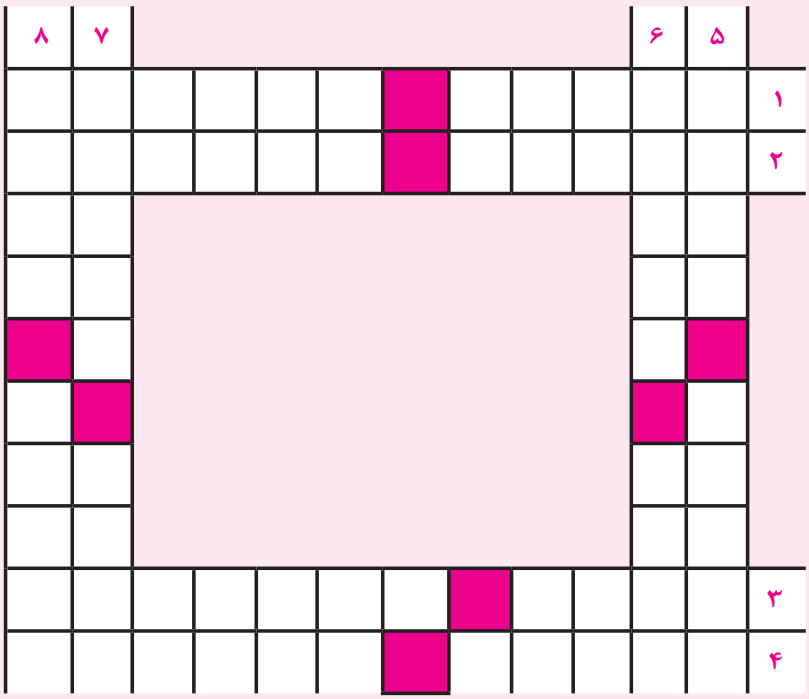
* htabiee@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

مریم حیدری عبداللهی
دبیر ریاضی از شهر یزد

ایستگاه اول:
جدول واژه‌های ریاضی

در این شماره هم مانند یکی از شماره‌های سال گذشته، از جدول‌های ارسالی همکاران محترم استفاده کرده‌ایم. ما از این موضوع استقبال می‌کنیم و همین‌جا از شما دبیران و دانش‌آموزان عزیز می‌خواهیم که به کمک ما بشتابید و برای غنای بیشتر ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی، سرگرمی‌ها، جدول‌ها، بازی‌های ریاضی و یا لطیفه‌هایتان را برای ما بفرستید. اگر این آثار از کارهای خودتان باشد، چه بهتر و بسیار مایهٔ مسرت است؛ ولی ترجمه‌هایتان را هم با ذکر منبع می‌توانید برایمان ارسال کنید. به یقین سپاس‌گزارتان خواهیم بود.



۱. اتحاد شاد! ـ خطی که با احتیاط از کنار منحنی رد می‌شود!

۲. مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب ـ مستقل نیست

۳. زاویه‌ای که سینوس و کسینوس آن مثبت است ـ مساوی نیست.

۴. انتخابی از اشیا که در آن ترتیب مهم نیست ـ جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی ۱۰۰, -۹۸, ... برابر ۳۸ است؟

۵. توان دوم هر عدد را ... آن عدد می‌گویند ـ سطح تشکیل‌دهندهٔ یک شکل را گویند.

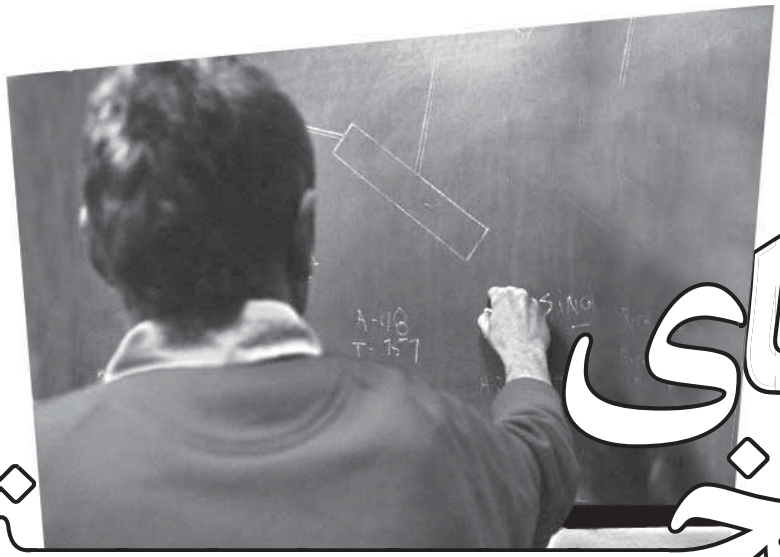
۶. کنج و گوشه ـ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۷x-۴=۰$.

۷. اگر دو عبارت جبری به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی این دو را ... می‌نامند ـ خطی که با خط دیگر تشکیل زاویهٔ قائمه می‌دهد.

۸. شکل تابع درجهٔ دوم ـ یکی از چهار عمل اصلی.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

محرم نژاد ایردموسی*



پای تخته

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله ـ که نشانی آن در صفحه فهرست مجله آمده است ـ به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۲۱. ثابت کنید معادلهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

۱۲۲. آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را پشت‌سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ...، و میان ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۱۲۳. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که جملات دنبالهٔ حسابی $a+b, a+2b, \ldots, a+nb$ همگی مرکب باشند. a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند.

۱۲۴. a و b دو عدد طبیعی‌اند، به‌طوری که a^2+b^2 بر ۲۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید a^2+b^2 بر ۴۴۱ بخش‌پذیر است.

۱۲۵. یازده دانش‌آموز در اردویی تابستانی، پنج گروه پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو دانش‌آموز مانند A و B طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش‌آموز A باشد، شامل دانش‌آموز B هم باشد.

۱۲۶. طول تکه سیمی ۱۲۰ سانتی‌متر است. آیا می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدن) اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

۱۲۷. ثابت کنید هر پنج‌ضلعی محدب، سه قطر دارد که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد.

۱۲۸. دو بازیکن به نوبت اسب‌هایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج می‌گذارند که هیچ‌یک از آن‌ها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی راهبرد برد دارد؟

۱۲۹. فرض کنید n، عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۵ است. ثابت کنید هر مربع را می‌توان فقط با برش‌های افقی و عمودی، به n مربع تقسیم کرد.

۱۳۰. در جدولی از m سطر و n ستون، خانهٔ محل برخورد سطر fاُم و ستون gاُم را علامت گذاشته‌ایم. چند تا از مستطیل‌هایی که از خانه‌های این جدول تشکیل شده‌اند، این خانهٔ علامت‌دار را دربردارند؟

بخش دوم:

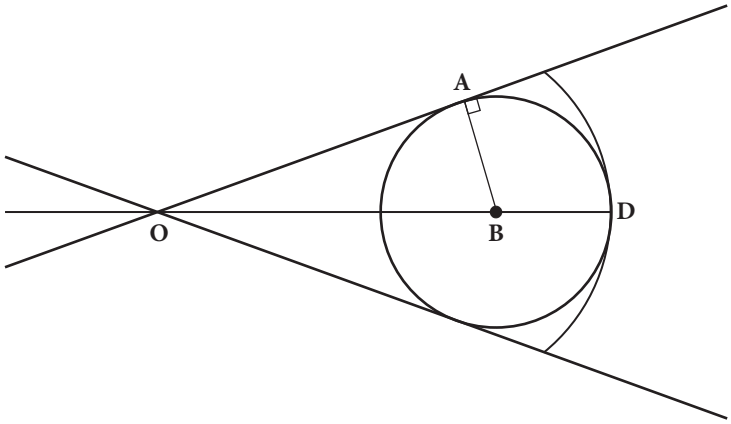
راه‌حل‌ها

۶۱. تابع f مفروض است، به‌طوری که به‌ازای هر $x,y\in R$ داریم: $f(x+y)=f(x)f(y)$. اگر $f(2)=5$، مطلوب است مقدار $f(n)$ برحسب n برای $n\in Z$.

قرار دهید $y=0$ و $x=2$. داریم: $f(2)=f(0)f(2)$. در نتیجه: $f(0)=1$. سپس قرار دهید $x=y=1$. داریم: $5=f(2)=(f(1))^2$. در نتیجه: $f(1)=\sqrt{5}$ یا $-\sqrt{5}$. حال به روش استقرا می‌توان ثابت کرد برای هر $n\in N$ داریم: $f(n)=(f(1))^n$ و $f(-n)=(f(1))^{-n}$. در نتیجه دو جواب برای f وجود دارد: $f(n)=(-\sqrt{5})^n$ و $f(n)=(\sqrt{5})^n$.

۶۲. دو قطر از دایرهٔ C را رسم کرده‌ایم، به‌طوری که این دو قطر با هم زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند. اگر دایره‌ای به شعاع ۱ طوری رسم شده باشد که به دو قطر مذکور و دایرهٔ C مماس باشد، شعاع دایرهٔ C حداکثر چه‌قدر است؟

زاویهٔ AOB پانزده درجه است و $AB=1$. در نتیجه: $OB=\frac{AB}{\sin 15^\circ}=\frac{1}{\sin 15^\circ}$. بنابراین شعاع دایرهٔ C برابر است با: $OC=OB+BD=1+\frac{1}{\sin 15^\circ}$.



شکل ۱

۶۳. با فرض $0\le x\le y\le 1$، مطلوب است کم‌ترین مقدار ماکزیمم سه عدد زیر:

$xy,\ 1-x-y+xy,\ x+y-2xy$

راه‌حل ارائه شده توسط **محمد طبیعی** از تهران:

داریم:

$(1-2x)(1-2y)=xy+(1-x-y+xy)-(x+y-2xy)$.

در نتیجه اگر یکی از دو عدد x و y از $\frac{1}{2}$ کمتر یا مساوی با آن و دیگری از $\frac{1}{2}$ بیشتر یا مساوی با آن باشد، آن‌گاه داریم:

$$xy+(1-x-y+xy)\le x+y-2xy \Rightarrow \frac{1}{2}\le x+y-2xy$$

در این حالت کمترین مقدار ماکزیمم برابر $\frac{1}{2}$ است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که x و y هر دو از $\frac{1}{2}$ کمتر یا هر دو بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشند. سه عدد داده شده به‌صورت xy، $(1-x)(1-y)$ و $x(1-y)+y(1-x)$ هستند. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد x و y هر دو از $\frac{1}{2}$ بیشترند و: $xy>(1-x)(1-y)$. پس ماکزیمم، بین دو عدد xy و $x+y-2xy$ خواهد بود.

با ثابت گرفتن y و تغییر دادن x، تغییرات دو تابع $f(x)=xy$ و $g(x)=x+y-2xy$ را در بازهٔ $\left[\frac{1}{2},1\right]$ بررسی می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود اگر $M>x$، آن‌گاه:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$f(M)>f(x)$ و $g(M)<g(x)$.

از طرفی داریم: $t(x)=g(x)-f(x)=x+y-3xy$،

$t(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+y-\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}-\frac{y}{2}>0$ و $t(1)=1-2y<0$.

لذا $t(x)$ ریشه‌ای بین $\frac{1}{2}$ و ۱ دارد. پس $\frac{1}{2}<M\le 1$ موجود است، به‌طوری که: $f(M)=g(M)$. به‌راحتی می‌توان نشان داد کمترین مقدار ماکزیمم در M اتفاق می‌افتد که در این حالت داریم: $M=\frac{y}{3y-1}$ و $g(M)=f(M)=\frac{y^2}{3y-1}$.

از طرف دیگر:

$$(3y-2)^2\ge 0\Rightarrow 9y^2+4-12y\ge 0$$

$$\Rightarrow 9y^2\ge 4(3y-1)\Rightarrow \frac{y^2}{3y-1}\ge\frac{4}{9}$$

در نتیجه کمترین مقدار ماکزیمم برابر است با $\frac{4}{9}$ که به ازای $x=y=\frac{2}{3}$ اتفاق می‌افتد.

۶۴. فرض کنید r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد. اگر r_1 و r_2 به‌ترتیب برابر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث‌های ABC و ACD باشند، ثابت کنید r، r_1 و r_2 می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

$$AB+AD+BD<AB+AC+BC$$

$$\Rightarrow\frac{2S_{ABD}}{AB+AD+BD}>\frac{2S_{ABD}}{AB+AC+BC}$$

$$AC+AD+CD<AB+AC+BC$$

$$\Rightarrow\frac{2S_{ACD}}{AC+AD+CD}>\frac{2S_{ACD}}{AB+AC+BC}$$

در نتیجه:

$$r_1+r_2>\frac{2(S_{ABD}+S_{ACD})}{AB+AC+BC}=\frac{2S_{ABC}}{AB+AC+BC}=r$$

بنابراین، r_1، r_2 و r در نابرابری‌های مثلثی صدق می‌کنند و می‌توانند طول‌های اضلاع یک مثلث باشند.

▣ **نکته:** در محاسبهٔ r_1، r_2 و r دستور محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی هر مثلث، یعنی $r=\frac{S}{P}$ مورد استفاده قرار گرفته است. در این دستور S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث است.

۶۵. مجموعهٔ $X=\{1,2,...,n\}$ چند زیرمجموعهٔ k عضوی دارد که شامل عدد k نباشد؟

اگر k مقداری ثابت باشد باید از $X-\{k\}$، k عضو انتخاب کنیم. پس $\binom{n-1}{k}$ انتخاب وجود دارد. اگر k بتواند هر مقداری باشد، آن‌گاه پاسخ $N=\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+...+\binom{n-1}{n-1}$ یا $N=2^{n-1}-1$ خواهد بود.

۶۶. نشان دهید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویا است.

با فرض $A=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ دو طرف تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم. داریم:

$$A^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3A\sqrt[3]{4-5}$$

در نتیجه: $A^3+3A-4=0$. بنابراین باید: $(A-1)(A^2+A+4)=0$. چون معادله فقط یک ریشه دارد، در نتیجه: $A=1$.

راه‌حل دوم (از هوشنگ شرقی):

$$2+\sqrt{5}=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3,\ 2-\sqrt{5}=(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^3$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۶۷. مطلوب است ریشه‌های معادلهٔ

$$(x^2+3x+2)(x^2-7x+12)(x^2-2x-1)+24=0$$

$$(x^2+3x+2)(x^2-7x+12)(x^2-2x-1)+24$$

$$=(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)(x^2-2x-1)+24$$

$$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)(x^2-2x-1)+24$$

$$=(a-3)(a-8)(a-1)+24=a(a-5)(a-7)$$

که در آن: $a=x^2-2x$. در نتیجه به سه معادلهٔ $x^2-2x=0$، $x^2-2x=5$ و $x^2-2x=7$ می‌رسیم. به راحتی مشخص می‌شود که ریشه‌های معادله عبارت‌اند از: ۰، ۲، $1\pm\sqrt{6}$ و $1\pm\sqrt{8}$.

۶۸. علی تعدادی برگهٔ کاغذ دارد و تعداد کاغذها عددی بین ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ است. او سعی می‌کند برگه‌ها را به دسته‌های ۲تایی تقسیم کند. در نهایت یک برگه اضافه می‌آید. در تقسیم برگه‌ها به دسته‌های ۳تایی، به دسته‌های ۴تایی، ...، به دسته‌های ۸تایی نیز همین اتفاق تکرار می‌شود (یک برگه اضافه می‌ماند). علی چند برگه کاغذ دارد؟

اگر n تعداد برگه‌ها باشد، آن‌گاه n-۱ بر ۲، ۳، ...، ۸ بخش‌پذیر است. در نتیجه باید n-۱ بر کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها بخش‌پذیر باشد. در نتیجه باید n-۱ مضرب ۸۴۰ باشد. تنها عدد ممکن $n=2*840+1$ است. پس: $n=1681$.

۶۹. f(x) یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است به‌طوری که $f(-1)=-1$، $f(2)=-4$، $f(-3)=-9$ و $f(4)=-16$. مطلوب است مقدار f(۱).

تابع $g(x)=f(x)+x^2$ را در نظر بگیرید. داریم:

$g(-3)=f(-3)+9=0$ و $g(2)=f(2)+4=0$ و

$g(-1)=f(-1)+(-1)^2=0$ و $g(4)=f(4)+16=0$.

در نتیجه چندجمله‌ای درجهٔ چهارم g بر $(x+1)$، $(x-2)$، $(x+3)$ و $(x-4)$ بخش‌پذیر است. در نتیجه: $g(x)=k(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$.

بنابراین: $f(x)=k(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)-x^2$. پس: $f(1)=24k-1$.

۷۰. مربع‌های ABKL، BCMN و CAOP روی اضلاع مثلث ABC و خارج مثلث بنا شده‌اند. پاره‌خط‌های KL، MN و OP را امتداد می‌دهیم تا مثلث A´B´C ایجاد شود. اگر ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ باشد، مساحت مثلث A´B´C´ را به‌دست آورید.

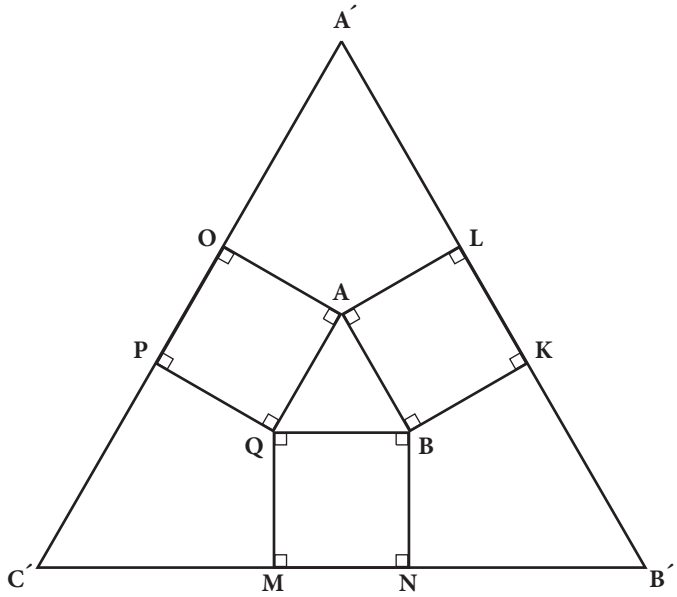
چون اضلاع A´B´C´ با اضلاع ABC موازی هستند، پس دو مثلث متشابه‌اند و A´B´C´ متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر، شش مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک ضلع با هم هم‌نهشت خواهند شد (چرا؟) و زوایای داخلی هر کدام °۳۰ و °۶۰ خواهد شد. در نتیجه:

$$A'L = KB' = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$$

یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع A´B´C´ برابر است با $2+4\sqrt{3}$ و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+4\sqrt{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(52+16\sqrt{3})$$

$$=13\sqrt{3}+12$$



شکل ۲

* iradmusa@yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

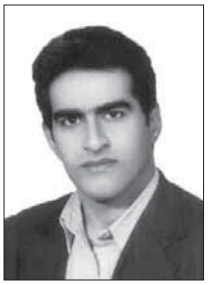
دسته‌بندی داده‌های پیوسته در آمار توصیفی

(درس آمار و مدل‌سازی دورهٔ دوم متوسطه)

مقدمه

یکی از بخش‌های علم آمار، آمار توصیفی است که کتاب «آمار و مدل‌سازی» به آن پرداخته است. آمار توصیفی شامل روش‌های جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌هاست و یکی از راه‌های خلاصه کردن داده‌های متغیر تصادفی پیوسته، دسته‌بندی (طبقه‌بندی) آن‌هاست.

دسته‌بندی داده‌ها در کتاب‌های آمار به روش‌هایی متفاوت مطرح شده است، ولی هدف همهٔ آن‌ها کم کردن حجم داده‌ها برای راحت توصیف کردن موضوع یا موضوعات مورد مطالعه است. در این مقاله سعی شده روشی را که کتاب درسی آمار و مدل‌سازی برای دسته‌بندی داده‌ها مطرح کرده است، با روش‌های کتاب‌های دیگر آماری تلفیق کنیم و روشی ساده و راحت برای دانش‌آموزان و دانشجویان مطرح سازیم.



رضا زینی‌وند
دبیردبیرستان‌های
استان ایلام ـ دره‌شهر

کلیدواژه‌ها: داده‌های آماری، دسته‌بندی

مراحل دسته‌بندی داده‌ها

مراحل دسته‌بندی داده‌ها را با یک مثال مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. داده‌های زیر مربوط به نمرات پایانی اول درس آمار و مدل‌سازی یک کلاس ۳۰ نفره است:

۱۴/۵۰	۱۲/۷۵	۱۲	۱۶	۱۴/۲۵	۸/۵۰	۱۶	۱۵/۲۵	۷/۵۰	۱۳/۷۵
۱۸	۱۵/۵۰	۱۴	۱۸	۱۳/۷۵	۱۷/۲۵	۱۹	۱۲/۵۰	۶/۲۵	۱۲/۵۰
۱۵	۱۴	۱۵/۵۰	۱۶	۱۳/۲۵	۱۷	۱۶/۵۰	۱۲	۷/۵۰	۱۴

۱. محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات داده‌ها

حداکثر اختلاف داده‌ها را دامنهٔ تغییرات گوییم که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$R=b-a=۱۹-۶/۲۵=۱۲/۷۵$

که در آن b بزرگ‌ترین و a کوچک‌ترین داده است.

۲. مشخص کردن تعداد دسته‌ها

تعداد دسته‌ها را می‌توان به‌طور اختیاری با توجه به تعداد داده‌ها بین ۵ تا ۲۰ دسته تعیین کرد. همچنین می‌توان تعداد دسته‌ها را نیز با استفاده از فرمول‌هایی به‌صورت زیر محاسبه کرد (این دستورها پیشنهادی بوده و دقیق نمی‌باشند و تنها می‌توانند نقطهٔ شروعی مناسب را برای دسته‌بندی به‌دست دهند):

الف. محاسبهٔ تعداد دسته‌ها با فرمول $k=[\sqrt{n}]+۱$ که در آن k تعداد دسته‌ها، n تعداد داده‌ها و نماد [ ] جزء صحیح است. در مثال ۱ تعداد دسته‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$k=[\sqrt{۳۰}]+۱=[۵/۴۷۷...]+۱=۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ب. محاسبهٔ تعداد دسته‌ها (k) به‌طوری‌که کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که در رابطهٔ $n \leq ۲^k$ صدق کند. در مثال ۱ این مقدار برای $n=۳۰$ برابر ۵ است، چون داریم: $۲^۴ < ۳۰ < ۲^۵$.

در مثال ۱ تعداد دسته‌ها را ۵ در نظر می‌گیریم. هرچند برای تعیین تعداد دسته هیچ‌گونه روش دقیق ریاضی وجود ندارد، ولی فرمول‌های فوق می‌توانند به مشخص کردن تعداد دسته‌ها کمک کنند.

۳. تعیین طول دسته‌ها

طول دسته‌ها همان‌طوری که در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، از تفاضل کران‌های پایین (کران‌های بالا) یا تفاضل نمایندهٔ (مرکز) متوالی دسته‌ها به‌دست می‌آید.

برای تعیین طول دسته از رابطهٔ $c = \frac{R}{k}$ می‌توان استفاده کرد. در محاسبهٔ طول دسته ممکن است مقدار آن عددی صحیح و مثبت نباشد که با توجه به دقت ثبت داده‌ها (تعداد ارقام اعشاری داده‌ها) مقدار طول دسته (c) را به عدد بالاتر با همان دقت ثبت داده‌ها گرد می‌کنیم. در مثال ۱ داریم:

$$c = \frac{۱۲/۷۵}{۵} = ۲/۵۵ \simeq ۲/۵۶$$

۴. تعیین کران‌های دسته‌ها

برای تعیین کران‌های دسته‌ها، ابتدا کران پایین دستهٔ اول را به این صورت محاسبه می‌کنیم که مقدار طول دستهٔ به‌دست آمده در بخش قبلی را در تعداد دسته‌ها ضرب می‌کنیم و آن را R' می‌نامیم. با

محاسبهٔ نصف تفاضل R´-R مقداری به‌دست می‌آید که در محاسبه کران‌ها از آن استفاده می‌کنیم. در مثال ۱ داریم:

$$\frac{R'-R}{۲}=\frac{۲/۵۶\times۵-۱۲/۵۵}{۲}=۰/۰۲۵$$

حال مقدار به‌دست آمده را از کوچک‌ترین داده کم می‌کنیم تا کران پایین دستهٔ اول مشخص شود. در مثال ۱ داریم:

کران پایین دستهٔ اول:

۶/۲۵-۰/۰۲۵=۶/۲۲۵

حال با اضافه کردن مقدار طول دسته (c) به کران پایین دستهٔ اول، کران پایین دستهٔ دوم مشخص می‌شود. به‌همین ترتیب کران پایین دسته‌های بعدی نیز مشخص می‌شود. در مثال ۱ داریم:

کران پایین دستهٔ دوم:

۶/۲۲۵+۲/۵۶=۸/۷۸۵

کران پایین دستهٔ سوم:

۸/۷۸۵+۲/۵۶=۱۱/۳۴۵

کران پایین دستهٔ چهارم:

۱۱/۳۴۵+۲/۵۶=۱۳/۹۰۵

کران پایین دستهٔ پنجم:

۱۳/۹۰۵+۲/۵۶=۱۶/۴۶۵

بعد از تعیین کران‌های پایین دسته‌ها، برای تعیین کران بالای دسته‌ها می‌توان با اضافه کردن طول دسته به کران‌های پایین، کران‌های بالا را مشخص کرد. در مثال ۱ کران‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

کران بالای دستهٔ اول =

کران پایین دستهٔ اول + طول دسته:

۶/۲۲۵+۲/۵۶=۸/۷۸۵

کران بالای دستهٔ دوم =

کران پایین دستهٔ دوم + طول دسته:

۸/۷۸۵+۲/۵۶=۱۱/۳۴۵

کران بالای دستهٔ سوم =

کران پایین دستهٔ سوم + طول دسته:

۱۱/۳۴۵+۲/۵۶=۱۳/۹۰۵

کران بالای دستهٔ چهارم =

کران پایین دستهٔ چهارم + طول دسته:

۱۳/۹۰۵+۲/۵۶=۱۶/۴۶۵

کران بالای دستهٔ پنجم =

کران پایین دستهٔ پنجم + طول دسته:

۱۶/۴۶۵+۲/۵۶=۱۹/۰۲۵

در آخر با مقایسهٔ کران بالای دستهٔ آخر و بزرگ‌ترین داده، صحت دسته‌بندی داده‌ها را بررسی می‌کنیم. در این مقایسه نباید کران بالای دستهٔ آخر کمتر از بزرگ‌ترین داده باشد. همان‌طور که معلوم است، کران بالای هر دسته با کران پایین دستهٔ بعدی برابر است که نشان‌دهندهٔ پیوستگی داده‌هاست.

نتیجه‌گیری

از مزایای این روش دسته‌بندی، نسبت به روش کتاب درسی آمار و مدل‌سازی، یکی این است که دقت ثبت کران‌های دسته‌ها (تعداد ارقام اعشاری) یک رقم بیشتر از داده‌هاست. این وضعیت در تعیین فراوانی دسته‌ها مشکل شمارش داده‌ای را برای دو دسته رفع می‌کند. به‌عبارت دیگر، برای مشخص کردن فراوانی مطلق دسته‌ها، این قرارداد که «کران‌های پایین دسته‌ها در صورت امکان برای دسته‌ها شمرده شوند و کران‌های بالای دسته‌ها به‌جز دستهٔ آخر شمرده نشوند» لازم نیست. مزیت دیگر این روش آن است که بین کران پایین دستهٔ اول و کران بالای دستهٔ آخر به‌ترتیب نسبت به کوچک‌ترین داده و بزرگ‌ترین داده تعادلِ مقداری به‌وجود می‌آید.

منابع

۱. بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ پاشا، عین‌الله؛ رستگار، آرش (۱۳۹۰). آمار و مدل‌سازی (چاپ جدید). شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. نیکوکار، مسعود و عربزاده، بهمن (۱۳۸۶). آمار و احتمالات کاربردی. انتشارات آزاده، تهران. چاپ سیزدهم.
۳. روغنی شهرکی، قهرمان (۱۳۸۸). آمار و احتمالات کاربردی. انتشارات مبنای خرد. تهران. چاپ اول.
۴. آذر، عادل و مؤمنی، منصور (۱۳۸۴). آمار و کاربرد آن در مدیریت (ج ۱). انتشارات سمت. تهران. چاپ یازدهم.
۵. جمشیدی، خدیجه (۱۳۸۶). آمار و کاربرد آن در مدیریت. انتشارات رادنگار. تهران. چاپ سیزدهم.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ایستگاه دوم:
باز هم مزداییان و اهریمنیان!

اگر شمارهٔ قبل برهان (شمارهٔ بهار) را خوانده باشید، با مزداییان و اهریمنیان آشنایی دارید. آن‌ها در عصر باستان در جزیره‌ای می‌زیستند و دو دسته بودند: مزداییان که همیشه راست می‌گفتند و اهریمنیان که همیشه دروغ می‌گفتند. اعضای یک خانواده، همگی از یک دسته بودند. حالا به چند معمای دیگر از مردم این جزیرهٔ عجیب توجه کنید:

● **معمای اول:** یک روز مردی را از این شهر، به اتهام دزدیدن یک اسب، پیش قاضی شهر (که یادتان هست، خودش مزدایی بود) بردند. اما متهم بی‌گناه بود و دزد نبود. او توانست با گفتن یک جمله به قاضی بی‌گناهی‌اش را ثابت کند. البته معلوم نیست که جمله‌اش درست بود یا نادرست، ولی با گفتن آن جمله، قاضی متقاعد شد که او دزد نیست؛ گرچه نتوانست بفهمد که او مزدایی یا اهریمنی است. آن جمله چه بود؟

● **معمای دوم:** در ادامهٔ ماجرا، چون اسب پیدا نشد، مرد دیگری را به همین اتهام به دادگاه بردند. در دادگاه او جمله‌ای گفت که نه تنها قاضی نتیجه گرفت که او بی‌گناه است، بلکه نتیجه گرفت که مزدایی هم هست. آن چه جمله‌ای بود؟

● **معمای سوم:** نفر سومی به دادگاه احضار شد! در دادگاه او نیز جمله‌ای گفت که از آنجا قاضی نتیجه گرفت که او یک اهریمنی ولی بی‌گناه است! آن جمله چه بود؟

● **معمای چهارم:** در دادگاه بعد، دو نفر به دادگاه احضار شدند: **جمشید** و **مهراب**. در دادگاه قاضی خطاب به جمشید گفت: «آیا تو اسب را دزدیده‌ای؟» و جمشید گفت: «نه من این کار را نکرده‌ام.» سپس قاضی خطاب به مهراب گفت: «آیا شما دو نفر از یک دسته‌اید؟» و او پاسخ داد بله و یا پاسخ داد خیر. بعد از آن قاضی توانست یکی از این دو نفر را محکوم کند. کدام یک از دو نفر محکوم شدند و چرا؟ آیا بدون اطلاع از پاسخی که مهراب داد، قاضی می‌توانست این نتیجه را بگیرد.

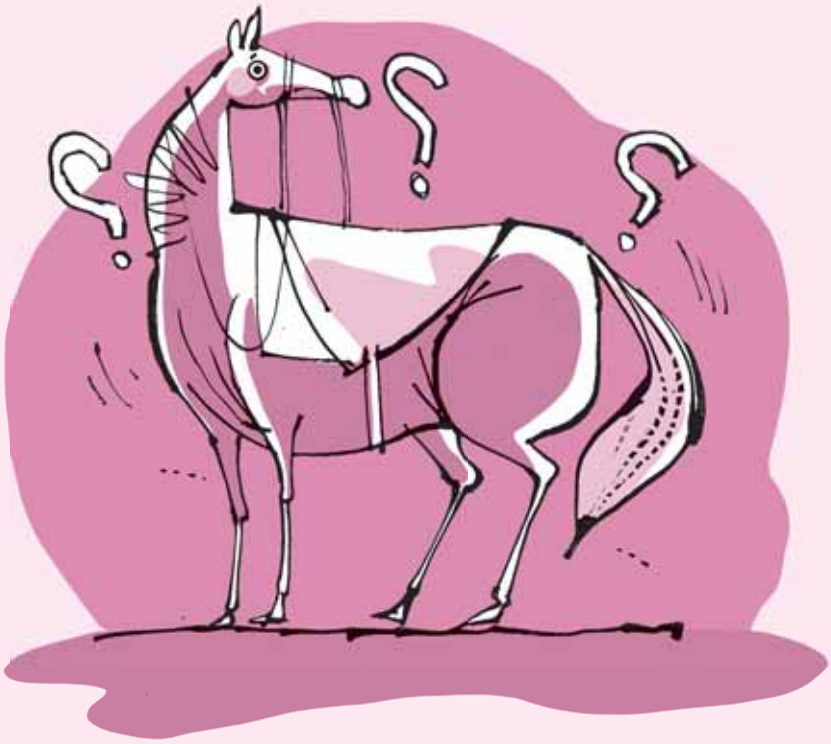
● **معمای پنجم:** با مشخص شدن دزد اسب و مجازات شدن وی، یک معمای دیگر مطرح شد تا معلوم شود که اسب متعلق به یکی از سه نفر A، B و C است. آن سه نفر این جملات را در محضر قاضی گفتند:

A گفت: اسب متعلق به C است.

B گفت: من مالک اسب نیستم.

C گفت: لااقل دو نفر از ما اهریمنی هستند

از این سخنان قاضی نتوانست تشخیص دهد که چه کسی مالک اسب است. پس گفت: «حالا فقط یکی از شما بگوید که کدام‌یک از شما سه نفر واقعاً مالک اسب است!» در اینجا C نام یکی از سه نفرشان را گفت. آن‌گاه قاضی توانست بفهمد که صاحب اسب کیست. مالک واقعی اسب چه کسی بود؟



دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

لیلا افتخاری
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی،
گرایش آنالیز عددی، معلم ناحیه ۴ کرج

مختصات قطبی

مقدمه

از آنجا که در کتاب‌های دورهٔ متوسطه به دستگاه مختصات قطبی پرداخته نشده و ضمن اینکه حل بسیاری از انتگرال‌ها و رسم بسیاری از منحنی‌ها در مختصات دکارتی کاری بسیار وقت‌گیر و گاه نشدنی است، مقالهٔ حاضر به‌منظور افزایش آگاهی‌های دانش‌آموزان از دستگاه مختصات قطبی نگارش یافته است.

البته من این مقاله را با اطلاع از اینکه مقاله‌ای با همین عنوان در سال ۸۹ در مجلهٔ برهان به چاپ رسیده، نوشته‌ام و سعی کرده‌ام که از منظری متفاوت به دستگاه مختصات قطبی بپردازم و طیف وسیعی از منحنی‌ها را معرفی و مورد بررسی قرار دهم؛ کاری که در مقالهٔ قبلی کمتر مورد توجه قرار گرفته بود.

مقالهٔ حاضر حاوی معرفی دستگاه مختصات قطبی، چگونگی نمایش نقاط در این دستگاه، معادلهٔ مقاطع مخروطی، دایره، خط و یک‌سری منحنی‌های خاص در این دستگاه و آشنایی با نحوهٔ رسم آن‌هاست.

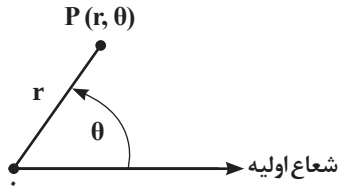
کلیدواژه‌ها: مختصات قطبی، شعاع جهت‌دار، زاویهٔ جهت‌دار، دلگون، لیماسون، لمینسکات، مقاطع مخروطی، گل رز n برگ

یکی از ابداعات **نیوتن** (۱۷۲۶-۱۶۴۲ م) که آن را در حدود سال ۱۶۷۱ ارائه داد، ولی تا ۱۷۳۶ یعنی پس از مرگش، منتشر نشد، دستگاه‌های مختصات جدید است. از جملهٔ این دستگاه‌ها دستگاه مختصات قطبی است که نقاط را با فاصله و جهت پرگاری از یک نقطهٔ ثابت مشخص می‌کند. یکی از بهترین کاربردهای دستگاه مختصات قطبی در حل انتگرال‌هایی است که حل آن‌ها در دستگاه دکارتی دشوار به‌نظر می‌رسد. در این‌گونه شرایط با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان انتگرال را در مختصات قطبی حل کرد و به جواب رسید.

همچنین، مختصات قطبی از این نظر اهمیت دارند که همهٔ مقاطع مخروطی برحسب آن‌ها با معادلهٔ واحدی بیان می‌شوند. معادله‌های قطبی مقاطع مخروطی در فیزیک و نجوم بسیار مهم‌اند و در مطالعهٔ حرکت سیارات و اثبات سه قانون **کپلر** ظاهر می‌شوند. جالب است بدانیم اولین استفاده‌های مشابه که به ایجاد دستگاه مختصات قطبی کنونی انجامیده، توسط **ابوریحان بیرونی** انجام شده است.

تعریف:

برای تعریف مختصات قطبی ابتدا مبدأ o و شعاع اولیهٔ r را طبق شکل ۱ تعریف می‌کنیم.



شکل ۱

اکنون به هر نقطهٔ p می‌توان مختصات قطبی (r,θ) را نسبت داد که در آن عدد اول یعنی r، فاصلهٔ جهت‌دار

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

از o تا p اســت و عدد دوم، یعنــی θ، زاویهٔ جهت‌دار از شعاع اولیه نسبت به پاره‌خط op است.

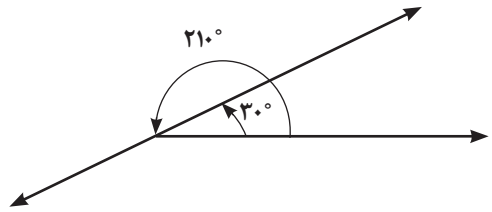
مفهوم زاویهٔ جهت‌دار

همانند مثلثــات، اندازهٔ زاویهٔ θ وقتی خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شود، مثبت و وقتی در جهت عقربه‌های ساعت سنجیده شود، منفی است.

مفهوم فاصلهٔ جهت‌دار

گاه می‌خواهیم r منفی باشد. مثلاً نقطهٔ (۲, ۲۱۰) که بر شــعاع θ=۲۱۰ دو واحد تــا o فاصله دارد. به این نقطه این‌طور می‌توان رســید که در o بایستیم، و ابتدا ۲۱۰ درجه خلاف جهت عقربه‌های ســاعت بگردیم و سپس روی شعاع گذرا از این زاویه دو واحد جلو برویم.

اما به روش دیگری هم می‌توان به این زاویه رسید. می‌توان با دوران ۳۰° شــعاع اولیه در جهت عقربه‌های ساعت و رفتن دو واحد به عقب هم به این نقطه رسید. در نتیجه می‌گوییم این نقطه به مختصات قطبی θ=۳۰° و r = - ۲ نیز وجود دارد.



شکل ۲

$P(r,\theta)=p(-۲, ۳۰^\circ)$

پــس یک نقطه در مختصات قطبی به چند طریق قابل نمایش است. تمام نمایش‌های زیر مربوط به نقطهٔ (۲, ۳۰°) است.

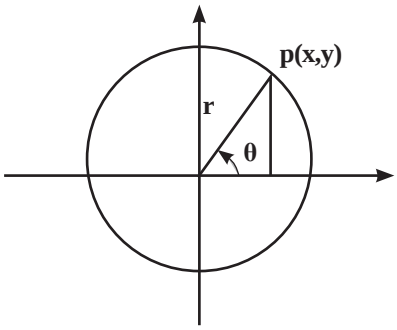
(۲, ۳۰°) (۲, ۳۳۰°) (-۲, ۱۵۰°) (-۲, ۲۱۰°)

استفادهٔ هم‌زمان از مختصات قطبی و دکارتی

مختصات دکارتی و مختصات قطبی با معادلات زیر به هم مربوط می‌شوند:

$x^۲+y^۲= r^۲$ $x = r\cos\theta$

$y/x = \tan\theta$ $y = r\sin\theta$



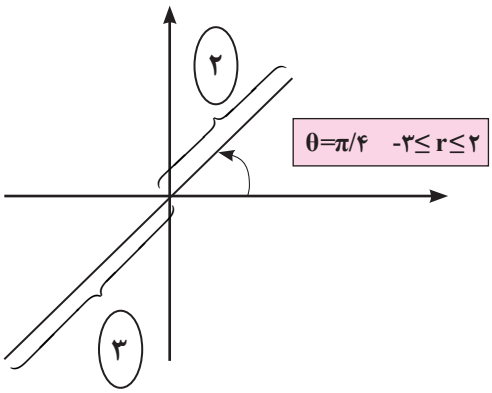
شکل ۳

برای یافتن معادلات دکارتی هم ارز معادلات قطبی و بر عکــس از یک یا چند جانشــانی معــادلات بالا استفاده می‌کنیم.

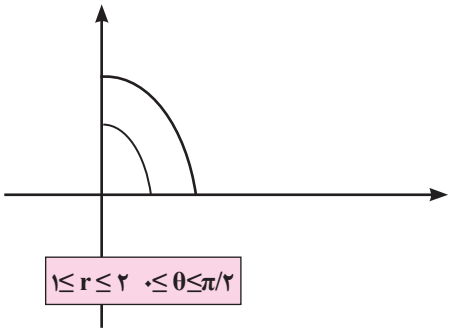
مثلاً:

$xy=۴$ ⟵ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ⟵ $r^۲\cos\theta\sin\theta=۴$

نمودارهای زیر مجموعهٔ نقاطی را نشان می‌دهند که مختصات قطبی‌شان در معادلات و نامعادلات داده شده صدق می‌کنند:

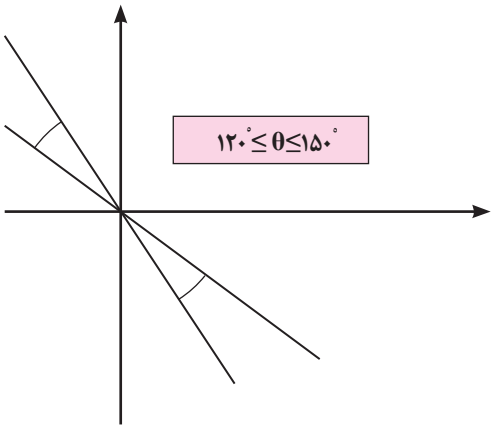


شکل ۴

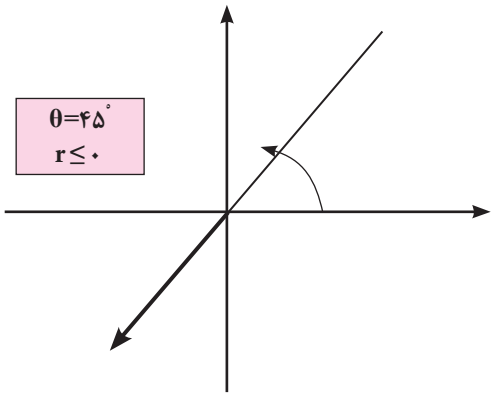


شکل ۵

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



شکل ۶



شکل ۷

معادلهٔ r=۰ و هر θ مبدأ را نشان می‌دهد.

معادلــهٔ θ= a که در آن θ مقداری اســت ثابت و r جمیع مقادیر حقیقــی را دارد، معادلهٔ خط مارّ بر مبدأ اســت که با شــعاع اولیه (که از آن سنجیده می‌شود) زاویهٔ a می‌سازد.

نمودار معادلات قطبی

نمودار F(r, θ)=۰ از تمام نقاطی تشکیل شده که در معادلــه صدق می‌کنند. این معادله، غالباً r را به صورت صریح بر حسب θ به صورت r=f(θ) بیان می‌کند.

با جانشــانی مقادیــر θ و محاســبهٔ مقادیر نظیر r می‌توانیم هر تعداد نقطه را که بخواهیم به‌دست آوریم. به‌خصوص اســتفاده از نقاطی که با آن‌ها r ماکزیمم و مینیمم می‌شــود و همچنین یافتن θهایی که منحنی به ازای آن‌ها از مبدأ می‌گذرد، در رســم منحنی بسیار کمک‌کننده‌است.

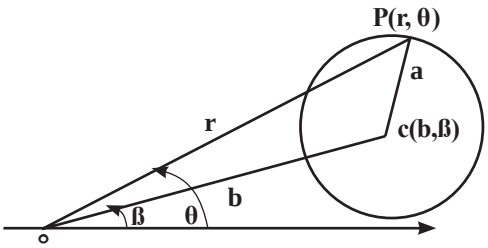
همچنین می‌توان بعضی از انواع تقارن را به آسانی تشخیص داد و در رسم منحنی‌ها از آن‌ها استفاده کرد:

- اگــر تعویض r با r- یا θ با θ+π در معادله تغییر ایجاد نکند، نسبت به مبدأ متقارن است.
- اگر تعویض θ با θ- یا (r, θ) با (-r,π-θ) در معادله آن را تغییر ندهد، نسبت به محور x متقارن است.
- اگر تعویض θ با π-θ یا (r, θ) با (-r,-θ) در معادله آن را تغییر ندهد، نسبت به محور y متقارن است.

دایره‌ها در مختصات قطبی

معادلــهٔ r=a , a≠۰ , ۰≤θ≤۲π معادلهٔ قطبی یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع a است.

معادلهٔ دایره به شعاع a و مرکز (α,ß): فرض کنیم p(α,ß) نقطهٔ دلخواهی بر دایره باشد. مثلث ocp را در نظر می‌گیریم و رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

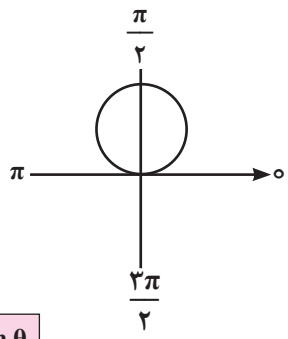


$a^2=b^2+r^2-2br\cos(\theta-ß)$

شکل ۸

هرگاه دایره از مبدأ بگــذرد، آن‌گاه b=a و معادله، شکل ساده‌تر r=۲a cos(θ-ß) را به خود می‌گیرد.

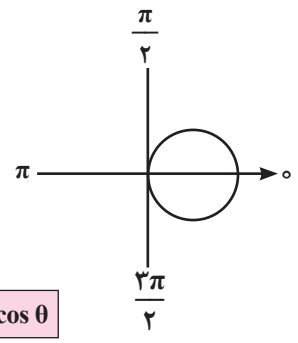
اگر ß=۰ معادلهٔ r=۲a cos θ را خواهیم داشت و اگر ß=۹۰°، معادله به صورت r=۲a sin θ خواهد بود.



r=۲a sin θ

شکل ۹

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir



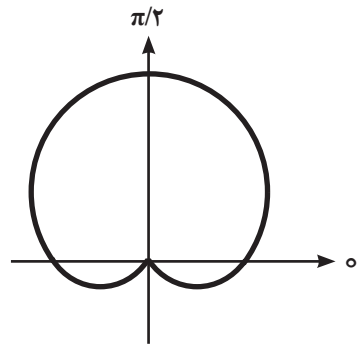
$r=2a\cos\theta$

شکل ۱۰

منحنی‌های خاص

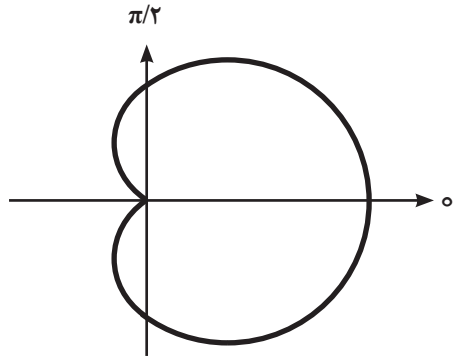
دلگون‌ها:

کاردیوئید یا دلوار قائم $r=a(1+\sin\theta)$



شکل ۱۱

کاردیوئید یا دلوار افقی $r=a(1+\cos\theta)$

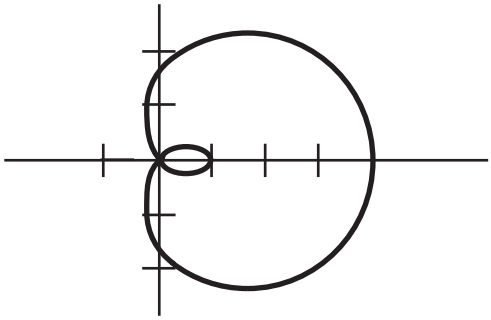


شکل ۱۲

لیماسون‌ها: لیماســون اسمی فرانسوی و قدیمی برای حلزون است.

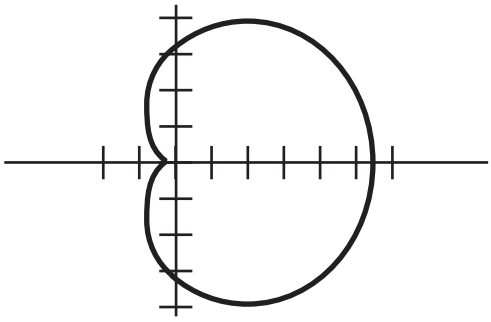
لیماسون افقی $r=b+a\cos\theta$

در بعضی کتاب‌ها و مقالات به جای کلمهٔ لیماسون از کلمهٔ حلزونی استفاده می‌کنند. در حالت خاص a=b، یک دلگون خواهیم داشــت (قبلاً در مــورد دلگون‌ها توضیح داده شد). در شکل زیر حالت‌های متفاوت یک لیماسون نمایش داده شده است.



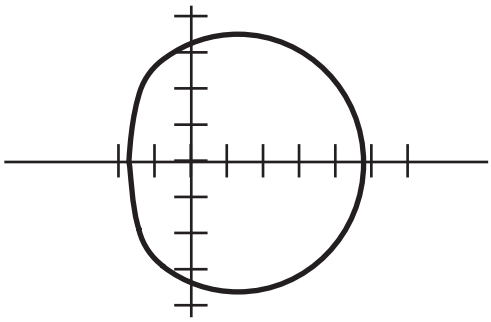
$b<a$
looped

شکل ۱۳



$a<b<2a$
dimpled

شکل ۱۴



$2a\le b$
convex

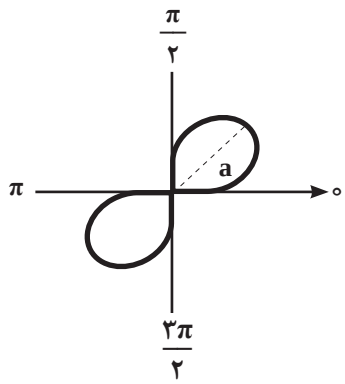
شکل ۱۵

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

منحنی‌های $r=b+a\sin\theta$ لیماسون قائم هستند.

لمینسکات‌ها:

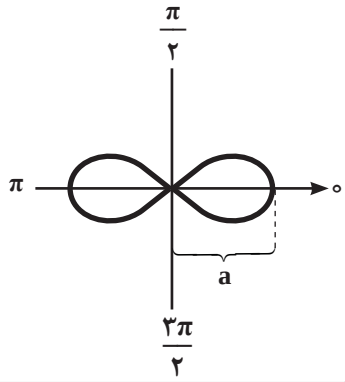
لمینسکات $a>0$ $r^2=a\sin 2\theta$



شکل ۱۶

$r^2=a\cos 2\theta$ $a>0$

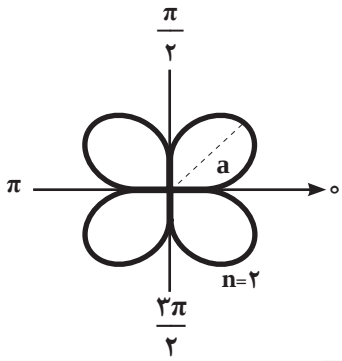
لمینسکات افقی یا رز برگ



شکل ۱۷

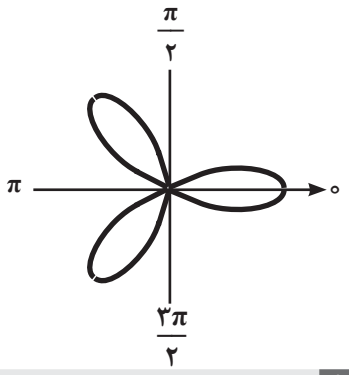
گل‌ها

رز ۴ برگ $r=a\sin 2\theta$



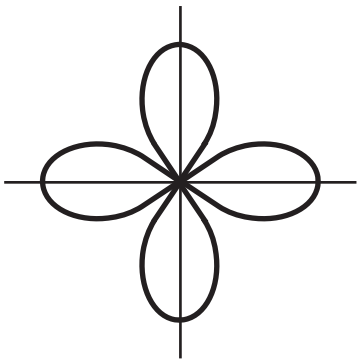
شکل ۱۸

رز ۳ برگ $r=a\cos 3\theta$



شکل ۱۹

رز ۴ برگ $r=a\cos 2\theta$



شکل ۲۰

$r=a\sin n\theta$ و $r=a\cos n\theta$ رزهایی هستند که اگر n فرد باشد، گل رز دارای n برگ و اگر n زوج باشد، گل رز دارای ۲n برگ خواهد بود. حتماً وسوسهٔ رسم این منحنی‌ها را در ذهن دارید. بیایید دلگون زیر را رسم کنیم:

$$r=a(1-\cos\theta)$$

چون تعویض θ با -θ معادله را تغییر نمی‌دهد، لذا منحنی نسبت به محور x متقارن است. همچنین از اینکه $-1\le\cos\theta\le 1$ ، معلوم می‌شود که r بین ۰ و ۲a تغییر می‌کند.

مقدار مینی‌مم R=۰ در θ=۰ و مقدار ماکزی‌مم r=۲a در θ=π رخ می‌دهد. به علاوه، وقتی θ از ۰ تا π تغییر می‌کند، cos θ از ۱ تا ۱- کاهش می‌یابد. لذا ۱-cos θ از ۰ تا ۲ افزایش می‌یابد.

یعنی وقتی بردار شعاعی op از θ=۰ تا θ=π نوسان

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

می‌کند، r از ۰ تا ۲a افزایش خواهد یافت. ما جداولی از مقادیر تشکیل می‌دهیم و نقاط نظیر را رسم می‌کنیم.

حال یک منحنی هموار از آن نقاط می‌گذرانیم، طوری که r با افزایش θ صعود کند؛ زیرا:

$$dr/d\theta = a \sin \theta$$

به ازای $0<\theta<\pi$ مثبت است. سپس از تقارن منحنی استفاده می‌کنیم و منعکس این قسمت را نسبت به محور x به‌دست می‌آوریم. نتیجه شکلی است که به دلیل شباهت با قلب، دلگون نامیده می‌شود.

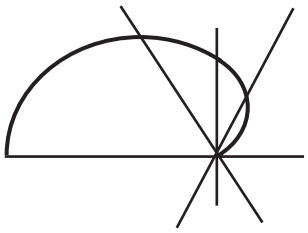
شیب دلگون در مبدأ را می‌توان به این صورت بررسی کرد: فرض می‌کنیم p نقطه‌ای بر منحنی در ربع اول است و p در امتداد منحنی به o نزدیک می‌شود. در این صورت وقتی $p \to o$ شیب $op(=\tan\theta)$ به شیب مماس در o نزدیک می‌شود.

چون وقتی $\theta \to 0$ و $p \to 0$ آن‌گاه:

$$\lim_{\theta \to 0} \tan\theta = 0$$

یعنی شیب مماس بر منحنی در مبدأ صفر است.

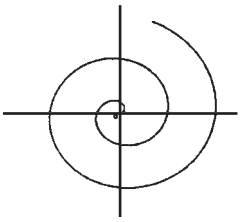
r	θ
۰	۰
a/۲	π/۳
a	π/۲
۳a/۲	۲π/۳
2a	π



شکل ۲۱

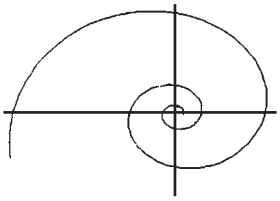
مارپیچ‌ها

مارپیچ ارشمیدسی: معادلهٔ کلی این دسته از منحنی‌ها به‌صورت $r = a\theta$ است.



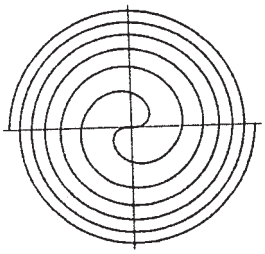
شکل ۲۲

مارپیچ لگاریتمی: معادلهٔ کلی این دسته از منحنی‌ها به صورت $r=e^{n\theta}$ است.



شکل ۲۳

مارپیچ فرما: معادلهٔ این دسته از منحنی‌ها به‌صورت $r^2=n\theta$ است.

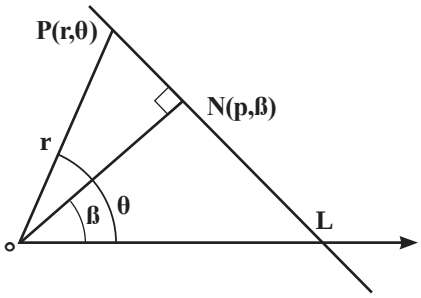


شکل ۲۴

البته مارپیچ‌های دیگری هم وجود دارند که ما در اینجا به ذکر همین سه مورد اکتفا می‌کنیم.

خطوط

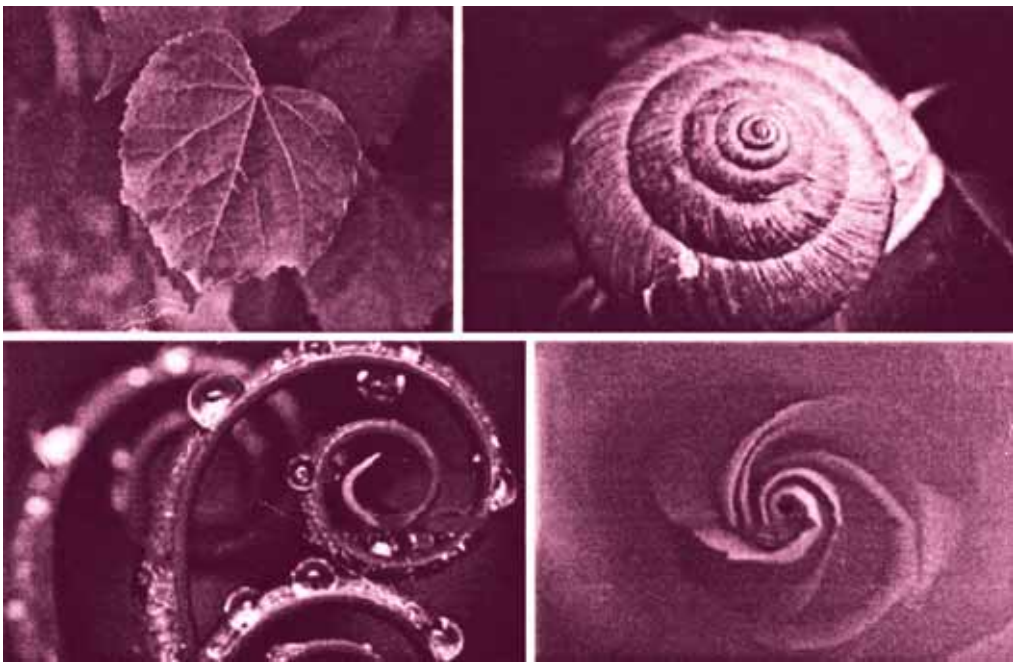
به‌طور کلی معادلهٔ هر خط در مختصات قطبی به‌صورت $r\cos(\theta-\beta) = p$ است که با توجه به شکل ۲۵ رابطه‌ای بدیهی است. فرض کنیم p نقطه‌ای بر خط L باشد، رابطهٔ زیر را می‌توان از مثلث قائم‌الزاویهٔ ONP به‌دست آورد:



$$\cos(\theta-\beta) = p/r$$

شکل ۲۵

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



سهمی‌ها، بیضی‌ها و هذلولی‌ها

معادلـهٔ مقاطـع مخروطـی در مختصات قطبی به‌صورت زیر اسـت (کانون، مبدأ مختصات و هادی مربوطه $x=-k$ است):

الف. $R=ke / (1-e \cos \theta)$

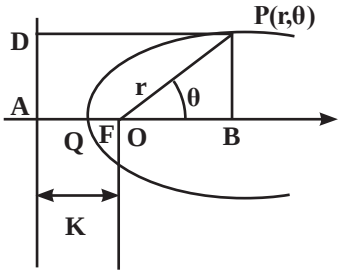
اگر $e=1$ معادلهٔ سهمی خواهد بود.

اگر $e<1$ معادلهٔ بیـضی با خـروج از مرکز e خواهد بود.

اگر $e>1$ معادلهٔ هذلولی با خروج از مرکز e خواهد بود.

برای رسـیدن به معادلهٔ الف شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

بـا آن می‌توان به سـهمی، هذلولی و بیضی یک جا پرداخت.



شکل ۲۶

از خاصیت کانون و هادی استفاده می‌کنیم که:

$$PF=e \times PD$$

اگر مبدأ را کانون F بگیریم، داریم:

$$PF=r$$

حال آنکه:

$$PD=AB=AF+FB=k+r \cos \theta$$

در این صورت به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$r=e (k+r \cos \theta)$$

اگر این معادله را بر حسب r حل کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$r=ke/(1-e \cos \theta)$$

*** منابع**

۱. تومـاس، جرج‌بی و فینی، راس ال. حسـاب دیفرانسـیل و انتگرال. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی.

۲. نامی، حسین و عشقی، علیرضا. ریاضیات عمومی ۱. مدرسان شریف.

3. www.wikipedia.org

4. www. studyblue.com

5. www.math 10.com

6. www.mathcaptain.com

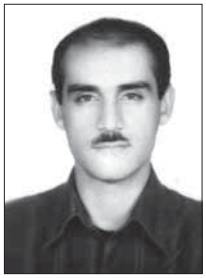
دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

استفاده از مثال‌های نقض در آموزش ریاضی دورهٔ متوسطه

چکیده

ممارست در ایجاد مثال‌ها و مثال‌های نقض می‌تواند خلاقیت و تفکر ریاضی دانش‌آموزان را افزایش دهد. مثال‌های نقض به عدم تأئید، توجیه، بحث، استدلال و تفکر منطقی می‌پردازند که برای پرورش مهارت‌های ریاضی ضروری هستند. با توجه به این مهم، در مقالهٔ حاضر نمونه‌هایی از مثال‌های نقض پرکاربرد را که معمولاً در تدریس ریاضیات متوسطه و در موضوعاتی مانند حد، مشتق و انتگرال مفید واقع می‌شوند، ارائه می‌کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir



گردآوری:
هیثم دیناروند
کارشناس ارشد ریاضی
دبیر ریاضی
شهرستان
شوش دانیال(ع)

مقدمه

پولیا[1] می‌گوید: یافتن یا برخاستن مثال‌های نقض نیازمند خلاقیت و نظم فکری است. اگر مثال بررسی شده یک قانون را اثبات کند، خوانندهٔ آن ممکن است حدس بزند که این قانون لزوماً وجود دارد و ایده‌ای دربارهٔ چگونگی اثبات آن به‌دست آورد؛ یا شاید بتواند در مورد اینکه چه مثالی باید برای رد کردن آن قانون مورد بررسی قرار گیرد، تصمیم بگیرد. **کلیمچاک**[2] و **گروئن والد**[3] نیز می‌گویند: یکی از چنین راهبردهایی می‌تواند به این صورت باشد: «دادن عبارت نادرست به دانش‌آموزان برای توجه بیشتر به مفاهیم، شرایط تئوری، خواص توابع، استدلال و توجیه.»

اهداف استفاده از مثال‌های نقض در ریاضی

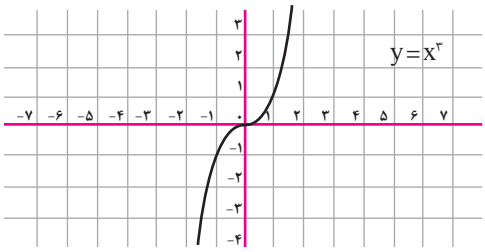
۱. به‌منظور درک عمیق‌تر دانش ریاضی و به‌منظور از بین بردن تصورات غلط؛
۲. به‌منظور افزایش مهارت‌های تفکر در تجزیه و تحلیل، توجیه، مقایسه، بررسی و اثبات؛
۳. به‌منظور ایجاد بینش عمیق‌تر و مفهومی‌تر؛
۴. به‌منظور کاهش یا از بین بردن تصورات غلط؛
۵. برای پیشروی در تفکر منطقی ریاضی؛
۶. به‌منظور افزایش مهارت‌های «تفکر کلی» در ریاضیات.

برای تعمیق بیشتر بحث گزاره‌هایی از مباحث مختلف ریاضی می‌آوریم که به ظاهر و در بسیاری موارد صحیح هستند، اما مثال‌های نقضی برای آن‌ها ارائه شده است:

نظریهٔ توابع

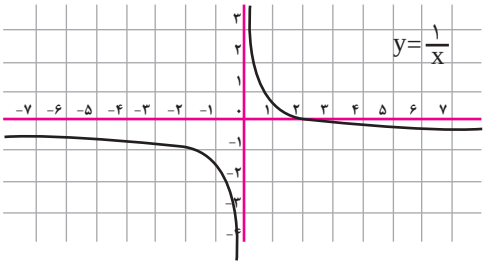
۱. خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، خطی است که تنها در یک نقطه با منحنی مشترک است اما آن را قطع نمی‌کند.

مثال نقض: محور xها، خط مماس بر منحنی $y=x^3$ است، اما منحنی را در مبدأ قطع می‌کند.



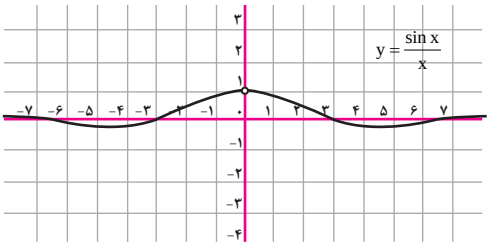
۲. اگر تابع $y=f(x)$ به ازای تمامی xهای مثبت پیوسته و نزولی باشد، در نتیجه این تابع دارای ریشه است.

مثال نقض: تابع $y=\frac{1}{x}$ پیوسته است و به ازای xهای مثبت، نزولی است، اما هیچ ریشه‌ای ندارد.



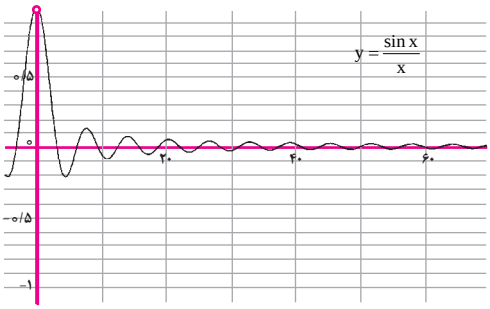
۳. اگر $g(a)=0$ باشد، تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=a$ مجانب قائم دارد.

مثال نقض: تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ در نقطهٔ $x=0$ مجانب قائم ندارد.



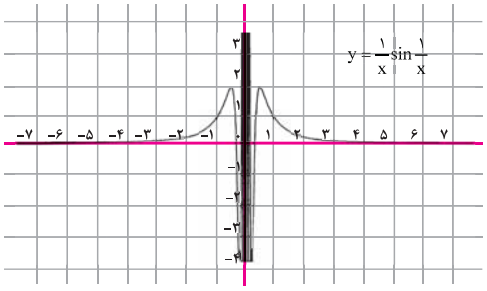
۴. اگر یک خط راست برای یک منحنی مجانب افقی باشد، زمانی که x به بی‌نهایت گرایش دارد و منحنی به آن خط راست نزدیک‌تر می‌شود، آن را قطع نمی‌کند و بر آن مماس نیست.

مثال نقض: زمانی که x به سمت بی‌نهایت گرایش دارد، تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ از بالا و پایین به محور x نزدیک‌تر می‌شود: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. محور x مجانب افقی تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ است، اما نمودار این تابع چندین بار محور x را قطع می‌کند.



۵. خط راست $x=a$ مجانب قائم برای تابع $y=f(x)$ است، اگر چندین مقدار بی‌نهایت برای $f(x)$ در نزدیکی نقطهٔ $x=a$ وجود داشته باشد.

مثال نقض: چندین مقدار بی‌نهایت برای تابع $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ در نزدیکی نقطهٔ $x=0$ وجود دارد، اما خط $x=0$ مجانب قائم این تابع نیست.

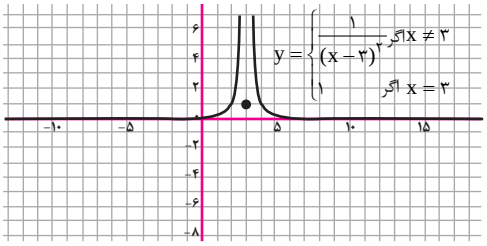


پیوستگی

۶. اگر تابعی در همسایگی معینی از نقطهٔ $x=a$ تعریف شود، به‌طوری‌که در سمت چپ نقطهٔ $x=a$ صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت، یک نقطهٔ ماکزیمم موضعی در نقطهٔ $x=a$ به‌وجود می‌آید.

مثال نقض: تابع
$$y=\begin{cases}\frac{1}{(x-3)^2} & x\neq 3\\ 1 & x=3\end{cases}$$

برای تمامی xها تعریف می‌شود و از چپ از نقطهٔ $x=3$ صعود می‌کند و از راست از نقطهٔ $x=3$ نزول می‌یابد، اما هیچ ماکزیمم موضعی در نقطهٔ $x=3$ ندارد.

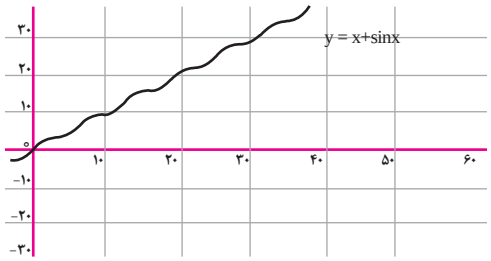


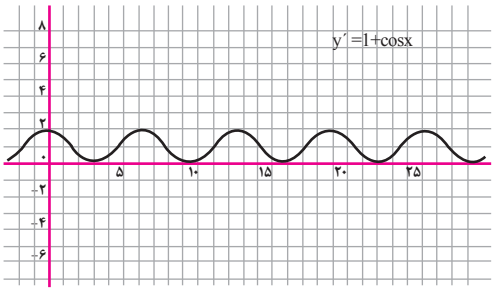
مشتق

۷. اگر یک تابع غیرخطی، مشتق‌پذیر و در فاصلهٔ $(0,\infty)$ یکنوا باشد، مشتق آن نیز در $(0,\infty)$ یکنوا است.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

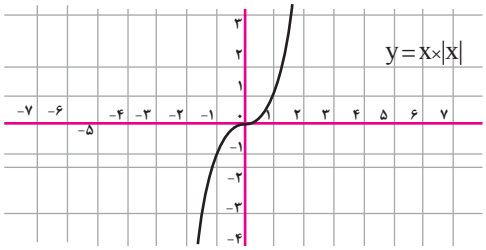
مثال نقض: تابع غیرخطی $f(x)=x+\sin x$ مشتق‌پذیر است و در فاصلهٔ $(0,\infty)$ یکنوا است، اما مشتق آن $f'(x)=1+\cos x$ در $(0,\infty)$ یکنوا نیست.





۸. اگر تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و نقطهٔ $(a,f(a))$ نقطهٔ عطف برای شکل تابع باشد، مشتق دوم تابع در آن نقطه برابر صفر است.

مثال نقض: تابع $y=x\times|x|$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است و نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ عطفی برای آن است. اما مشتق دوم این تابع در نقطهٔ $x=0$ وجود ندارد.



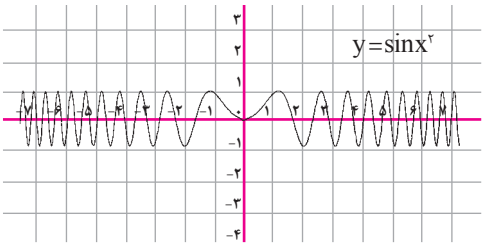
انتگرال

۹. اگر برای هر تابع $f(x)$ داشته باشیم، $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$، بنابراین انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.

مثال نقض: برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. اما انتگرال $\int_a^\infty \frac{1}{x}dx$ واگراست.

۱۰. اگر تابع $y=f(x)$ پیوسته باشد و $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشد: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

مثال نقض: انتگرال $\int_a^\infty \sin x^2 dx$ واگراست، اما $\lim_{x\to\infty}\sin x^2$ موجود نیست



واژه‌نامه

مثال نقض	counter example
منحنی	curve
همگرایی	covergence
پیوسته	continuouse
مشتق‌پذیر	differentiable
نزولی	decreasing
واگرا	divergent
مشتق	derivative

پی‌نوشت‌ها

1. Polya
2. Klymchuk
3. Greunwald

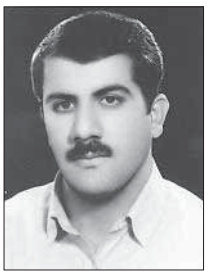
منابع

1. Gruenwald, N., Klymchuk S, Using counter-examples in teaching Calculus. The New Zealand Mathematics Magazine (2003). 40(2), 33-41.
2. klymchuk. S. counter examples in calculus. Auckland university. New Zealand. (2007).
3. Klymchuk, S., Gruenwald, N. Counter-Examples in Calculus as a Pedagogical Strategy. Proceedings of the Third International Conference on Teaching Mathematics at the Undergraduate Level (ICTM-2). Wiley & Sons Inc. (2006).

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اثبات ترکیبیاتی

قضیه‌های ابن‌هیثم (ویلسون) و فرما



دکتر مرتضی بیات*
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان

زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

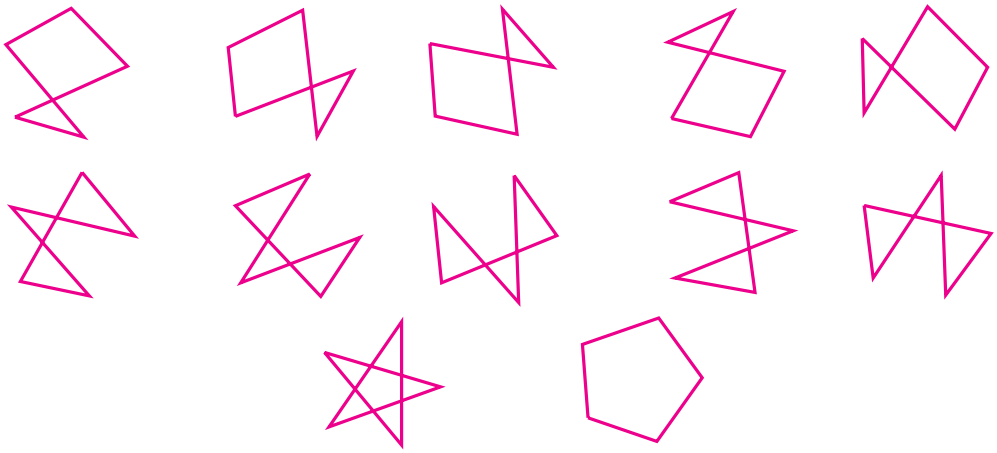
اگرچه از نظر تاریخی، اثبات «قضیهٔ **ویلسون**» به **لایب‌نیتز** (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و یا **لاگرانژ** (۱۸۱۳-۱۷۳۶) نسبت داده شده است، اما اثبات آن توسط **ادوارد وارینگ** در سال ۱۷۷۰ میلادی منتشر شده است. دلیل نام‌گذاری این قضیه این است که قضیه مزبور مجدداً توسط ویلسون، دانشجوی سابق ادوارد وارینگ، کشف شده است.

باید توجه کرد که این قضیه حدود ۶۰۰ سال قبل از ویلسون و نیز ۷۵۰ سال قبل از لایب‌نیتز و لاگرانژ توسط دانشمند جهان اسلام **ابن‌هیثم** کشف شد. ابن‌هیثم در نوشته‌های لاتینی به الهازن مشهور است و در زمینه‌های گوناگون، به‌ویژه نظریهٔ اعداد، مطالب ارزنده دارد (به منابع ۱ تا ۳ مراجعه کنید). در صفحهٔ ۳۲ منبع شمارهٔ ۳ از فهرست منابع مقالهٔ حاضر، این قضیه به اسم قضیهٔ ابن‌هیثم مطرح شده است. پس جا دارد در کتاب‌های ریاضی ایرانی هم به اسم او ذکر شود.

در این مقاله «اثبات ترکیبیاتی» دو قضیهٔ مشهور نظریهٔ اعداد، یعنی قضیه‌های ابن‌هیثم و فرما را به کمک نظریهٔ گراف و شمارش ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که اثبات ترکیبیاتی نوعی از اثبات است که در آن برابری دو عبارت را به کمک شمارش ثابت می‌کنیم. بدین منظور نشان می‌دهیم که هر دو عبارت یک چیز را می‌شمارند. بیشتر کاربردهای این نوع اثبات در مسائل ترکیبیاتی، نظریهٔ اعداد و نظریهٔ احتمالات که با ساختارهای گسسته سرکار دارند، ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ابن‌هیثم: فرض کنید p یک عدد اول باشد، در آن صورت داریم:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$



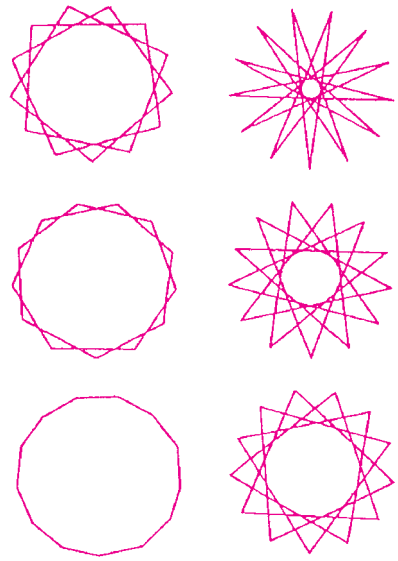
شکل ۱ دوازده ستاره‌گون پنج‌ضلعی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

برهان: اگر $p=2$ باشد، آن‌گاه حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد. گیریم تعداد p نقطه روی محیط دایره واقع باشند، به‌طوری که دایره را به p کمان مساوی تقسیم کنند. چه تعداد چندضلعی با اتصال این نقاط می‌توان تشکیل داد؟ (برخورد یال‌ها ایرادی ندارد). این چندضلعی‌ها را به‌خاطر آنکه از اتصال رئوس یک p ضلعی منتظم محدب شکل گرفته‌اند، p ضلعی‌های ستاره‌گون می‌گوییم. به‌هر حال ملاحظه می‌کنیم که هر p ضلعی را به p طریق می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، همهٔ p ضلعی‌ها به تعداد $P!$ طریق متفاوت قابل رسم هستند. بنابراین $\frac{p!}{2p}$ تا p ضلعی ستاره‌گون متفاوت را به‌دست می‌آوریم.

شکل ۱ دوازده نوع پنج‌ضلعی ستاره‌گون را نشان می‌دهد.

در بین $\frac{p!}{2p}$ تا p ضلعی، دقیقاً $\frac{p-1}{2}$ تا p ضلعی وجود دارد که تحت دوران $\frac{2\pi}{p}$ رادیان تغییر نمی‌کنند. چنین p ضلعی‌های ستاره‌گونی را p ضلعی منتظم می‌گوییم. چون آن‌ها به‌صورت «ستاره» از p نقطه ساخته شده‌اند و زاویهٔ پره‌های آن‌ها $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ برای $0 \le k < \frac{p-1}{2}$ است. در حالت $p=5$ تنها دو پنج ضلعی منتظم وجود دارد، و این در شکل ۱ در ردیف سوم نشان داده شده است. در حالت $p=13$، شش ۱۳ ضلعی منتظم وجود دارد که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ شش ۱۳ضلعی منتظم ستاره‌گون

خاطرنشان می‌کنیم که $\frac{p!}{2p}-\frac{p-1}{2}$ تا p ضلعی ستاره‌گون در دسته‌های p تایی وجود دارند و عناصر هر دسته با دورانی به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{p}$ به‌دست می‌آیند.

اگر $p=5$ باشد، تنها دو دسته از این دسته‌ها وجود دارند (در واقع ردیف اول و دوم شکل ۱ چنین هستند). پس کل دسته‌های p تایی برابر است با:

$$\frac{\frac{p!}{2p}-\frac{p-1}{2}}{p}=\frac{(p-1)!-(p-1)}{2p}.$$

بنابراین: $2p \mid (p-1)!-(p-1)$ و در نتیجه $p \mid (p-1)!+1$ که این حکم را ثابت می‌کند.

قضیهٔ کوچک فرما: فرض کنید a یک عدد صحیح و مثبت و p عددی اول باشد، آن‌گاه داریم:

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

اگر $(a,p)=1$، باشند با توجه به قانون حذف داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

برهان: باید ثابت کنیم $p \mid a^p - a$. به این منظور مهره‌هایی با a رنگ متفاوت اختیار می‌کنیم. با استفاده از آن‌ها رشته‌هایی با p مهره می‌سازیم. تعداد رشته‌های متمایز a^p است. (برای انتخاب هر مهره، p حالت داریم.)

اگر a رشتهٔ تک‌رنگ را کنار بگذاریم، a^p-a رشته باقی می‌ماند. دو انتهای هر رشته را به هم وصل می‌کنیم تا یک گردنبند داشته باشیم. اگر رشته‌ها در یک جایگشت دایره‌ای با هم متفاوت باشند، گردنبندهای ایجاد شدهٔ یکسانی دارند. ولی برای یک رشته، p جایگشت دایره‌ای وجود دارد. پس تعداد گردنبندهای متمایز $\frac{a^p-a}{p}$ است. با توجه به تعبیر آن، این عدد صحیح است؛ یعنی: $p \mid a^p - a$.

منابع

1. G.E. Andrews, *Numbers theory*, Hindustan Publishing Corporation (india), Delhi, 1992.
2. W.S. Golomb, *Combinatorial proof of Fermat's "Little" Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. **63**, No. 10 (Dec., 1956), p. 718.
3. G. Everest and T. Ward, An Introduction to Number Theory, Springer Verlag, 2005.

۴. قضیهٔ ویلسون (زنگ تفریح شمارهٔ ۲۸) (۱۳۸۶). وزارت آموزش‌وپرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. شبکهٔ ملی مدارس ایران (رشد). گزارش خبر. ۱۳۸۶.

۵. حسنی، مهدی (۱۳۹۳). **گزارش مختصری از یک پژوهش تاریخی: ابن‌هیثم و نظریهٔ اعداد**. خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران. شماره پیاپی ۱۳۸.

* Baayyaatt@gmail.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

یافتن مساحت مثلث

با داشتن مختصات رئوس آن

مهدی میرزافام
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهرستان
عجب‌شیر

اشاره

برای حل این مسئله روش‌های متعددی وجود دارد ولی روشی که در این مقاله ارائه می‌شود، حاصل خلاقیت یکی از دانش‌آموزان نگارنده[1] در حل مسئله است. معمولاً در پایان هر کلاس، اینجانب مسائلی را متناسب با درس برای فکر کردن و یافتن راه‌حل خلاقانه برای آن، به دانش‌آموزان می‌دهم. از جمله، وقتی فصل پنجم ریاضی ۱ را شروع کردیم، به صحبت در مورد دستگاه مختصات پرداختم و در پایان جلسه این مسئله را به‌عنوان «فکر کنید» مطرح کردم.

کلیدواژه‌ها: مساحت مثلث، دستگاه مختصات

مقدمه

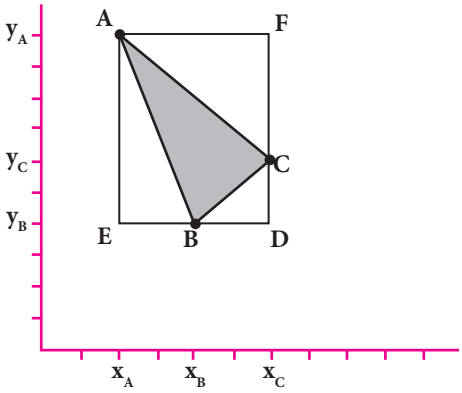
دستگاه مختصات از دو محور اعداد عمودبرهم و دارای واحدهای یکسان تشکیل می‌شود، و محل تقاطع این محورها «مبدأ مختصات» نامیده می‌شود. در دستگاه مختصات، هرگاه $A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$، آن‌گاه x_A را طول نقطهٔ A و y_A را عرض نقطهٔ A می‌نامند.

محاسبهٔ مساحت مثلث

مسئله: با معلوم بودن مختصات سه رأس مثلث ABC مساحت آن را بیابید.

$$C=\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

حل: روش یافتن مساحت به این صورت است که ابتدا شکل مثلث را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، سپس با رسم خطوطی موازی با دو محور x و y، از هر رأس مثلث، مستطیل AFDE را ایجاد می‌نماییم.



دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مشاهده می‌کنیم که هر سه مثلث به‌وجود آمده روی سه ضلع مثلث ABC قائم‌الزاویه‌اند. اکنون به‌راحتی می‌توانیم مساحت مستطیل را محاسبه کنیم، سپس مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویهٔ حادث شده را از آن کم کنیم تا مساحت مثلث موردنظر به‌دست آید.

مساحت مستطیل عبارت است از:

$$S_{AFDE} = (x_C - x_A)(y_A - y_B)$$

مساحت هر یک از سه مثلث مذکور نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} EA = y_A - y_B \\ EB = x_B - x_A \end{cases} \rightarrow S_{AEB} = \frac{۱}{۲}(x_B - x_A)(y_A - y_B)$$

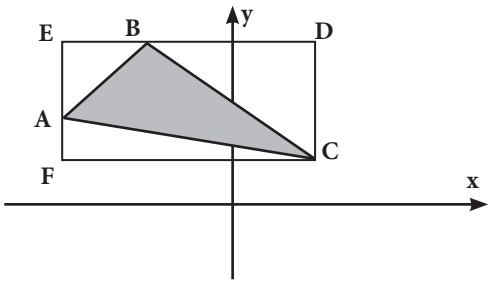
$$\begin{cases} AF = x_C - x_A \\ FC = y_A - y_C \end{cases} \rightarrow S_{AFC} = \frac{۱}{۲}(x_C - x_A)(y_A - y_C)$$

$$\begin{cases} CD = y_C - y_B \\ BD = x_C - x_B \end{cases} \rightarrow S_{BDC} = \frac{۱}{۲}(x_C - x_B)(y_C - y_B)$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABC}=S_{AFDE}-[S_{AEB}+S_{AFC}+S_{BDC}]$$

مثال: اگر مختصات سه رأس مثلث $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مساحت آن را بیابید.



$$\begin{cases} S_{CDEF} = ۳ \times ۶ = ۱۸ \\ S_{AEB} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲ \\ S_{BDC} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳ = ۶ \\ S_{AFC} = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۶ = ۳ \end{cases}$$

$$\rightarrow S_{ABC} = ۱۸ - (۲ + ۶ + ۳) = ۱۸ - ۱۱ = ۷$$

پی‌نوشت

۱. هادی خلیلی‌وند، دانش‌آموز دورهٔ دوم متوسطه دبیرستان نمونه‌دولتی ملاصدرا، عجب‌شیر

۱۰

غلامرضا یاسی‌پور*

رشد آموزش ریاضی

شماره‌های ۲۹ و ۳۰

کلیدواژه‌ها: آناصوفیا کریگوفسکا، هندسه‌های نااقلیدسی، قضیهٔ رول، علی رجایی، تیمور غیاثی‌نژاد، تیوتی، قضیهٔ ویلسون

■ گفته‌اند کتاب‌ها بستان‌های دانشمندان‌اند، اما به‌خاطر تنوع تصویرها و مقاله‌های مجلات می‌توان گفت که بستان مجله‌ها گل‌های رنگارنگ بیشتری دارد، به‌خصوص اگر شمارهٔ ۲۹ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (بهار ۱۳۷۰) را در نظر بگیریم.

در این بستان به سیاحت می‌پردازیم، اما با این نگرانی که بهای مجله از ۱۰۰ ریال به ۲۰۰ ریال رسیده، یعنی دو برابر شده است. با این امید که دیگر در چند ماه آینده بهای مجله دو برابر نشود و مجلهٔ رشد ریاضی باشد نه رشد قیمت آن، قدم در این بستان می‌گذاریم.

فهرست مطالب این شماره چنین است: هشتمین المپیاد ریاضی کشور؛ مرحلهٔ نهایی هشتمین دورهٔ مسابقات؛ نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت؛ آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر؛ تأملی در ساختمان عدد ۱۹۹۰؛ ظهور مسائل جدید در بررسی مسائل هندسه؛ مسائل ویژهٔ دانش‌آموزان؛ خطها و پاره‌خط‌های هم‌زاویه نسبت به دو خط؛ یک مثال نقض بر اول بودن؛ آشنایی با فلسفه‌های ریاضی؛ قضیهٔ مقدار میانگین و یک مثال نقض؛ قاعدهٔ لایب‌نیتس و تعمیم آن؛ ریز مواد هندسهٔ دبیرستان در برنامهٔ جدید؛ قاعدهٔ هوپیتال؛ مسائل شمارهٔ ۲۹؛ حل مسائل شمارهٔ ۲۵؛ پاسخ به نامه‌ها؛ اسامی همکارانی که حل مسائل شمارهٔ ۲۴ را فرستاده‌اند؛ خوانندگانی که مسائل شمارهٔ ۲۵ را برای مجله فرستاده‌اند.

عنوان تمام مقالات این شمارهٔ رشد ریاضی را به این منظور آورده‌ایم که مظنّه‌ای به‌دست خوانندگان تاریخچهٔ حاضر در مورد این مجله داده باشیم. اکنون به پاره‌ای از مقالات مجله نگاهی می‌افکنیم.

در مقالهٔ «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» که دومین قسمت این مقاله است، چنین می‌خوانیم:

«بشر در تلاش خستگی‌ناپذیرش برای شناخت محیط زیست و دستیابی به هدف‌های یاد شده در قسمت اول، ناچار بوده (و هست) که دانش خود را دربارهٔ جهان خارجی (هستی) گسترش دهد. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که چگونه دانش خود را دربارهٔ جهان خارجی به‌دست می‌آوریم. روشن است که برای دستیابی به این هدف حداکثر استفاده را از حواس پنج‌گانه می‌کنیم و برای انجام کارهای روزانه و بهره‌گیری از نعمت‌های زندگی همه متکی به ادراکات هستیم. گرچه این ادراکات اطلاعات زیادی دربارهٔ جهان خارجی به ما می‌دهند، ولی متأسفانه صرف‌نظر از اینکه این اطلاعات غالباً خام و نارسا هستند، در بسیاری از موارد دسترسی به

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

آن‌ها از این طریق غیرممکن است. پدیده‌های اساسی جهان هستی ما به هیچ وجه به‌وسیلهٔ حواس قابل درک نیستند و اگر نیرویی فوق حواس نداشتیم، زندگی بشر شاید هنوز در شرایط چندهزار سال قبل بود و از بسیاری از امکانات و نعمت‌های امروزی محروم بودیم.

برای اینکه ناتوانی حواس پنج‌گانه و قدرت ریاضیات برای ما روشن شود، کافی است به موارد زیر توجه کنیم:

۱. حواس ما قادر نیست در مورد کروی بودن زمین، مدار و حرکت و گردش آن به دور خورشید و به دور محور خودش چیزی به ما بگوید.

۲. حواس ما ناتوان‌تر از آن است که به ما چیزی دربارهٔ ماهیت نیرویی که موجب نگهداری سیارات و گردش آن‌ها به دور خورشید می‌شود بگوید.

۳. حواس ما به هیچ وجه نمی‌تواند در شناخت امواج مغناطیسی که توانایی دریافت برنامه‌های رادیویی و تلویزیونی را از هزارها، بلکه میلیون‌ها فرسنگ [دورتر] به ما می‌دهد و مخابرات تلفنی را ممکن می‌سازد، کوچک‌ترین کمکی به ما بکند. رادیو، تلویزیون و تلفن و... تنها وجود این امواج را اعلام می‌کنند و بس.

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که متأسفانه حواس ما نه تنها محدودیت دارند، بلکه در مواردی گمراه‌کننده نیز و اتکا به آن‌ها (به‌تنهایی) ممکن است فاجعه‌آمیز باشد.

الف. ناتوانی حس بینایی

بین حواس پنج‌گانه شاید مهم‌ترین آن‌ها حس بینایی باشد. در طول سالیان دراز به‌منظور نشان دادن این واقعیت که حس بینایی محدودیت دارد که گاهی نیز فریب‌دهنده است، اشکال هندسی خاصی ترسیم شده است. در حقیقت فیزیک‌دانان

و منجمین قرن نوزدهم به‌دلیل نگرانی در نامطمئن بودن مشاهدات عینی، علاقهٔ خاصی به چشم‌بندی پیدا کردند، تا نشان دهند که مشاهدات عینی فاقد اعتبار لازم هستند و نمی‌توانند مبنای درستی برای قضاوت باشند.»

در مقالهٔ «آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر» که آن هم ادامهٔ مقالهٔ شمارهٔ قبل است، چنین می‌خوانیم:

«در شمارهٔ قبل، تا حدودی با نوشتن الگوریتم‌های ساده آشنا شدید. در این شماره ابتدا چند مثال دیگر از الگوریتم‌سازی می‌آوریم و بعد شما را با نمودار گردشی یا «فلوچارت» که نمایش تصویری الگوریتم است، آشنا خواهیم کرد.

در برخی الگوریتم‌ها مجبوریم فرایند مشخصی را به دفعات زیاد تکرار کنیم. گاهی اوقات تعداد این دفعات، هر چند متغیر، مشخص است و گاهی اصلاً

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

مشخص نیســت. مثال‌های زیر این دو مورد را نشان می‌دهند:

مثال۱. تعداد N فقــره جنس خریده‌ایم. مجموع قیمت‌های آن‌ها چه‌قدر می‌شود؟ (یا، برای ارزشیابی افرادی N عامل در نظر گرفته شــده اســت که به هر عامل امتیازی داده می‌شود. مجموع امتیازات هر فرد چه‌قدر است؟)

مثــال ۲. تعــدادی جنــس خریده‌ایــم. مجموع قیمت‌های آن‌ها را حساب کنید.

در مثال ۱ تعداد اجناس قبل از قیمت آن‌ها داده می‌شود (هرچند ممکن است از یک مسئله به مسئلهٔ دیگــر این تعداد تغییر کند)، ولــی در مثال ۲ تعداد اجناس معلوم نیست و باید چاره‌ای اندیشید.

در اینجا با توجه به اینکه قیمت هر جنس عددی بزرگ‌تر از صفر اســت، می‌توان بعــد از اینکه قیمت آخرین جنس داده شــد، یک عدد، مثلاً صفر یا یک عدد منفی کــه به‌گونه‌ای متمایــز از قیمت اجناس باشــد، داد تا ضمن مقایســهٔ قیمت‌ها با آن، بتوان به این مطلب که کدام داده قیمت نهایی است، پی برد. الگوریتم‌های زیر مربوط به مثال‌های ۱ و ۲ هستند و مطلب بالا را بیشتر روشن می‌کنند.

الگوریتم مثال ۱:

۱. شروع؛
۲. تعــداد اعداد را بخوان و این تعداد را در N قرار بده؛
۳. عدد اول را بخوان و در A قرار بده؛
۴. SUM و ۱ ← I؛
۵. SUM ← SUM + A (یعنــی A را بــا مقــدار قبلی SUM جمع کــرده و مقدار جدید SUM قرار بده)؛
۶. اگر N≤I ، به مرحلهٔ ۹ برو (دقت داشــته باشید که اگر N>I، اجــرای عملیات از مرحلهٔ ۷ ادامه می‌یابد)؛
۷. عدد بعدی را بخوان و در A قرار بده؛
۸. I+۱ ← I و به مرحلهٔ ۵ برگرد؛
۹. SUM مجموع اعداد است؛
۱۰. پایان.»

در مقالهٔ «یــک مثال نقض بر اول بودن a^b-b^a » چنین می‌خوانیم:

«علاقه‌مندان به نظریهٔ اعداد و به‌ویژه دوست‌داران یافتــن فرمولــی برای اعــداد اول همــواره در تلاش هســتند که تابعی مثال بزنند که بــه ازای هر مقدار متغیــر آن، و از مرتبه‌ای به بعــد، اعداد اول را تولید کنــد. چندی قبل یکی از این علاقه‌مندان در نامه‌ای ادعا کرده بودند که عبارت $۲^n-n^۲$ به ازای تمام اعداد طبیعی و فرد n بزرگ‌تر از ۳، اول است. انگیزهٔ ایشان برای این حدس، مشاهدهٔ نمونه‌های زیر بود:

عددی اول است $۲^۵-۵^۲=۷$

عددی اول است $۲^۷-۷^۲=۷۹$

عددی اول است $۲^۹-۹^۲=۴۳۱$

البته، تاکنون سعی فراوانی در این زمینه‌ها شده اســت، گمان می‌رفت که این حدس درســت نباشد. در اینجا، ابتدا نادرســتی این حدس را ثابت می‌کنیم و سپس به مطالعهٔ عبارت کلی a^b-b^a می‌پردازیم.»

از مقــالات خواندنــی دیگــر این شــماره، مقالهٔ «آشــنایی با فلســفه‌های ریاضی» اســت. این مقاله چنین آغاز می‌شود:

«برای کســانی که کارشان آموزش ریاضی است، شاید این کار طبیعی‌ترین کار در دنیا برایشان جلوه کند. ولــی اگر اندکی کارشــان را متوقف و در مورد چیزهایــی که انجــام می‌دهند فکــر کنند که معنی آن‌ها چیســت، این کار اســرارآمیزترین کارها به‌نظر می‌رسد!

چگونه می‌توانیم در مورد چیزهایی سخن بگوییم که هیچ کســی آن‌هــا را ندیده اســت و بهتر از امور روزمــرهٔ زندگــی آن‌هــا را می‌فهمیم؟ چرا هندســهٔ **اقلیدســی** هنــوز هم تدریس می‌شــود، در حالی‌که فیزیک **ارســطویی** از ســال‌ها پیش مرده است؟ در

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ریاضیـــات چه می‌دانیم و آن‌ها را چگونه درمی‌یابیم؟ این‌ها همهٔ ســؤالاتی فلسفی‌اند؛ سؤالاتی کلی که به ماهیــت ریاضیات، بنیــان آن و روش‌های آن مربوط هســتند. در فلســفهٔ ریاضی این‌گونه سؤالات مطرح می‌شوند. گرچه در سال‌های اخیر مطالعهٔ فلسفه‌های ریاضی و صورت‌بندی‌های آن پیشــرفت‌های زیادی کرده اســت، ولی ریشه‌های آن از هزاران سال پیش، حتی از بدو شروع ریاضیات، نشئت می‌گیرد.

وقتــی اقلیدس در کتــاب مبانی خــود نقطه را به‌عنوان «چیــز بدون بُعد» تعریف می‌کند، فلســفهٔ ریاضی شــروع می‌شود. مگر می‌شــود چیزی مادی وجود داشته باشد و فاقد بعد و اندازه باشد؟

پیشرفت حســاب اعداد نیز با آشوب‌های فلسفی توأم بوده است. در حالی‌که مفهوم عدد نمایانگر تعدد اســت، قائل به اعدادی مانند یک و صفر شــدند که آخــری با مفهــوم تعدد بیگانه اســت! پیدایش اعداد منفی نیز آشوب دیگری برپا کرده بود.

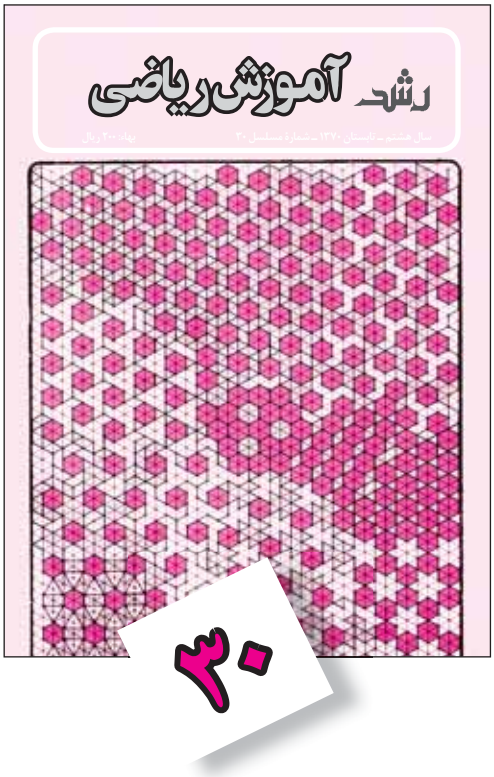
در این مقاله ســعی می‌کنیــم به‌گونه‌ای اجمالی دیدگاه‌های فلســفی معاصر را در باب ریاضیات مورد بررســی و مطالعه قرار دهیم. مشهورترین فلسفه‌های ریاضی مشــتمل بر **افلاطون**‌گرایــی، صورت‌گرایی و ساختارگرایی می‌باشند.»

مجله مانند شــماره‌های قبل با معرفی کتاب‌های ریاضــی و یک آگهی در مورد دورهٔ تابســتانی منطق خاتمه می‌یابد.

در معرفی کتاب‌های رسیده، در معرفی «واژه‌نامهٔ ریاضی» چنین می‌خوانیم:

«واژه‌نامهٔ ریاضی: ناشر، جهاد دانشگاهی صنعتی شریف، ۳۲۰ صفحه، وزیری

کتاب واژه‌نامــهٔ ریاضی برای اولین بار در ســال ۱۳۶۳ و در نتیجــه یــک کار جمعی توســط «گروه ریاضی کاربردی جهاد دانشگاهی صنعتی شریف» به چاپ رسید. این کتاب طی سه بار تجدید چاپ خود، با همان محتوای اولیه در تیراژ وســیع منتشر شد و در اختیار دانشــجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی



قرار گرفت. به‌دنبال اســتقبال گسترده از این کتاب ضرورت تکمیل و رفع نقایص چاپ اولیهٔ آن به خوبی احســاس شد و وظیفهٔ انتشــار مجموعهٔ جدیدی که حتی‌الامــکان تمامی واژه‌های متــداول ریاضی را در برداشته باشــد، در صدر فعالیت‌های انتشاراتی گروه تهیه‌کنندهٔ کتاب جای داده شد.

مجموعهٔ حاضــر که [حاصل] تجدیدنظر کلی بر چاپ اول کتاب است، مشتمل بر ۸۱۰۰ واژهٔ ساده و ترکیبی است و به اضافه شدن واژه‌های جدید، حذف واژه‌های غیرریاضی، و تهیهٔ شــکل‌های موردنیاز، از غنــای خاصی برخوردار می‌باشــد. در این مجموعه، تعاریف، صورت قضایا و مسائل مهم ریاضی نیز درج شــده‌اند که خود اعتبار ویژه‌ای به آن بخشیده است. واژه‌هــای این کتاب از منابع متعدد گردآوری شــده و معادل‌های فارســی آن‌ها نیز تا حدممکن از کتب ترجمه شدهٔ معتبر فراهم آمده‌اند.

با این امید کــه بهره‌گیری از کتاب حاضر بتواند کمک بسیار مؤثری در برداشت دانشجویان و دبیران از منابع ریاضی به زبان انگلیسی باشد.»

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

روح‌الله حسنی*
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر دبیرستان‌های شیراز

راز کارت‌های سن و سال*

اشاره

در این مقاله تلاش شـده از یک بازی (شـعبده) ریاضی رمزگشایی شود. ابتدا با خود بازی آشنا می‌شویم و سپس سعی می‌کنیم مرحله‌به‌مرحله به اسرار آن پی ببریم. در نهایت، گشایش رموز این بازی، ما را به تعمیم این بازی و اثبات ریاضی درستی این تعمیم رهنمون می‌شود.

مقدمه

داستان از اینجا آغاز شد که روزی دانش‌آموزی هفت کارت را به من نشان داد که روی هر کدام از آن‌ها تعداد زیادی عدد طبیعی نوشته شده بود. او از من خواست اگر عدد سنّم را روی هر کدام از این کارت‌ها دیدم، آن کارت را جدا کنم و به او بدهم. من هم همین کار را کردم و سه کارت را که عدد سنم روی آن‌ها بود، به وی دادم. دانش‌آموز به سرعت نگاهی به کارت‌ها کرد و سنم را به من گفت! با تعجب کارت‌ها را از او گرفتم و به آن‌ها نگاه کردم. اعداد روی کارت‌ها به‌صورت زیر بود:

۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	**۳۵**
۳۷	۳۹	۴۱	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹	۵۱	۵۳
۵۵	۵۷	۵۹	۶۱	۶۳	۶۵	۶۷	۶۹	۷۱
۷۳	۷۵	۷۷	۷۹	۸۱	۸۳	۸۵	۸۷	۸۹
۹۱	۹۳	۹۵	۹۷	۹۹	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۵	۱۰۷

$\bar{۰}$

۴	۵	۶	۷	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۶	۳۷
۳۸	۳۹	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۲	۵۳	۵۴
۵۵	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳		

$\bar{۲}$

۲	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۴	۱۵	۱۸
۱۹	۲۲	۲۳	**۲۶**	۲۷	۳۰	۳۱	۳۴	**۳۵**
۳۸	۳۹	۴۲	۴۳	۴۶	۴۷	۵۰	۵۱	۵۴
۵۵	۵۸	۵۹	۶۲	۶۳	۶۶	۶۷	۷۰	۷۱
۷۴	۷۵	۷۸	۷۹	۸۲	۸۳	۸۶	۸۷	۹۰
۹۱	۹۴	۹۵	۹۸	۹۹	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۶	۱۰۷

$\bar{۱}$

۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۴
۲۵	**۲۶**	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۰	۴۱
۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷		

$\bar{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	**۲۶**	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳
۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵						

$\overline{۴}$

۳۲	۳۳	۳۴	**۳۵**	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۹۶	۹۲	۹۳	۹۴
۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳
۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷					

$\overline{۵}$

۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱
۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹
۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	

$\overline{۶}$

راز اول

در نگاه اول چیزی که به ذهن خطور می‌کند، این است که سن من تنها عدد مشترک میان آن هفت کارت جدا شده است. پس شاید دانش‌آموز با دیدن این کارت‌ها و یافتن اشتراک آن‌ها به سن من پی برده است. خب این فرض، هم صحیح است و هم ناصحیح. اگر ما به ترتیب از پایین به بالا مجموعه‌ها (کارت‌ها) را $\overline{۶}$، $\overline{۵}$، $\overline{۴}$، $\overline{۳}$، $\overline{۲}$، $\overline{۱}$، $\overline{۰}$ بنامیم، با بررسی این مجموعه اعداد مشخص می‌شود که برای مثال، عدد ۳۵ تنها عضو مجموعه‌های $\overline{۵}$، $\overline{۱}$ و $\overline{۰}$ است. اما اینکه در نظر اول عضو مشترک این سه مجموعه دیده شود، دور از ذهن است. پس راز دیگری در میان است.

راز دوم

کمی دقیق‌تر که به این کارت‌ها نگاه کنیم، درمی‌یابیم عددی که در تعداد مشخصی از آن‌ها تکرار شده، مجموع عضو ابتدای آن مجموعه‌هاست. برای مثال، عدد ۲۶ که تنها در مجموعه‌های $\overline{۴}$، $\overline{۳}$ و $\overline{۱}$ تکرار شده، مجموع ۱۶، ۸ و ۲ است که این‌ها به ترتیب عضو ابتدای مجموعه‌های مذکورند. (می‌توان با عددهای دیگر نیز درستی این مطلب را بررسی کرد.)

راز سوم

مطلب دیگری که کم‌کم خود را آشکار می‌کند این است که عضو آغازین هر مجموعه، توانی حسابی[1] از ۲ است. برای مثال، عضو ابتدای مجموعهٔ $\overline{۰}$ عدد ۴ و مجموعه $\overline{۰}$ عدد ۱ است. آشکار شدن رازهای دوم و سوم این موضوع را مطرح می‌کند که هر عدد طبیعی از ۷ تا ۱۰۷ را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. به این معنا که در نوشتن هر عدد به‌صورت مجموعی از توان‌های ۲، هر توانی از ۲ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود. آیا این مطلب برای هر عدد طبیعی نیز برقرار است؟

به این معنا که آیا هر عدد طبیعی را می‌شود به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت؟ باید درستی این حدس را ثابت کنیم.

راز چهارم

چه رابطه‌ای بین اعضای هر کدام از این مجموعه‌ها برقرار است؟ مجموعهٔ $\overline{۰}$ متشکل از تمام اعداد فرد بین ۱ و ۱۰۷ است. اما مجموعهٔ $\overline{۱}$ از ۲ شروع می‌شود و دو عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصلهٔ ۴ از عدد ۶ شروع می‌شود و دوباره دو عدد متوالی می‌آید و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهد تا مجموعه را پر کند. مجموعهٔ $\overline{۲}$ از ۴ شروع می‌شود و چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصلهٔ ۸ از عدد ۱۲ شروع شده و باز چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد و به‌همین منوال تا مجموعه کامل شود. می‌توان حدس زد مجموعه‌های دیگر هم به‌همین صورت تشکیل شده‌اند.

اندکی تأمل بیشتر در روند شکل‌گیری این مجموعه‌ها نشان می‌دهد که هر یک از این مجموعه‌ها، از دسته‌هایی تشکیل شده‌اند که عددهای هر دسته، در تقسیم بر عضو ابتدای

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مجموعه، دارای «جزء صحیح»[2] یکسان هستند. جالب‌تر آنکه این جزء صحیح عددی فرد است. به‌عنوان نمونه، در مجموعهٔ ۳ که از ۸ آغاز می‌شود، دستهٔ اول اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۱ هستند، دستهٔ دوم نیز شامل اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۳ هستند و الی آخر.

حالا که روند تولید هر کدام از این مجموعه‌ها آشکار شد، می‌توان دید که به این روش می‌شود اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۲۷ را نیز در این ۷ مجموعه گنجاند. پس اینکه روی این کارت‌ها تا عدد ۱۰۷ نوشته شده، صرفاً به‌خاطر این بوده که طراح، بازی را برای افراد کمتر از ۱۰۷ سال طراحی کرده است.

اکنون که پرده‌ها یک‌به‌یک کنار رفتند و شعبده آشکار شد، بهتر است که صورت دقیق‌تر و ریاضی این بازی را در قالب قضیهٔ زیر بیان کنیم.

قضیه

فرض کنیم $S=\{1,2,3,...,127\}$؛ برای هر $i\in\{0,1,2,...,6\}$، مجموعهٔ A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{x\in S \mid \left[\frac{x}{2^i}\right] \text{ عددی فرد باشد}\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

الف. $\bigcup_{i=0}^{6} A_i = S$

ب. برای هر $i\in\{0,1,2,...,6\}$، $2^i\in A_i$ و اگر $y\in A_i$، آنگاه $2^i\le y$.

ج. اگر $y\in S$، آنگاه k عدد $i_1,i_2,...,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,...,6\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $i_k<i_{k-1}<...<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+...+2^{i_2}+2^{i_1}$.

د. اگر $y\in S$ و k عدد $i_1,i_2,...,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,...,6\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که: $i_k<i_{k-1}<...<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+...+2^{i_2}+2^{i_1}$.

در این صورت، اگر $j\in\{1,2,...,k\}$، آنگاه $y\in A_{i_j}$ و همچنین اگر $j\in\{0,1,2,...,6\}$ و $j\notin\{i_k,i_{k-1},...,i_2,i_1\}$، آنگاه $y\notin A_j$.

این قضیه در حقیقت حالت خاصی از یک قضیه کلی‌تر است که تعمیم این بازی برای مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از هر توان دلخواهی از ۲ محسوب می‌شود. به‌جای اثبات این قضیه، شکل تعمیم یافتهٔ آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

تعمیم قضیه

فرض کنیم $n\in N$ و $S=\{1,2,3,...,2^n-1\}$؛ برای هر $i\in\{0,1,2,...,n-1\}$، مجموعهٔ A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{x\in S \mid \left[\frac{x}{2^i}\right] \text{ عددی فرد باشد}\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

الف. $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S$

ب. برای هر $i\in\{0,1,2,...,n-1\}$، $2^i\in A_i$ و اگر $y\in A_i$، آنگاه $2^i\le y$.

ج. اگر $y\in S$، آنگاه k عدد $i_1,i_2,...,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,...,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $i_k<i_{k-1}<...<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+...+2^{i_2}+2^{i_1}$.

د. فرض کنیم $y\in S$ و k عدد $i_1,i_2,...,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,...,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که: $i_k<i_{k-1}<...<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+...+2^{i_2}+2^{i_1}$.

در این صورت، اگر $j\in\{1,2,...,k\}$، آنگاه $y\in A_{i_j}$ و همچنین اگر $j\in\{0,1,2,...,n-1\}$ و $j\notin\{i_k,i_{k-1},...,i_2,i_1\}$، آنگاه $y\notin A_j$.

اثبات

الف. بدیهی است که: $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S$. اکنون فرض می‌کنیم: $x\in S$، آنگاه بنا به خاصیت ارشمیدسی $k\in N$ و $0\le k$ به‌گونه‌ای موجود است که: $2^k\le x<2^{k+1}$. پس: $\left[\frac{x}{2^k}\right]=1$. بنابراین $x\in A_k$ که این خود نشان می‌دهد که: $x\in\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$. لذا: $S\subset\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

ب. چون $\left[\frac{2^i}{2^i}\right]=1$، پس $2^i\in A_i$. اکنون فرض

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

می‌کنیم $y\in A_i$، پس $\left[\frac{y}{2^i}\right]$ عددی فرد است. بنابراین $m\in N$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\left[\frac{y}{2^i}\right]=2m-1$، لذا $1\le 2m-1<\frac{y}{2^i}$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $2^i\le y$.

ج. فرض کنیم: $y\in S$، در این صورت $0\le i_1<n$ وجود دارد، به‌طوری که: $2^{i_1}\le y<2^{i_1}+1$. اکنون قرار می‌دهیم: $y_1=y-2^{i_1}$. با استدلالی مشابه، $0\le i_2<i_1$ وجود دارد، به‌طوری که: $2^{i_2}\le y_1<2^{i_2}+1$. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از چند مرحله $y_k=0$ یا: $y_k=1$. اگر: $y_k=0$ که اثبات تمام است. در غیر این صورت: $y_k=1=2^0$، پس $i_{k+1}=0$. بنابراین:

$i_k<i_{k-1}<\ldots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\ldots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

د. فرض کنیم: $y\in S$ و k عدد $i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$i_k<i_{k-1}<\ldots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\ldots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

همچنین، فرض کنیم: $j\in\{1,2,\ldots,k\}$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^{i_j}}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\ldots+2^{i_{j-1}}+2^{i_j}+2^{i_{j+1}}+\ldots+2^{i_k}}{2^{i_j}}$$
$$=2^{i_1-i_j}+\ldots+2^{i_{j-1}-i_j}+1+\frac{1}{2^{i_j-i_{j+1}}}+\ldots+\frac{1}{2^{i_j-i_k}}$$

بنابراین: $\left[\frac{y}{2^{i_j}}\right]=2^{i_1-i_j}+\ldots+2^{i_{j-1}-i_j}+1$ که عددی فرد است. پس: $y\in A_{i_j}$.

حال فرض می‌کنیم $j\notin\{i_k,i_{k-1},\ldots,i_2,i_1\}$ و $j\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. در این صورت سه حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: $0<j\le i_k$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\ldots+2^{i_k}}{2^j}=2^{i_1-j}+\ldots+2^{i_k-j}$$

که عددی صحیح و زوج است. بنابراین $\left[\frac{y}{2^j}\right]$ عددی زوج است و: $y\notin A_j$.

حالت دوم: عددی مانند $m\in\{0,1,\ldots,k\}$ وجود داشته باشد که: $i_m<j<i_{m-1}$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\ldots+2^{i_{m-1}}+2^{i_m}+\ldots+2^{i_k}}{2^j}$$
$$=2^{i_1-j}+\ldots+2^{i_{m-1}-j}+\frac{1}{2^{j-i_m}}+\ldots+\frac{1}{2^{j-i_k}}$$

پس $\left[\frac{y}{2^{i_j}}\right]=2^{i_1-j}+\ldots+2^{i_{m-1}-j}$ عددی زوج است. بنابراین: $y\notin A_j$.

حالت سوم: $i_1<j\le n-1$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\ldots+2^{i_k}}{2^j}=\frac{1}{2^{j-i_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{j-i_k}}$$

که عددی بین ۰ و ۱ است. بنابراین: $\left[\frac{y}{2^j}\right]=0$، پس: $y\notin A_j$. ■

مقاله را با طرح چند تمرین برای خوانندگان به پایان می‌رسانیم.

تمرین

۱. در حین اثبات این قضیه به‌طور ضمنی نشان دادیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد p نوشت که در آن، p عددی اول و مخالف ۲ است؟ چرا؟

۲. هر عدد طبیعی را به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی چه اعدادی می‌توان نوشت؟

۳. فرض کنیم: $n\in N$ و $S=\{1,2,3,\ldots,2^n-1\}$ و برای هر $i\in\{1,2,\ldots,n\}$، مجموعهٔ B_i را زیرمجموعه‌ای از S تعریف می‌کنیم که اعضایش در نمایش بر مبنای ۲ دارای رقم iام یک باشند. نشان دهید: $B_i=A_{i+1}$

۴. با استفاده از تمرین ۴، این بازی را با استفاده از مبنای ۲ تفسیر کنید.

۵. در قضیهٔ اثبات شده، تعداد عضوهای $A_i\cap A_j$ را که در آن داشته باشیم: $i,j\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ بشمارید.

۶. فرض کنیم: $i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},i_k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. در این صورت $\bigcap_{i=1}^{k}A_{i_j}$ دارای چند عضو است؟

۷. الگوریتمی بنویسید که $n\in N$ را بگیرد و n مجموعه را که شرایط قضیه را دارند، چاپ کند.

پی‌نوشت‌ها

* این مقاله حاصل تلاش بازی‌گوشانهٔ نگارنده در کشف و گسترش قواعد یک بازی است. لذا برای نگارش آن از منبع و مرجعی خاص استفاده نشده است.

۱. اجتماع مجموعه اعداد طبیعی و مجموعهٔ تک‌عضوی صفر را «مجموعه اعداد حسابی» گوییم.

۲. بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی هر عدد حقیقی را جزء صحیح گوییم. جزء صحیح عدد حقیقی x را با نماد [x] نمایش می‌دهیم.

*Rhasanik@yahoo.com

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی

● **لطیفهٔ اول:** این حکایتی است که دربارهٔ یکی از ریاضی‌دانان شوروی سابق نقل شده است: این ریاضی‌دان چند روز پیاپی سمیناری تحت عنوان «کاربرد ریاضیات در مسائل آیرودینامیک» در یک دانشگاه داشت. بین حاضران در سمینار، دو نفر که لباس نظامی‌شان نشان می‌داد باید از مهندسان نیروی هوایی باشند، توجه او را جلب کردند، ولی آن‌ها در هیچ یک از بحث‌ها شرکت نمی‌کردند. روز آخر سمینار آن دو نفر پیش استاد آمدند و یکی از آن‌ها گفت: «ببخشید؛ ما یک مسئله در مورد طراحی بال‌های هواپیمای جنگی داریم که به حل یک دستگاه معادلات به این صورت منجر شده است. با رسیدن به جواب‌های این دستگاه می‌توانیم اندازه‌هایی را برای بال‌های هواپیما به‌دست آوریم که به ازای مقادیر کمتر از آن‌ها، بال‌ها نوسان می‌کنند و در آن اندازه‌ها پرواز یکنواخت می‌شود. ولی در حل این دستگاه عاجز شده‌ایم و می‌خواهیم از شما کمک بگیریم.»

استاد برگه را از آن‌ها گرفت و نگاهی به معادله‌ها انداخت و کمی فکر کرد. سپس در حالی که برگه را به آن‌ها پس می‌داد، گفت: «بال‌ها را بزرگ‌تر کنید!»

● **لطیفهٔ دوم:** این هم حکایتی است خواندنی دربارهٔ جان فن نویمان (۱۹۵۷ ـ ۱۹۰۳)، استاد و مبتکر علم «سیبرنتیک» که در شمارهٔ ۷۶ برهان هم دربارهٔ او در ایستگاه اندیشهٔ دوم لطیفه‌ای داشتیم. ابتدا مسئلهٔ زیر را بخوانید:

مسئله: دو قطار در فاصلهٔ ۲۰۰ مایلی از هم هستند و هر دو با سرعت برابر ۵۰ مایل در ساعت به هم نزدیک می‌شوند طوری که سرانجام با هم تصادف خواهند کرد. پرنده‌ای با سرعت ثابت ۷۵ مایل در ساعت مکرراً از دماغهٔ یکی از دو قطار می‌پرد و خود را به دماغهٔ قطار دیگر می‌رساند و دوباره پرواز می‌کند و به قطار اول می‌رسد و... وقتی که تصادف اتفاق می‌افتد پرنده نیز بین دو قطار له می‌شود! مجموع مسافتی که این پرنده تا لحظهٔ مرگ طی کرده چند مایل است؟

برای حل این مسئله دو روش، یکی دشوار و دیگری آسان وجود دارد. روش دشوار آن است که با توجه به سرعت پرنده و مسافت بین دو قطار، فواصلی را که پرنده در هر پرواز طی می‌کند، محاسبه و با هم جمع کنیم. چون تعداد پروازهای پرنده نامتناهی است، پس به یک سریِ نامتناهی می‌رسیم و با تعیین حد مجموع جملات این سری، مسافت را به دست آوریم.

اما روش آسان این است که اصلاً کاری به

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

مسافت‌های جزئی که پرنده طی می‌کند، نداشته باشیم و زمان پرواز را مدنظر قرار دهیم. چون دو قطار در فاصلهٔ ۲۰۰ مایلی هم هستند، پس هر کدام باید ۱۰۰ مایل مسافت را طی کنند تا به هم بخورند. و چون سرعت آن‌ها ۵۰ مایل در ساعت است، پس قبل از تصادف، ۲ ساعت حرکت می‌کنند و این همان مدت پرواز پرنده است. و چون پرنده با سرعت ۷۵ مایل در ساعت پرواز می‌کند، بنابراین ۱۵۰ مایل پرواز می‌کند!

روزی یکی از دانشجویان همین مسئله را به نویمان داد. نویمان نگاهی به آن انداخت و بلافاصله گفت: «۱۵۰ مایل».

دانشجو گفت: «ولی استاد خیلی از کسانی که قبل از شما این مسئله را به آن‌ها دادیم، سعی کرده بودند آن را به کمک تشکیل یک سری نامتناهی حل کنند و خیلی طول کشید تا به همین جواب برسند.»

نویمان سری تکان داد و گفت: «تعجبی ندارد، خب من هم همین کار را کردم!»

● **لطیفهٔ سوم:** این هم یک شوخی با استادان آمار و احتمال: روزی یک تولیدکنندهٔ کفش به دوستش که استاد آمار و احتمال بود گفت: «من یک مشکل دارم: نمی‌دانم چه اندازه (سایز) کفشی را باید بیشتر تولید کنم.»

استاد گفت: «این اتفاقاً یک مسئلهٔ آماری است! برمی‌گردد به توزیع **گاوس**، فرمولش هم این است.»

دوستش گفت: «خُب این علامت چیست؟»

استاد گفت: «این عدد پی است.» او باز پرسید: «خُب پی چی‌یه؟»

استاد گفت: «پی نسبت محیط دایره به قطر آن است.»

و دوستش گفت: «ولی کفش‌های من که دایره‌ای‌شکل نیستند!»

● **لطیفهٔ چهارم:** باز هم شوخی با آماردانان! یک استاد آمار و احتمال عادت داشت که همیشه موقع رانندگی، قبل از رسیدن به هر چهارراه ناگهان شتاب حرکت خود را زیاد کند و با سرعت برق از چهارراه رد شود. یک روز دوستش که کنار دست او نشسته بود، با مشاهدهٔ این رفتار از او پرسید: «چرا این کار را می‌کنی؟»

استاد گفت: «بر اساس آمار، بیشترین تعداد تصادفات، سر چهارراه‌ها اتفاق می‌افتند. پس محتمل‌ترین جا برای تصادف سر چهارراه‌هاست. بنابراین باید کمترین زمان را برای حضور در این نقاط صرف کرد!»

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

غلامرضا یاسی‌پور

هوش مصنوعی

هوش مصنوعی[1]
نویسندگان: هنری برایتون و هوارد سلینا[2]
مترجم: ابراهیم اسکافی
ناشر: پردیس دانش
بها: ۵۵۰۰ تومان

«هوش مصنوعی» کتابی است که مطالعهٔ آن برای هر دانش‌آموز و هر دبیر ریاضی واجب است، چرا که خواننده را با اهمیت هوش مصنوعی و چگونگی اختراع و کاربرد آن آشنا می‌کند.

در کتاب در مورد کاربرد این علم چنین می‌خوانیم: «سیستم‌های رایانه‌ای را در فرودگاه‌ها نصب می‌کنند تا بار مسافران را برای تشخیص مواد منفجره وارسی کنند. اتکای تجهیزات نظامی بر پژوهش‌های ماشین‌های هوشمند روزبه‌روز افزایش می‌یابد. امروزه موشک‌ها به کمک سامانه‌های بینایی ماشینی، اهداف خود را پیدا می‌کنند.»

اصل مقدس هوش مصنوعی این است که بشر را همچون ماشین بشناسیم. هوش مصنوعی در شکل ضعیف خود به این مسئله می‌پردازد که ما تا چه حد می‌توانیم سازوکارهای زیربنایی رفتار انسان و حیوان را توضیح بدهیم. هوش مصنوعی قوی به مراتب جاه‌طلب‌تر است و اهدافش ممکن است از درک ما فراتر رود.

کتاب در مورد علومی که در ساختن هوش مصنوعی به‌کار می‌روند، چنین می‌گوید: «هدف هوش مصنوعی که ساختن ماشین‌هاست، مبتنی بر منطق، ریاضیات و علم رایانه است.»

مطلب دیگر کتاب در مورد هوش مصنوعی و روان‌شناسی، و روان‌شناسی شناختی است و مسئله مهم دیگر، در میان تعجب خواننده، در مورد هوش مصنوعی و فلسفه است. کتاب در این مورد می‌نویسد: «در پیمایشی از پژوهشگران هوش مصنوعی پرسیده شد که چه رشته‌ای بیش از همه به این رشته نزدیک است. بیشترین پاسخ «فلسفه» بود.

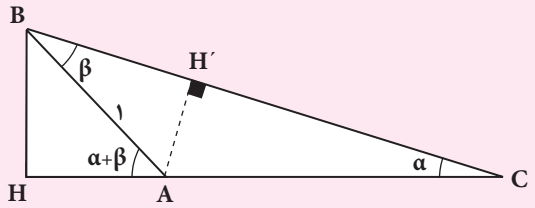
در فصل «محاسبه چیست؟» می‌خوانیم: «مفهوم محاسبه در قلب شناخت‌گرایی جای دارد؛ هرچند که معروف به آن است که به سختی می‌توان آن را تعریف کرد. محاسبه را به سادگی می‌توان این‌طور معنی کرد: نوعی از محاسبات که رایانه‌ها می‌توانند انجام دهند.»

با وجود فقدان تعریف

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

هوشنگ شرقی

یک اثبات ساده برای دستورهای محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$



$$\Delta ABH : AB = 1, \sin(\alpha+\beta) = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \boxed{BH = \sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Delta ABH' : \sin\beta = \frac{AH'}{AB} = AH', \boxed{\cos\beta = BH'}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AH}{AB} \overset{=AH}{\Rightarrow} \boxed{AH = \cos(\alpha+\beta)}$$

$$\cot g\alpha = \frac{CH'}{AH'} \Rightarrow \boxed{CH' = \sin\beta.\cot g\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{CH'}{AC} \Rightarrow AC = \frac{\sin\beta.\cot g\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$$

$$BC = BH' + CH' = \boxed{\sin\beta.\cot g\alpha + \cos\beta}$$

$$CH = AC + AH = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cot g\alpha + \cos\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta.\cot g\alpha + \cos\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta.\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha.\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}(\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha.\cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}$$

دقیق، « نظریهٔ محاسبه» شاخهٔ توسعه‌یافته و استواری از علم رایانه است که به شدت مفهوم ماشین تورینگ را تداعی می‌کند. **آلن تورینگ**، ریاضی‌دان انگلیسی (۵۴-۱۹۱۲)، پیشگامی اثرگذار در تاریخ هوش مصنوعی، علم رایانه و منطق بود.»

آن‌وقت به معرفی ماشین تورینگ می‌پردازد: «یکی از موفقیت‌های تورینگ پیشنهاد ابزار محاسبه‌ای مفهومی بود. ماشین تورینگ، ابزاری انتزاعی ساده‌ای است؛ بخشی از آن نوار طولانی بی‌انتهایی است که روی آن می‌توان نمادها را نوشت. ماشین تورینگ با استفاده از ماشین انتزاعی‌اش نتایجی بنیادی را اثبات کرد که برای تمام ابزارهای محاسباتی شناخته شده صدق می‌کنند. تورینگ به این شاهکار بزرگ زمانی دست یافت که هنوز رایانه‌ها به این شکلی که امروز می‌شناسیم، شناخته نشده بودند.»

از بخش‌های مهم دیگر کتاب، بخش‌های پرسش ماشین تورینگ، مسئلهٔ فکر کردن، **چامسکی** و ورودی و خروجی زبان، و... است. مطالب کتاب مفصل‌تر و کلیدی‌تر از آن است که بتوان در این مختصر به آن‌ها حتی اشاره کرد. بنابراین بهترین کار برای علاقه‌مند به این رشتهٔ بسیار مهم ریاضی، رایانه، منطق و فلسفه، مطالعهٔ خود کتاب است.

پی‌نوشت‌ها

1. Introducting Artificial Intelligence
2. Henry Brighton and Howard Selina

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

احسان یارمحمدی

Parabola Mathematics Magazine

- **اسم مجله:** Parabola Mathematics Magazine
- **تارنما:** http://www.parabola.unsw.edu.au
- **ناشر:** University of New South Wales
- **مکان انتشار:** استرالیا
- **زبان:** انگلیسی
- **سال آغاز انتشار:** ۱۹۶۴
- **تعداد چاپ در هر دوره:** سه شماره
- **نشانی:**

The Editor, Parabola
School of Mathematics
University Of New South Wales
Post Office Box 1
Kensington, NSW 2033
Australia

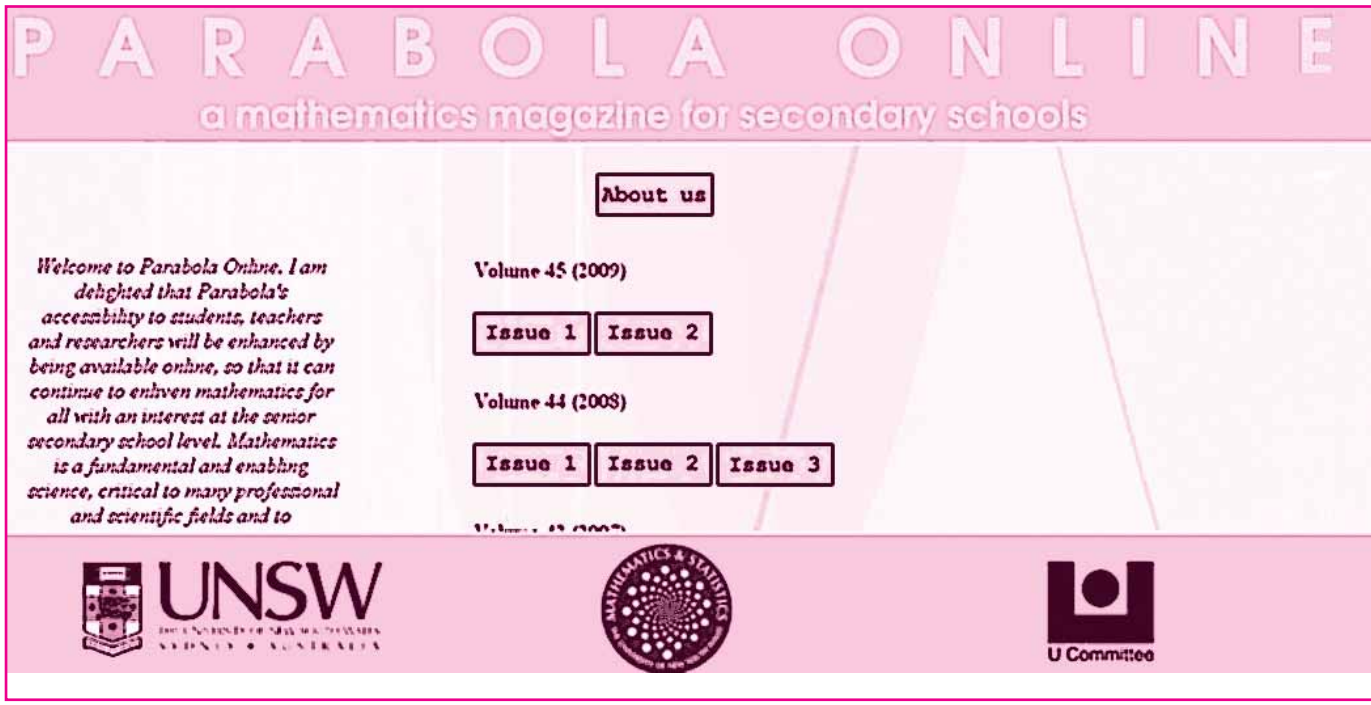
پروفسور جورج ژیکِرز

مجلهٔ ریاضی «Parabola Mathematics Magazine» در سال ۱۹۶۴ به‌وسیلهٔ پروفسور **جورج ژیکِرز**[1] بنیان‌گذاری شد. این مجله به چاپ مقالات ریاضی دورهٔ پیش از ورود به دانشگاه (در ایران دورهٔ دوم آموزش متوسطه) می‌پردازد. علاقه‌مندان به آن مجله می‌توانند فایل «پی‌دی‌اف» متناظر با مقالات مندرج در مجله را از طریق تارنمای آن دریافت دارند. مقالات چاپ شده در شماره‌های گوناگون این مجله، از تکثر موضوع و تنوع ساختار بهره‌مند هستند و شامل مباحثی در نظریهٔ اعداد[2]، هندسه[3]، نظریهٔ گراف[4]، تاریخ ریاضیات[5]، المپیادهای ریاضی و... می‌شوند.

از ویژگی‌های بارز این مجله وجود ستونی در آن با عنوان «Profile of Mathematician» است که به معرفی ریاضی‌دانان معاصر و دستاوردهای آنان در عالم ریاضیات می‌پردازد. مناسب است که دست‌اندرکاران مجلات ریاضی کشور ما نیز با الگو قرار دادن این ستون، به معرفی ریاضی‌دانان و کارهای ایشان بپردازند تا دانش‌آموزان با سرمشق قرار دادن آن‌ها و عملکرد مثبت و پویای‌شان، بتوانند به نتایج متعالی دست یابند.

در شمارهٔ ۱ دورهٔ ۴۲ مجله در سال ۲۰۰۶، مقاله‌ای با عنوان بازی با لگاریتم[6]، وجود دارد که دانش‌آموزان می‌توانند با بهره‌گیری از دانسته‌های خود در مورد لگاریتم و قوانین آن و مراجعه به مقالهٔ مزبور، به بازی با اعداد دست بزنند. در ضمن در همان شمارهٔ مجله، مقاله‌ای با عنوان «بازی با تانژانت معکوس»[7] وجود دارد که ریاضی‌آموزان باز هم می‌توانند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir



با مراجعه به آن و اتکا به اطلاعات خود در مورد تانژانت معکوس، بُعدی از ریاضیات و سرگرمی توأم با محاسبه را تجربه کنند.

در شمارهٔ ۱ دورهٔ ۳۹ مجله در سال ۲۰۰۳، مقاله‌ای با عنوان «میراث قضیهٔ **فیثاغورس**»[8]، وجود دارد که دوست‌داران این قضیه می‌توانند به آن مراجعه کنند. در شمارهٔ ۲ دورهٔ ۳۸ مجله در سال ۲۰۰۲، مقاله‌ای با عنوان «معادلهٔ پِل»[9] وجود دارد که به بیان تاریخچهٔ کوتاهی دربارهٔ این معادله و نیز چگونگی یافتن راه‌حل برای آن با دیدگاه‌های متفاوت می‌پردازد.

در انتها شما خوانندگان برهان و دیگر علاقه‌مندان به ریاضی را به مطالعهٔ این مجله توصیه می‌کنیم. همچنین افراد توانا و علاقه‌مند را برای ترجمهٔ مقالات ریاضی مجلهٔ Parabola Mathematics Magazine که با خط‌مشی‌ها و اهداف مجلهٔ «ریاضی برهان دورهٔ دوم متوسطه» هماهنگی دارد، به همکاری دعوت می‌کنیم.

پروفسور جورج ژیکِرز (سمت چپ)، در جشن تولد ۹۰ سالگی‌اش

* پی‌نوشت‌ها

1. George Szekerez
2. Numbers Theory
3. Geometry
4. Graph Theory
5. History of Mathematics
6. Games with Logarithms
7. Games with Inverse Tangent
8. The Legacy of Pythagoras Theorem
9. Pell's Equation

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

بهرام دستوریان
دانشجوی دکترای ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد،
سرگروه ریاضی استان کهگیلویه و بویراحمد شهرستان کهگیلویه
منطقهٔ چاروسا

به‌دست آوردن مجموع جملات با استفاده از روابط بازگشتی

اشاره

در این مقاله ابتدا رابطه بازگشتی را تعریف و روش به‌دست آوردن جواب این روابط را بیان می‌کنیم و در ادامه به کمک آن مجموع جملات را به‌دست می‌آوریم.

کلیدواژه‌ها: روابط بازگشتی، مجموع جملات

رابطهٔ بازگشتی

اگر A_iها $(i=1,2,3,...)$ مقادیری ثابت باشند، آن‌گاه رابطهٔ بازگشتی به‌صورت:

$$a_n=A_1a_{n-1}+A_2a_{n-2}+...+A_ra_{n-r}+f(n)$$

را یک رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ r با ضرایب ثابت می‌نامند. این رابطهٔ بازگشتی همگن است هرگاه $f(n)=0$. اگر تابع $g(n)$ چنان باشد که به ازای $n=0,1,2,...$، $a_n=g(n)$، آن‌گاه $g(n)$ یک جواب رابطهٔ بازگشتی نامبرده است.

برای حل روابط بازگشتی همگن ابتدا این معادلهٔ چندجمله‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$x^r-A_1x^{r-1}-A_2x^{r-2}-... A_r=0$$

این معادله را «معادلهٔ سرشت نمای رابطهٔ بازگشتی» می‌نامند.

در یک حالت خاص، که ما در اینجا به این حالت نیاز داریم، اگر معادلهٔ سرشت‌نما دارای جواب‌های x_i، $(i=1,2,...,r)$ باشد، آن‌گاه جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی برابر است با:

$$u_n=A_1(x_1)^n+A_2(x_2)^n+...+A_r(x_r)^n$$

اگر $f(n)=B(n)^k$ که در آن B یک عدد ثابت و k یک عدد صحیح نامنفی است و عدد یک، ریشهٔ معادلهٔ سرشت‌نما باشد، جواب خصوصی رابطهٔ بازگشتی به این صورت است:

$$v_n=A_0n+A_1n^2+...+A_kn^{k+1}$$

بنابراین جواب رابطهٔ بازگشتی به‌صورت $a_n=u_n+v_n$ است.

حال به کمک این روابط می‌خواهیم مسائل زیر را که معمولاً به روش استقرا حل می‌کنیم، اثبات کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مسئلهٔ ۱. مجموع جملات $1+2+3+...+n$ را به‌دست آورید.

حل: واضح است که رابطهٔ بازگشتی آن چنین است:

$$a_n=a_{n-1}+n$$

پس معادلهٔ سرشت‌نمای آن به این شکل است:

$$x-1=0$$

که ریشهٔ آن عدد یک و جواب عمومی آن $u_n=A_0(1)^n=A_0$ است. بنا به توضیحات قبلی، چون یک ریشهٔ معادله سرشت‌نماست، جواب خصوصی به این صورت است:

$$v_n=A_1n+A_2n^2$$

بنابراین جواب رابطه می‌شود:

$$a_n=u_n+v_n=A_0+A_1n+A_2n^2$$

چون: $a_0=0$، با جای‌گذاری $a_n=A_0+A_1n+A_2n^2$ در $a_n=a_{n-1}+n$ داریم:

$$A_1n+A_2n^2=A_1(n-1)+A_2(n-1)^2+n=A_1n-A_1+A_2n^2$$

$$2A_2n^2+A_2+n=A_2-A_1+(A_1-2A_2+1)-n+A_2n^2$$

در نتیجه به‌دست می‌آوریم: $A_1=A_2=\frac{1}{2}$. پس مجموع جملات برابر است با:

$$a_n=A_0+A_1n+A_2n^2=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n(n+1)}{2}$$

مسئلهٔ ۲. مجموع جملات $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ را به‌دست آورید.

حل: رابطهٔ بازگشتی آن چنین است:

$$a_n=a_{n-1}+n^2$$

پس معادلهٔ سرشت‌نمای آن به این شکل است:

$$x-1=0$$

که ریشهٔ آن عدد یک و جواب عمومی آن $u_n=A_0(1)^n=A_0$ است. بنا به توضیحات قبلی، چون یک، ریشهٔ معادله سرشت‌نماست، جواب خصوصی به این صورت است:

$$v_n=A_1n+A_2n^2+A_3n^3$$

بنابراین جواب رابطه چنین است:

$$a_n=u_n+v_n=A_0+A_1n+A_2n^2$$

چون $a_0=0$، با جای‌گذاری داریم:

$$0=a_0=A_0+A_1*0+A_2*0+A_3*0=A_0$$

با جای‌گذاری $a_n=A_0+A_1n+A_2n^2+A_3n^3$ در $a_n=a_{n-1}+n^2$ داریم:

$$A_1n+A_2n^2+A_3n^3=A_1(n-1)+A_2(n-1)^2+A_3(n-1)^3+n^2=A_1n-A_1+A_2n^2-2A_2n+A_2+A_3n^3-3A_3n^2+3A_3n+A_3+n^2=A_3+A_2-A_1+(A_1-2A_2+3A_3)n+(A_2-3A_3+1)n^2+A_3n^3$$

در نتیجه به‌دست می‌آوریم: $A_3=\frac{1}{3}$، $A_2=\frac{1}{2}$، $A_1=\frac{1}{6}$. پس مجموع جملات برابر است با:

$$a_n=A_0+A_1n+A_2n^2+A_3n^3=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل مسئلهٔ بعدی را به‌عنوان تمرین به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

تمرین:

مجموع جملات $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ را به‌دست آورید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها

با درودی دوباره به همهٔ خوانندگان و یاران همیشگی مجله، باز هم لطف شما بزرگواران شامل حال دست‌اندرکاران مجله شد و نامه‌ها و ایمیل‌های ارسالی‌تان را دریافت کردیم. در اینجا با عرض پوزش از همهٔ عزیزانی که به‌دلیل کمبود جا مجال پاسخ‌گویی به آنان را نمی‌یابیم، پاسخ بعضی از دوستان را می‌آوریم.

● همکار گرامی، آقای شهریار رضایی نیکو، از استان زرخیز خوزستان

مقاله‌تان با عنوان «الگوریتمی برای محاسبهٔ ریشهٔ سوم اعداد»، به دست ما رسید. با سپاس از شما ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. باز هم ما را مورد لطفتان قرار دهید.

● همکار محترم، خانم لیلا صالحی، از شهرستان کرج

مقاله‌تان با عنوان «روش‌های یادگیری ریاضی» به دستمان رسید. باید به عرضتان برسانیم که مخاطب اصلی مقالهٔ شما معلمان ریاضی هستند، در حالی که، مخاطبان اصلی مجلهٔ ما دانش‌آموزان‌اند. این گونه مقاله‌ها را می‌توانید برای همکاران ما در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» بفرستید.

● دوست دانش‌آموز، آقای علی نخبه

پاسخ‌هایتان به مسائل «پای تخته» را به مسئول آن قسمت تحویل دادیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

● همکار گرامی، آقای علی مشایخ، از شهرستان قزوین

مقاله‌تان بـا عنوان «نقدی کوتاه بر ریاضی ۲ دبیرستان» به دستمان رسید.

از آنجـا کـه مخاطبـان اصلـی مجلـهٔ مـا دانش‌آمـوزان دبیرسـتان هسـتند، لـذا از نقـد کتاب‌های درسی معذوریم! می‌توانید مقاله‌تان را بـرای همکاران ما در مجلهٔ رشـد آموزش ریاضی بفرستید. اما در عین حال ارتباطتان را با ما حفظ و سـعی کنید به مسـائل موردنیاز دانش‌آموزان بپردازید. در این صورت حتماً خوش‌حال می‌شویم که در خدمتتان باشیم. با سپاس فراوان از لطف و توجه‌تان به مجلهٔ برهان.

● همکار گرامی، آقای سـعید چتر آبنوس، از استان فارس

مقاله‌تـان با عنوان «اعمـال جبری روی دنباله‌ها» به‌دسـتمان رسـید. سعی می‌کنیم در یکـی از شـماره‌های آتی از آن اسـتفاده کنیم. ولی از شما و سایر دوستان می‌خواهیم که بـه دانش‌آموزان پایه‌های اول تا سـوم (و بـه زودی دهم و یازدهم) بیشـتر توجه کنید و مطالب درخور اسـتفادهٔ آنـان را هم مدنظر قرار دهید. با سـپاس از شما و به امید ارتباط همیشگی‌تان با برهان.

● دوست عزیز، آقای عباس روح‌الامینی

تذکر بجایتـان دربارهٔ مطلبی در شـمارهٔ ۵۶ مجله به دستمان رسید. البته کمی دیرهنگام بود، با این حال از توجهتان سپاس‌گزاریم. از اینکه پس از سـال‌ها هنـوز به مجلهٔ خودتـان عنایت دارید، ممنون‌تان هستیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● همـکار گرامـی، آقای مهدی میـرزا فام، از شهرسـتان عجب‌شیر

مطالبتان به دسـت ما رسـید. قبلاً هم لطف‌تان شامل حال ما بوده است. با سپاس فراوان ان‌شاءالله به‌زودی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. نقدی که بر کتاب ریاضی ۱ نوشته بودید، به همکاران مجلهٔ رشد آموزش ریاضی تحویل داده شد.

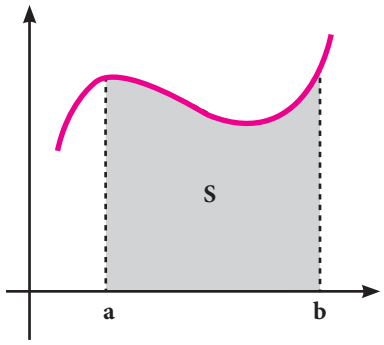
با سپاس فراوان از همهٔ عزیزان خواننده تا شمارهٔ بعد و آغاز سـال تحصیلی نو همهٔ شما را به خدای دادگر می‌سپاریم. شاد باد روزگارتان!

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

آسیه رضائی گرجی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های کرج

کاربرد انتگرال در محاسبهٔ احتمال در فضای پیوسته

اگر فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی آن یک شکل بسته و یا $S \subset \mathbb{R}^2$ و $A \subset \mathbb{R}^2$ باشند، که در این حالت اندازهٔ فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی مورد نظر برابر مساحت شکل می‌باشد که به‌طور معمول با a_s و a_A نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A را به‌صورت $P(A) = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } B} = \frac{a_A}{a_S}$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۱

اگر سطح فضای نمونه‌ای و پیشامدها شامل شکل‌های شناخته شده مانند مربع، مستطیل، مثلث، ... باشد، می‌توانیم به‌راحتی مساحت این شکل‌ها را تعیین کنیم. در صورتی که شکل‌های ناآشنا مانند شکل مقابل داشته باشیم دیگر فرمولی برای محاسبهٔ سطح نداریم. اما با استفاده از انتگرال می‌توانیم مساحت نمودارهایی به این صورت را تعیین کنیم. [۱]

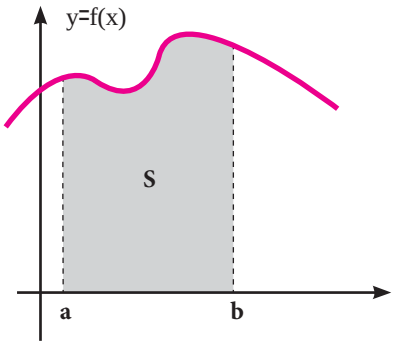
با استفاده از قضیهٔ مهم زیر می‌توانیم مساحت نواحی نامنظمی را محاسبه کنیم که در حالت عادی محاسبهٔ آن‌ها غیرممکن است.

قضیه: فرض کنید $f(x) \geq 0$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد. مساحت ناحیهٔ زیر نمودار f و خطوط x=a، x=b و محور xها یا y=۰ برابر است با:

$$A(S) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

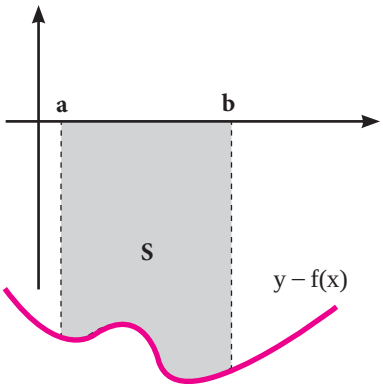
با توجه به قضیهٔ فوق می‌توانیم آن را به حالت‌های زیر تعمیم دهیم. فرض کنیم تابع‌های f و g در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند:

الف) اگر $y = f(x), f(x) \geq 0$ آن‌گاه مساحت محصور بین نمودار تابع f، خط‌های x=a و x=b و محور xها را انتگرال معین f از a تا b می‌نامیم و با نماد $S = \int_a^b f(x)dx$ نمایش می‌دهند.



شکل ۲

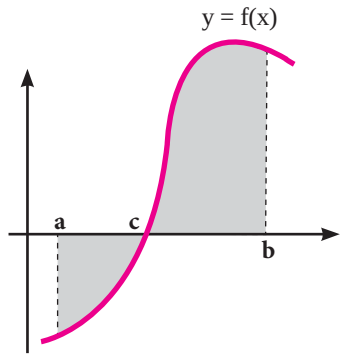
ب) اگر $y = f(x), f(x) \leq 0$ آن‌گاه $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$



شکل ۳

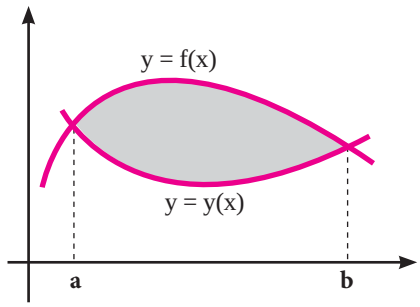
دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

پ) اگر برای هر x که $x \in [a,c]$ داشته باشیم، $f(x)\le ۰$ و برای هر x که $x \in [c,b]$ داشته باشیم، $f(x)\ge ۰$، آن‌گاه $S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\int_c^b f(x)dx$. در صورتی که در بازهٔ اول f(x) مثبت باشد و در بازهٔ دوم f(x) منفی باشد داریم، $S=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$.



شکل ۴

ت) اگر برای هر x که $x \in [a,c]$ است، مطابق شکل g(x) و f(x) را داشته باشیم؛ آن‌گاه $S=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$.



شکل ۵

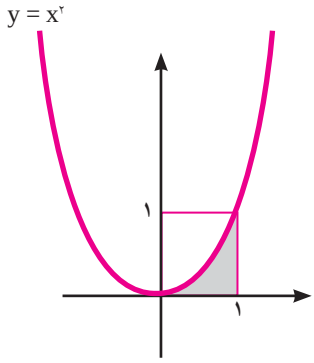
حال با بیان چند مثال با کاربرد انتگرال در فضای پیوسته آشنا می‌شویم:

مثال ۱: دو عدد را به‌طور تصادفی از فاصلهٔ [۰،۱] انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید:

الف) احتمال آنکه $y<x^۲$ باشد.

ب) احتمال آنکه $y\ge x^۲$ باشد.

پاسخ الف: مربع به طول ضلع یک، فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهد، پس $a_s=۱\times۱=۱$. پیشامد مسئلهٔ ناحیهٔ هاشورخورده است.



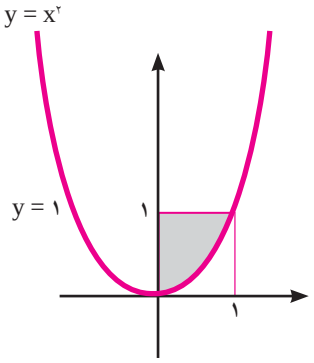
شکل ۶

بنابراین داریم:

$$a_A=\int_۰^۱ x^۲dx=\left(\frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۳}-۰=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱}=\frac{۱}{۳}$$

پاسخ ب: پیشامد قسمت «ب» ناحیهٔ هاشورخورده‌ای است که درون سهمی $y=x^۲$ و زیر خط $y=۱$ است.



شکل ۷

بنابراین داریم:

$$a_A=\left|\int_۰^۱(۱-x^۲)dx\right|=\left(x-\frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_۰^۱$$

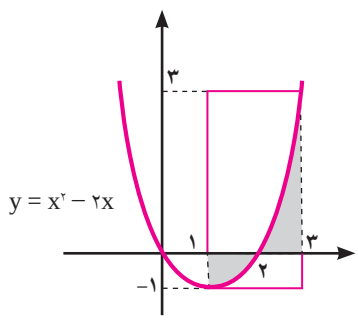
$$=\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)-۰=\frac{۲}{۳}$$

$$P(A)=\frac{aA}{aS}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۱}=\frac{۲}{۳}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

مثال ۲. نقطهٔ (x،y) را روی صفحه محورهای مختصات انتخاب می‌کنیم، به قسمی که این نقطه متعلق به مجموعهٔ $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x<3, -1<y<3\}$ باشد. تعیین کنید، احتمال آنکه نقطه متعلق به $\{(x,y)\in Q \mid 1<x<2, -1<y<0, y\geq x^2-2x\}$ و یا متعلق به $\{(x,y)\in Q \mid 2<x<3, 0<y<3, y\leq x^2-2x\}$ باشد.

پاسخ: مستطیل به ابعاد ۲ و ۴، فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهد، پس $a_s=2\times4=8$. پیشامد مسئلهٔ ناحیه‌های هاشورخورده هستند. با توجه به شکل زیر، یک ناحیه به ازای $x\in[1,2]$، درون سهمی و زیر محور xها می‌باشد و ناحیهٔ دیگر به ازای $x\in[2,3]$ بیرون سهمی و بالای محور xهاست.



شکل ۸

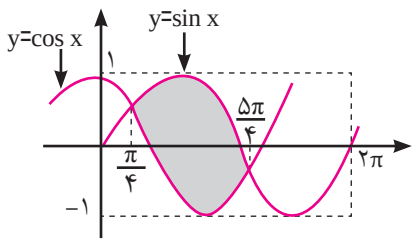
$$a_A=\left|\int_1^2(x^2-2x)dx\right|+\left|\int_2^3(x^2-2x)dx\right|$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3=\left|\left(-\frac{2}{3}\right)\right|+\frac{4}{3}=2$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{aA}{aS}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

مثال ۳. عدد x را به‌طور تصادفی از فاصلهٔ $[0,2\pi]$ و y را به‌طور تصادفی از فاصلهٔ $[-1,1]$ انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید، احتمال آنکه $y<\sin x$ و $y>\cos x$ باشد.

پاسخ: مستطیل به ابعاد ۲ و 2π، فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهد، پس $a_S=2\times2\pi=4\pi$ پیشامد مسئله ناحیه‌های هاشورخورده هستند. با توجه به شکل مقابل، محدودهٔ زیر نمودار y=sinx و بالای نمودار y=cosx پیشامد مسئله است که محل تلاقی این دو نمودار $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ است.



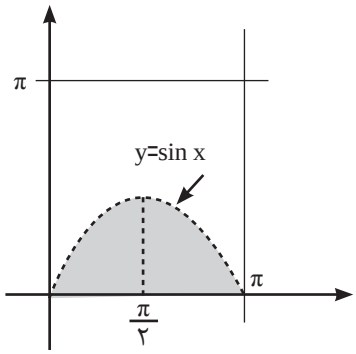
شکل ۸

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$a_A=\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx\right|=\left|(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\right|$$

$$=2\sqrt{2}\Rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{2\sqrt{2}}{4\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

مثال ۴: دو عدد حقیقی را از فاصلهٔ $[0,\pi]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه $y\leq\sin x$ باشد را تعیین کنید.



پاسخ: فضای نمونه‌ای، مربعی به طول π است، لذا $a_S=\pi\times\pi=\pi^2$. سطح محصور بین محور xها و زیر نمودار y=sin x در محدودهٔ $x\in[0,\pi]$ پیشامد مسئله می‌باشد.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_A=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos0=2\Rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{2}{\pi^2}$$

منبع

۱. محمود نصیری، مجموعه‌ای در جبر و آنالیز، انتشارات دانشجو، ۱۳۶۷.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

پاسخ‌های ایستگاه اندیشه

◈ ایستگاه اول:

	۵	۶								۷	۸	
۱	م	ز	د	و	ج	■	خ	ط	م	م	ا	س
۲	ر	ا	ب	ط	ه	■	و	ا	ب	س	ت	ه
	ب	و									ح	م
	ع	ی									ا	ی
	■	ه									د	■
	م	■									■	ت
	س	چ									ع	ق
	ا	ه									م	س
۳	ح	ا	د	ه	■	ن	ا	م	س	ا	و	ی
۴	ت	ر	ک	ی	ب	■	ه	ف	ت	ا	د	م

◈ ایستگاه دوم

معمـای اول: یک جملهٔ مناسـب چنین اسـت: «اسب توسط یک اهریمنی دزدیده شده است.» اگر آن مرد مزدایی بوده باشـد، این جمله نشـان‌دهندهٔ بی‌گناهی اوسـت و اگر او اهریمنی باشد، جمله‌اش دروغ است؛ یعنی اسـب را یک اهریمنی ندزدیده و در نتیجه باز هم بی‌گناه است.

***

معمـای دوم: یک جملهٔ مناسـب چنین اسـت: «من مزدایی نیسـتم که اسب را دزدیده باشد.» اگر گوینده اهریمنی بوده باشـد، بدیهی اسـت که این

برگ اشتراک مجله های رشد

نحوهٔ اشتراک:

شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.

۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

◆ نام مجلات درخواستی: .....

◆ نام و نام خانوادگی: ..... ◆ میزان تحصیلات: .....

◆ تاریخ تولد: ..... ◆ تلفن: .....

◆ نشانی کامل پستی: .....

استان: ..... شهرستان: ..... خیابان: .....

شمارهٔ فیش بانکی: ..... مبلغ پرداختی: .....

پلاک: ..... شمارهٔ پستی: .....

◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید: .....

امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۵۹۵۶۱/۱۱۱۰

● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir

● اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶ / ۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳_۱۴

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

درست است که او مزدایی نیست که اسب را دزدیده باشد. لذا جمله‌اش درست است. در حالی که ممکن نیست جملهٔ یک اهریمنی درست باشد. پس او اهریمنی نیست و مزدایی است و جمله‌اش درست است. یعنی دزد هم نیست.

***

معمای سوم: یک جملهٔ مناسب این است: «من اهریمنی هستم که اسب را دزدیده است.» تحلیل به‌عهدهٔ خودتان است.

***

معمای چهارم: هیچ‌کس در این سرزمین نمی‌تواند بگوید که اهریمنی است. (چرا؟) پس هیچ‌کس نمی‌گوید که با یک اهریمن هم دسته است (یعنی او هم اهریمنی است). بنابراین اگر جمشید مزدایی باشد، مهراب پاسخ می‌دهد بله و اگر جمشید اهریمنی باشد، مهراب می‌گوید نه. اگر مهراب پاسخ بله داده بود، قاضی می‌توانست بفهمد که جمشید مزدایی است و در نتیجه بی‌گناه است (زیرا خودش گفته بود) و قاضی نمی‌توانست بفهمد چه کسی گناهکار است. پس مهراب باید پاسخ نه داده باشد و در نتیجه قاضی دانسته باشد که جمشید اهریمنی است و در نتیجه مجرم است.

***

معمای پنجم: از همان سه جملهٔ اول و قبل از پرسش قاضی می‌توان نتیجه گرفت که اگر C اهریمنی باشد، خودش صاحب اسب است و اگر مزدایی باشد، آن‌گاه B مالک اسب است. زیرا فرض کنید C اهریمنی باشد، پس جمله‌اش نادرست است. یعنی اینکه A و B باید هر دو مزدایی باشند و جملاتشان درست است. در نتیجه از جملهٔ A نتیجه می‌شود که اسب متعلق به C است. حالا فرض کنید C مزدایی باشد، پس جمله‌اش راست است و لذا A و B هر دو اهریمنی‌اند. لذا B دروغ گفته است و خودش مالک اسب است.

اما بعد از پرسش قاضی، با پاسخی که C داد، قاضی فهمید که چه کسی مالک اسب است. C یا مزدایی است یا اهریمنی. اگر C مزدایی باشد، B مالک اسب است. اما فرض کنید C اهریمنی باشد، پس همان‌طور که دیدیم، خودش مالک اسب است، ولی به دروغ نام A یا B را می‌برد. پس در هر حال، اگر C مزدایی یا اهریمنی باشد، نام A یا B را می‌برد.

حالا فرض کنید که او نام B را برده باشد ممکن است مزدایی بوده و به درستی نام B را برده باشد و یا اهریمنی بوده و به دروغ نام او را برده باشد و از آنجا قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که صاحب اسب چه کسی است. پس او نام A را برده و از آنجا قاضی فهمیده که او (یعنی C) اهریمنی است و خودش مالک اسب است.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و نه شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی)
رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول)
رشد جوان (برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی
◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی
(به صورت فصل‌نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول) ◆ رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه دوم) ◆ رشد آموزش قرآن ◆ رشد آموزش معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد آموزش زمین‌شناسی ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.
◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ـ ۰۲۱

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات