۱۱۴

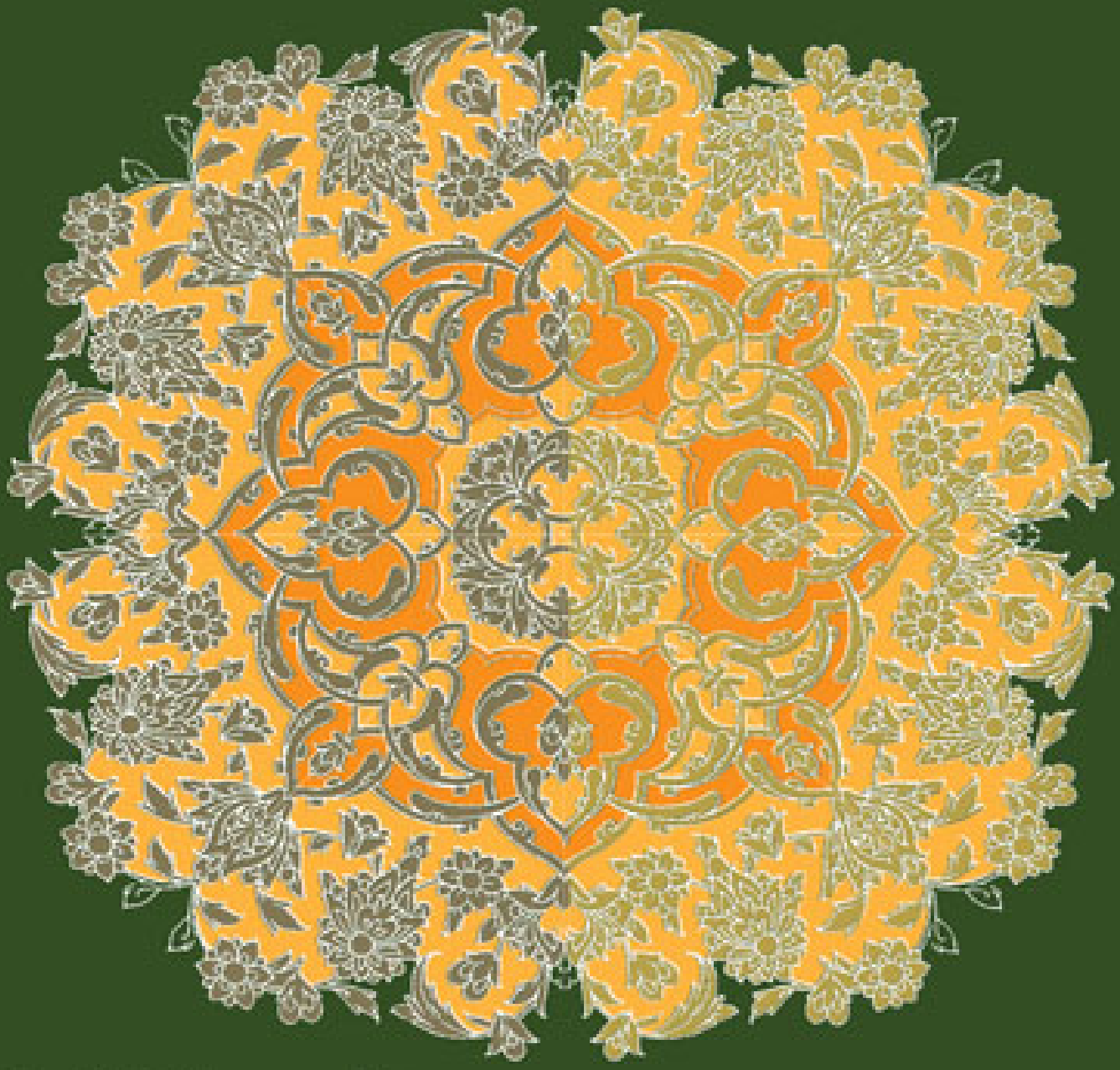
رشد آموزش ریاضی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دورهٔ سی و یکم، شمارهٔ ۱۱۴، زمستان ۱۳۹۲، ۶۴ صفحه، ۸۵۰۰۰ ریال

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

www.roshdmag.ir ISSN: 1606-9226



- مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان مبارک باد!
- تاریخ شفاهی برنامهٔ درسی ریاضی
- بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع
- نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

سخن سردبیر

مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان مبارک باد!

از زمان تأسیس آموزش عمومی در ایران، «فرهنگی» نامی بود که عمدتاً، به معلمان اطلاق می‌شد و گاهی با اندکی تساهل و تسامح، همه دست‌اندرکاران عرصهٔ تعلیم و تربیت و از جمله، تمام کسانی که در نهادهای آموزشی کار می‌کردند، به «فرهنگی» بودن شناخته می‌شدند و به آن افتخار می‌کردند.

هدفم از طرح این بحث این است که«فرهنگی» بودن با «کادر آموزشی» یا «کادر اجرایی» بودنِ یک مؤسسهٔ آموزشی فرق دارد. «فرهنگی» با خودش، بار معنایی عمیقی را یدک می‌کشد که مسئولیت‌آور است، هر چند این واژه در گذر زمان و اغلب به دلایل غیرعلمی، دچار فراز و فرودهایی بوده و تبدیل به «کارمند آموزش‌وپرورش» شده و زمان دیگری، نامی مثل «مربی» بر وی نهاده شده است.

حالا بعد از بارها تغییر واژه و تغییر انتظارات از «فرهنگی»ها، اتفاق بزرگی افتاده است که اگر خوب از آن استفاده شود، فرصت بی‌بدیلی برای ارتقای «معلمان» یا همان «فرهنگیان» خواهد بود. اگر هم به حساسیت‌ها و ظرافت‌های «فرهنگیان» توجه نشود، می‌تواند تهدیدی برای سرمایه‌های بالقوه انسانی باشد. بدین سبب، این دانشگاه با سرنوشت همهٔ ما فرهنگیان گره خواهد خورد و لازم است که نسبت به آن، دغدغه داشته باشیم و با طرح ایده‌های قابل اجرا، به اعتلای دانشگاه کمک کنیم و از درافتادن آن به دام افراط و تفریط‌های احتمالی که از بعضی ماده‌های اساسنامه ممکن است استنباط شود، جلوگیری کنیم. اما قبل از آن، باید این اساسنامه را بشناسیم تا بتوانیم از تجارب عمیقی که حاصل خِرد جمعی جهانیان است، در جهت اعتلای این دانشگاه، بهره بگیریم.

اساسنامه دانشگاه فرهنگیان[1] که مشتمل بر ۳۱ ماده است، در ششم دی‌ماه ۱۳۹۰، به تصویب «شورای عالی انقلاب فرهنگی» رسید. در ماده ۱-کلیات، آمده است که «دانشگاه فرهنگیان، دانشگاهی است: برای تأمین، تربیت و توانمندسازی منابع انسانی وزارت آموزش‌وپرورش ...» و در ادامه این ماده، صفات برجستهٔ این «منابع انسانی» را با جزئیات، بیان کرده است.

به این ترتیب، دانشگاه فرهنگیان پا به عرصهٔ وجود گذاشته است و با این که تنها دو سال از تولدش می‌گذرد، با سرعت اعجاب‌آوری، رشد کمی داشته است. برای اطلاع، این دانشگاه در سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲، حدود ۶۴۰۰۰ نفر دانشجو از طریق سازمان سنجش آموزش کشور گرفته و در تکمیل ظرفیت نیز، قرار است حدود ۲۰۰۰۰ نفر دیگر بگیرد که این تعداد وسیع دانشجو، در حدود ۹۰ پردیس شبانه‌روزیِ پسرانه و دخترانه در تمام استان‌های ایران، مشغول به تحصیل می‌شوند.

در هر صورت، لازم است که از این فرصتِ پیش آمده، برای بازسازی و ارتقای معلمان ـ بخوانید فرهنگیان ـ در تمام سطوح، به بهترین شکل استفاده شود و در اجرا، هرکجا به مشکلی برخورد شد، تغییر مناسب ایجاد شود. زیرا به نظر می‌رسد که در سراسر اساسنامه، آگاهانه و عامدانه، از کلماتی که «باز» و «قابل تفسیر»ند، استفاده شده است. بدین جهت، گروه‌های قویِ کارشناسی می‌توانند بدون درگیر شدن با مسائل غیرضروری، و با توجه به چشم‌اندازی که برای تربیت نیروی انسانیِ آموزش‌وپرورش ترسیم شده، بخش‌های مختلف این اساسنامه را مطابق با دانش و نیازهای روز، تعبیر و تفسیر کنند. یعنی، اگر صِرف این که اساسنامه به تصویب رسیده و نعل به نعل، پس اجرای آن ضروری است، تصوری، خطرناک و جفا در حق فرهنگیان است. این اساسنامه هم مثل هر مصوبه دیگری، به اندازه کافی انعطاف دارد و تغییرات ضروری در آن، پیش‌بینی شده است. بدین سبب، به خود اجازه داده‌ام که به عنوان یک فرهنگی، پیشنهادی برای برنامه درسی و جهت‌گیری فعالیت‌های آن بدهم. بدیهی است که بررسی هر پیشنهادی در این زمینه، نیازمند کار کارشناسی است.

به‌طور تاریخی، آموزش معلمان در جهان، از مدرسه‌ها شروع شد و به خصوص مدارس متوسطه، نیروهای مورد نیاز خود را در همان‌جا، آموزش می‌دادند. بعدها با توسعهٔ آموزش عمومی و گسترش آموزش عالی، در ایران نیز «دارالمعلمین[2]» و دانش‌سراهای مقدماتی و دانش‌سراهای عالی تأسیس شدند و مسئولیت اصلی تربیت معلم، به آن‌ها واگذار شد. «دارالمعلمین» یک نهاد رسمی دانشگاهی بود، اما دانش‌سراها ماهیت مستقلی داشتند و به دو صورت شبانه‌روزی و غیرشبانه‌روزی اداره می‌شدند. در واقع، «شبانه‌روزی» بودن، امتیازی برای کسانی بود که غیربومی بودند و امکان تهیه مسکن و غذا نداشتند و بدون این پشتیبانی، نمی‌توانستند معلم شوند. در غیر این صورت، اقامت «شبانه‌روزی» برایشان الزامی نبود. هم‌چنین، دانشجو ـ معلمان به طور مستمر، هفته‌ای یک روز در مدرسه‌ها، «تدریس عملی» داشتند و اغلب، مسئولیت کلاسی را که می‌رفتند، به‌تنهایی به‌عهده‌می‌گرفتند.

به مرور که دانشگاه‌ها گسترش یافتند، به کسانی که می‌خواستند معلم شوند، امتیازهای ویژه‌ای دادند که یکی از آن‌ها، استخدام با پایه ۷ به‌جای پایه ۶ بود. بعداً که دوره‌های دبیری یکی پس از دیگری در دانشگاه‌های سراسر کشور تأسیس شد، درس‌های علوم تربیتی و از همه مهم‌تر، «تدریس عملی» که به درس «تمرین دبیری» تغییر نام یافت، جزو درس‌های الزامی این دوره‌ها بود. در دوره‌های دبیری، معمولاً همهٔ درس‌های تربیتی، توسط دانشکده‌های علوم تربیتی ارائه می‌شد. اما بعد از انقلاب و بسته شدن سه سالهٔ دانشگاه‌ها و تشکیل ستاد انقلاب فرهنگی، در دوبارهنگری برنامه‌ها، گروه ریاضی ستاد موفق شد که برای رشته‌های دبیری ریاضی، مسئولیت اجرای درس‌های

تمرین دبیری را جزو وظایف گروه‌های ریاضی تعریف کند. این کار باعث شد تا زمینه‌های مناسبی که در گذشته و در دانش‌سراهای تربیت معلم برای تعامل دانشجو ـ معلم با معلم ریاضی شاغل به تدریس در کلاس درس واقعی داشت، دوباره احیا گردد و در این مورد، گروه ریاضی، پیش‌قدم بود. این دوباره‌نگری‌ها، زمینه را برای کاهش دانش‌سراهای تربیت معلم و تقویت رشته‌های دبیری فراهم کرد. اما به دلایلی که استنادات زیادی درباره آن‌ها منتشر نشده و کارهای پژوهشی چندانی در این ارتباط صورت نگرفته است، گروه‌ها و دانشکده‌های ریاضی با تصمیمی نانوشته، شروع به بستن رشته‌های دبیری ریاضی کردند و در این کار، آن‌چنان گوی سبقت از هم ربودند که حتی دانشگاه تربیت معلم که با مأموریت تربیت معلم آغاز به کار کرده بود، کلاً رشته‌های دبیری را تعطیل کرد و نام دانشگاه هم که دیگر موضوعیت نداشت، تغییر یافت. هم‌چنین، حدود ۸۰ درصد ظرفیت دانشگاه تربیت دبیر فنی دانشگاه شهید رجایی نیز که وابسته به آموزش‌وپرورش است، اخیراً به اصطلاح، آزاد شد! بالاخره، با تجمیع مراکز باقی‌ماندهٔ تربیت معلم، مجتمع پیامبر اعظم تأسیس شد و همهٔ این اتفاقات، بستر مناسبی برای تأسیس دانشگاه فرهنگیان ایجاد نمود. نیوتن گفته بود که اگر آینده را دورتر می‌بیند، به این علت است که بر شانه‌های غول‌ها ایستاده است. این سخن نغز، انگیزه‌ای شد تا اشاره بسیار کوتاهی به تاریخ تربیت معلم در ایران داشته باشم که بدانیم چه تلاش‌هایی انجام شده و از آن خرد جمعی و دستاوردهایی که متعلق به ملت ایران است، چگونه می‌توانیم بیاموزیم و به نفع ارتقای دانشگاه فرهنگیان، از آن‌ها بهره بگیریم.

تجزیه و تحلیل مستندات تاریخی و پژوهش‌های انجام شده در حوزه آموزش معلمان و در این خصوص، آموزش معلمان ریاضی، نشان می‌دهد که پیشرفت این حوزه، در گرو تعامل معنادار بین مدرسه و دانشگاه یعنی بین آموزش عالی و آموزش عمومی بوده و هست. البته در طول تاریخ، به سبب تأثیرپذیری شدید این حوزه از تغییرات اجتماعی، فرهنگی، اقتصادی، سیاسی، جمعیت‌شناسی و ده‌ها عامل دیگر، شکل و نحوه این تعامل در زمان‌های گوناگون، تغییر یافته است.

مطالعه برنامه‌های تربیت معلم در کشورهای دیگر نیز نشان می‌دهد که آن‌ها هم بر چنین تعاملی تأکید داشته و دارند. نمونهٔ بارز این تعامل این است که در کشورهای آمریکای شمالی و اروپا، دانشکده‌های علوم تربیتی، عمدتاً در دوره کارشناسی، به دوره آموزش معلمان اختصاص دارد و خروجی‌های آن‌ها، مدرک «صلاحیت معلمی[3]» یا «گواهی معلمی» دریافت می‌کنند. برای نمونه، روند کار در اکثر استان‌های کانادا این گونه است که دانشجویان، ابتدا در دانشکده‌های دیگر، در یک رشته خاص، آموزش‌های موضوعی را می‌بینند و پس از گذراندن سه سال یا پس از اخذ مدرک کارشناسی (چهار سال) و متخصص شدن در یک حوزه موضوعی مثلاً ریاضی، برای دوره معلمی درخواست می‌کنند. جالب اینجاست که به دلیل امنیت شغلیِ نسبتاً بالایی که حرفهٔ معلمی دارد، متقاضیان آن زیادند و رقابت جدی برای ورود به این دوره‌ها وجود دارد. دانشجوی پذیرفته شده، می‌تواند وارد یک برنامه دو ساله ـ بدون تابستان ـ یا یک دورهٔ ۱۲ ماههٔ فشرده شود و پس از گذراندن این دوره «پیش از خدمت[4]»، گواهی صلاحیت حرفه‌ای دریافت نماید. ویژگی مهم این دوره‌ها، «تدریس‌های عملی[5]» است که بخش اعظم دوره را به خود اختصاص می‌دهند. در تدریس‌های عملی که چندین هفته طول می‌کشد، دانشجو ـ معلم در جوار معلم ثابت کلاس، در تدریس مشارکت می‌کند و در همان حال، ناظر دانشجو[6] که یک آموزشگر حرفه‌ای است، همراه دانشجو ـ معلم در کلاس حضور دارد. بالاخره، موقع ارزشیابی، استاد درس، ناظر دانشجو و معلم کلاس درس به‌طور مشترک، با هم تبادل‌نظر می‌کنند و بر سر نمرهٔ دانشجو ـ معلم به توافق می‌رسند.

همین وضعیت، برای «آموزش ضمن خدمت[7]» نیز برقرار است که عمدتاً به دوره‌های «توسعهٔ حرفه‌ای معلمان[8]» معروف‌اند. برای این کار، مراکز ویژه‌ای مانند دانشگاه فرهنگیان هستند که مسئولیت اصلی آن‌ها، علاوه بر دوره‌های مختوم به اعطای گواهی حرفه‌ای و صلاحیت معلمی، برگزاری مستمر دوره‌های توسعهٔ حرفه‌ای، به منظور به‌روز کردن و ارتقای توانایی‌های حرفه‌ای معلمان است و یک نمونه از این مراکز، در همین شماره معرفی شده است.

به گفته شولمن (۱۹۸۷)، انواع دانش‌های ضروری برای معلمان ـ و در این مورد، معلمان ریاضی ـ به‌خصوص دانش محتوایی ـ پداگوژیکی[9]، ترکیب خاصی از دانش و پداگوژی است که به طور منحصر به فردی، جزو قلمرو معلمان است و همان شکل خاص فهم و درک حرفه‌ای آن‌هاست. برای تولید چنین دانشی، لازم است به این مهم توجه شود که حرفهٔ معلمی، حرفه‌ای غیرقطعی و نیازمند اصلاح و به‌روزشدن مستمر است. ایجاد و اصلاح مستمر این آموزش، از طریق توسعهٔ حرفه‌ای معلمان، قبل و ضمن خدمت، امکان‌پذیر است. معلمانی که در دانشگاه‌ها محتوای موضوعی ـ تخصصی را آموزش می‌بینند، لازم است که در مراکزی مانند دانشگاه فرهنگیان، نیمهٔ دوم و بخش اصلی حرفهٔ معلمی را نیز آموزش ببینند و در طول خدمت خود، به طور مستمر، حرفهٔ خود را اعتلا و ارتقا بخشند. چنین همکاری معنادار و اثربخشی بین دانشگاه‌ها و مراکز توسعهٔ حرفه‌ای معلمان در تمام دنیا، مثبت بوده و استنادات آن موجود است. اما تقریباً در جایی مستند نشده که این مراکز، خواسته باشند که به اصطلاح، چرخ را از نو اختراع کرده و مثلاً، خود را درگیر برگزاری دوره‌های تحصیلات تکمیلیِ موضوعی و تأسیس رشته‌های جدید کرده باشند. در عوض، این مراکز فعالانه، به تولید دانش حرفه‌ای و نوآوری‌های تدریس، می‌پردازند. با چنین نگاهی، ظرفیت به وجود آمده به نام «دانشگاه فرهنگیان»، می‌تواند فرصت مغتنمی برای نظام آموزشی ایران ایجاد کند. مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان، مبارک باد!

زهرا گویا

پی‌نوشت‌ها

۱. علاقه‌مندان می‌توانند با کلید واژه «اساسنامه دانشگاه فرهنگیان» توسط یکی از موتورهای جست‌وجوگر، آن را مطالعه کنند.

2. Teachers' Colleges
3. Teacher Certificate
4. Pre- service Teacher Training
5. Practicum
6. Faculty Supervisor
7. In- service Teacher Training
8. Teachers' Professional Development
9. Pedagogical Content Knowledge (PCK)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

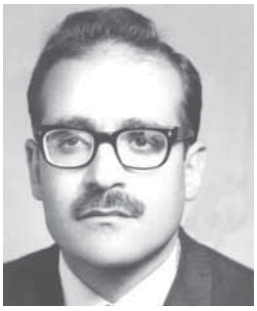
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

گفت‌وگو

تاریخ شفاهی برنامه درسی ریاضی

دکتر بیژن زنگنه ـ دانشگاه صنعتی شریف

پای صحبت میرزا جلیلی، دبیر بازنشسته ریاضی و پیشکسوت تغییرات کتاب‌های درسی ریاضی در ایران



کلیدواژه‌ها: برنامه درسی، کتاب درسی، تألیف کتاب درسی، دوره ریاضیات جدید، سیر تحول برنامه درسی

اشاره

پیش‌کسوتان هر حوزه‌ای، از شأنیت ویژه‌ای برخوردارند و پای صحبتشان نشستن، فرصت مغتنمی برای شناخت عمیق‌تر تاریخ پر فراز و فرود آن حوزه فراهم می‌کند. در حوزهٔ تألیف، میرزا جلیلی یکی از پیش‌کسوتان ریاضی مدرسه‌ای است که هنوز، حرف‌های بسیاری برای شنیده شدن دارد. اعضای هیئت تحریریه لازم دانستند که به عیادت میرزا جلیلی بروند و با استفاده از این فرصت، گپ‌وگفتی با ایشان داشته باشند. آنچه در پی می‌آید، خلاصه‌ای از آن جلسه است که با سلام و احوال‌پرسی اعضای تحریریه با میرزا جلیلی و خانواده محترمشان آغاز شد. سپس ایشان شروع کردند.

بســـم‌الله الرحمن الرحیم. با عرض تشـــکر از شما دوســـتان و همکاران مجله رشـــد آموزش ریاضی که زحمت کشیدید. بنده توقع نداشتم که با گرفتاری‌هایی که شـــما همکاران دارید، زحمت بکشـــید و به دیدنم بیایید. اما لطف کردید. بنده در حال حاضر، حالم بعد از کسالت و عمل‌جراحی بهتر است و مشکلی ندارم. آنچه دوست دارم خدمت همکاران عرض کنم این است که من، تقریباً ۶۰ سال پیش وارد خدمت آموزش‌وپرورش شدم. ســـال‌های اول خدمتم را در شهرستان کازرون گذراندم کـــه در آنجا، در حقیقت بعد از اینکه دورهٔ به اصطلاح تعهد دانش‌ســـرایم تمام شد، به دانش‌سرای عالی رفتم و در آنجا، دورهٔ لیسانس را گذراندم و دوباره، برگشتم به کازرون.

حاضران در جمـــع، از آقای جلیلی راجع به پیشینه تحصیلی و ارتباطشان با برنامه درسی به اصطلاح «ریاضیات جدید» پرسیدند و ایشان چنین گفت:

من تحصیلات ابتدایی‌ام را در دبســـتان فردوسی بوشهر گذراندم، یعنی دورهٔ ۶ ساله ابتدایی را. بعد وارد دبیرستان سعادت بوشـــهر شدم که تقریباً، هم‌زمان با تأســـیس دارالفنون در بوشهر تأســـیس شده بود. بعد از دوره اول دبیرســـتان - تا پایان کلاس نهم- امتحان ورودیِ دانش‌سرای مقدماتی شـــیراز را دادم و پس از قبولی، وارد آنجا شـــدم. بعد از اتمام دورهٔ دانش‌سرای مقدماتی، به‌عنوان معلم به شهرســـتان کازرون اعزام شـــدم. در آن موقع، چون در کازرون دبیر لیســـانسِ ریاضی نبود، مشـــغول تدریس ریاضی در دبیرســـتان شدم. در ســـال ۱۳۴۰ در کازرون، با دو آمریکایی که در آنجا کار می‌کردند، آشنا شدم که خانم یکی از آن‌ها معلم ریاضی بود. برای او یک مجله ریاضی می‌فرستادند که چون علاقه داشـــتم، به من می‌داد که مطالعه کنم. در یکی از شـــماره‌های آن مجله، راجع به «ریاضیات جدید» که در آمریکا شروع به تدریس آن کرده بودند، مقاله‌ای خواندم. در آن مقالـــه، درباره «مجموعه‌ها»، «منطق ریاضی» و «ماتریس» توضیح داده بود و گفته بود که در سطح دبیرســـتان، این‌ها مطالبی است که در آمریکا تدریس می‌شـــود. این مطالب در ذهن من خوب جا گرفت و علاقه‌مند شـــدم که با آن‌ها بیشتر آشنا شوم و در این زمینه، سؤالات مکرری از آن دو نفر آمریکایی می‌کردم. تا اینکه در ســـال ۱۳۴۸، از طرف بخش فرهنگی سفارت انگلستان، مسابقه‌ای گذاشتند تا افرادی را برای ادامه تحصیل، به آن کشور اعزام کنند. من در آن مسابقات شـــرکت کردم و پس از قبولی در امتحان کتبی، در مصاحبه از من پرسیدند که برای چه می‌خواهم به انگلستان بروم و در چه حوزه‌ای می‌خواهم کار کنـــم. من هم گفتم که «می‌خواهم بروم ریاضیات جدیـــد را یاد بگیرم و بیایم در ایـــران تدریس بکنم». بالاخره، در این مســـابقه انتخاب شـــدم و به انگلستان اعزام شـــدم. در آنجا در دانشکده ریاضی امپریال کالج لندن، یک دورهٔ یک ســـالهٔ ریاضیات جدید را گذراندم که در ســـطح تقریباً فوق‌لیســـانس بود. در آن دوره، منطق و نظریهٔ جبر و ایـــن مطالب را یاد گرفتم. طی این دوره، با علاقه‌مندی، کتاب‌های درسی ریاضی را که در دبیرستان‌های آنجا تدریس می‌شد، با دقت مطالعه کردم. برای مثال، مجموعه کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرســـه[1]» را مطالعه کردم و بعد، پس از بازگشـــت از انگلســـتان، تعداد زیادی از آن‌ها را بـــه همراه آوردم و گزارش مفصلی در این زمینه به وزیر آموزش‌وپرورش وقت دادم. در آن گزارش نوشتم که در حال حاضر، وضع ریاضیات ما در دبیرستان‌ها به‌روز نیست و به مطالبی که در کشـــورهای غربی تدریس می‌شد اشاره کردم و منابعی را که آورده بودم، معرفی کردم. با پیگیری‌هایم، بالاخره وزیر وقت آموزش‌وپـــرورش از من دعوت کرد کـــه از کازرون به تهران بیایـــم و در به اصطلاح دفتر برنامه‌ریزی مشغول به کار شـــوم. من در سال ۱۳۵۰

وارد دفتر برنامه‌ریزی و تألیف شدم و بلافاصله جزو به اصطلاح شورای برنامه‌ریزی دفتر تحقیقات برای برنامه درسی ریاضی دبیرستان قرار گرفتم. در آنجا عرض کنم که افرادی مثل مرحوم بیرشک، مرحوم پرویز شهریاری، دکتر مرتضی انواری، دکتر ثقفی و دکتر بهزاد بودند که اعضای شورای ریاضی را تشکیل می‌دادند. در آن شورا، با مطالعه ریاضیات جهانی و آنچه که در کشورهایی مانند انگلستان و فرانسه و آمریکا می‌گذشت، برنامه جدید ریاضی تنظیم شد. در آن شورا، راجع به اینکه ابتدا کتاب «ریاضیات جدید» جدا باشد یا آنکه با یکی از کتاب‌های ریاضی آن وقت مانند جبر یا آنالیز ترکیب شود، بحث‌های زیادی صورت گرفت. بالاخره تصمیم گرفته شد که کتاب‌های قبلی را به همان صورت سابق ارائه دهیم، اما کتابی به اسم «ریاضیات جدید» در کنار این کتاب‌ها تألیف کنیم تا دبیرانی که علاقه‌مند هستند و تازه از دانشگاه فارغ‌التحصیل شده‌اند، بتوانند این کتاب‌ها را تدریس کنند. اساس تدریس این کتاب را هم بر این گذاشتیم که بسیار پرمثال نوشته شود، زیرا فکر کردیم که اگر دبیری نتواند تمرینی را حل کند و فقط برای کلاس، مثال‌های کتاب را حل کند، نظر ما تأمین می‌شود. بدین ترتیب، دانش‌آموزان دیدی از ریاضیات جدید پیدا می‌کردند، چون آن زمان، بیشتر دبیرها قدیمی و سنتی بودند و اصلاً با مطالب ریاضیات جدید و مجموعه‌ها و منطق و ماتریس آشنایی نداشتند. به هر حال این کار ادامه پیدا کرد و ما موفق شدیم که این کتاب‌های ریاضی جدید را جا بیندازیم. در ایران هم خُرد خُرد دبیرها استقبال کردند؛ دبیرهای تازه فارغ‌التحصیل ریاضی که این مسائل را در دانشگاه خوانده بودند، آمدند و این کتاب‌ها را خیلی خوب در کلاس‌ها تدریس کردند. به‌طوری که در برنامه‌ریزی بعدی، تصمیم گرفته شد که این ریاضی جدید، با ریاضیات سنتی ترکیب شود. بدین ترتیب، کتاب‌هایی نوشته شد و تا قبل از تغییر نظام آموزش متوسطه، آن کتاب‌ها تدریس می‌شد و ما، مشکلی از نظر ریاضی نداشتیم. در حقیقت، می‌شود گفت که ریاضیاتی که در ایران تدریس می‌شد، معادل ریاضی در سطح جهانی بود، طوری که در سال ۶۲ یا ۶۳ که ما با آقای دکتر نجفی، دانش‌آموزان المپیاد ریاضی را برای مسابقات جهانی به کوبا بردیم، دانش‌آموزان ما در سطح بین‌المللی نشان دادند که از دیگران عقب نیستند. در آنجا، یک نفر از تیم دانش‌آموزی ما، رتبه سوم شد مدال برنز گرفت. این مطالب کاملاً نشان داد که سطح ریاضیات ایران، معادل سطح ریاضیات بین‌المللی است و هیچ نوع عقب‌افتادگی نداریم.

سؤال شد که برای تدریس «اولین کتاب ریاضیات جدید» و آموزش معلمان آن، چگونه تصمیم‌گیری شد.

بحث اولیه این بود که «ریاضیات جدید» را به‌صورت کتاب‌هایی برای معلمان ریاضی بنویسیم و برای آن‌ها دوره بگذاریم تا خُرد خُرد یاد بگیرند و بعدکه برای معلمان جا افتاد، این کتاب را به دبیرستان‌ها ببریم. اما یک نظریهٔ دیگر وجود داشت که کتاب ساده نوشته شود و از همان ابتدا، به دبیرستان برده شود.

جمع کنجکاو بود بداند که با چه استدلالی، قرار شد معلم و دانش‌آموز، هم‌زمان با هم مطالب جدید را بیاموزنـــد. آقای جلیلی، نظر غالب آن موقع را بیان کردند:

نظر غالب این بود که تا خودِ دبیر احساس نکند که وظیفهٔ تدریس را بر عهده دارد و می‌خواهد به دیگران یاد بدهد، با دقت مطالعه نمی‌کند، آماده نمی‌شـــود و یـــاد نمی‌گیرد. به این دلیل بود کـــه بین این دو نظر، دومی پذیرفته شـــد؛ یعنی اینکه تصمیم گرفته شـــد کتاب‌های ریاضی جدید، خیلی ســـاده تنظیم شـــوند و از همان ابتدا، وارد دبیرســـتان شـــوند. در ضمن، به رئیس ســـازمان کتاب‌های درسی فشار می‌آوردند که حتماً دانشگاهی‌ها که وارد هستند، این مطالب جدید را وارد کتاب‌های دبیرســـتانی بکنند. ولی چون سنت قبلی در ایران این بود که بیشتر خود دبیران کتاب‌های درســـی را می‌نوشتند، آخر سر قرار شد که آقای دکتر مین‌باشیان، استاد دانشـــگاه صنعتی شریف (آریامهر ســـابق) که تازه از دانشگاه برکلی دکترای ریاضی خود را گرفته بود و جزوه‌ای با عنوان «آشـــنایی با منطق و مجموعه‌ها» برای معلمان ریاضی شاغل به تدریس تهیه نموده بود، با بنـــده، به‌دلیل اینکه آن موقع، در متن و بطن برنامه‌ها و کتاب‌ها بودم، با هم همکاری کنیم. این چنین بود که اولین کتاب درســـی «ریاضیات جدید» تألیف و در ســـال ۱۳۵۳، وارد سال اول دبیرستان شد. این کتاب خیلی ساده و به زبان عادی نوشته شده بود، ولی دبیرها با مطالب آن، آشنایی نداشتند. دبیری برای من تعریف می‌کرد که «ســـر کلاس‌های شما نشستم و مقـــداری جرأت پیدا کردم و رفتم ســـر کلاس. ولی یک روز که داشـــتم درس می‌دادم، وســـط راه ماندم و چیزی را که می‌خواســـتم بگویم، یادم رفت. بلافاصله، به‌عنـــوان اینکه بیرون کار دارم و این‌ها، گچ را انداختم و از کلاس آمـــدم بیرون و گفتم حـــالا بر می‌گردم». این همکار معلم گفت که «رفتـــم و دیگر اصلاً به آن دبیرستان برنگشـــتم». دبیرها مشکلاتی از این قبیل داشتند تا کتاب خُرد خُرد جا افتاد. در کتاب‌های بعدی، ایراد بیشتر روی کتاب‌های ریاضی جدید نبود، بیشتر روی ارائه حد و پیوستگی و این‌ها بود که در کتاب‌های جدید، حد و پیوستگی به‌صورت ε و δ ارائه شده بود و برای دبیرها که سابق، خیلی ساده تعریف می‌کردند و رد می‌شدند، مشـــکل به‌وجود آورده بود. بر سر حد و پیوســـتگی خیلی بحث شد تا بالاخره، مؤلفان متقاعد شدند که در سال‌های بعد، حد و پیوستگی را قدری به زبان ساده‌تر و با مثال‌های عامیانه‌تر بنویسند. نکته‌ای که در تماس با دبیران به نظرم می‌رســـید این بود که به‌طور کلی، دبیران در تدریس سنت‌گرا بودند و سعی داشتند و علاقه‌مند بودند که هر چه را که خودشان یاد گرفته بودند، یاد بدهند و با هر روشی که به خودشان یاد داده بودند، تدریس کنند. مطالب جدید را به سختی می‌پذیرفتند و روش‌هـــای جدیدی را که به آن‌ها ارائه می‌شـــد، نمی‌پذیرفتند؛ روش‌هایی مثـــل اینکه «باید شاگرد را در درس شـــرکت بدهید» یا «روش فعال را به‌کار ببرید». ســـعی تمام دبیران این بود که در مدت معینی، یک قسمت از کتاب مثلاً $\frac{2}{3}$ یا نصف کتاب را تدریس کنند، با هر سرعتی که خودشان می‌دانستند.

در کتاب‌های گذشـــته، تغییرات به‌خاطر تحولی بود که از غرب شروع شده بود و برای همه چالش ایجاد کرده بود. این‌ها طوفانی بود که در غرب برپا شد و به ما اصلاً ربطی نداشت. یک مرتبه یکی مثل دیودونه پیدا شد و گفت «هندسه اقلیدسی باید برود»، هدف این بود که جبرخطی و تبدیلات، جای هندسه اقلیدسی را بگیرد. اصلاً می‌خواستند هندسه اقلیدسی را محو کنند و از بین ببرند؛ همان هندسه اقلیدسی که آن همه مسائل فکری دارد و دانش‌آموزان را با چالش‌های فکری مواجه می‌کند

در کلاس معمـــولاً ۱۰۰ تـــا ۱۲۰ دقیقه متوالی حرف می‌زدند و درس می‌دادند و شاگرد معمولاً چیزی درک نمی‌کرد. در کلاس‌های بازآموزی، علاوه بر اینکه راجع به مفاهیم و مطالب ریاضی جدید بحث می‌شد، خیلی هم راجع به اینکه در روش تدریس و سنت تدریس نیز باید تجدیدنظر کنند و باید روش‌های جهانی را بپذیرید، بحث می‌شد. به‌هرحال، این مشکلات برای دبیران بود و برایشان مشکل بود که روش سنتی خود را تغییر دهند. حتی در این کلاس‌ها، دبیران به آن‌هایی که روش‌های جدید را توصیه می‌کردند اعتراض می‌کردند و می‌گفتند «خودتان بیایید ســـر کلاس و به‌جای ما درس بدهید. این کتابی که در ۲۲۰ صفحه نوشته شده را می‌توانید با این شیوه‌ای که می‌گویید، ۴ ساعت در هفته تدریس کنید و تمام کنید؟ با توجه به اینکه وزارت‌خانه مرتب بخشنامه می‌کند که کتاب باید تا آخر سال تمام شود و هیچ بخشـــی از آن باقی نماند، آیا شما می‌توانید این کار را بکنید؟»

هرچه آقای جلیلی بیشتر از گذشته می‌گفتند، جمع برای شنیدن مشـــتاق‌تر می‌شد و مرتب، ســـؤال‌های تازه‌ای در ذهن‌ها شکل می‌گرفت. ای‌کاش تاریخ و آموختن از آن، در برنامه درسی مدرسه و دانشگاه، به‌طور معناداری جدی گرفته می‌شـــد تا دانش‌آموزان، بـــرای آموختن آن و آموختن از آن، به وجد می‌آمدند. حالا پرسش‌ها به‌سمت محتوای برنامه درسی ریاضی بود و آقای جلیلی، ادامه دادند.

بین سال‌های ۴۰ تا ۵۰، ریاضیات در ایران، ریاضیات محاســـبه‌ای بود و تأکید زیادی هم بر هندسه می‌شد. همچنین، مثلثات نیز کتابی جداگانه داشـــت. در هر فصل از کتاب‌های هندسه‌ای که یکی توسط صفاری و قربانی و دیگری توسط مرحوم بیرشک نوشته شده بود، ۳۰ -۴۰ تا مسئله مشکل بود و معلمان، دانش‌آموزان را از همان اول وا می‌داشتند و فشار می‌آوردند که آن‌ها را حل کنند؛ مسائلی که ابزار حل آن‌ها محدود بود، مثل تساوی یا تشابه مثلث‌ها. آقای غیور می‌گفت من که در همدان تدریس می‌کردم، مثلاً فصل تساوی مثلث‌ها را می‌گفتم و برایش یک سری مسئله می‌دادم و می‌گفتم که «بچه‌ها! این مســـائل فقط با همین چهار تا قضیه تساوی مثلث حل می‌شـــه»، ولی این مسئله‌ها فکری بودند. گاهی باید خطی اضافه می‌کردند؛ نیم‌ســـازی، میانه‌ای می‌کشیدند تا مسئله حل می‌شد، به‌طور ساده

حل نمی‌شد و این طرز تفکر هندسی و مثلثاتی بود با تمرینات مثلثاتی بسیار پیچیده، ولی به مفاهیم توجه نمی‌شد. اصلاً از این ε و δ ها تا سال ۵۰ هیچ خبری نبود، معلمان نه تشخیص می‌دادند و نه در بحرش بودند. فقط جبر به‌صورت کاملاً تکنیکی و محاسباتی بود، مثل اینکه چه‌طوری مشتق بگیریم یا چه‌طوری حد حساب کنیم. آن ریاضی فقط محاسباتی بود و استدلالی به‌صورت ε و δ نبود. اما ازسال ۱۳۵۳به بعد، با توجه به تحولی که در دنیا در آموزش ریاضی و مطالب و مفاهیم ریاضی پیش آمده بود، در آمریکا و انگلیس هم، با همین مشکلاتی که ما در پیاده‌کردن نظام جدید داشتیم، روبه‌رو بودند. در انگلستان، مرتب کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرسه» تجدید چاپ می‌شد یا آنکه کتاب‌های دیگری مشابه آن‌ها نوشته می‌شد، برای اینکه همین مشکلاتِ تغییرات را آن‌ها هم داشتند. من در موقعی که کارگردان بودم، چیزی که به نظرم واقعاً خوب رسید این بود که فکر کردم استادان دانشگاه تربیت معلم - خوارزمی فعلی- که دبیر تربیت می‌کنند و دنبال آموزش به دبیران هستند، خوب است که آن‌ها را بیاوریم در دفتر برنامه‌ریزی تا هم برنامه بریزند و هم کتاب بنویسند، بلکه کتاب‌ها یک مقدار، با زبانِ به اصطلاح دبیران، نوشته شوند. در حقیقت تا مدت زیادی هم، بیشتر اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی همکاران دانشگاه تربیت معلم بودند، مثل آقای دکتر بابلیان، آقای دکتر مدقالچی، مرحوم دکتر فرزان، آقای دیبایی، آقای دکتر بیژن‌زاده، آقای لآلی. بعد هم کلاس‌های بازآموزی معلمان را واگذار کردیم به خودِ دانشگاه تربیت‌معلم. بیشتر آموزش‌ها را آقای دکتر بابلیان و آقای دکتر مدقالچی و همکارانشان به دبیران می‌دادند. به این ترتیب، ما نتیجه گرفتیم و دیدیم دبیری که می‌آمد و می‌دید همان آقای دکتر بابلیانی که توی دانشگاه ریاضی یادش داده، حالا می‌گوید این‌طوری نگو و این‌طوری بگو، از او قبول می‌کند. ولی وقتی یکی دیگر می‌گفت، از او قبول نمی‌کرد و فکر می‌کرد که می‌خواهند به او تحمیل کنند.

پرسیدیم چگونه از تغییر سریع و بی‌پشتوانه برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در غرب به وجد آمدیم و چرا از ناکامی آن و به همان سرعت تغییر آونگی و شدید آن درس نگرفتیم؟

همان‌طور که می‌فرمایید، در غرب هم در ابتدا که ریاضی جدید پیاده شد، همین سرگردانی‌های ما را داشتند. یعنی یک مرتبه می‌خواستند مثلاً جبر خطی یا منطق ریاضی را تمام‌عیار پیاده کنند. شما وقتی کتاب‌های «گروه مطالعاتی ریاضیات مدرسه[۲]» در آمریکا یا کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرسه» در انگلستان یا کتاب‌های دیگری که نوشته شده بود را «برگ» می‌زنید، می‌بینید که همین مطالبی که ما در کتاب‌هایمان آوردیم، در حقیقت، از آن کتاب‌ها شیره‌کشی ـ عصاره‌کشی ـ کردیم. چون ما فکر می‌کردیم که آن‌ها لابد چیزی می‌دانسته‌اند که در سطح جهانی، آن تغییر را انجام دادند. بعد که آن‌ها متوجه شدند که این همه جبرخطی و این مطالب به اصطلاح استدلالیِ محض و نظری را شاگرد نمی‌پذیرد، مطالبشان را رقیق کردند، ما هم به تبع آن‌ها، سال به سال، کتاب‌ها را رقیق‌تر می‌کردیم و مسائلی را که بحث‌برانگیز بود، برمی‌داشتیم. مثلاً، قسمت حد و پیوستگی مقداری ساده‌تر شد. ولی هر تغییر برنامه‌ای چنین است. وقتی شما به یک خانه جدید نقل و انتقال پیدا می‌کنید، تا جا بیفتید و بدانید هر چیزی کجاست، مدتی طول می‌کشد. ما هم از ریاضی سنتی قدیمی آمده بودیم تا ریاضیات جدیدی را در سطح جهان پیاده بکنیم. خوب یک مقدار سردرگمی، نارسایی و توهم وجود داشت تا اینکه به مرور، این مطالب جا افتاد.

برایمان آموزنده بود که در صورت امکان، کمی با شرایطی که تقاضا برای تغییر به وجود می‌آید، آشنا شویم.

اصلاً اولین شرط برنامه‌ریزیِ الآن که در کتاب‌های خارجی هم منعکس است، این است که برای ایجاد تغییر در یک برنامه یا کتاب، اول می‌نشینند بررسی می‌کنند که به چه دلیل و چرا باید این تغییر را ایجاد کرد. برنامه موجود چه عیب‌هایی دارد؟ چه مشکلاتی ایجاد کرده که انگیزه تشکیل شورای جدید شده است؟ یا کتاب‌های موجود چه مشکلاتی دارند؟ این‌ها اصول اصلی هر برنامه‌ریزی است. اما همان‌طور که اشاره کردید، واقعاً آن موقع، در ایران کسی که هم آموزش ریاضی و هم برنامه‌ریزی درسی ریاضی خوانده باشد، نداشتیم. من خودم یک دورهٔ شش یا هفت ماهه را در دانشگاه تگزاس دیدم و در آنجا، با یک سری اصول کلی برنامه‌ریزی آشنا شدم. سپس در بازگشت به ایران، سعی کردم آن‌ها را در شورا مطرح کنم، مثل همین نکته که برای تدوین برنامه، شرایط کلاس و محیط درس و کتاب باید درنظر گرفته شود. اما نکات مفیدی که عرض کنم، این است که در کتاب‌های گذشته، تغییرات

به‌خاطر تحولی بود که از غرب شـــروع شده بود و برای همه چالـــش ایجاد کرده بود. این‌ها طوفانی بود که در غرب برپا شد و به ما اصلاً ربطی نداشت. یک مرتبه یکی مثل دیودونه پیدا شـــد و گفت «هندسه اقلیدسی باید بـــرود[3]»، هدف این بود که جبرخطی و تبدیلات، جای هندســـه اقلیدسی را بگیرد. اصلاً می‌خواستند هندسه اقلیدســـی را محو کنند و از بین ببرند؛ همان هندسه اقلیدسی که آن همه مسائل فکری دارد و دانش‌آموزان را با چالش‌های فکـــری مواجه می‌کند. یا نظریه اعداد که با ۷، ۸ صفحـــه مقدمات که راجع به بخش‌پذیری بود، با آن همه مسئله‌های چالش‌انگیز حساب استدلالی که یک نمونه از آن، کتاب «مسائل حساب استدلالی» مرحوم حریرچی بود، جایگزین شـــد. ریاضیات تا قبل از ســـال ۱۳۵۰، بیشتر فکری و حل مسئله بود و تنها روی تعداد محدودی مفاهیم، توجه می‌شد، اما از همان مفاهیم محدود، برای رشـــتهٔ زیادی از مسائل استفاده می‌شد. مثلاً، میزان تأکیدی که نظام قدیم روی هندسه ترسیمی و رقومی و روی مخروطات و بیضی و هذلولی و یا سهمی تبدیلات و این‌ها داشت، اندک‌اندک کنار زده شـــد. ما هم از این طرف، به افراط افتادیم. برای نمونه، از جبرخطی یا حلقه و میـــدان که امثال دیودونه فکر می‌کردند می‌تواند جایگزین هندسه اقلیدسی شود و در غرب آمده بود، ما هم اقتباس کردیم و آوردیم. البته به مرور که آن‌ها حذف کردند و متوجه شدند که زیاده‌روی کرده‌اند، ما هم به مرور، حذف کردیم. یعنی این تحول در برنامه‌ریزی درســـی جهانی بود و در همه جا اتفاق افتاد. همین تغییرات و به دنبالش همین مشـــکلات، در برنامه‌های فیزیک و شـــیمیِ ما هم در دفتر وجود داشـــت. یعنی مطالبی از فیزیـــک جدید وارد کتاب‌ها شـــده بود که دبیرها مشکل داشتند و نسبت به آن‌ها اعتراض می‌کردند. یا اینکه در شیمی، ما تأکید داشتیم که شـــاگرد، فرمول‌ها را حفظ کند. در صورتی که در همان برهه از زمان، غربی‌ها گفتند نیازی نیســـت که وارد جزئیات فرمول‌ها شویم و بیشتر توجه، معطوف به آزمایش و آزمایشگاه و این‌ها شد. این تحولات، نه‌تنها در ریاضی، بلکه در فیزیک و شیمی دفتر هم به‌وجود آمد و ما همه مشکل داشتیم. البته در برنامه درسی ریاضی، مشکل بیشتر بود. یادم هست که در سال ۱۳۵۲، قبل از اینکه ریاضی جدید را پیاده کنیم، کارشناس فیزیک به ما می‌گفت که «فلانی! شما باید در ریاضی، مثلاً در مورد مجموعه یا ماتریس بگید ما اینجا چیزهایی داریم که به ماتریس شما برمی‌خورد و ما مجبوریم اینجا - در فیزیک- یک چیزهایی بگوییم». منظورم این است که همین تحولات، در کتاب‌های فیزیک هم ایجاد شده بود. من به آن کارشناس فیزیک می‌گفتم که «ما هم داریم این تغییرات را می‌دهیم و کتاب‌های جدید همین‌طور خواهد بـــود». البته در ســـال‌های ۱۳۵۳ و ۱۳۵۴ که کتاب‌های ریاضی دبیرستان به نام «نظام‌جدید» عوض شد، نه کسی بود که برنامه‌ریزی درسی ریاضی بداند و نه کســـی بود که «آموزش ریاضی[4]» بداند و هر چه که در آموزش ریاضی انجام می‌شـــد، واقعاً توسط آماتورها بود. در نتیجه، این تغییرات جز با تجربه قابل پیش‌بینی نبود. یعنی باید تجربه می‌شد و با خطا و آزمایش پیش می‌رفتیم و می‌دیدیم که مشـــکل وجود دارد؛ شاگرد نمی‌فهمد، معلم نمی‌رســـد تا اینکه خُردخُرد، کتاب‌ها را رقیق کنیم که برای دانش‌آموزان قابل درک باشـــد. طوری‌که بالاخره در سال‌های آخر - نظام جدیدِ اسبق- دیگر کاملاً این کتاب‌های دبیرستانی و تغییر موادِ برنامه درسی ریاضی، در مدارس جا افتاده بود.

باز هم فرض کنید تا همین ۱۰- ۱۵ ســـال پیش که از مـــن دعوت می‌کردند و می‌رفتم شهرســـتان‌ها تا بـــرای دبیران صحبت کنم، می‌دیـــدم که آن‌ها، آن اشـــکالات و هیجاناتی را که ســـابق راجع به برنامه‌ها داشـــتند و بحث می‌کردند و شـــلوغ می‌کردند، دیگر نیســـت. بحث‌ها تکنیکی‌تر و سؤالات تکنیکی‌تر شده است و می‌توانستیم از نظراتشان استفاده کنیم. حتی در برنامه‌ریزی، پیشنهادهایی که می‌کردند این‌گونه بود.

ولی آن چالش اولیـــه یعنی تغییر کتاب‌ها و ورود ریاضیات جدید به دبیرستان، هم برای دفتر و برنامه‌ریزها مشـــکل بود و هم برای معلمان. البته در تغییرات سال ۱۳۵۳ در دبیرستان، هندسه اقلیدسی را حفظ کردیم و عرض کنم که مؤلفانش هم دو تا از هندسه کارهای قدیمـــی ایران بودند که یکی آقای محمدطاهر معیری کـــه مدیـــرکل دفتر تألیف هـــم بود و دیگـــری آقای محمدحسین غیور. در تألیف جدید، کتاب‌های هندسه یک مقدار سبک شد، ولی تقریباً قالب خودش را حفظ کـــرد و مقداری هم مثلثات باقی ماند که البته، باز هم مقداری سبک شد، اما نه به‌صورت یک کتاب مستقل. باید توجه داشت که در کشورهای غربی، تأکیدی که ما روی مثلثات داریم، ندارند. واقعاً مثلثات را در حد همان «ســـینوس» و «کسینوس» و «تانژانت» و «کتانژانت» و چند تا فرمـــول مقدماتی می‌گویند و تمام می‌کنند.

مثل ما این‌قدر عمیق که من یادم هست نمی‌گویند؛ مثلاً ۱۰۰ مسئله در مورد Arcها و Arctanها و مانند آن‌ها بود. چقدر شاگرد باید این‌ها را یاد بگیرد؟ این‌ها اصلاً در کتاب‌های غربی نبود، ولی بخشی از ریاضی سنتی ما بود. ما هم در آن شورای برنامه‌ریزی، در مقابل یک عده از دبیران و استادهای سنتی نشسته بودیم که وقتی پیشنهاد حذف می‌کردیم، نمی‌پذیرفتند و می‌گفتند «نه! مثلثات را ۳۰ سال، ۴۰ سال است که درس می‌دهیم و بچه‌ها خیلی خوب می‌فهمند. شما چرا می‌گویید این‌ها را حذف کنیم؟» در مورد «هندسه ترسیمی و رقومی» هم با همین استدلال که «بچه‌ها خیلی خوب یاد می‌گیرند»، مقاومت می‌کردند. بارها در کلاس‌های بازآموزی ریاضیات جدید، اولین سؤالی که از من می‌شد این بود که «چرا هندسه ترسیمی و رقومی را حذف کردید؟» چه کسی این سؤال را می‌کرد؟ کسی که سال‌ها این هندسه در انحصارش بود و حالا یک مرتبه احساس می‌کرد خلع سلاح شده است. بعد به او می‌گفتند «بیا کتاب ریاضیات جدید را درس بده.» این بود که این تغییرات، واقعاً بعضی معلمان را برمی‌آشفت و آن را نمی‌پذیرفتند.

برایمان جالب بود بدانیم که چگونه، برنامه‌های ما از سبک فرانسوی به سبک آمریکایی تغییر کرد؟

همان‌طور که می‌فرمایید، ریاضیات ما متأثر از ریاضیات فرانسه بود و شاید فرانسوی‌ها، هنوز آن را تدریس می‌کنند. ما در برنامه‌ریزی سال ۱۳۵۳ و در حقیقت، از سال ۱۳۴۵ که تغییر برنامه درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی شروع شد تا در سال ۱۳۵۳ که به دبیرستان رسید، یک مرتبه در ایران، نه‌تنها «شیفت» به‌سمت برنامه ریاضی جدید و تحول ریاضی شد، بلکه «شیفت» از یک کشور به کشور دیگر هم شد. یعنی مؤلفان و برنامه‌ریزان کتاب‌های قدیم، کسانی بودند که تحت تأثیر فرهنگ آموزشی فرانسه بودند، مثل مرحوم پروفسور فاطمی که یک مؤلف قدیمی بود، یا خود مرحوم احمد بیرشک که تحت تأثیر برنامه ریاضی فرانسه بود و حالا، ما یک مرتبه ریاضی فرانسه را کنار گذاشتیم و اصلاً نگاهش هم نکردیم. یک مرتبه آمدیم به‌سمت برنامه ریاضی در آمریکای پیشگام! چنین بود که یک مرتبه، آن تحولی که ملاحظه فرمودید، پیش آمد. البته همان‌طور که گفتم، این تحول، کمابیش در همهٔ کشورها به‌وجود آمد و یک مقدار تا تجربه شد که چه قسمتی از آن باید بماند و چه قسمتی باید حذف شود، مشکل ایجاد کرد.

برای نمونه، وقتی می‌خواستیم برای تغییر و تحول در کتاب حساب استدلالی قبلی که داشتیم، از غرب اقتباس کنیم، دیدیم که این حساب استدلالی ما، دیگر در جهان به این شکل، اصلاً مطرح نیست و به‌صورت نظریه اعداد همراه با یک سری اصول و فرض و به‌صورت سیستماتیک ارائه شده است، نه به‌صورتی که ما در حساب استدلالی داشتیم. مثلاً اگر کتاب ریاضیات جدید سال چهارم دبیرستان را که در سال‌های ۵۵ و ۵۶ نوشته شد، با کتاب ۱۰ سال بعدش مثلاً سال ۶۸ یا ۷۰ مقایسه کنید، می‌بینید قسمت نظریه اعداد آن به مرور، خیلی ساده‌تر شده و خیلی از مطالب آن حذف شده است. همچنین، مقداری از قسمت‌های دیگر را مانند نظریهٔ ماتریس‌ها که خیلی پیشرفته بود و راجع به محاسبهٔ مقادیر ویژه در ماتریس‌ها بود، حذف کردیم و بیشتر به جنبهٔ عملی و محاسباتی و تبدیلِ مثلاً بیضی به دایره یا هذلولی به دایره با استفاده از فرمول بسنده کردیم و به اصطلاح به‌صورت عملی، این‌ها را جانشین مطالب قبلی کردیم. ولی این کار زمان برد و طول کشید تا به آن درجه از سادگی رسیدیم.

دوست دارم در اینجا خاطره‌ای تعریف کنم. عرض کنم که من سال ۱۳۵۲ برای گذراندن یک دوره برنامه‌ریزی، از طرف دفتر به دانشگاه تگزاس در آمریکا رفتم. چیزی که آنجا به ما یاد می‌دادند، بررسی همین کتاب‌هایی بود که قبلاً اشاره کردم و در ایالت‌های مختلف آمریکا تدریس می‌شد. بعد ما در سال ۱۳۵۳ اولین کتاب ریاضیات

جدید را نوشتیم و اجرا شد. یعنی از همان سال ۱۳۵۳، کتاب‌هایی که - به‌عنوان منبع- استفاده کردیم، همان کتاب‌هایی بود که در آمریکا تدریس می‌شد و من همراهم آورده بودم.

سؤال شد مگر وقتی از آن کتاب‌های آمریکایی در ایران الگوبرداری کردیم، مصادف نبود با تغییر مجدد و پرشتاب آن کتاب‌ها در آمریکا؟ توصیف آن فضا توسط ایشان، آموزنده است.

وقتی که ما نوشتیم و شروع کردیم به اصطلاح با نفس گرم و خیلی با حرارت و با اعتقاد به اینکه این تغییر خیلی کار درستی است، آن‌ها کم‌کم داشتند از آن حرارت می‌افتادند و فکر کردند که دارند زیاده‌روی می‌کنند. در صورتی که ما تازه قرص ایستاده بودیم که «نه! هر چه می‌گوییم درست است». درست در همان زمان، کتاب‌های «گروه مطالعاتی ریاضیات مدرسه» را که توسط ۲۰- ۳۰ نفر از دانشگاهیان از ایالت‌های مختلف نوشته شد و من آن‌ها را با خودم آورده بودم، حذف کردند و به جایشان، آن‌ها را به زبان محاسباتی در آوردند و تغییراتی چنین تند دادند که ما هم دوباره، همان روال را پیگیری کردیم.

اما راجع به هندسه و تحولات آن و کتاب‌های درسی دیگر، عرض کنم که در سازمان کتاب‌های درسی، من در مقاله‌ای تحت عنوان «تأسیس سازمان کتاب‌های درسی»، سیر تحول هندسه را نوشتم و در آنجا گفتم که در ایران، هندسه اول را مرحوم رهنما نوشت و بعد، ما از هندسه فرانسوی که مهندس‌الممالک آورده بود استفاده کردیم. بالاخره در ایران، معمولاً همین‌طور است، یعنی بیشتر کارهای ما اول تجربه می‌شود و کارها را با تجربه انجام می‌دهیم، یعنی تجربه می‌کنیم و کم و زیاد می‌کنیم، تا بالاخره می‌رسیم به این هندسه‌ای که مثلاً امروز داریم. این نوع کار کردن، البته مقداری ضرر هم می‌زند و این‌گونه، ضرر هم می‌بینیم. الآن کتاب حسابان جدید را که عوض شده، به من دادند که بخوانم. دیدم که همه‌اش به صورت همان مطالب کتاب‌های حسابان قبلی است، ولی بیشتر به‌صورت مثال و کاربرد و مثال عددی و شکل است و بیشتر مطالب به اصطلاح حسی و ملموس، جایگزین آن ε و δ ای شده که قبلاً بود. در غرب هم همین را تجربه کردند. لابد این مؤلفان هم الآن، از کتاب‌های جدید غرب استفاده کرده‌اند و این کتاب‌ها را نوشته‌اند. اگر من هم می‌خواستم بنویسم، شاید به همین شیوه عمل می‌کردم که در دبیرستان، به‌صورت تجسمی و تصوری و کمتر استدلالی می‌نوشتم تا اینکه بیشتر بپردازم به استدلال و قضیه و لم و تعریف و حکم و این‌ها.

تحول و تنوع آموزش و برنامه‌ریزی درآمریکا خیلی وسیع و زیاد است. منتهی، ما در چارچوب خاص کشور خودمان و با توجه به همه بحث‌هایی که قبلاً شد، به این نتیجه رسیدیم که به‌جای اینکه تغییر را از برنامه دبیرستان شروع کنیم، از دورهٔ ابتدایی آغاز کنیم. تا قبل از سال ۱۳۴۵، تمرکز برنامه ریاضیات دبستانی تنها بر چهار عمل اصلی و تعدادی مسائل مربوط به مرابحه و تجنیس بود. بعدها، سری کتاب‌های ریاضیات دبستانی و راهنمایی را که کاملاً در آمریکا متحول شده بود گرفتند و با مختصر تغییرات زیر و زِبَری در آن‌ها، کتاب‌های ابتدایی اول تا پنجم و اول تا سوم راهنمایی نوشته شدند. این تغییرات واقعاً یک تحول کامل بود و زیربنای ریاضیات ابتدایی و راهنمایی ما عوض شد. پس از آن، ما شروع کردیم به نوشتن برنامه ریاضی و کتاب‌های ریاضی جدید و برای این مهم، اساس کار را بر مبنای کتاب‌های تازه تغییریافته ابتدایی و راهنمایی گذاشتیم. مقدمات کار از ابتدایی فراهم شده بود. برای نمونه، در آن کتاب‌ها راجع به انواع دسته‌بندی‌ها آموزش داده شده بود، مثل اینکه

«چند تا دسته هست؟»، «کدام دسته بیشتر دارد؟»، «عدد کدام بزرگ‌تر است؟» و از این قبیل؛ یعنی تمام مراحل آشنایی با مجموعه‌ها، قبلاً در کتاب‌های دورهٔ ابتدایی آمده بود و در کتاب‌های دوره راهنمایی نیز خیلی مفصل‌تر از «مقدمات مجموعه‌ها» آورده بودند که ما، تغییرات کتاب‌های دبیرستانی را روی کار آن‌ها بنا گذاشتیم و برنامهٔ جدید دبیرستان را نوشتیم. اما همان‌طور که عرض کردم، این ایام برنامه‌ریزی در ایران، مصادف شد با تلاطمی که بر اثر این تغییرات، در جهان به‌وجود آمد و این تلاطم، نواقصی را هم در برنامه‌ریزی‌ها و کتاب‌های ما به‌وجود آورد که با تجربه‌های بعدی و با مطالعات بعدی، تصحیح شد و تقریباً جا افتاد که البته، همیشه همین‌طور بوده است. اما در این رهگذر، یک عده از دانش‌آموزانی که مثلاً دلشان می‌خواست رشته ریاضی بروند ولی به علتِ همین مشکل بودنِ کتاب‌ها نرفتند یا نتوانستند بروند، صدمه دیدند و عده دانش‌آموزان ورودی به رشته ریاضی، به شدت تقلیل پیدا کرد. ولی بعد به مرور جبران شد و برنامه‌ها روی روال خودش افتاد.

نکتهٔ دیگری که می‌خواهم اشاره کنم این است که من در شورای گروه، صورت جلسه‌ها را دقیق می‌نوشتم که این هم روی تجربه بود. چون وقتی کتاب و برنامه بیرون می‌آمد، اعتراض می‌کردند که یک عده دور هم جمع شده‌اید و خودتان از ذهن خودتان، برنامه نوشته‌اید. من همه این صورت‌جلسه‌ها را داشتم و ای‌کاش این‌ها را همه کلمه کلمه می‌خواندند. متأسفانه این صورت‌جلسه‌ها را توی یک کمد گذاشته بودم توی دفتر. روزی یکی از مسئولان آمده بود و گفته بود که کمد باید برود بیرون تا به جایش یک میز بیاید. تمام صورت‌جلسه‌ها که اسناد برنامه درسی ریاضی قبل از تغییرات نظام جدید بعد از انقلاب بود، در همین کمد نگهداری می‌شد. یک روز آمدم دیدم همه آن‌ها را دم در، توی کوچه و پیاده‌رو ریخته‌اند. همان جا نشستم و مشتی از آن‌ها را جمع کردم[5].

علاوه بر این، خاطرم هست وقتی که مجدداً در غرب، تحولاتی در کتاب‌های درسی ریاضی به‌وجود آمد و کتاب‌ها را سبک کردند، ما هم مجبور شدیم مقداری کتاب‌هایمان را رقیق کنیم. آن موقع یادم هست که خیلی ناراحت بودم از اینکه این‌قدر به مدارس فشار آوردیم و به دبیران با تأکید گفتیم که این کتاب‌ها درست هستند و حتماً «مو لای درزشان نمی‌رود». اما سال بعدش مجبور شدیم همان قسمت‌هایی را که دبیران می‌گفتند «دانش‌آموزان این‌ها را نمی‌فهمند»، حذف کنیم و این، در روحیه من خیلی اثر گذاشت. من از آن دبیر خیلی خجالت می‌کشیدم!

حالا یادم افتاد که بعد از اینکه کتاب «ریاضیات جدید» سال اول دبیرستان منتشر شد، یک بار با وزیر وقت آموزش‌وپرورش در مورد دوره‌های بازآموزی معلمان ریاضی برای تدریس این کتاب، مشورت کردیم. قرار شد که مدیر کل دفتر تألیف بخشنامه‌ای برای دانشگاه‌ها بفرستد و از آن‌ها بخواهد تا برای دبیران ریاضی، کلاس‌های بازآموزی بگذارند. حالا دقیق یادم نیست که خود دفتر نامه‌ای نوشت یا از طرف خود وزیر نامه‌ای به دانشگاه‌ها ارسال شد و در آن، درخواست شده بود که همهٔ دانشگاه‌هایی که امکان برگزاری این دوره‌ها را دارند، طبق ریزموادی که همراه نامه فرستاده شد، برای دبیران ریاضی کلاس‌های بازآموزی بگذارند. دانشگاه صنعتی شریف، دانشگاه تهران و دانشگاه تربیت معلم (خوارزمی)، هر یک جداگانه این دوره‌ها را گذاشتند.

برای حسن ختام، باید بگویم که ما، قبل از اینکه کتاب‌های دبیرستانی بیرون بیایند، فکر کردیم که اگر یک برنامه بازآموزی در دانشگاه‌ها گذاشته شود، برای دبیران مفید است. با توجه به اینکه کتاب سالِ ۱ شامل مجموعه‌ها و منطق بود، بخشنامه کردیم، یعنی نامه نوشتیم به دانشگاه‌ها که دوره‌های بازآموزی بگذارند. برای دبیران سال ۱۳۵۱،کلاس‌های بازآموزی گذاشته شد و کتاب‌ها صفحه به صفحه، آموزش داده شدند.

در پایان این جلسه، بحث‌ها تازه داغ شده بود و با ورق خوردن این برگ از تاریخِ تغییر و تحولات برنامه درسی ریاضی در ایران، ده‌ها سؤال جدید و جدی در ذهنمان شکل گرفت. هر یک از این سؤال‌ها می‌تواند موضوع یک پایان‌نامه با ارزش کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. School Mathematics Project: SMP
2. School Mathematics Study Group: SMSG
3. Euclid Must Go!
4. Mathematics Education

۵. در اینجا، من (زهرا گویا) به ایشان مژده دادم که به سبب علاقه‌ای که به سیر تحول برنامه درسی ریاضی در ایران داشتم، بخشی از آن صورت‌جلسه‌ها را کنار آسانسور و توی خیابان دیدم و با اشتیاق، جمعشان کردم و خوشحالم که این منبع قوی تحقیقی را به‌دست آوردم. عجب تصادفی!

کلیدواژه‌ها: محور اعداد، حل معادلات خطی، توسعه فهم جبری

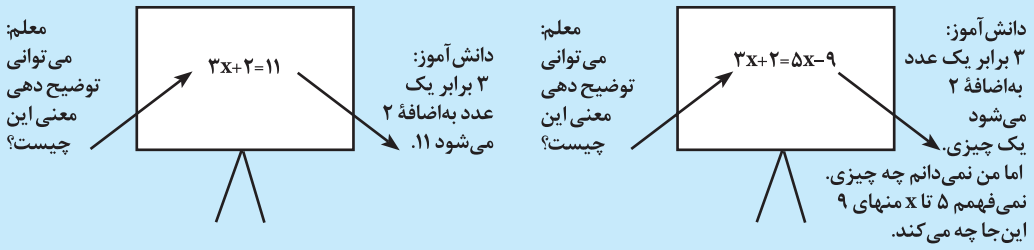
برنامهٔ درسی (DfEE,2001) دانش‌آموزان یازده‌ساله بریتانیا، که در حال حاضر در اغلب مدارس اجرا می‌شود، شامل حل معادلات خطی است با یک مجهول، تنها در یک طرف، که در سال‌های بعد، به معادلاتی که مجهول آن در دو طرف تساوی است، می‌رسد. دو پیشنهاد در *چارچوب تدریس ریاضی*[1] داده شده است:

اولی: با استفاده از عملیات معکوس (ص ۱۲۲)

دومی: آغاز به فهمیدن اینکه یک معادله می‌تواند ترازویی تصور شود که در آن، به شرط آنکه عملیاتی در هر دو طرف انجام شود، معادلهٔ حاصل درست باقی می‌ماند. (ص ۱۲۵)

در این توصیه‌ها، به‌طور ضمنی این باور وجود دارد که وقتی از یک نوع از معادلات به نوع دیگر حرکت می‌کنیم، یک تغییر سطح معنادار در پیچیدگی، و بنابراین نیاز به مجموعه‌ای متفاوت از راهبردهای حل، وجود دارد. بحث کلاسی زیر (شکل ۱ را ببینید) که اخیراً توسط نویسندگان مشاهده شده است، این نکته را تأیید می‌کند.

این تغییر سطح در پیچیدگی به‌خوبی ثبت شده است و گاهی اوقات به‌عنوان «برش آموزشی[2]» به آن اشاره می‌شود (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۵، ۱۹۸۹؛ هرکوویکس و لینچوسکی، ۱۹۹۱، ۱۹۹۶). به‌نظر می‌رسد مبنای این «برش»، تعبیر علامت مساوی به‌عنوان «سیگنال انجام کاری» (بهر و دیگران، ۱۹۷۶؛ کی‌ران، ۱۹۸۱) باشد به‌جای در نظر گرفتن آن به‌عنوان «یکی بودن کمّی» (بولتون- لویس و دیگران، ۱۹۹۷؛ سانز- لودلو و والدگراو، ۱۹۹۸) دو طرف. یعنی، عبارت سمت چپ معادله یک فرایند دیده می‌شود، و در نتیجه سمت راست باید نتیجهٔ (حسابی) این فرایند را نشان دهد. به این ترتیب، $3x+2=11$ با معکوس کردن یا «خنثی کردن[3]» عملیات داده شده حل می‌شود و هیچ نیازی نیست که مستقیماً روی مجهول کار کنیم. اما برای حل $3x+2=5x-9$، «خنثی کردن» کافی نیست، حال لازم است که مستقیماً روی مقدار مجهول عمل کنیم. اسفارد (۱۹۹۱) این تمایز را بین درک عملیاتی (به‌عنوان فرایندها) یا ساختاری (به‌عنوان اشیاء) نمادهای جبری توصیف می‌کند و «یک شکاف عمیق هستی‌شناسانه[4]» (ص ۴، تأکید از مرجع است) بین این دو می‌بینند.



شکل ۱: بحث کلاسی در مورد معادلات خطی

استفاده از محـ

در حالی که بسیاری از معلم‌ها مشغول پل زدن روی این شکاف و معنا دادن به این معادلات و راهبردهای حل آن‌ها هستند، مثلاً، با استفاده از استعارهٔ ترازو (ولاسیس، ۲۰۰۲ را برای ارزیابی جدیدی از این راهبرد ببینید)، شواهد نشان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان حل معادلات، مسئلهٔ یادگیری قواعد و انجام دستورزی‌ها، کورکورانه باقی می‌ماند. در بهترین حالت، آن‌ها «قصه‌ای[۵]» (پیم، ۱۹۹۵، ص ۸۹) می‌سازند تا این معادلات را حل کنند، مانند «آن را ببر به طرف دیگر و علامتش را عوض کن».

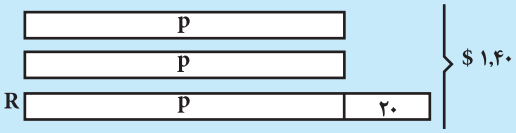
کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعهٔ فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند (ویجرز، ۲۰۰۱).

در این مقاله، تلاشی را شرح می‌دهیم که به منظور تشویق دانش‌آموزان به بهره‌گیری از یک تصویر آشنا، یعنی محور اعداد، برای حل مشکلاتی است که در بالا توضیح دادیم. اما چیزی که باید روی آن تأکید شود این است که ما، مطالبی را که در ادامه می‌آید به هیچ‌وجه روش جدیدی برای حل معادلات یا صورت جدیدی برای نمایش آن در نظر نمی‌گیریم. این تنها بهره‌گیری از تصویری است که دانش‌آموزان با آن راحت‌اند، تا از توسعهٔ فهم آن‌ها از معادلات خطی از طریق دست‌یابی به راهبردهای حل موجود، پشتیبانی شود. این یک تمایز جدّی است و در طول مقاله، چند بار به آن اشاره می‌شود.

آغاز

ما چند سال پیش در همایشی در مورد رویکرد «مدل» شرکت کردیم که در مدارس سنگاپور، برای کمک به حل مسائل جبری «مرتبه بالا» توسط دانش‌آموزان دبستانی استفاده می‌شد (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵). شکل ۲ مثالی از این رویکرد را نشان می‌دهد.

یک خط‌کش و دو مداد ۱٫۴۰ دلار قیمت دارند.
قیمت یک خط‌کش ۲۰ سنت بیشتر از یک مداد است.
قیمت یک خط‌کش را بیابید.



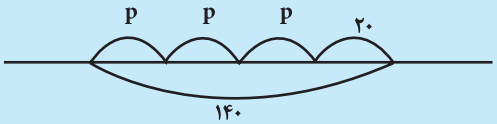
شکل ۲:
استفاده از رویکرد مدل سنگاپوری برای حل یک مسئله. (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵، ص ۳۴)

مقاله

محور اعداد
برای کنکاش در حل معادلات خطی

نویسندگان: پل دیکینسون و فرانک اید
مترجم: شیوا زمانی ـ دانشیار دانشگاه صنعتی شریف

وقتی ما تلاش کردیم مسائل پیچیده‌تری حل کنیم، با این مشکل مواجه شدیم که اگر می‌خواستیم این رویکرد جدید را به‌طور کامل کشف کنیم، باید دانستنی‌های جبری موجود خود را کنار می‌گذاشتیم. در این مرحله، برخی از افراد گروه همایش کم‌کم احساس کردند راحت‌ترند که به‌جای استفاده از یک سری از بلوک‌ها، از یک محور اعداد خالی استفاده کنند (شکل ۳ را برای این نمایش جدید ببینید).

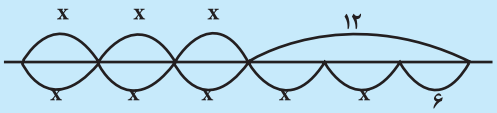


شکل ۳: استفاده از یک محور اعداد برای حل مسئله.

از این‌جا، دیگر به‌نظر می‌رسید که گام کوچکی تا نمایش معادلاتی مانند

$۳x+۱۲=۵x+۶$

روی یک محور اعداد دوبل مانده باشد (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴: استفاده از محور اعداد برای حل معادلاتی با مجهول در دو طرف.

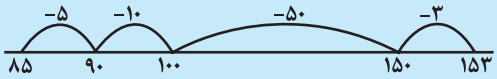
کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعهٔ فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند

به این‌جا که رسیدیم، از مشاهدهٔ بلافاصلهٔ (برای ما) $۲x+۶=۱۲$ یکّه خوردیم، و تصمیم گرفتیم این نمایش را، به‌عنوان موضوعی برای تحقیق، برای گروهی از معلم‌ها ارائه دهیم. اعضای گروه تحقیق شامل حدود ده معلم ریاضی بودند از تعدادی از مدارس نزدیک به دانشگاه، که ما به‌عنوان کارآموزان معلمی در آن‌ها کار می‌کردیم. آن‌ها تا آن موقع هم به‌طور منظم جلساتی داشتند تا در مورد تجارب کلاس‌های خود بحث کنند. این جلسات، از بازتاب نوشته‌های علمی مرتبط، تا بحث روی روش‌های کار در کلاس را شامل می‌شد. این مقاله، کار اولیهٔ گروه را در ارتباط با این موضوع شرح می‌دهد.

از معلم‌ها خواسته شد تا این ایده‌ها را به روشی یکسان معرفی کنند، از درس‌ها یادداشت‌برداری کنند و کپی‌کارهای دانش‌آموزان را نگه دارند. از بعضی از درس‌ها برای جمع‌آوری بهتر داده‌ها نوار ویدیویی تهیه شد. نتایجی که در این‌جا گزارش می‌شود، نتایج ادغام شدهٔ تجربه‌های تمام کلاس‌هاست.

درس‌های اول

به‌نظر می‌رسید که آشنایی با محور حقیقی برای دانش‌آموزان مهم باشد. به این ترتیب، وقتی این ایده برای اولین‌بار به کلاس‌های درس برده شد، از معلم‌ها درخواست شد که چند تمرین آماده‌سازی (اغلب یک‌سری از دست‌گرمی‌های ذهنی[۶]) روی محور اعداد برای حل مسائل جمع و تفریق انجام دهند. برای مثال، مسئلهٔ ۶۸-۱۵۳ می‌تواند مانند شکل ۵ یا ۶ نمایش داده شود.



▲ **شکل ۵: پرش‌های منها برای حل ۶۸-۱۵۳.**

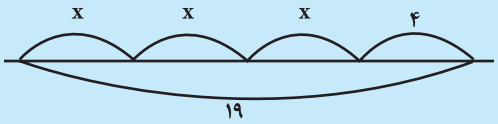
▼ **شکل ۶: پرش‌های جمع برای حل ۶۸-۱۵۳.**

اگر چه در ابتدا واضح نیست، اما بعدها برای دانش‌آموزان مفید خواهد بود که ذهن خود را از پرش روی محور، به‌عنوان نمایشی از اندازه‌های واقعی، رها کنند. اوایل دیده می‌شد که پرش‌های مثلاً بیست، به‌طور منظم با اندازه‌ای دو برابر پرش‌هایی به اندازهٔ ده رسم می‌شدند. اما، سرانجام به‌نظر می‌آمد که دانش‌آموزان از رسم نمودارهایی مانند شکل ۷ راضی بودند.

شکل ۷: عبور از دیدن پرش‌ها به‌عنوان «مدلی از» به‌سمت «مدلی برای» چیزی.

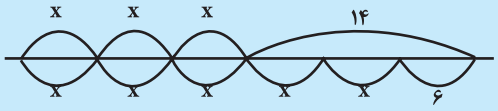
این می‌توانست نشانه‌ای ابتدایی باشد از اینکه دانش‌آموزان شروع کرده بودند به عبور از دیدن پرش‌های محور اعداد به‌عنوان «مدلی از» چیزی، به سمت «مدلی برای» آن چیز؛ حرکتی که اولین‌بار توسط استریفلند (۱۹۹۱) شناسایی شد. اگرچه همان‌طور که بعداً در این مقاله بحث می‌شود، این تغییر سطح ممکن است لزوماً دائمی نباشد. اما مهم این است که دانش‌آموزان بتوانند به‌طور موفقیت‌آمیز از روش‌های غیررسمی به دانش ریاضی رسمی‌تر عبور کنند (گراونمیجر ۱۹۹۰).

به‌دنبال این دســت‌گرمی‌ها، معلم‌ها به‌ســادگی با نوشــتن ۳x+۴=۱۹ روی تخته و ســپس (آرام آرام) کشیدن نمایش شکل ۸ معادلات را معرفی کردند.



شکل ۸: نمایش ۳x+۴=۱۹.

در ابتدا از دانش‌آموزان خواسته شد به معلم بگویند چــه چیزی می‌بینند. یک نتیجهٔ فوری این کار، تعداد مشکلات شناخته شده‌ای بود که این سؤال کمک کرد تا برجسته شــوند. به‌ویژه که تعدادی از دانش‌آموزان گفتند که «تمام xها یکی هستند»، و عده‌ای پرسیدند که «آیا چنین چیزی درست است؟». پاسخ‌های دیگر شــامل این‌ها بود: «۳ برابر یک عــدد به اضافهٔ چهار، برابر نوزده اســت»، « ۳ تا x باید پانزده باشــد»، و «x پنج اســت». این آخری پاسخی بسیار متداول بود که اگرچه به وضوح مفید بود، همان‌طور که در زیر روشن‌تر می‌شود، بارها علیه ما عمل کرد.

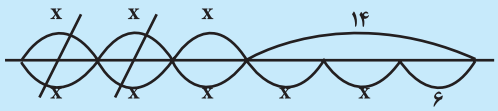


شکل ۹: نمایش ۳x+۱۴=۵x+۶.

در دســترس بودن واضح این مــدل، به کلاس‌ها اجازه داد که تقریباً به‌سرعت به‌سمت مسائلی که دارای مجهــول در دو طرف بودند حرکــت کنند و در همان جلســهٔ دوم، معلم‌ها مسئلهٔ شکل ۹ را به دانش‌آموزان معرفــی کردند و بــاز آن‌ها را برای گفتــن اینکه چه می‌بینند به چالش کشیدند.

قابل‌توجــه بود که در یکــی از کلاس‌ها، بعضی از دانش‌آموزان نوشــتند ۳x+۱۴= و ۵x+۶=، پاسخی که از خیلی جهات شبیه نظر دانش‌آموزان ابتدای مقاله بود: ۳ برابر یک عدد به‌اضافهٔ ۲ می‌شــود یک چیزی. اما من نمی‌دانم چه چیزی. نمی‌فهمم ۵ تا x منهای ۹ این‌جا چه می‌کند.

پاســخی مانند این می‌توانســت نشــان دهد که دانش‌آمــوز احتمالاً به یافتن دو مقــدار مختلف برای x فکــر می‌کند که در معادله صدق کنند (اســفارد و لیچوسکی، ۱۹۹۴ را ببینید). اما، خیلی از دانش‌آموزان دیگر، به روشــنی تساوی مستتر در شکل را که گاهی اوقات «طول برابر» می‌نامیدند، تشــخیص دادند. چیز دیگــری که قابل‌توجه بود، تعداد دانش‌آموزانی بود که ۲x+۶=۱۴ را به‌عنوان چیزی که می‌توانســتند ببینند شناســایی کردند، و خیلی‌های دیگر که مستقیماً به «x برابر ۴ است» رســیدند. گزارهٔ اخیر با چک کردن پرش‌های روی محور به‌دســت آمده بود، که باز برای اکثریت دانش‌آمــوزان به‌نظر دســت‌یافتنی می‌آمد. قابل‌توجــه بود که حتــی در این مرحلــه، تعدادی از دانش‌آموزان، وقتی از آن‌ها درخواست شد ایده‌هایشان را ساده بیان کنند، شــروع کردند به پوشاندن یا خط زدن xها تا مسئله را ســاده کنند. نمایش‌هایی مانند شکل ۱۰ را می‌شد تقریباً به‌طور متداول در کتاب‌های تمرین دانش‌آموزان دید.



شکل ۱۰: خط کشیدن روی xها برای ساده کردن مسئله

گزاره‌هایی مانند ۲x+۶=۱۴، و در صورتی که معلم‌ها دانش‌آمــوزان را به آن ســوق می‌دادند x+۱۴=۳x+۶، به‌ویژه جالب بود، زیرا مانند علامت‌های امیدبخشــی بودند از طــرف دانش‌آموزانی که دیدن عبارات جبری را به عنوان اشــیاء و نه فقط فرایندها، آغاز کرده بودند (بــرای بحثی پیرامون اهمیت ایــن تمایز، برای مثال کرولــی و دیگران را ببینید (۱۹۹۴)). به این نکته بعداً در این مقاله با جزئیات بیشتری برمی‌گردیم.

اما، ایــن «دسترســی» واضح، برای بســیاری از دانش‌آموزان خطراتی را ایجــاد کرد، و اولین باری که به آن‌ها با تصاویر تدریس شــد، خیلی از معلم‌ها این احساس را گزارش کردند که دانش‌آموزان در حقیقت با سرعتی بیش از حد به‌سمت مسائل پیچیده‌تر حرکت می‌کنند. وقتی موضوع برای بار دوم تدریس شد، معلم‌ها تلاش کردند کاری کنند که بحث بیش‌تر روی برابری دو طرف محور متمرکز شــود، و توجــه دانش‌آموزان به‌جای حل معادلات، به این برابری معطوف شــود. اما این کار در برخی از کلاس‌ها به فشــار تبدیل شد، زیرا دانش‌آموزان همین که «جواب» معادله را می‌فهمیدند دیگر تمایلی برای درگیر شدن در این موضوعات از خود نشان نمی‌دادند. این، البته چیز جدیدی نیست و حتی در مواردی که تلاش می‌شــود به برخی دانش‌آموزان راهبردهای حل پیچیده‌تری (مثل معادل کردن) برای معادلاتی معرفی شــود، که بسیاری از آن‌ها می‌توانند

آن‌ها را ذهنی حل کنند، متداول‌تر است (بیشتر «معادلات حسابی» در این رده هستند).

توسعهٔ ریاضی

دیدن اینکه دانش‌آموزان یازده‌سالهٔ با توانایی در حد متوسط، معادلاتی مانند:

$۳x+۱۷=۸x+۷$

را «حل می‌کنند» و قادرند کاری را که انجام می‌دهند توضیح دهند، ما را، برای تأیید در دسترس بودن این مدل، تقریباً تا آخر راه می‌برد. باز تأکید می‌کنیم که در نظر گرفتن این مدل به‌عنوان ابزاری که دسترسی به راهبردهای حل را تضمین می‌کند، و نه به‌عنوان راهبردی به‌خودی‌خود، اهمیت دارد. در این مرحله از توسعهٔ کار، خیلی راحت (و متأسفانه متداول) است که یا با مثال‌های مشابه بسیار، تنها در مرحلهٔ امتحان «روش» باقی بمانیم، یا مدل را کنار بگذاریم و به سراغ «معادلات سخت‌تر» برویم. اما هدف، هیچ یک از این دو نیست. هدف، استفاده از ایده‌هایی است که دانش‌آموزان توسعه داده‌اند، و تشویق آن‌ها برای رسمیت بخشیدن به این ایده‌هاست.

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند. ما معتقدیم که در این‌جا، تمایز ترفر (۱۹۸۷) بین ریاضی‌سازی افقی و عمودی مهم است؛ در این مورد، «افقی» را توانایی نمایش یک معادله روی محور اعداد و حل آن، و «عمودی» را توسعه و رسمیت بخشیدن به راهبردهای حل تعبیر می‌کنیم که نهایتاً، قابل‌تعمیم هستند. در این مرحله، سؤالاتی که از دانش‌آموزان شد اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت و معلم‌هایی که در درس‌های قبلی توانسته بودند توجه دانش‌آموزان را از جواب‌های واقعی پرت کنند، حال موفقیت بیشتری داشتند. برای مثال، در مورد

$۳x+۱۴=۵x+۶$

یک رویکرد مشترک این بود که از دانش‌آموزان بخواهیم تعدادی گزاره را که می‌دانستند باید درست باشند ارایه دهند و آن‌ها را توجیه کنند. برخی از دانش‌آموزان به $x+۱=۵$ که می‌رسیدند، می‌گفتند «چون می‌دانیم x، ۴ است»، و وقتی چنین چیزی بارها اتفاق افتاد، بعضی از معلم‌ها لازم دیدند برای اینکه بتوانند ادامه دهند، باید از معادلاتی شروع کنند که جواب آن‌ها غیرصحیح باشد.

مرحلهٔ بعد این بود که به دانش‌آموزان تعدادی گزاره بدهیم و از آن‌ها بخواهیم دلیل بیاورند که آیا می‌توان آن را از معادلهٔ اصلی استنتاج کرد یا خیر. این گزاره‌ها به‌صورت زیر بودند (با استفاده از $۱۴+۳x = ۵+۵x$ به‌عنوان معادلهٔ اصلی):

$۱۴+۳x=۵x+۶$

$۳x+۲۰=۵x+۱۲$

$x+۱۴+۳x+۶$

$۵x+۱۴=۷x+۶$

و معادلهٔ چالشی‌تر $۶x+۲۸=۱۰x+۱۲$

و معادلهٔ مهم $۱۴=۸x+۶$

$۶x+۱۴=۱۰x+۵$

و از این قبیل.

کلاس‌ها با دانش‌آموزانی که برای یافتن عبارات «متفاوت» و مواجه کردن هربارهٔ آن‌ها به چالش کشیده می‌شدند، خیلی زود پر از عبارات معادل شد. چنین «تولیدات آزاد»ی در مورد نوع راهبردهایی که در حال حاضر دانش‌آموزان به‌کار می‌گیرند، اطلاعات زیادی می‌داد (استریفلند، ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ را برای بحث بیشتری در مورد ارزش درخواست از دانش‌آموزان برای تولید چنین کاری، ببینید). در حالی که دانش‌آموزان ممکن بود در این مرحله، بیشتر با آزمون عملیات رویه‌ای مربوط به حل معادلات درگیر شوند، توجیهات آن‌ها به شکلی یکسان به وجوهی اشاره داشت که بیشتر ساختاری بودند. چنین چیزی در تجربهٔ ما، تقریباً نادر بود و بعداً در جمع‌بندی این مقاله، روی آن بیشتر بحث می‌شود.

به‌عنوان مثال، اضافه کردن $۲x$ به دو طرف، تقریباً با اعتماد کاملی روبه‌رو می‌شد، با دانش‌آموزانی که به‌طور منظم نظراتی از این قبیل می‌دادند که

«تا وقتی که شما یک تعداد x را به دو طرف اضافه می‌کنید، طول‌های (روی محور) هم‌چنان یکی است». همچنین، خاصیت‌های تقارنیِ تساوی به‌نظر بسیاری از دانش‌آموزان بدیهی می‌آمد. در واقع در این مرحله، به‌ندرت دانش‌آموزانی را می‌توان پیدا کرد که جدل کنند یا با مفهوم تساوی مشکلی داشته باشند.

در این تجربه‌ها، بحث در مورد اینکه چه راهبردهایی «مجاز» هستند، متداول بود. همچنین، روشن شد که دانش‌آموزان تولید چنین راهبردهایی را با اشاره به معادله و نه محور اعداد شروع کرده بودند (صورت جبری هر معادله همیشه همراه با مدل در تمام جلسات درس ارائه شده بود). شروع به عمل کردن دانش‌آموزان بر روی نمادها، به‌عنوان اشیاء، به‌وضوح یک گام بلند بود، اگرچه هنوز مهم بود که معلم‌ها به‌طور منظم، مطمئن شوند که دانش‌آموزان برای اینکه به توجیه راهبردهایشان ادامه دهند، می‌توانند از تصویر اصلی استفاده کنند. در حقیقت، در تمام طول کنکاش، اینکه این نمایش در دسترس باشد و دانش‌آموزان بتوانند در هر زمانی به آن برگردند، محور اصلی بود.

یکی دیگر از راهبردهایی که در این زمان به‌کار گرفته شد، پرسیدن سؤالاتی به‌صورت زیر بود:

۴۸x+۲۴=۲۷x+۸۷

این صورت از معادله، اطلاعات ارزشمندی از میزان پیشرفت دانش‌آموزان فراهم کرد. پاسخ‌ها از آن‌هایی که می‌خواستند ۴۸ پرش تکی برای x بکشند، بعضی‌ها که ۴۸ را به‌صورت چهارتا ده و یک ۸ نمایش دادند، تا آن‌هایی که (به طور تأثیربرانگیزی) نمایش شکل ۱۱ را کشیدند، تغییر می‌کرد.

اما این هم قابل توجه بود که بسیاری از دانش‌آموزان سؤال کردند که آیا باید یک محور اعداد بکشند، با ادعای اینکه «می‌توانند ببینند» که ۲۱x+۲۴=۸۷. وقتی باز هم به چالش کشیده می‌شدند، برخی عنوان می‌کردند که در «ذهن خود»، محور اعداد را «تصور کردند»، در حالی‌که دیگران فقط روی معادله عمل می‌کردند.

ما معتقدیم که قسمت اعظم کارهای بالا، مشابه ایدهٔ «انجام یک کار در هر دو طرف» است، و بعضی از دانش‌آموزان شروع کردند به شفاف سازی راهبردهایشان با همین نوع عبارات، یعنی گاهی با اشاره به «دو طرف محور»، و گاهی «دو طرف معادله». مهم این است که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعهٔ رویه‌ها

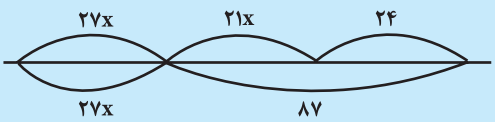
مهم این است که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعهٔ رویه‌ها و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشتند، به آن بازگردند. نتیجهٔ نهایی ممکن است یکی باشد، اما سطح درک بسیار متفاوت است

و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشتند، به آن بازگردند. نتیجهٔ نهایی ممکن است یکی باشد، اما سطح درک بسیار متفاوت است. این ایده، در یادگیری ریاضیات از طریق گذار از ساخت و سازهای ریاضی غیررسمی خود به ریاضیات رسمی‌تر، در رویکرد آموزش ریاضی واقع‌گرا (RME)[۷] نیز که در هلند توسعه‌یافته، به‌طور بسیار موفقی استفاده شده است (ترفر ۱۹۹۱ را ببینید).

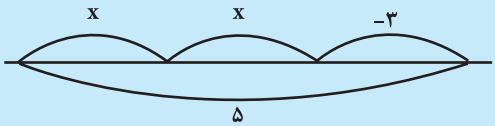
استفاده از اعداد منفی

اینکه کی و چگونه اعداد منفی معرفی شوند، موضوعی است که در تحقیق آتی به آن نگاه شده است. اما نمایش واقعی معادلاتی که شامل آن‌ها هستند، جالب است. زمانی که این مدل در کلاس‌ها استفاده شد، نمایش‌های ممکن متعددی ظاهر شد. چهار نمایش زیر برای معادلهٔ ۲x-۳=۵ مورد بحث قرار گرفته است.

۱. بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا می‌خواستند که از نمادگذاری شکل ۱۲ استفاده کنند. این نمایش چون قرارداد مورد پذیرش روی محور اعداد را رعایت نمی‌کرد، اگرچه اجازهٔ حل بعضی از معادلات را می‌داد، حذف شد. در این‌جا، انجام کارهای قبلی برای سؤال‌های جمع و تفریق روی محور اعداد به دانش‌آموزان کمک کرد.

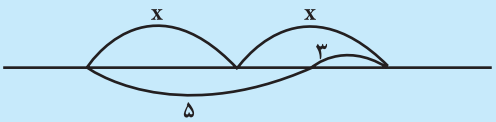


شکل ۱۱: نمایش دانش‌آموز از ۴۸x+۲۴=۲۷x+۸۷.



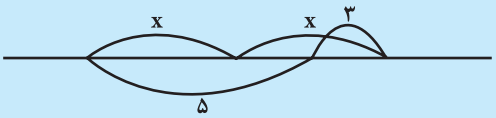
شکل ۱۲: اولین نمایش برای ۲x-۳=۵.

۲. و ۳. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توسط بسیاری از دانش‌آموزان استفاده شد، و به‌نظر می‌رسد بازتاب روشی است که در اکثر مدارس، تفریق را روی یک محور اعداد نمایش می‌دهند.



▲ شکل ۱۳: نمایش دوم برای ۵=۳-۲x.

شکل ۱۴: نمایش سوم برای ۵=۳-۲x. ▼

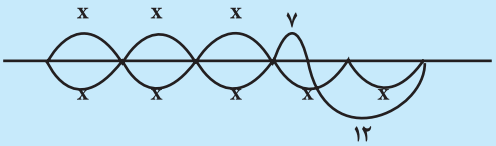


این نمایش‌ها باز هم به دانش‌آموزان اجازه می‌دادند که به راهبردهای حل دست یابند. برای مثال،

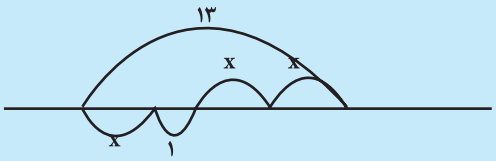
۳x+۷=۵x-۱۲

اکنون مانند شکل ۱۵ دیده می‌شود که از آن، سؤالاتی مشابه قبل می‌تواند مطرح شود، یا یک «جواب» از روی ۷=۱۲-۲x، یا مستقیماً با دیدن ۱۹=۲x می‌تواند به‌دست آید.

به‌طور مشابه، ۱+x=۲x-۱۳ می‌تواند مانند شکل ۱۶ نمایش داده شود.

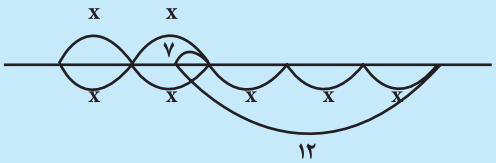


شکل ۱۵: نمایش معادله‌ای با یک مجهول در هر دو طرف و یک عدد منفی.



شکل ۱۶: نمایش ۱+x=۲x-۱۳.

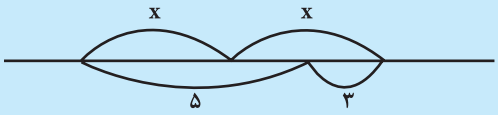
و ۱۲-۵x=۷-۲x مانند شکل ۱۷.



شکل ۱۷: نمایش ۱۲-۵x=۷-۲x.

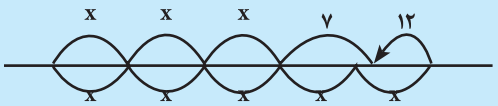
یک مانع ممکن برای این نمایش، ظهور مجدد موضوع اندازهٔ پرش‌ها روی محور بود. برای مثال، در معادلهٔ بالا، دانش‌آموزان نگران این بودند که برای ۷- «چقدر باید به عقب برگردند»، و آیا پرشی به اندازهٔ ۷ بزرگ‌تر از پرشی به اندازهٔ x است یا نه. جالب بود که حتی برای دانش‌آموزانی که موفقیت‌های بالایی هم داشتند، این دغدغه وجود داشت. آن‌ها در پرسش‌های قبلی، به وضوح به اینکه مدل را تنها به‌عنوان نمایشی «برای» معادله ببینند، رسیده بودند. این گام عقب‌گرد را می‌توان به‌عنوان مثال خاصی از پدیده‌ای دید که در موقعیتی مشابه، توسط فیلوی و روحانو (۱۹۸۹) شناسایی شده و آن را «از دست دادن موقت توانایی‌های قبلی، همراه با رفتارهایی که روی مدل تثبیت شده‌اند» (ص ۲۱) توصیف کرده است. اما واضح است که این مانع، غیرقابل عبور نیست و بحثی را موجب می‌شود که به‌خودی‌خود مفید است.

۴. اولین‌باری که شکل ۱۸ دیده شد، وقتی بود که یک دانش‌آموز آن را به‌عنوان بخشی از یک تکلیف کشید. معلم در ابتدا مطمئن نبود که آن را بپذیرد یا نه، اما تقریباً قانع شد. زیرا بلافاصله بسیاری دیگر از دانش‌آموزان خواستند که آن را به‌کار گیرند.



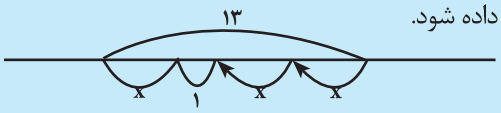
شکل ۱۸: نمایش چهارم برای ۵=۳-۲x.

به‌این ترتیب، برای مثال، این نمایش ۱۲-۵x=۷+۳x را مانند شکل ۱۹ نشان می‌دهد.



شکل ۱۹: نمایش ۱۲-۵x=۷+۳x.

و ۱+x=۲x-۱۳ می‌تواند مانند شکل ۲۰ نمایش داده شود.



شکل ۲۰: نمایش ۱+x=۲x-۱۳.

جالب بود که در مدرســه‌ای که این نمایش ظاهر شد، دانش‌آموزان شروع به توصیف انتقال‌های دیگری روی معادلات کردند که قبل از آن، در نظر گرفته نشده بود. برای مثال، ۱+x=۲x-۱۳ به وضوح معادل است با ۱+x+۲x=۱۳ و ناگهان تصویر «عبور جملات از علامت تساوی» شروع به ظاهر شدن کرد.

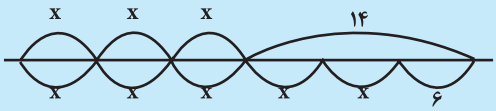
وقتی این اتفاق افتاد، به‌نظر رسید که مهم است به پرسش‌های قبلی بازگردیم. نمایش ۶+x۵=۱۴+x۳ که در شکل ۲۱ نشان داده شده است، به عباراتی مانند:

۱۴+x۳-۶=x۵

۱۴+x۳-۶-x۲=x۳

۶+x۵-۱۴-x۳=۰

منتهی شد. این اکتشــاف‌ها، به بحث‌های زیادی در این‌باره منجر شد که چیزی که دارد اتفاق می‌افتد، چگونه با مفهوم «دو طرف» که در جلسات درسِ قبل در ذهن‌ها بود، مقایسه می‌شود.



شکل ۲۱: بازگشت به یکی از نمایش‌های قبلی، ۶+x۵=۱۴+x۳.

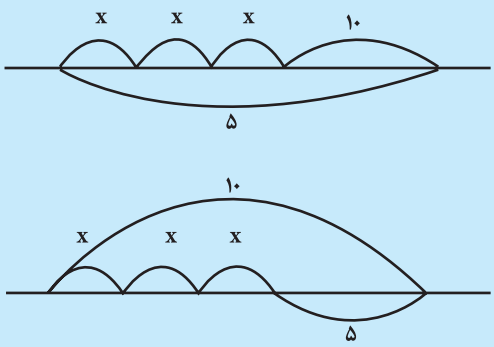
نتایج و محدودیت‌های مدل

برخی از دانش‌آموزان ما، حالا آزمون‌های مدرسه‌ای و نیز ملّی را که در سنین چهارده و شانزده گرفته می‌شود داده‌اند. نتایج اولیه امیدبخش است. مطمئناً تصویر محور در ذهن تعداد نسبتاً زیادی از دانش‌آموزان نقش بسته است، و ما به‌طور منظم دیدیم که بیش از ۵۰ درصد از یک کلاس، نموداری می‌کشیدند تا به آن‌ها در حل یک معادله کمک کند. این احساس متفاوت با تجربهٔ ما، در کار با تصاویر دیگری مانند تــرازو بود که دانش‌آموزان پس از آن که یک‌بار مدل را «کنار گذاشتند»، به‌ندرت آن را به‌کار می‌گرفتند (بولتون- لویس و دیگران، ۱۹۹۷ را برای شواهد دیگری از آن ببینید).

این هم درســت بود که معلم‌ها، بیش از آنچه قرار بود، با محور اعداد ماندند، در حالی‌که تلاش می‌کردند مثال‌هایی خلق کنند که دانش‌آموزان را تشــویق کند از محور دور شــوند و در همان حــال، به دیگرانی که می‌خواســتند با آن باقی بمانند، ایــن اجازه را بدهند. خیلی از معلم‌ها، وقتی در این مورد از آن‌ها سؤال شد، به در دسترس بودن و ماندگاری مدل، به‌عنوان دلیلی برای این تغییر رویکرد، اشاره کردند.

به‌نظر می‌رســد کــه مدل، اجازهٔ حرکات نســبتاً طبیعی را هنگام سروکار داشتن با صورت‌های مختلف یک معادله می‌دهد. برای مثــال، ۵=۲x+۱ همان‌قدر دســت‌یافتنی به‌نظر می‌آمد که ۵=۱+x۲ و ۱+x۲=۵. اما ۱+x۲=x۳ از نوع معادلاتی مثل ۱+x۲=x۳ دیده می‌شد، و وقتی به‌صورت ۱+x۲=x۳+۲ نوشته می‌شد، دانش‌آموزان با «باز مرتب کردن» معادله، برای رسم آن راحت بودند. این با برخی مدل‌های دیگر که یک ترتیب مجدد، یا حرکت به‌سمت ضرایب منفی، موانعی جدی برای فراگیران به‌وجود می‌آورد یا حتی به شکست کامل مدل منجر می‌شــود در تضاد است (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۹). از ایــن نظــر، محور اعداد ممکن اســت دید بهتری از خواص تساوی (مثل تقارن و تراگذری) بدهد، و بنابراین، فرصت‌های ارزشــمندی برای درگیر کردن دانش‌آموزان به بحث در مورد چنین خواصی پدید آورد. ما در جمع‌بندی به این نکته برمی‌گردیم.

ما قــدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابــزاری برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود. این روش تمام معادلات را با موفقیت مدل‌ســازی نکرد، که قرار هم نبود چنین کند. برای مثال، وقتی x در معادله‌ای مانند ۵=۱۰+x۳ یک جواب منفی دارد، ما امکانات نمایشی مانند شکل ۲۲ داریم.



شکل ۲۲: نمایش‌هایی برای وقتی که x در معادله‌ای جواب منفی دارد،

در این مورد، ۵=۱۰+x۳.

اولی از نظر ریاضی رضایت‌بخش به‌نظر نمی‌رسد؛ دومی ممکن است برای بسیاری از دانش‌آموزان تعمیم دشواری از ایده باشد. بعضی معلم‌ها هنوز روی این کار می‌کنند، اما این کار، اگر چه ممکن است به لحاظ علمی جالب باشد، موضوع واقعاً مهمی نیست. بحث اصلی این مقاله این است که از طریق به‌کارگیری مدل محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند در زمانی که نیاز به حل معادلاتی پیدا می‌کنند که جواب منفی دارند، راهبردهای مناسبی برای کار روی تمام معادلات ساده پیدا یا تبیین کنند. اگر دانش‌آموزان، کاملاً وابسته به محور هستند، می‌توان چنین نتیجه گرفت که برای حرکت به‌سمت چنین معادلاتی، هنوز آماده نیستند.

ما قدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابزاری برای تصمیم‌گیری درمورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود

بحث

چیزی که در این‌جا توصیف کردیم، آزمون‌های اولیه‌ای در تعداد کمی از مدارس بود. ما خود را تنها به توصیف مختصری از نوع راهبردهایی که معلم‌ها استفاده می‌کردند، و پاسخ‌های اولیهٔ دانش‌آموزان به این راهبردها، محدود کردیم. در آینده، روی مطالعات موردی با جزئیات بیشتری از یادگیری دانش‌آموزان کار می‌کنیم.

اما در همین آزمون‌های اولیه، دانش‌آموزان از کار با معادلات به این روش لذت بردند و مطمئناً پیشرفت کردند. بعضی از دانش‌آموزان تواناتر، توانستند خیلی سریع راهبردهای کارایی را برای حل یک گروه کامل از معادلات توسعه دهند، و به وضوح شروع کردند به فرمول‌سازی برای رویه‌های مجردتر مورد نیاز برای حل مسائل سطح بالاتر. شاید، تکان‌دهنده‌تر از همه، دسترسی دانش‌آموزان متوسط یا ضعیف به مسائلی بود، که تجربه نشان می‌داد معمولاً با آن‌ها کشمکش دارند.

یکی از ویژگی‌های کار ما این بود که معلم‌ها به دلیل شباهت تجارب و نتایجشان در کلاس‌ها و مدارس متفاوت، می‌توانستند با آنچه دیگران می‌گفتند، ارتباط برقرار کنند. این موضوع باعث شد که وقتی معلم‌ها یکدیگر را می‌دیدند، بحث‌های مولد بسیاری با هم داشته باشند، و بدون شک به آن‌ها کمک کرد راهبردهای تدریس خود را بهبود بخشند. این رویکرد جمعی به تحقیق کلاسی، وجه با ارزشی از کار ما بود، و به بحث اصلی ما که این رویکرد به تدریس معادلات، می‌تواند در طیف وسیعی از کلاس‌ها مفید باشد، وزن بیشتری داد.

اما، ویژگی اصلی این مدل که در تمام کلاس‌های ما مشهود بود، در دسترس بودن ابتدایی آن برای دانش‌آموزان بود، و از این نظر این مدل، می‌تواند اثر «برش آموزشی» را که قبلاً به آن اشاره شد، محدود کند. اسفارد (۱۹۹۱) تأکید کرده است که قبل از اینکه مفاهیم رویه‌ای بتوانند به مفاهیم ساختاری تبدیل شوند، به دوره‌ای طولانی از تجربه نیاز است. ما به‌طور آزمایشی ادعا می‌کنیم که هنگام استفاده از محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور منظم، از یکی به دیگری تغییر وضعیت دهند. برای مثال، وقتی دانش‌آموزی یک نمایش محور اعداد از مثلاً، $3x+14=5x+6$ می‌کشد، احتمال دارد که این یک نگاه عملیاتی («رویه‌ای») را نمایش دهد. اما وقتی آن‌ها توضیح می‌دهند که $14=2x+6$ را می‌بینند، یا از آن‌ها خواسته می‌شود که توجیه کنند که چرا $7x+14=9x+6$، در این صورت ما معتقدیم که این نمایش، در قلمرو ساختاری کار می‌کند. ما راحت بودن با صورت‌های «مختلف» یک معادلهٔ واحد را نیز شاهد دیگری از این می‌بینیم که دانش‌آموزان، شروع به دیدن گزاره‌های جبری به‌عنوان اشیا و همچنین فرایند می‌کنند. به‌عنوان مثال، حرکت از $2x+1=5$ به $1+2x=5$ پیچیدگی بیشتر و گاهی‌اوقات یک مشکل جدی برای دانش‌آموزان است. این انعطاف‌پذیری که قادر باشیم $2x+1$ را هم به‌عنوان یک فرایند (که باید ارزشیابی شود) و هم به‌عنوان یک شئ (که باید دست‌ورزی شود) تعبیر کنیم، برای پیشرفت جبری بسیار مهم است و به‌نظر می‌رسد این مهارت، در دانش‌آموزان ما توسعه پیدا کرده است.

علاوه‌براین، در این‌جا نقش معلم و سؤالاتی که مطرح می‌کند بسیار مهم است، و این از بسیاری جهات، اصل موضوع است. ما محور اعداد را، هم به‌خاطر در دسترس بودن آن، هم به‌خاطر ماندگاری آن، و هم برای این حقیقت که برای بسیاری از دانش‌آموزان ما تصویری موجود و آشناست، دوست داریم. از این نظر، این مدل می‌تواند اهدافی مشابه با محتوا و مدل‌هایی را که در رویکرد «آموزش ریاضی واقع‌گرا» از آن‌ها استفاده شده است، برآورده کند. چنین تحقق اهدافی، نه‌تنها دسترسی اولیه به ریاضیات را فراهم می‌کند، بلکه توسعه از طریق ریاضیات را نیز پشتیبانی می‌کند (گراونمیجر، ۱۹۹۰). اما فکر کردن در مورد موافق یا مخالف بودن با این رویکرد، یا شروع به مقایسهٔ مزایای نسبی آن با دیگر مدل‌ها، دور شدن از اصل مطلب است. در واقع، تعداد بیش از حدی

متغیر برای مبادرت به چنین مقایسه‌ای وجود دارد و هیچ شکی وجود ندارد که در دست‌های غیرماهر، مدل محور اعداد در پوشهٔ «ایده‌های جدید جذاب» سر به مُهر می‌ماند. چیزی که ما واقعاً به آن علاقه‌مندیم، راهبردهایی است که می‌تواند به‌کار گرفته شـــود تا به دانش‌آموزان کمک کند به متفکران جبری کاراتری تبدیل شـــوند، و محور اعداد می‌تواند در این مورد نقش جـــدی بازی کند. اگر محور اعداد نقشی دارد، احتمالاً به‌خاطر این است که دسترسی بـــه این مدل اجازه می‌دهد معادلاتی با مجهول در هر دو طرف، خیلی زودتر از آنچه در ساختار برنامهٔ درسی فعلی ماست معرفی شـــوند. به این ترتیب، وقت بیشتری برای توسعهٔ مفاهیم و مهارت‌های مهم، بدون فشار چارچوب‌ها و آزمون‌هایی که بیشتر اوقات یک نقطهٔ پایان تثبیت شده (اغلب یک الگوریتم یا رویهٔ بی‌معنی) را به معلم‌ها تحمیل می‌کند، می‌ماند. شروع کار از دانش‌آموزان یازده‌ساله (و به‌نظر می‌رسد امکان اســـتفاده از مدل حتی قبل از این هم باشد) به دانش‌آموزان متوسط، حداقل سه‌سال برای کار به‌سوی روش‌های صوری‌تر و مجردتر، و معنا دادن به راهبردهای حل استاندارد، وقت می‌دهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Framework for Teaching Mathematics
2. Didactic cut
3. undoing
4. Ontological
5. Cover stories
6. Mental starters
7. Realistic Mathematics Education

عنوان اصلی مقاله

Using the number line to investigate the solving of linear equation.

منابع

1. Behr, M., Erlwanger, S. and Nichols, E. (1976) *How children view equality sentences (PDMC Technnical Report* No.3)Tallahassee, FL, Florida State University.
2. Boulton - Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, H.and Mutch, S. (1997) 'The transition from arithmetic to algebra: a cognitive Perspective', in Pehkonen, E. (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre, 2, pp. 185- 192.
3. Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D. (1994) 'Algebra, symbols, and translation of meaning', in da Ponte, J. and matos, J, (eds), *Proceeding of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, University of Lisbon, 2, pp. 240- 247.
4. Filloy, E. and Rojano, T. (1985) 'Operating the unknown and models of teaching', in Damarin, S. and Shelton, M. (eds), *Proceedings of the 7th Annual Meeting of PME-NA*, Columbus, OH, Ohio State University, pp. 75- 79.
5. Filloy, E. and Rojano, T. (1989) 'Solving equations: the transtiion from arithmetic to algebra', *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19- 25.
6. Fong, H. and Chong, T. (1995) 'Solving algebraic word problems', *mathematics Teaching* 151, 34- 35.
7. Department for Education and Employment (2001) *Framework for teaching mathematics: Key Stage 3 National Strategy*, London, UK. DfEE.
8. Gravemeijer, K. (1990) 'Context problems and Realistic Mathematics Instruction', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds), *Contexts free productions tests and geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 10- 32.
9. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1991) 'Pre-algebraic thinking: range of equations and informal solutions used by seventh graders prior to any instruction', in Furinghetti, F. (ed), *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Assisi, Italy, pp. 173- 180.
10. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1996) 'Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra', *Educational Studies in Mathematics* 30 (2), 39- 65.
11. Kieran, C. (1981) 'Concepts associated with the equality symbol', *Educational Studies in Mathematics* 12, 317- 326.
12. Pimm, D. (1995) *Symbols and meaning in school mathematics*, London, UK, Routledge.
13. Saenz- Ludlow, A. and Waldgrave, C. (1998) 'Third graders interpretations of equality and the equal symbol, *Educational Studies in Mathematics* 35 (2), 153- 187.
14. Sfard, A. (1991) 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differnt sides of the *same coin;, Educational Studies in Mathematics* 22, 1- 36.
15. Sfard, A. and Linchevski, L. (1994) 'The gains and pitfalls of reification the case of algebra', *Educational Studies in Mathematics* 26, 191- 228.
16. Streefland, L. (1990) 'Free productions in teaching and learning mathematics', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds) Contexts free productions tests, and geometry in *Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 32- 52.
17. Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education: a paradigm of developmental research*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
18. Treffers, A. (1987) *Three dimensions: a model of goal and theory description in matematics instruction- The Wiskobas Project*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
19. Treffers, A. (1991) 'Realistic Mathematics Education in The Netherlands 1980- 1990', in Streefland, L. (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools, Utrecht*, The Netherlands, Freudenthal Institute, Utrecht University, pp. 21- 57.
20. Vlassis, J. (2002) 'The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown', *Educational Studies in Mathematics* 49 (3), 341- 359.
21. Wijers, M. (2001) 'How to deal with algebraic skills in realistic mathematics education?', in Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the Internationl Commission on Mathematical Instruction (ICM): The future of the teaching and learning of algebra* 2, Melbourn, Australia, Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourn, pp. 649- 654.

کلیدواژه‌ها: مفهوم تابع، بازنمایی، یادگیری، استاندارد، ارتباط و اتصال بین مفاهیم.

اسکمپ[1] (۱۹۸۹) بیان می‌کند که «تعداد زیادی از مطالعات تحقیقی کامل در سال‌های اخیر، نشان‌دهندهٔ ناپیوستگی بین ریاضیِ کلاس درس و ریاضی مورد استفاده در فعالیت‌های روزمره است». وی ادامه می‌دهد که «اگر یکی از مقاصد ما در آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان را به ریاضیاتی که بعد از مدرسه نیاز دارند تجهیز کنیم، شواهد زیادی وجود دارد که در این راه موفق نبوده‌ایم یا حداقل راه سرراستی نداریم که ما را امیدوار کند». به گفته وی، «برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ما، واقعاً براساس این فرض استوار است که ریاضی یک نهاد رسمی دانش است؛ موضوعی شامل اشیای ریاضی با مفاهیمی بدون کاربرد در خارج از آن. چنین ریاضیاتی، می‌تواند کاملاً از جهان تجربی جدا باشد و فقط به خاطر خودش مورد مطالعه قرار گیرد. اگرچه ما هم‌چنان، انتظار داریم کودکان آن را در زندگی آیندهٔ خود به‌کار ببرند».

بازنمایی‌های چندگانه در ریاضی

کلود ژانویه[2] (۱۹۸۷)، از محققان پیشتاز در «بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در یاددهی و یادگیری ریاضی» بود. به اعتقاد وی، منظور از یک بازنمایی این است که برای درک بهتر یک مفهوم، ممکن است از تمثیل یا چیز دیگری استفاده شود. گاهی این بازنمایی‌ها مربوط به ساخت‌های ذهنی‌اند که در این صورت، «بازنمایی‌های داخلی» نامیده می‌شوند و گاهی به ساخت‌های فیزیکی اشاره دارند که به آن‌ها، «بازنمایی‌های خارجی» گفته می‌شود. برای مثال، وقتی شخصی یک نمودار را یک بازنمایی برای مفهوم تابع در نظر می‌گیرد، تصور ذهنی او از این نمودار (بازنمایی خارجی) و تابع، یک بازنمایی داخلی است. پس از ژانویه، تحقیقات قابل توجهی در رابطه با بازنمایی‌ها در حوزهٔ آموزش ریاضی انجام شد. برای نمونه، کستبرگ[3] (۲۰۰۲) بازنمایی یک دانش‌آموز از یک مفهوم ریاضی را، شامل نشانه‌ها و علامت‌هایی می‌داند که وی از آن‌ها، برای فکر کردن به یک مفهوم و ارتباط دادن آن با سایر مفاهیم استفاده می‌کند. از نظر کستبرگ (۲۰۰۲)، بازنمایی‌ها به چهار شکل نوشتاری[4]، تصویری[5]، جدولی[6] و گفتاری[7] تقسیم می‌شوند. او توضیح می‌دهد که بازنمایی نوشتاری، از مجموعه‌ای

بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع

زهرا گویا ـ عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی
علی امامی ـ کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی کهریزک ـ تهران بزرگ

از نوشته‌ها و اعداد تشکیل شده است، در حالی که بازنمایی تصویری شامل حداقل یک تصویر است. بازنمایی جدولی نیز جمع‌آوری داده‌های عددی در یک جدول است و بالاخره، بازنمایی گفتاری، شامل توصیفات گفته شده است. کستبرگ (۲۰۰۲) برای آشنایی بیشتر با این چهار نوع بازنمایی، برای هر یک مثال‌های ملموس ارایه می‌دهد.

از نظر وی، **بازنمایی‌های نوشتاری**، نمادگذاری‌هایی هستند که دانش‌آموزان، آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن، به کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات‌اند. نام‌ها، اصطلاحاتی هستند که برای اشاره به اشیای ریاضی یا رویه‌ها یا مجموعه‌ای از هر دو، استفاده می‌شوند (به‌طور مثال، اصطلاح مبنا). هم‌چنین، نمادگذاری‌ها، توضیحات ویژگی‌ها و نمونه‌هایی از مفاهیم نوشتاری ریاضی هستند که با نمادهای ریاضی بیان می‌شوند (مانند $\log_{2}^{1}=0$). از این‌ها گذشته، اصول، اظهارات کوتاهی‌اند که به‌عنوان قوانین و راهنمایی‌های ریاضی به کار می‌روند (مثل این که لگاریتم‌ها توابع نمایی هستند). بالاخره، توصیفات، توضیحاتی درمورد رویه‌ها، نتایج و فواید رویه‌ها، اشیای ریاضی و رابطه‌ها هستند (به‌طور مثال یک تابع، مجموعه‌ای از نوشته‌ها و اعداد است.)

اما **بازنمایی‌های تصویری** تصاویری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی به‌طور شهودی استفاده می‌کنند. **بازنمایی‌های جدولی** که از داده‌های عددی تشکیل شده‌اند، ابزاری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکرکردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی، استفاده می‌کنند. همچنین **بازنمایی‌های شفاهی**، کلمات گفته شده و توضیحاتی هستند که دانش‌آموزان برای صحبت کردن در مورد یک مفهوم ریاضی به کار می‌برند و مانند **بازنمایی‌های نوشتاری**، شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات هستند که در آن‌ها، اگرچه تعریف‌ها شبیه تعریف‌های نوشتاری‌اند، اما تنها گفته می‌شوند و به‌صورت نوشته در نمی‌آیند (مثل اینکه به‌طور شفاهی بگوییم «لگاریتم عدد ۱، صفر است».)

بازنمایی‌ها در همهٔ ارتباطات ریاضی نقش ایفا می‌کنند و هر یک به نوعی، در نشان دادن جنبه‌هایی از تفکر انسان سهیم‌اند. درواقع، کستبرگ (۲۰۰۲) معتقد است که اگرچه درک فرد نسبت به یک مفهوم ریاضی در ذهن وی شکل می‌گیرد، اما به تعبیر ژانویه (۱۹۸۷)، چگونگی استفاده کردن یک یادگیرندهٔ ریاضی از نمادها برای نمایش دادن یک مفهوم، نوعی بازنمایی درونی وی از آن مفهوم است. برای مثال، اگر دانش‌آموزی برای تقریب زدن $\log_3^2$ از نمودار استفاده کند، می‌تواند نشان‌دهندهٔ این باشد که از نظر او، مفهوم لگاریتم با نمودار تابع لگاریتمی پیوند خورده است. به‌گفته کستبرگ، یک دانش‌آموز وقتی درمورد یک مفهوم فکر می‌کند یا با آن ارتباط برقرار می‌کند، احتمالاً از ترکیبی از چهار بازنمایی مورد بحث استفاده می‌کند که چنین استفاده‌ای، نشان دهنده درک او از یک مفهوم ریاضی است.

این در حالی است که به گفتهٔ مارکوس[8] (۲۰۰۶)، یک بازنمایی ابزاری است برای فکر کردن به چیزی که به واسطهٔ استفاده از ابزار ساخته شده است. یک بازنمایی، قابلیت قرار گرفتن به‌جای چیز دیگری را دارد، ولی این کار ضروری نیست. هر بازنمایی شامل دو وجه درونی و بیرونی است که تقریباً از اهمیت برابری برخوردارند و جدایی ناپذیرند، اما لزوماً به جای یکدیگر قرار نمی‌گیرند. وجه خارجی آن برای افراد از طریق حواسشان قابل درک است ولی وجه درونی آن خیر؛ یعنی درک دانش‌آموزان از یک مفهوم، لزوماً همان بازنمایی خارجی نیست. به عبارتی دیگر، وجه خارجی لزوماً فقط وجه داخلی را منعکس نمی‌کند، بلکه اثر متقابل آن‌ها روی هم، به دانش‌آموز اجازه می‌دهد تا به‌طور مؤثری از این ابزار، برای درک مفهوم استفاده کند.

از این گذشته، گلدین[9] و کاپوت[10] (۱۹۹۶) و گلدین(۱۹۹۸)، نگاه منسجم‌تری به بازنمایی‌ها دارند و آن‌ها را نظامی می‌دانند که افراد برای یادگیری ریاضی، به شکل‌های مختلف از آن استفاده می‌کنند. برای مثال، آنان به این نتیجه رسیدند که یک مفهوم جدید، معمولاً از طریق بازنمایی‌ها به دانش‌آموزان معرفی می‌شود و به‌تدریج، بازنمایی‌های بیرونی بر درک و فهم دانش‌آموزان تأثیر گذاشته و آنان را قادر می‌سازد تا به توسعهٔ بازنمایی‌های درونی آن مفهوم بپردازند. این باور، همسو با نظرات ازل[11] (۲۰۰۸) است که معتقد است توانایی نشان دادن یک مفهوم با شیوه‌های گوناگون، درک عمیقی از آن مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند. بدین سبب، بازنمایی‌های ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم ریاضی را از منظرهای متفاوت ببینند و با استفاده از برقراری ارتباط بین آن‌ها، به درک بهتری از یک مفهوم دست یابند. با چنین استدلالی، «شورای ملی معلمان ریاضی» (۲۰۰۰) (NCTM)[12] در آمریکا و کانادا، بازنمایی را یکی از «استانداردهای فرایندی» برنامهٔ درسی ریاضی اعلام نمود. بدین سبب، پرداختن به آن، توجیه قوی‌تری برای استفاده از بازنمایی‌ها در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای عرضه می‌کند.

بازنمایی از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا(NCTM)

یکی از پنج استاندارد فرایندی که در سند شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM,۲۰۰۰) به آن اشاره شده، «بازنمایی» است. در این سند، درمورد استاندارد بازنمایی چنین گفته شده است:

برنامهٔ درسی ریاضی در همهٔ پایه‌های تحصیلی (از پیش‌دبستانی تا پیش‌دانشگاهی)، باید همهٔ دانش‌آموزان را به‌گونه‌ای آماده کند تا قادر به انجام موارد زیر شوند:

۱. خلق و استفاده از بازنمایی ها برای سازماندهی، ثبت و ارتباط دادن ایده‌های ریاضی؛

۲. انتخاب کردن، به کاربردن و تفسیر بازنمایی‌های ریاضی در حل مسائل؛

۳. استفاده از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تغییر پدیده‌های ریاضی، اجتماعی و فیزیکی (ص ۳۶۰).

این شورا، ریاضی را به تعبیر استین[13] (۱۹۸۸)، «علم الگوها» می‌داند و بدین سبب معتقد است که بازنمایی‌ها، ابزارهایی هستند که به‌وسیله آن‌ها آن الگوها ثبت

شده و تجزیه و تحلیل می‌شوند و هنگامی‌که دانش‌آمـوزان از لحاظ ریاضی خبـره می‌شـوند، به‌طور گسـترده‌ای تعـداد بازنمایی‌های ریاضی و دانش استفادهٔ ثمربخش از آن‌هـا را توسـعه می‌دهنـد. شـورا، این دانش را شامل انتخاب بازنمایی‌های مناسب برای رسیدن به دیدگاه‌های خاص جهت حصول اهداف مورد نیـاز می‌داند. مثلاً در جبر، بازنمایی‌هـا به‌طور فراگیری وجود دارند و نمودار حامل اطلاعات شهودی خاصی است، در حالی‌که توضیحات نمادین ممکن است برای دست‌ورزی، تحلیل و تبدیل آسان‌تر باشـند. همین‌طور در مدل‌سازی ریاضـی، اسـتفاده از روش‌هـای متنوع برای نمایش داده‌ها، اهمیت بازنمایی‌هـا را بیشـتر مشـخص می‌کند. این شـورا معتقد است که به‌وسـیلهٔ بازنمایی‌های گوناگون، دانش‌آموزان می‌توانند راه‌حل‌های مختلفی برای حل یک مسئله پیدا کنند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند.

همچنین، بازنمایی‌ها استدلال کـردن را کـه یکی دیگـر از پنج اسـتاندارد فرایندی است، تسهیل می‌کننـد و ابـزاری بـرای اثبات هستند. علاوه‌بر این‌ها، بازنمایی‌های گوناگـون، راه‌هـای متفاوتی برای فکر کردن و دسـت‌ورزی با اشیای ریاضی فراهم می‌کنند و یک شیء ریاضی، وقتی از دیدگاه‌های مختلف دیده می‌شود، بهتر فهمیده می‌شود. هنگامی کـه دانش‌آموزان موضوع جدیـدی را مطالعـه می‌کنند، با بسیاری از بازنمایی‌های جدید برای مفاهیم ریاضی آشـنا خواهند شد. آنان نیازمندند تا با انعطاف بیشتری بین بازنمایی‌های گوناگون ارتباط برقرار نمایند و این در حالی اسـت که بخش عظیمی از توانایی ریاضی دانش‌آموزان، با مشاهده و کارکردن بـا موضوعات متفـاوت ریاضی از دیدگاه‌های مختلف، ایجاد می‌شود. برای مثال، دانش‌آموزان خردسال در پایه‌هـای اول ابتدایـی، اغلب بـرای درک و فهم مفاهیم ریاضی، از بازنمایی‌های ملموس و شهودی اسـتفاده می‌کنند و به تعبیر برونر (۱۹۶۳)، در مرحله «مجسم» قرار دارند.

در پایه‌های بالاتر (معادل سه پایهٔ آخر ابتدایـی)، دانش‌آموزان به‌تدریج، آمادگیِ ابداع و اسـتفاده از بازنمایی‌های «نیمه‌مجسـم» را برای اشـیای ریاضی، مانند اعداد گویا که تجسم شهودی آن‌ها ساده نیسـت، پیدا می‌کننـد. در دورهٔ دبیرستان و سال‌های پایان آموزش مدرسـه‌ای، دانش‌آمـوزان به‌طور فزاینده‌ای با مفاهیم مجردی مانند تابع، معادلات، مثلثات، ماتریس‌ها و ماننـد این‌هـا کار می‌کننـد تا توانایـی تجریدی‌شـان افزایش یابد. بدین سـبب در ایـن دوره، نـوع بازنمایی‌ها تغییر می‌یابد و بر میزان تجریدشـان افزوده می‌شود تا دانش‌آموزان را قادر به تشخیص ساختارهای ریاضی مفاهیم نماید. به‌طور مشـخص، در این مرحله، از دانش‌آمـوزان انتظـار می‌رود تا چگونگی اسـتفاده از یک نماد را در مقوله‌های مختلف تشـخیص دهند و به‌عنـوان نمونه، بتوانند از نمـاد (a , b) به‌عنوان زوج مرتب، یک نقطه در دسـتگاه مختصات، یک بازه و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه دو عدد اسـتفاده کننـد. درواقع، دانش‌آموزان دبیرستانی به کمک بازنمایی‌های مناسب، ویژگی‌های سـاختاریِ پدیده‌هـای ریاضی را تشخیص می‌دهند و روابط ریاضی بین این ویژگی‌ها را درک می‌کنند. این کار باعث می‌شود که بتوانند به تبیین و تفسیر مدل‌های پیچیده‌تر و کارآمدتری بـرای درک مفاهیم ریاضی بپردازند. به‌عنـوان مثال، پدیده‌هایی با ویژگی تناوب، اغلب با توابع مثلثاتی مدل‌سازی می‌شوند؛ یـا اینکه تابـع نمایـی، بازنمایی مناسبی برای رشد جمعیت است و بازنمایی‌های تکراری و بازگشتی بـرای توصیف برخـی پدیده‌های واقعی کارآمد هستند. برای ایجاد چنین توانایی‌هایی در دانش‌آموزان، معلمان نقشـی اساسـی دارند و می‌توانند بـه دانش‌آموزان کمک کنند تـا تصورات شـخصی خود را به بازنمایی‌های شـناخته شدهٔ ریاضی پیوند دهند. البته این شورا به استناد پژوهش‌های انجام شده، به این جمع‌بندی رسیده است که اهمیت اسـتفاده از بازنمایی‌های چندگانه، بایسـتی در طول دورهٔ آموزشی دانش‌آموزان، مورد توجه قرار گیرد و استفاده از بازنمایی‌های مختلف برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضـی، بخش مهمـی از فرایند یاددهـی- یادگیـری ریاضـی را تشکیل دهد.

تمام دانش‌آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی‌وار برقرار کرده و ریاضی‌وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش‌آموزانی شوند که بر قابلیت‌ها و توانایی‌های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند

درواقع، دانش‌آموزان پایه‌های ابتدایی از بازنمایی‌های متنوع و ارتباط و اتصال بین مفاهیم، برای ساخت‌وساز دانش ریاضی و بیان ایده‌های ریاضی خود استفاده می‌کنند و با این کار، فرایند حرکت به سمت تجرید را تسریع می‌کنند. آن‌ها همچنین، از بازنمایی‌ها برای سازماندهی تفکرشان استفاده می‌کنند. در نتیجه، با حرکت بین بازنمایی‌های مختلف یک ایده یا مفهوم، درک و استفاده از مفاهیم و رویه‌های ریاضی افزایش می‌یابد و ویژگی‌های مسئله‌های ریاضی بهتر دیده می‌شود. بدین سبب، استفادهٔ دانش‌آموزان از بازنمایی‌ها - به‌خصوص آن‌هایی که برایشان ملموس‌تر است، امری ضروری در یادگیری ریاضی محسوب می‌شود.

ارتباط بین بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در یادگیری

از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی، مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی این است که تمام دانش‌آموزان یاد بگیرند که برای ریاضی ارزش قائل شوند و به اهمیت ریاضی در جریان زندگی و در پرورش ذهن و اندیشه واقف شوند. همچنین، تمام دانش‌آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی‌وار برقرار کرده و ریاضی‌وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش‌آموزانی شوند که بر قابلیت‌ها و توانایی‌های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند (گویا، ۱۳۷۵).

استفاده از بازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر، باعث درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی می‌شود. تحقیقات صورت‌گرفته در این حوزه نشان می‌دهد اگر بازنمایی‌ها به‌صورت مؤثری با هم متصل شوند، زمینهٔ درک موضوعات ریاضی فراهم می‌شود. در نتیجه، ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های فیزیکی، تصویری، نمادین، نموداری، شفاهی و ذهنیِ از یک ایدهٔ ریاضی، نقشی کلیدی در درک عمیق‌تر آن ایفا می‌کند. مثلاً، وقتی دانش‌آموزان می‌بینند که یک بازنمایی، مثل یک معادله، می‌تواند وضعیت‌های زیادی را توصیف کند، به قدرت ریاضی پی می‌برند و وقتی می‌فهمند که بعضی از بازنمایی‌ها برای نمایش یک مسئله مفیدتر از بعضی دیگرند، آن‌وقت، فایده و انعطاف‌پذیری ریاضی را می‌بینند.

این، مشابه ایده‌ای است که قبلاً اسکمپ (۱۹۸۹)، به‌عنوان شبکه‌های تلفیقی یا طرح‌واره‌های شناختی مطرح کرده بود و معتقد بود که آن‌ها، هم محصول ساخته شدن دانش و هم ابزاری برای ساختن دانش جدید هستند. یعنی همان‌طور که یادگیری رخ می‌دهد، آن شبکه‌ها نیز آرایش مجدد می‌یابند و ارتباطاتی به آن‌ها اضافه می‌شود، یا اینکه همان ارتباطات قبلی جرح و تعدیل می‌شوند. زمانی که تفکر فعال و بازتابی وجود داشته باشد، طرح‌واره‌ها دائماً جرح و تعدیل می‌شوند یا تغییر می‌یابند، به‌طوری که ایده‌های جدید بهتر بتوانند با آنچه از قبل ساخته شده است، جفت‌وجور شوند. درواقع، فهمیدن را می‌توان به‌صورت میزان کیفیت و کمیت ارتباط‌هایی که یک ایده با ایده‌های قبلی برقرار می‌کند، تعریف کرد.

به‌گفتهٔ مارکوس(۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات و وابستگی‌های بین بازنمایی‌ها و اجزای دانش، همچنین توانایی حرکت، تغییر و ترجمه بین بازنمایی‌ها، از مشخصه‌های مهم یادگیری و حل مسئله است (هیبرت و لِفور،۱۹۸۶؛ هاپاسالو و کدیجویچ، ۲۰۰۰؛ تال[۱۴] و وینر[۱۵]، ۱۹۸۱؛ گلدین، ۱۹۹۸؛ دریفوس[۱۶]، ۱۹۹۱؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲؛ زیمرمن[۱۷]، ۲۰۰۵).

از نظر شورای ملی معلمان ریاضی، مطالعهٔ ریاضی باید شامل فرصت‌های زیادی برای ایجاد ارتباطات و اتصالات ریاضی باشد تا دانش‌آموزان بتوانند:

- اجسام فیزیکی، تصورات و نمودارها را به یکدیگر و به ایده‌های ریاضی مرتبط کنند؛
- تفکرشان را درمورد ایده‌ها و موقعیت‌های ریاضی نشان دهند، یعنی بین زبان روزانه و زبان و نمادهای ریاضی، ارتباط برقرار کنند.
- درک کنند که تولید و استفاده از بازنمایی‌ها ، بحث کردن، خواندن، نوشتن و گوش‌دادن به ریاضی، بخش‌های حیاتیِ یادگیری ریاضی هستند.

این توصیه‌ها نشان می‌دهد که از نظر این شورا، بازنمایی‌ها از راه‌های مهم ایجاد ارتباط بین ایده‌های ریاضی در همهٔ سطوح‌اند. این ارتباط‌ها هم به دو دسته، شامل «مدل‌سازی ارتباطات و اتصالات بین شرایط مسئله‌ای که از دنیای واقعی یا از یک موضوع غیرریاضی و بازنمایی ریاضی آن نشأت گرفته» و «ارتباطات و اتصالات ریاضی بین دو بازنمایی هم‌ارز و فرایندهای متناظر با هم» تقسیم می‌شود.

هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲)، یک نظریهٔ شناختی برای درک ریاضی دانش‌آموزان ارایه کرده‌اند که در آن، وجود شبکه‌هایی از بازنمایی‌های درونی پیش‌بینی شده است که تعداد و قدرت ارتباط‌های بین بازنمایی‌ها، به‌عنوان معیاری برای میزان یادگیری در نظر گرفته شده است. برای مثال، طبق این نظریه، دانش‌آموزی که در ذهن خود، یک بازنمایی داخلی برای تابع ایجاد کرده است که با تعریف تابع و نمودار آن مرتبط است، درک بهتری از تابع دارد تا دانش‌آموزی که به‌طور ساده، تنها مطالبی درمورد تابع شنیده است. این نظریه بر سه فرض زیر استوار است:

۱. دانش به‌صورت درونی نمایش داده می‌شود و این نمایش‌های درونی، ساختاری هستند؛

۲. بین بازنمایی‌های درونی و بیرونیِ دانش، یک رابطه وجود دارد؛

۳. بازنمایی‌های داخلی، به هم متصل‌اند.

علاوه‌بر این، هیبرت و کارپنتر توضیح داده‌اند که بازنمایی‌های داخلی و ارتباط‌هایشان، از روی تحلیل بازنمایی‌های خارجی و ارتباط‌های آن‌ها، مشخص می‌شوند. اما شناخت این بازنمایی‌های ذهنی و ارتباط‌ها ساده نیست. با اینکه آموزشگران ریاضی نمی‌دانند یک دانش‌آموز چگونه مفاهیم ریاضی را به‌طور ذهنی بازنمایی می‌کند یا ماهیت این بازنمایی‌ها چیست، اما معتقدند که حل دانش‌آموز از یک مسئله، تحت تأثیر بازنمایی‌های بیرونی (اشیای فیزیکی، تصاویر، نمادها و مانند این‌ها) قرار دارد. به‌طور مثال، مسائل حل‌شده در بیرون و درون مدرسه بر بازنمایی‌های درونی اثر می‌گذارند و به‌وسیلهٔ شبکه‌های مفهومی حمایت می‌شوند (نقل شده درکتسبرگ، ۲۰۰۲). هیبرت و کارپنتر(۱۹۹۲) ادعا می‌کنند که برای «تفکر درمورد ایده‌های ریاضی» این بازنمایی‌ها مورد نیازند. به گفته آن‌ها، ارتباط‌ها یا با توجه کردن به شباهت‌ها و تفاوت‌ها یا به‌وسیلهٔ شمول و دربرگیری شکل می‌گیرند، بدین ترتیب که یک ایدهٔ جدید، با ایده‌های دیگری که تاکنون به‌صورت ذهنی بازنمایی شده‌اند، مقایسه می‌شود، یعنی یک بار دیگر، شباهت‌ها و تفاوت‌ها در ذهن فهرست می‌شوند و یادگیرنده، می‌تواند بازنمایی ذهنی خود را از یک ایده، با ساختارهای موجود مرتبط کند.

از نظر مارکوس (۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات به دو شکل **بازتابی**[۱۸] و **شراکتی**[۱۹] هستند. وقتی کسی از یک بازنمایی به‌جای بازنمایی دیگری استفاده کند، ارتباط **شراکتی** بین دو بازنمایی برقرار کرده است و اگر از یک بازنمایی برای توضیح دیگری استفاده کند، یک ارتباط **بازتابی** بین دو بازنمایی ایجاد نموده است.

این مشخصه‌ها، ماهیت بازنمایی‌ها را به‌عنوان ابزاری برای فکرکردن برجسته‌تر می‌کنند. در حل مسئله، اغلب تعویض بین بازنمایی‌ها اهمیت دارد و معمولاً لازم است به کمک توضیح یک بازنمایی به‌وسیلهٔ یک بازنمایی دیگر، استدلال کنیم. به‌علاوه، مارکوس(۲۰۰۶) ابراز می‌دارد که در یک اتصال بازتابی، تشخیص اینکه کدام بازنمایی برای توضیح استفاده شده و کدام‌یک توضیح داده شده‌اند دشوار است و بیشتر اوقات به نظر می‌رسد که بازنمایی‌ها، دو به دو یکدیگر را توضیح می‌دهند. همچنین، او تأکید کرده است که این اتصال، در ساختارهای ذهنی شخص تثبیت نشده، بلکه در عمل وی هنگام حل مسئله و بحث‌هایی که برای فهمیدن و کمک به فهمیدن دیگر می‌کند، نمود پیدا

یک تابع می‌تواند به‌وسیلهٔ توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی- خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش‌آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند

می‌کنند. به اعتقاد گلدین و کاپوت (۱۹۹۶)، دو بازنماییِ بیرونی، ممکن است به‌صورت درونی در ذهن شخصی که آن‌ها را ساخته و درک کرده، به هم وصل شوند.

گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، از تال(۱۹۹۱) نقل می‌کنند که فرایند یادگیری ریاضی، دارای چهار مرحله است که عبارت‌اند از:

✓ استفاده از یک نوع بازنمایی؛

✓ استفاده از بیش از یک نوع بازنمایی به‌صورت موازی؛

✓ ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های مختلف؛

✓ تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آن‌ها.

آن‌ها از قول تال(۱۹۹۱)، بیان می‌کنند که تشخیص ارتباط بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آن‌ها، منجر به تشکیل مفهوم مجرد اشیاء و فرایندهای ریاضی می‌شود.

نقش بازنمایی‌ها دردرک مفهوم تابع

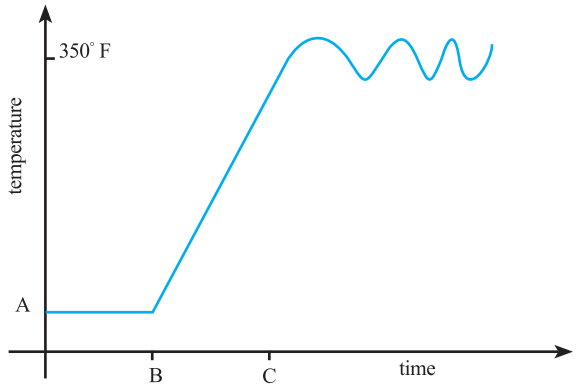
به اعتقاد یروشالمی[20] (۱۹۹۱)، کارکردن بین چندین بازنماییِ مرتبط جهت یادگیری یک مفهوم جدید، برای دانش‌آموزان بسیار سخت است. بعداً، کلر[21] و هیرش[22] (۱۹۹۸، نقل شده در آکووک، ۲۰۰۳) دریافتند که با ایجاد شرایط یادگیری مناسب، ارتباط بین یک مفهوم و بازنمایی‌هایش، براساس بازنمایی‌های اولویت‌بندی‌شده توسط دانش‌آموزان ساخته می‌شود. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که اولویت‌های محاسباتی دانش‌آموزان برای بازنمایی‌های مختلف توابع، به‌وسیلهٔ مقایسهٔ کاربردهای ترکیبی و غیرترکیبی تابع، که قبلاً آزمون شده، انجام می‌شود. این بدان معناست که مثلاً، دانش‌آموزان در شرایط ریاضی محض، استفاده از معادله را ترجیح می‌دهند، در حالی که برای حل مسائل ترکیبی و انجام فعالیت‌های مفهومی مربوط به تابع، استفاده از جدول و نمودار را ترجیح می‌دهند. در هر صورت، تابع یکی از اصلی‌ترین مفهوم‌های برنامهٔ درسی ریاضی است که در «دورهٔ ریاضی جدید»، به‌عنوان یک مفهوم هماهنگ‌کننده عمل می‌کرد و در برنامه‌های درسی اخیر، ابزاری قوی برای مدل‌سازی است (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا؛ ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰). به‌گفتهٔ این شورا، در دورهٔ دبیرستان، برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای باید شامل مطالعهٔ مداوم توابع به نحوی باشد تا همهٔ دانش‌آموزان بتوانند:

- پدیده‌های جهان واقعی را با توابع متنوع مدل‌سازی کنند؛
- روابط بین جدول‌ها، قوانین شفاهی، معادلات و نمودارها را بازنمایی و تحلیل کنند؛
- هم‌زمان بتوانند از بازنمایی‌های مختلف جدولی، نمادی و نموداری توابع استفاده کنند؛
- موقعیت‌های گوناگون مسئله را با تابع‌های مختلف مدل‌سازی کنند؛

تغییرات پارامتری را روی نمودار تابع‌های مختلف تجزیه و تحلیل کنند (ص ۵۷).

از نظر این شورا (۱۹۸۹)، تمام موضوعات مدرسه‌ای، زمینهٔ مناسبی برای آموزش تابع هستند. تابع‌ها در حساب، به‌عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند، مثل عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آن‌ها نسبت می‌دهد. در جبر، توابع روابطی بین متغیرهایی هستند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه نقاط را به تصویرهایشان تحت تبدیلاتی از قبیل انتقال و دوران نظیر می‌کنند و در احتمال، توابع پیشامدها را به احتمال وقوع آن‌ها نسبت می‌دهند (ص ۵۷).

به‌گفتهٔ این شورا، یک تابع می‌تواند به‌وسیلهٔ توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی- خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش‌آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند. برای مثال، دانش‌آموزان باید بتوانند شکل‌هایی مانند شکل ۱ را رسم کنند و درمورد اینکه چه پدیده‌های واقعی- مثلاً دمای یک کوره- می‌توانند با چنین نموداری رسم شوند، بحث کنند؛ سؤال‌هایی مانند اینکه مقدار تقریبی A چقدر



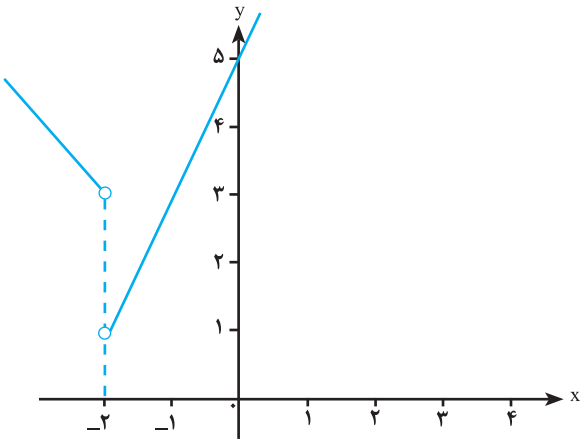
شکل۱
دمای کوره به‌عنوان یک تابع از زمان (NCTM، ۱۹۸۹)

است؟ در بازهٔ B تا C، چه اتفاقاتی می‌افتد؟ و نوسانات نمودار بعد از زمان C، چگونه می‌تواند باشد؟

چنین فعالیت‌هایی به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا نمودار توابعی را که به‌صورت ضابطه‌ای داده شده‌اند، رسم کنند و بین بازنمایی نموداری و بازنمایی نمادین تابع، به سهولت رفت و برگشت داشته باشند. برای مثال، تجزیه و تحلیل شکل (۲)، می‌تواند به تعریف تابع دوضابطه‌ای

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۵, x>-۲ \\ -x+۱, x<-۲ \end{cases}$$

منجر شود.



شکل۲ ـ یک تابع دوضابطه‌ای

بدین سبب به‌گفتهٔ سایکا[۲۳] (۲۰۰۳)، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در گوناگونی تفسیرها و بازنمایی‌ها فوق‌العاده است و به این دلیل، در فرایند آموزشی توجه بسیاری به آن شده و زمان زیادی برای آن صرف شده است. با این حال از نظر وی، تابع همچنان مفهومی پیچیده و مشکل باقی مانده است و با وجودی که ماهیت دوگانهٔ فرایند-شیء و بازنمایی‌های مختلف، ظرافت و پیچیدگی مفهوم تابع را نشان می‌دهند، دانش‌آموزان اغلب تنها بر ایده‌های شهودی روابط تابعی متکی هستند. او یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان را در یادگیری تابع، همین ماهیت دوگانهٔ آن می‌داند.

در حقیقت به گفتهٔ اسفارد[۲۴] (۱۹۹۱، نقل شده در سارایوا[۲۵] و تکسیرا[۲۶]، ۲۰۰۷)، تابع می‌تواند به دو روش اساسی فهمیده شود:

- ساختاری که به‌عنوان یک شیء در نظر گرفته می‌شود؛
- عملیاتی که به‌عنوان یک فرایند فهمیده می‌شود.

در اولی، تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است و در دومی یک فرایند محاسباتی یا یک روش دقیق تعریف شده است. برای نظیرکردن یک مجموعه به مجموعه‌ای دیگر. این دو راه یادگیری تابع، هر چند ظاهراً مانع فهم هم می‌شوند (ممکن است یادگیری یکی، از فهم دیگری جلوگیری کند)، اما باید یکدیگر را کامل کنند و مثل دو روی یک سکه، یک مفهوم منسجم و مرتبط به هم را تشکیل دهند.

برای مثال، f(x)=۲x+۳ در یک زمان، دو مفهوم را بیان می‌کند:

- چگونه مقدار تابع را برای مقادیر خاص محاسبه کنیم (ویژگی فرایند بودن)؛
- کل مفهوم تابع را برای هر متغیر معین معرفی می‌کند (ویژگی شیء بودن.)

مثل اینکه f(x)، هم نام تابع و هم مقدار تابع را معرفی می‌کند. به اعتقاد آن‌ها، اگرچه دانش‌آموزان تعریف تابع را حفظ می‌کنند، اما بیشترشان قادر به ایجاد ارتباط با این کلمات نیستند. سارایوا و تکسیرا (۲۰۰۷) در انجام یک تحقیق، از دانش‌آموزان خواسته بودند به دو سؤال زیر جواب دهند.

۱. شکل‌هایی را که معرف یک تابع هستند مشخص کنید و دلیل خود را توضیح دهید.

۲. به زبان سادهٔ خود بگویید تابع چیست؟

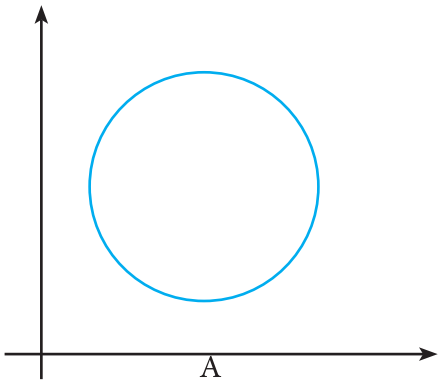
آن‌ها مشاهده کردند که تعدادی از دانش‌آموزان، تعریفی را که از تابع نوشته بودند، با انتخابشان از شکلی که معرف تابع است، مرتبط نکردند. برای مثال، چند دانش‌آموز برای تفسیر نمودارهای B و C، از تعریف «هر شیء به یک و فقط یک تصویر نظیر می‌شود» استفاده کردند. در این تحقیق، یکی از جنبه‌هایی که در تعریف‌های دانش‌آموزان زیاد به چشم می‌خورد، وابستگی بین متغیرها بود. مثلاً «در تابع، یک متغیر وابسته (Y) و یک متغیر مستقل (X) وجود دارد» یا اینکه «در تابع، Y بر حسب X تغییر می‌کند و هر X، یک و فقط یک مقدار برای Y به دست می‌دهد». اما برای اکثر دانش‌آموزان، مفهوم تابع محتوایی ثابت دارد و بیان‌کننده تغییر نیست. برای نمونه، با توجه به شکل(۳) که بیانگر میزان آب پشت یک سد بر حسب زمان طی یک سال است، از دانش‌آموزان خواسته شد متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنند.

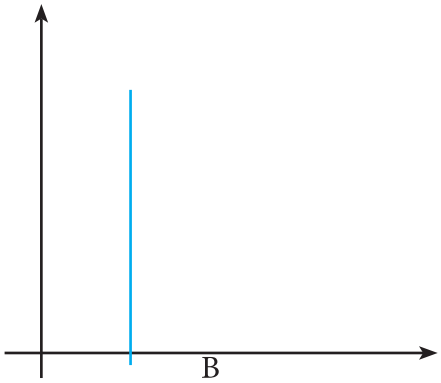
تعدادی از دانش‌آموزان، روزها (نه تعداد روزها) را متغیر مستقل و آب (نه میزان آب) را متغیر وابسته در نظر گرفته بودند. به اعتقاد سایکا (۲۰۰۳)، توانایی دانش‌آموزان در انجام دستورزی و به‌کار بردن نمادها، الزاماً به‌معنای درک ساختاری دانش‌آموزان از تابع نیست. این در حالی است که تال و آکوک[۲۷] (۲۰۰۲) معتقدند که از نظر ریاضی‌دان‌ها، درک تابع نمونه‌ای از سادگی است، زیرا چیزی ساده‌تر از اینکه «دو مجموعه داریم و هر عنصر از اولی به دقیقاً یک عنصر از دومی مرتبط می‌شود وجود ندارد». به گفتهٔ آن‌ها، برای ریاضی‌دان‌ها این تعریف نه‌تنها ساده است بلکه زمینهٔ دست‌یابی به مجموعهٔ پیچیده‌ای از ایده‌های ریاضی را فراهم می‌کند.

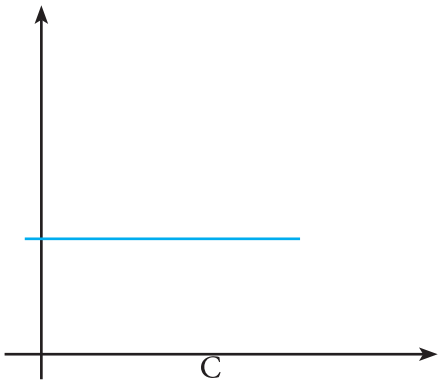
اما جونز[۲۸] (۲۰۰۶) به این نتیجه رسید که در توسعهٔ مفهوم تابع، همیشه بازنمایی‌های متنوعی برای معرفی آن ابداع شده‌اند که هر یک از این بازنمایی‌ها، در یادگیری جنبه‌ای خاص از این مفهوم، مهم‌اند و هر یک قویاً، به سایر بازنمایی‌های تابع گره خورده‌اند، لذا معرفی تابع تنها به‌عنوان یک مجموعه، ممکن است دانش‌آموزان را گیج و سردرگم کند. **جونز** (۲۰۰۶) درک درست تابع را، فقط توانایی بیان تعریف رسمی آن نمی‌داند و با استناد به دوبینسکی[۲۹] و هارل[۳۰] (۱۹۹۲)، سه سطح درک حاصل شده توسط دانش‌آموزان را شناسایی کرده است که اگرچه با هم کاملاً متفاوت نیستند، اما مانند یک زنجیر، به ترتیب، سطوح تجرید را نشان می‌دهند. این سه سطح عبارت‌اند از: عمل، فرایند و شیء.

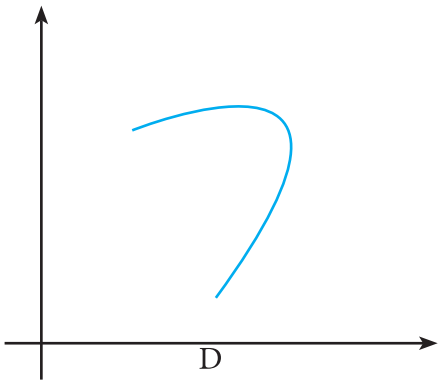
عمل

پایه‌ای‌ترین درک از تابع، تصور آن به‌عنوان یک عمل است که دوبینسکی و هارل، آن را یک تکرارپذیری ذهنی یا دستورزی فیزیکی از اشیا نامیده‌اند. در این مرحله از یادگیری، دانش‌آموزان تشخیص می‌دهند که چه چیزی یک تابع است. آن‌ها تابع را به‌عنوان یک قانون صریح می‌بینند که یک ورودی را می‌گیرد و سپس یک خروجی می‌دهد. با چنین درکی از تابع، دانش‌آموزان دو تا از متداول‌ترین بازنمایی‌های تابع یعنی بازنمایی نموداری و بازنمایی ضابطه‌ای را بهتر می‌فهمند. آن‌ها نمودارها را قابل فهم‌ترین









بازنمایی‌هـــای تابـــع می‌داننـــد و اظهار می‌دارند که اگرچه در ذهن دانش‌آموزان، بازنمایی‌ها همیشـــه، مستقیماً با ایدهٔ اصلی تابع مرتبط نمی‌شـــوند، ولی اغلب، چند سال قبل از اینکه مفهوم رسمی تابع در ذهن یادگیرنده شکل گرفته باشد، نمودارهـــا به دانش‌آمـــوزان کمک می‌کنند تا اطلاعات مفیدی درمورد تابع‌ها مثل نقاط اکسترمم، صعودی بودن و نزولی بودن به‌دست آورند. آیزنبـــرگ[۳۱] نیز نظرش این بود که لازم اســـت مفهـــوم «تک‌مقداری بودن توابع حقیقی»، با روشـــی که ماهیتـــاً با یک بازنمایـــی نموداری گره خورده، فهمیده شـــود و همهٔ اجزای اصلی تابع، در یک شـــکل بصری معین تعریف شـــوند. آنان تأکید نمودند که وقتی دانش‌آموزان با توابع آشـــنا می‌شـــوند، ضروری است که بازنمایی ترسیمی، به‌طور ویـــژه‌ای مورد توجه قـــرار گیرد تا مهارت‌های بصـــری یادگیرندگان تقویت شود. با وجود این، بسیاری از دانش‌آمـــوزان بـــرای توســـعهٔ مهارت‌های بصری خود، به‌خصوص وقتـــی با توابع ناشـــناخته‌ای مثل تابع دریکله[۳۲] مواجه می‌شـــوند، با دشواری‌های زیادی روبه‌رو هستند زیرا برای آن‌ها، در نظر گرفتن توابع چندضابطه‌ای به‌عنـــوان یک تابع، سخت است و گاهی منجر به ایجاد یک بدفهمی در مـــورد موجودیت توابع ناپیوســـته در آن‌ها می‌شود (جونز، ۲۰۰۶).

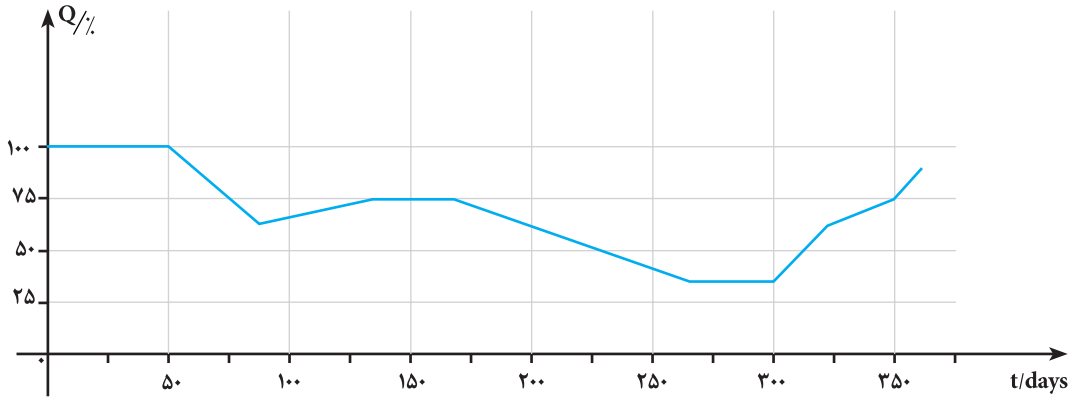
بالاخره، بازنمایـــی ضابطه‌ای نیز یکـــی دیگـــر از بازنمایی‌های مهم مفهـــوم تابع اســـت و تصور تابع از این راه، مشابه تعریف اولیهٔ اویلر[۳۳] از تابع اســـت. این بازنمایی، مخصوصاً برای آموزش حســـاب و قبل از حساب مفید است. اما لازم است دانش‌آموزان بدانند که توابع، نه لزوماً بازنمایی فرمولی دارند و نه همواره با اعداد ارتباط دارند.

فرایند

سطح بعدی درک مفهوم تابع، فرایند اســـت. این مفهـــوم درک عمیق‌تـــری از یک تابـــع، به‌عنوان چیزی که یک شـــیء را می‌گیرد، آن را تبدیل می‌نماید و یک شـــیء کاملاً جدید تولید می‌کند، به‌دست می‌دهد و شـــامل یـــک فرمول یا قانون صریح اســـت. در این سطح از یادگیری، دانش‌آمـــوزان مایلند توابعـــی را قبول کنند که شـــامل تبدیـــلات مبهمی هســـتند (مثلاً خیلی از دانش‌آموزان، تابع ثابت را به‌عنوان یک تابع در نظر نمی‌گیرند.)

ایدهٔ ماشـــین تابع، یـــک ابزار متداول اســـت که معلمـــان از آن برای کمک به دانش‌آموزان جهت درک تابـــع از منظـــر فراینـــدی، اســـتفاده می‌کنند. ایـــن تکنیک، تابع را به‌عنوان ماشین یا جعبه‌ای که یـــک ورودی را می‌گیرد و یک خروجـــی تولید می‌کنـــد، معرفی می‌کنـــد. در حالـــی که بـــا درک فرایندی، دانش‌آمـــوزان نیازی به دانســـتن محتوای جعبه ندارند و وجود یک ماشین به‌تنهایی، کافی است تا دانش‌آموزان متقاعد شوند که در حـــال کار کردن با یک تابع هســـتند (تال و همکاران، ۲۰۰۰). آن‌ها توصیه می‌کنند که استفاده از این بازنمایی مفید است، زیرا ماشین تابع، یک پایهٔ قدرتمند و یک ریشهٔ شـــناختی برای توســـعهٔ یادگیری مفهـــوم تابـــع اســـت و جنبه‌های دیداری و شـــکل ماشین تابع، هم در برگیرندهٔ وضعیت تابع به‌عنوان شـــیء و هم جنبهٔ فرایندی تابع از ورود تا خروج است.

دومین دیدگاه فرایندی به تابع، کارکردن با بازنمایی نمودار وِن تابع به‌عنوان تناظر بیـــن دو مجموعه اســـت. این دیدگاه به تابع، مشابه تعریـــف دیریکلـــه (۱۸۳۷) از تابع اســـت که تابع را به‌عنوان تناظری بیـــن دو مجموعه بیـــان می‌کند، به‌طوری که هـــر عضو از مجموعهٔ اول، فقـــط به یک عضو از مجموعهٔ



شکل ۳ـ میزان آب پشت یک سد بر حسب زمان طی یک سال (تکسیرا و سارایوا، ۲۰۰۷)

تحقیق روی بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند

دوم نظیر می‌شود. ایدهٔ تناظر، دانش‌آموزان را به‌جای استفاده از الگوریتم‌ها، به سمت تمرکز روی نگاشت یک مجموعه بر مجموعهٔ دیگر سوق می‌دهد.

شیء

پیشرفته‌ترین درک از تابع، شیء انگاشتن آن است که با استفاده از بازنمایی زوج مرتبی، به بهترین نحو بیان می‌شود. به گفتهٔ جونز (۲۰۰۶)، در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی[۳۴]، تابع را به شیوه زیر تعریف کردند:

فرض کنید که E و F، دو مجموعه مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F، یک رابطه تابع گونه در y است، هرگاه برای هر x در E، یک y در F وجود داشته باشد که با x جفت شده باشد.

وی، این تعریف را اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب می‌داند که از نظر ریاضی، دقیق‌ترین تعریفی است که معرف ماهیت تابع است.

از این گذشته، اسفارد[۳۵] (۱۹۹۱)، دیدگاه تابع به‌عنوان شیء را مفهوم ساختاری خوانده و اظهار می‌دارد که این دیدگاه برای ریاضی‌دانان اهمیت دارد، زیرا فرایندهای شناختی را مؤثر می‌کند. اسفارد استدلال می‌کند که لازم است دانش‌آموزان، ابتدا تابع را به‌عنوان عملیات (فرایند) یاد بگیرند تا طبیعی‌تر بتوانند آن را به‌عنوان شیء توسعه دهند.

این در حالی است که به‌گفتهٔ آکووک (۲۰۰۳)، تحقیق روی بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند. در همین راستا، گلدنبرگ[۳۶] (۱۹۹۸ به نقل از کاپوت، ۱۹۹۸)، ابراز می‌کند که برقراری ارتباط بین بازنمایی‌های متنوع یک مفهوم، میزان تجرید آن مفهوم را کاهش می‌دهد و یک دید منسجم‌تر و یکپارچه‌تر نسبت به آن فراهم می‌کند.

با این وجود، اخیراً دیدگاه استفاده از بازنمایی‌ها، مورد بعضی انتقادها قرار گرفته است. برای مثال، از نظر اسفارد (۲۰۰۰) این خطر وجود دارد که بازنمایی‌ها، صرفاً نمایش برخی اشیا و مجزا از مفهوم آن‌ها تصور شوند. این وضعیت می‌تواند برای یادگیرنده، توجیهی باشد بر اینکه اشیا و مفاهیم، از بازنمایی‌های آن‌ها مهم‌تر هستند و باید قبل از نشانه‌ها و نمادها یاد گرفته شوند. در تأیید این نگرانی، مارکوس (۲۰۰۶) بیان می‌کند که مثلاً تصویر یک مثلث، یک مثلث نیست، بلکه فقط نمایشی از آن است و مثلث چیزی است که با این شکل معرفی شده است؛ یعنی مفاهیم نمی‌توانند از بازنمایی‌ها جدا باشند زیرا نمی‌توان قبل از نمایش دادن مثلث، توضیح داد که مثلث چیست و دارای چه ویژگی‌هایی است. تامپسون[۳۷] (۱۹۹۴)، استفاده از بازنمایی‌های مختلف را برای ایجاد درک عمیق‌تر از تابع، چنین نقد کرده است.

«ایدهٔ بازنمایی‌های مختلف به تعبیر فعلی و برای ساخت اولیه، نیازمند توضیح و تفسیر آن ایده‌هاست. هستهٔ اصلی مفهوم تابع، به‌وسیلهٔ هرآنچه که عموماً بازنمایی نامیده می‌شود، معرفی نمی‌شود. بلکه در عوض، ارتباط برقرار کردن بین انواع بازنمایی‌ها، زمینه را برای ایجاد یک درک معقول و با ثبات از تابع به‌وجود می‌آورد» (تامپسون، ۱۹۹۴، ص. ۳۹.)

به‌عقیدهٔ گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، «ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف و مرتبط کردن آن‌ها، باعث به‌وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانسته حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر بوده و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود.

در مجموع، تامپسون (۱۹۹۴) پیشنهاد می‌کند که بهتر است پیش از معرفی نمودارها، توضیحات شفاهی و جدول‌ها به‌عنوان نمایش‌های تابع یا بازنمایی‌های مختلف آن ابتدا بر نمایش‌هایی که توسط دانش‌آموزان قابل درک و بیان است، تمرکز کنیم. بنا به اظهار وی، اگر دانش‌آموزان هنگام استفاده از بازنمایی‌های مختلف

یک مفهوم، ندانند که همگی آن‌ها، به بیان یک مفهوم می‌پردازند تا درک واحدی از آن مفهوم ایجاد شود، این نگرانی وجود دارد که دانش‌آموزان، هر بازنمایی را موضوعی مجزا تصور کنند و آن را مستقل از مفهوم اصلی یاد بگیرند (نقل شده در آکووک، ۲۰۰۳).

جمع‌بندی

در این مقاله، ابتدا دیدگاه بازنمایی‌های مختلف از منظر محققان آموزش ریاضی معرفی شد. سپس نقش بازنمایی‌ها در یادگیری ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، به تابع به‌عنوان موضوعی که با استفاده از بازنمایی‌ها معرفی می‌شود، پرداخته شد و در این زمینه تلاش شد تا به اختصار، به بازنمایی‌های مختلف تابع اشاره شود. در نهایت، به اجمال، به بعضی از انتقادات مطرح شده در رابطه با نقش بازنمایی‌های مختلف در یادگیری تابع پرداخته شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Skemp
2. Janvier
3. Kastberg
4. Written
5. Pictorial
6. Tabular
7. Oral
8. Markus
9. Goldin
10. Kaput
11. Ozel
12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
13. Steen
14. Tall
15. Vinner
16. Dreyfus
17. Zimmermann
18. Reflective
19. Associative
20. Yerushalmy
21. Keller
22. Hirsch
23. Sajka
24. Sfard
25. Saraiva
26. Teixeira
27. Akkoc
28. Jonesa
29. Dubinsky
30. Harel
31. Theodore Eisenberg
32. Dirichlet
33. Euler
34. Bourbaki
35. Anna sfard
36. Goldenberg
37. Thompson

منابع

1. Akkoc, H. & Tall, D. (2005). A mismatch curriculum design and student learning: the case of the function concept, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds.), Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick
2. Tall, D. (1991). (ed.): Advanced Mathematical Thinking.
3. Jonesa, M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the concept of the Function.
4. Principles and Standards for School Mathematics, Key Curriculum Press; 1ST edition; National Council of Teachers of Mathematics (2000).
5. Saraiva, M. J. and Teixira, A. M. (2007). Secondary School Students' Understanding of the Concept of Function. msaraiva@mat.ubi.pt,anamadalenabt@hotmail.com
6. Hahkioniemi, M. (2006). The Role of Representations in Learning the Derivative.
7. Kastberg, S. E. (2002). Understanding Mathematical Concepts: The Case of The Logarithmic Function.
8. Thompson, p. w. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.)
9. NCTM (2000), Principles and Standards for School Mathematics.
10. NCTM (1989), Principles and Standards for School Mathematics; Curriculum Standards for Grades 9- 12; Standard 6-Functions.
11. Gooya, Z. (1988). Students' Conceptual of Calculus.
12. Skemp, R. (1989). Mathematics in The Primary School.

۱۳. جوادی، مهدی (۱۳۸۷). **تصورات مفهوم و تعاریف مفهوم از مفهوم تابع**، پایان‌نامه منتشر شدهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۴۶، صص۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۵. دافعی، حمید. (۱۳۸۹). **بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۱۰۰، صص ۷۰ تا ۷۵. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۶. ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). **آموزش تابع برخی رویکردها و چالش‌ها**.

۱۷. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰). **دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۶۳، ص۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۸. گویا، زهرا و پرهیزگار، بی‌بی‌زکیه (۱۳۸۹). **درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره۹۹، صص۲۴ تا ۳۳. دفتر انتشارت کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۹. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده. (۱۳۸۵a). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**، قسمت اول. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۸۴، صص۲۸ تا ۳۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۰. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده (۱۳۸۵b). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**، قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۸۵، صص ۲۰ تا ۲۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۱. گویا، مریم. (۱۳۸۲). **مفهوم تابع و بدفهمی دانش‌آموزان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۷۲، صص ۲۳ تا ۳۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۲. گویا، زهرا و فدایی، محمدرضا. (۱۳۷۸). **مدل‌هایی برای برنامهٔ درسی ریاضی**. قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۵۶، صص۴ تا ۲۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، مدل‌سازی، راه‌حل‌های متنوع، راهبردهای حل مسئله، تقسیم عادلانهٔ پیتزا

راه‌های زیادی برای تولید مسائل ریاضی از یک نقطهٔ شروع وجود دارد. در اینجا می‌خواهم افکاری را شرح دهم که مرا به تولید تعدادی از این مسائل هدایت کرد. در حین کار روی این مسائل، به‌طور آگاهانه تلاش کردم تا حد امکان، مراحل عمل را یادداشت‌برداری و پیگیری کنم.

دامنهٔ این مسائل، که بسیاری از آن‌ها برای من جدید هستند، از سطح پیش‌دبستان تا دانشگاه است. می‌دانم اگر قبل از بیانشان، شرح دهم که چطور به ایدهٔ طرح این مسائل رسیدم، اشاره‌ای به راه‌های احتمالی حل کردن آن‌ها خواهد شد. در نتیجه، با بیان اولین مسئله در این زنجیره، شروع خواهم کرد. به این ترتیب، شما به‌عنوان خواننده، فرصتی خواهید داشت که آن‌ها را بدون راهنمایی‌های من حل کنید. بعد از آنکه نخستین مسئله را خواندید، و قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، ببینید به چند راه مختلف می‌توانید آن را حل کنید. این شما هستید که باید درمورد دقتی که از خود انتظار دارید، تصمیم بگیرید.

اولین مسائل

تصور کنید با دو نفر از دوستان خود در یک رستوران هستید و سفارش یک پیتزای بزرگ و یک پیتزای کوچک را داده‌اید. پیش‌خدمت آن‌ها را می‌آورد و متوجه می‌شود که شما بر سر اینکه چطور پیتزاها را به‌طور عادلانه بین خودتان تقسیم کنید، مشغول بحث هستید. او می‌گوید:

خوب! چون پیتزای بزرگ دو برابر پیتزای کوچک است و شما سه نفر هستید، می‌توانید فقط پیتزای بزرگ را نصف کنید و به این ترتیب، هر کدام مقدار یکسانی پیتزا خواهید داشت.

نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی

نویسنده: ماریون والتر
ترجمه: سهیلا غلام‌آزاد
پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش

مقاله

چطور می‌توانید درست بودن حرف پیش‌خدمت را بررسی کنید؟

شما نه با خودتان متر یا خط‌کش آورده‌اید و نه می‌توانید به آشپزخانه بروید و پیتزاها را وزن کنید. نیازی هم نیست که نگران خمیر پیتزاها باشید، آن‌ها تا لبه‌ها به‌طور یکنواخت هستند (البته، اگر بعدها لبهٔ خمیری ملاحظه کردید، می‌تواند مشکل ایجاد کند). بنابراین، حالا قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، سعی کنید راه‌های متنوعِ نشان دادنِ آنکه L=۲S را بیابید.

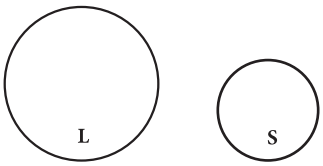
قبل از تشریح آنکه چطور به این مسئله رسیدم، مکث می‌کنم تا انواع متداول مسائل پیتزا را به یاد آوریم (برای آنکه تا حدی شما را از نگاه زیر چشمی به راه‌حل منصرف کنم!) مسائل استاندارد پیتزا، معمولاً با قیمت پیتزا یا تعداد انتخاب‌های مختلف آن سروکار دارد. دو مثال عمومی آن‌ها عبارت‌اند از:

کدام معاملهٔ بهتری است: یک پیتزا به قطر ۱۴ اینچ به قیمت ۱۳ دلار یا دو پیتزای ۱۰ اینچی هر یک به قیمت ۷ دلار؟

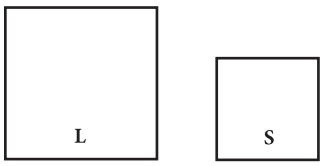
اگر پنج مادهٔ غذایی[۲] مختلف برای روی پیتزا در دسترس باشد و در یک فروش ویژه، انتخاب هر سه‌تای آن‌ها مجاز باشد، به چند راه مختلف، می‌توان یک پیتزا سفارش داد؟

حال شرح خواهم داد که چطور به مسئلهٔ اول رسیدم، که آن نیز به‌نوبهٔ خود منجر به طرح تعداد دیگری مسئله شد. در گذشته، در کلاس‌های درس و در سخنرانی‌ها می‌پرسیدم که اگر اندازه‌گیری ضلع مربع‌ها مجاز نباشد، چگونه کسی می‌تواند به سرعت چک کند که آیا مساحت یک مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

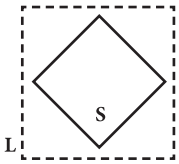
بعضی اوقات، برای ایجاد انگیزه درمورد این سؤال، با استفاده از طلق رنگی روی اُورهِد، دنباله‌ای از مربع‌های تودرتو را نشان می‌دادم و سؤال می‌کردم که کدام یک

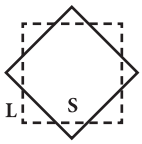


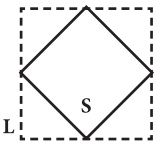
شکل۱:
دو پیتزا: پیتزای بزرگ L و پیتزای کوچک S



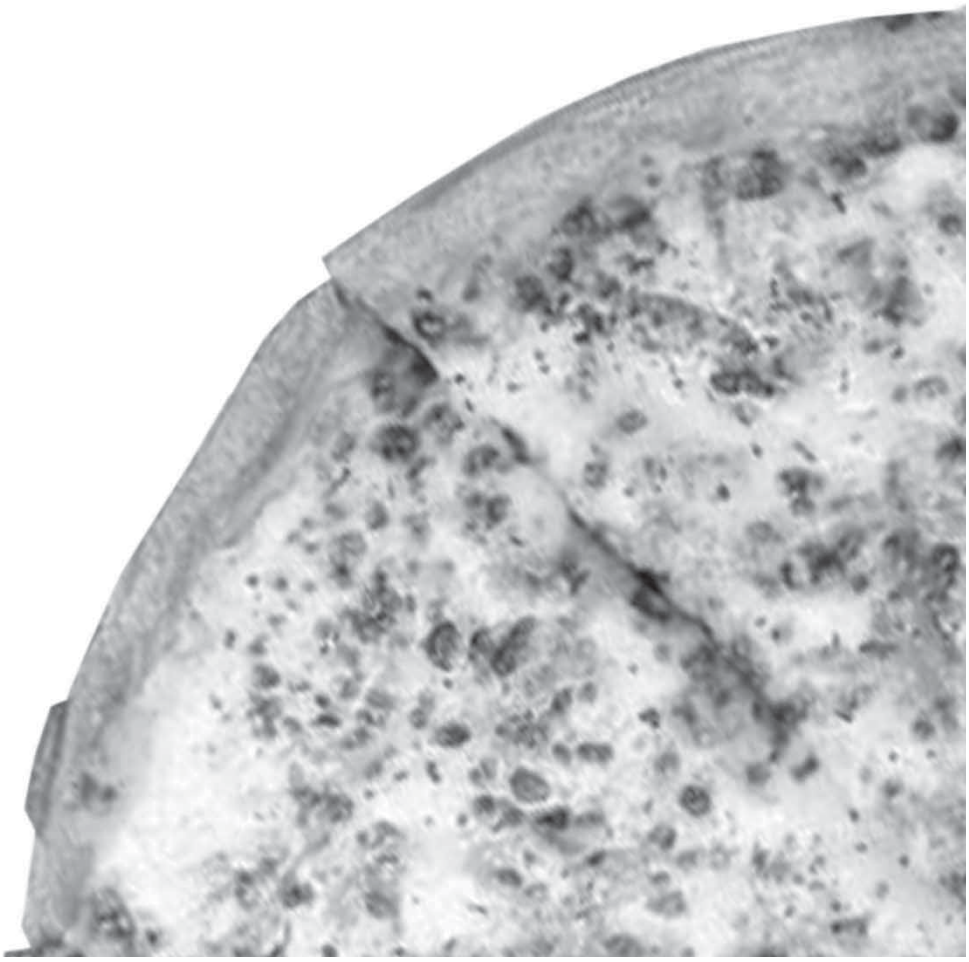
شکل ۲:
آیا مساحت مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

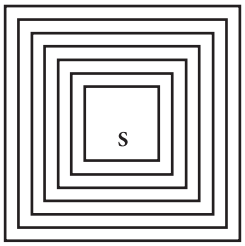




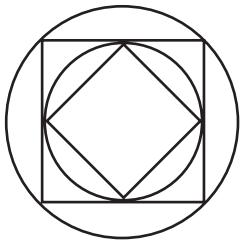


شکل۴:
L زیادی بزرگ است — L زیادی کوچک است — L دو برابر S است

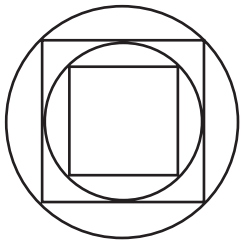




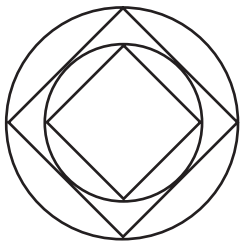
شکل ۳الف:
با استفاده از طلق رنگی: مساحت کدام مربع دو برابر مساحت مربع S است؟



شکل ۵ الف:
رسم دایره‌های محیطی



شکل ۵ ب:
چرخاندن مربع کوچک



شکل ۵ پ:
چرخاندن مربع بزرگ

از ایـــن مربع‌ها، دو برابر مســـاحت کوچک‌ترین آن‌ها را دارد؟

همچنین، نقاشی فرانک استلا[۳] یا جـــوزف آلبرز[۴] را هـــم به‌همراه مسئله نشـــان می‌دهم. (شکل‌های ۳ب و ۳پ را ببینید) (مراجعه شود به صفحهٔ ۲ جلد)

یک راه ســـاده برای بررسی آنکه آیا مربع L دو برابر مساحت مربع S را دارد، در شکل ۴ نشان داده شده است.

بعـــد از اثبـــات آنکـــه مربع L مساحتی دو برابر مساحت مربع S دارد، غالب اوقـــات دایره‌ای به دور مربع S و دایـــره‌ای به دور مربع L محیط می‌کنم و هر یک از مربع‌ها را می‌چرخانـــم تا همان‌گونه که در شـــکل‌های ۵ الف- پ نشان داده شـــده اســـت مربع‌هایی با اضلاع موازی به‌دست آید.

داشـــتم برای یک ســـخنرانی آماده می‌شدم- ناخودآگاه، موقعیت مربع بالا را در نظر گرفتم- اما واقعاً نمی‌خواســـتم دیگر از این مســـئله استفاده کنم. من قبلاً شکل ۵ الف را کشیده بودم، پس از خودم پرسیدم شاید بتوانم این مسئله را تغییر شکل بدهم. صدای قدرتمند پولیا را شنیدم که می‌گفت «به مسئلهٔ مرتبط فکر کن[۵]» و «به مسئله نگاه کن[۶]». [۱] پس دوباره به شکل ۵ الف نگاه کردم و آن را نه به‌عنوان مســـئله‌ای که با دو مربع سروکار دارد، بلکه به‌عنوان مسئله‌ای که با دو دایره سروکار دارد دیدم. آها! اینجا یک مســـئلهٔ تغییر شکل یافته ایجاد شد- چطور کسی می‌تواند به‌سرعت بگوید که آیا یک دایـــره دو برابر بزرگ‌تـــر از دایره‌ای دیگر اســـت؟ اما حالا دیگر نقاشی استلا یا آلبرز را نداشتم که با آن‌ها، درمورد مسئله ایجاد انگیزه کنم یا آن را زینت دهم. چطور می‌توانستم این مسئله را ارائه کنم؟

تصمیم گرفتم آن را به مسئلهٔ پیتزا برگردانم. پس اینجا مســـئلهٔ اولی بود که با آن شـــروع کردم – چطور می‌توانی بگویی که پیتزای L دو برابـــر بزرگ‌تـــر از پیتزای S است؟ امیدوارم تا الآن، این مسئله را از چندین راه مختلف حل کرده باشید.

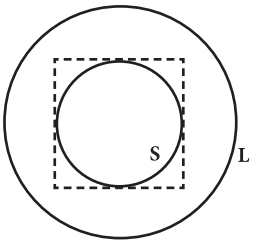
در اینجا برخی از روش‌هایی که به آن‌ها فکر کردم و همه به هم ربط داشتند، آورده شده است. [۲]

۱. یکی از پیتزاها را طوری روی دیگری بگذار که مرکزشـــان روی هم قرار بگیرد سپس با چشم (یا با استفاده از انگشتانت) به‌طور ذهنی، چهار مماس بر پیتزای کوچک رسم کن و ببین که آیـــا مربعی محاط در پیتزای بزرگ تشکیل می‌دهد. (شکل ۶ را ببینید.)

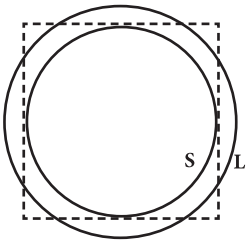
۲. متوجه شـــدم که قطر دایرهٔ کوچک برابر یکـــی از پاره‌خط‌های مماس است که دو انتهای آن روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. (شـــکل ۷ را ببینید.)

پس اگـــر پیتـــزای کوچک را نصف کنیم به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم ببینیم که آیا قطـــرش دقیقاً بین نقاط قطب‌نمای دایرهٔ بزرگ[۷] قرار می‌گیرد. (شکل ۸ الف را ببینید.)

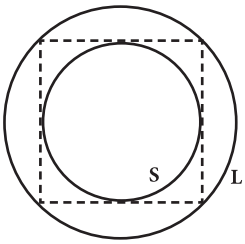
۳. اگـــر نمی‌خواهیـــد پیتزای کوچک را نصف کنید، قطر پیتزای کوچک را چک کنید تا ببینید که آیا بین نقاط قطب‌نمای دایرهٔ بزرگ امتداد دارد. (شکل ۸ب را ببینید)



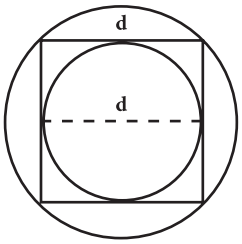
S زیادی کوچک است

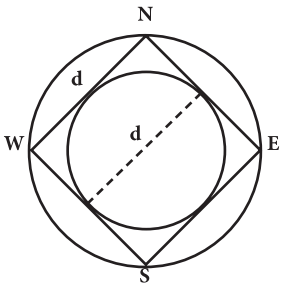


S زیادی بزرگ است

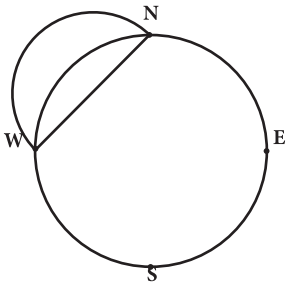


S درست و مناسب است
شکل ۶

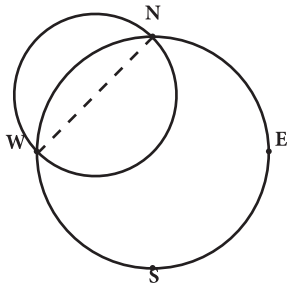




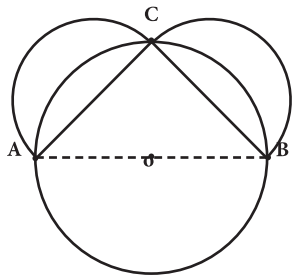
شکل ۷



شکل ۸الف:
با استفاده از نصف پیتزای کوچک



شکل ۸ب:
با استفاده از کل پیتزای کوچک

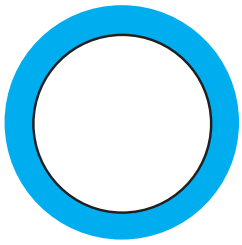


شکل ۹:
دو نصفه پیتزا ساق‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را شکل می‌دهد

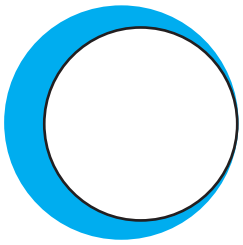
بعد چند تا کاغذ روغنی را به شکل دایره می‌برم، زیرا به‌دلیل شفاف بودن، برای استفاده روی اورهد مناسب هستند. دایرهٔ کوچک را نصف می‌کنم و هر نصفه از آن را در یک دستم می‌گیرم. به‌طور طبیعی، همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، آن‌ها را روی دایرهٔ بزرگ می‌گذارم تا ببینم که آیا نقاط انتهایی قطر دایرهٔ کوچک روی نقاط انتهایی قطر دایرهٔ بزرگ قرار می‌گیرد؟

چون به‌نظر می‌رسد که AB از مرکز دایرهٔ بزرگ می‌گذرد، زاویهٔ C قائم‌الزاویه است و در نتیجه تعمیم قضیهٔ فیثاغورس قابل اعمال است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت دو نیم‌دایرهٔ کوچک برابر مساحت نیم‌دایرهٔ بزرگ است. [۳] با قرار دادن مرکز دو دایرهٔ کاغذی روی هم فهمیدم که می‌توانستم مسئلهٔ اصلی را از راه دیگری بپرسم.

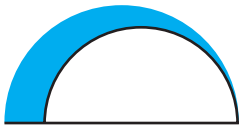
نشان دهید که قسمت سایه‌دار نصف پیتزای بزرگ است. (شکل ۱۰ را ببینید.)



شکل ۱۰:
آیا قسمت سایه‌دار برابر نصف دایرهٔ بزرگ است؟



شکل ۱۱الف:
نصف پیتزای جالب دیگر



شکل ۱۱ب:
ربع پیتزای بزرگ

اگر در ابتدا سؤال را از این راه از خودم پرسیده بودم، شاید رویکرد دیگری برای حل آن به‌کار می‌بردم. اما همین‌که پی بردم این راهی جالب برای تقسیم پیتزا به دو نیمه است، به جهت دیگری کشانده شدم. در اینجا توانستم دایرهٔ داخلی را حرکت دهم و بر دایرهٔ بزرگ مماس داخل کنم و قسمت سایه‌دار را به‌صورت هلال ماه نشان بدهم. (شکل ۱۱الف را ببینید.)

اگر این شکل به‌طور متقارن به دو نیم شود، به شکل جالبی از ربع دایرهٔ بزرگ می‌رسیم. (شکل ۱۱ب را ببینید.)

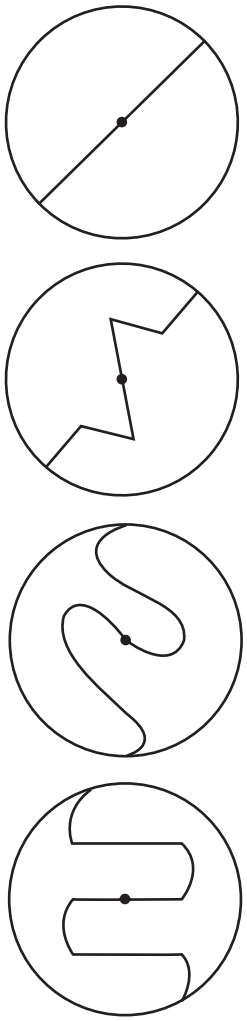
حال رسیدم به اینکه:

به چند راه مختلف می‌توان یک پیتزا را نصف کرد؟

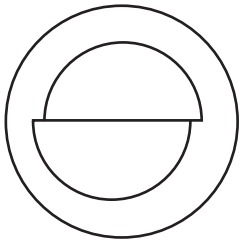
من دفعات زیادی با نصفه‌های دو بعدی و سه بعدی برخورد داشتم. اغلب اوقات عکس‌های مجسمهٔ نیم‌کرهٔ مکس بیل[۸] را استفاده کرده‌ام. به‌طور خاص، از شرکت‌کنندگان خواسته‌ام که یک سیب را مانند مجسمه‌ای که در شکل ۱۲ نشان داده شده است ببرند. (مراجعه شود به صفحهٔ ۲ جلد)

پس برمی‌گردیم به این سؤال که به چند راه می‌توانید دایره‌ای را نصف کنید؟ ممکن است علاوه‌بر موارد داده شده در شکل ۱۳، پاسخ‌های «بدیهی» بسیار زیاد دیگری تولید کنید.

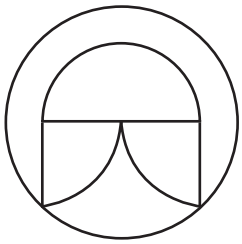
با استفاده از ایدهٔ «اگر نه چه؟[۹]»[۴] در اولین تصویر شکل ۱۳، با تمرکز بر ویژگیِ «برش مستقیم»، اول پرسیدم: «چه می‌شود اگر برش



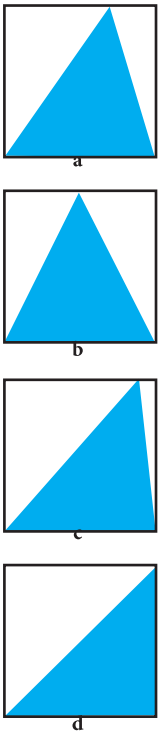
شکل ۱۳:
بعضی نصف کردن‌های معمول و غیرمعمول دایره



شکل ۱۴الف:
ترکیب دوبارهٔ دو نیم‌دایرهٔ دایرهٔ کوچک



شکل ۱۴ب:
ترکیب دوبارهٔ ربع دایره‌های نیم‌دایره

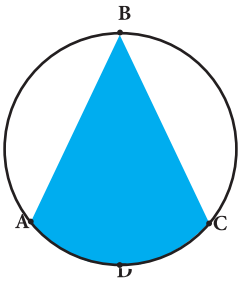


شکل ۱۵:
نصفش را در نظر بگیر

الزاماً مســـتقیم نباشد؟»پس از آن راه‌های نامحدودی برای نصف کردن مربع پیدا می‌شـــود. بعد به ویژگی «دو قسمت مساحت مساوی داشته و هم‌نهشت هســـتند» فکر کردم و پرسیدم چه می‌شود اگر قسمت‌ها الزاماً هم‌نهشـــت نباشـــند؟ خوب ممکن اســـت تصویری از حلقه‌های متحدالمرکز به‌دست آورید. در این نقطه، من شکل‌های دیگر را بررسی نمی‌کنم. فقط وقتی بالاخره داشتم ایـــن مقاله را تایپ می‌کردم، به فکر نصـــف کـــردن، از راه‌هایـــی که در شـــکل‌های ۱۴الف- ب نشان داده شده است افتادم.

در عـــوض، روی ویژگی «هر نیمه در یـــک قطعه» تمرکز کردم و از خودم پرســـیدم: چه می‌شود اگر لازم نباشد در یک قطعه باشد؟ در اینجا، پوســـتری به یادم آمد که راه‌های نصف کردن یک مربع را نشان می‌دهد. (شکل ۱۵ را ببینید.) و آن ایده من را به رســـم شکل ۱۶ سوق داد و طرح این سؤال که چه می‌شود اگر یک نیمه به شـــکل یک برش کیک (پای) باشد و نیمهٔ باقیماندهٔ دو قطعه باشد؟

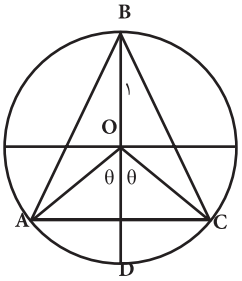
چطـــور می‌توانم ایـــن برش را مشـــخص کنم؟ من این مســـئله را دوست داشتم، چون قبلاً آن را ندیده بودم و در نتیجه، تصمیم گرفتم بعد روی آن کار کنم. من می‌توانستم نصف آن شکل هندسی را در نظر گرفته و بپرســـم: «نیم‌دایـــره‌ای به قطر BD مفروض است، نقطهٔ C را چنان بیابید که BC نیم‌دایره را نصف کند». اولین فکرم (که خیلی هم دوام نداشت) این بود که «مجبورم از حسابان استفاده کنم». اما به‌سرعت نظرم عوض شد، زیرا قرار بود برای شنوندگانی صحبت کنم که شامل معلمان متوسطهٔ اول (دورهٔ راهنمایـــی) نیز می‌شـــد. در نتیجه تصمیم گرفتم این مسئله را بدون اســـتفاده از حسابان حل کنم. مشابه شکل ۱۵b در مربع، قطعه‌ای با یک خط تقارن – BD (شکل ۱۶) کشیده بودم. پس اگر می‌دانستم نقاط A و C کجا بودند، برش مشـــخص می‌شد. پس اینجا مسئلهٔ بعدی من مطرح شد: اگر ABCD نصف پیتزایی



شکل ۱۶:
نصف پیتزا به شکل یک برش کیک است و نصف دیگر دو قطعه است

به شـــعاع ۱ باشـــد (منوط به سلب مسئولیت معمولِ بدون از دست دادن کلیت)، زاویـــهٔ مرکزی AOC چقدر اســـت، چون اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی را می‌دانستم، آنگاه A و C مشخص می‌شدند. (به شکل ۱۷ نگاه کنید.)

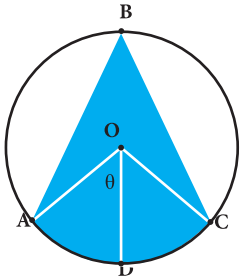
معادله‌ای که برای θ به‌دســـت آوردم، از نوعـــی بود که قبلاً ندیده بودم. بدون داشتن ماشین حساب



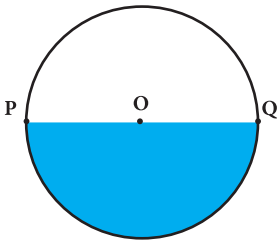
شکل ۱۷

لوکس، آن را از طریق تکرار[۱۰] حل کردم. [۵]

بعدها وقتی دوباره به شـــکل برش کیک نگاه کردم و شـــروع به نوشـــتن این مقاله کردم، دیدم دو



الف



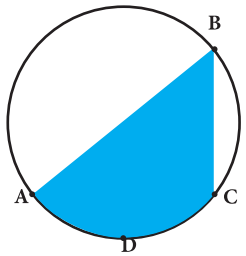
ب

شکل ۱۸:
دو حالت اکستریم (و متقارن)

ترسیم (شکل‌های ۱۸الف و ۱۸ب) روی میز در مقابل خودم داشتم و از خودم این ســـؤال را پرسیدم که «چی می‌شـــد اگر این شکل برش کیک، خط تقارن نداشت؟»

به عبـــارت دیگر، چه می‌شـــد اگـــر AB برابر CB نبود؟ فکر کردم B را روی محیـــط دایـــره حرکت بدهـــم، به‌طوری‌کـــه ABCD برابر نصف مســـاحت دایره باقـــی بماند. واضح اســـت که AC نیز مجبور به جابه‌جایی می‌شـــد. برای آنکه من دو حالت اکســـترمم در مقابل خود داشتم و درسی که در فیلم انیمیشن داشـــته‌ام—و کتاب تصاویر هندسی (بینـــی و همـــکاران[۱۱]، ۱۹۸۲) نیز بـــه ذهنم آمد—از خودم پرســـیدم داستان‌پردازی برای فیلم متحرکی کـــه در آن بـــرش پای شـــکلی که نصف مســـاحت دایره را دارد (شکل ۱۸الف) بخواهد به نیم‌دایره (شکل ۱۸ب) تغییر شکل پیدا کند چگونه باید باشد. باید اقرار کنم که چندین

بار شـــروع نادرست داشتم تا اینکه بالاخره،روی قطر PQ دایره تمرکز کـــردم و از آنچه که برای خط AC رخ می‌داد وقتی B از بالاترین نقطه حرکت می‌کـــرد و پایین می‌آمد تا اینکـــه روی نقطهٔ انتهایی قطر PQ دایـــره منطبق می‌شـــد، اطمینان یافتم.



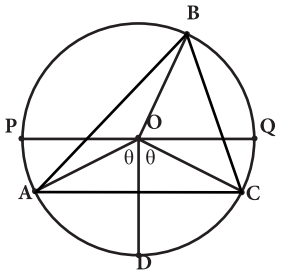
شکل ۱۹:
قسمتی که به شکل برش کیک است، مساحتی برابر نصف مساحت دایره را دارد، اما AB≠BC

همچنین، درمورد قضیه‌ای که بیـــان می‌کند که بـــرای نقاط ثابت A و C، وقتی نقطـــهٔ B روی کمان مربوطه‌اش روی دایره حرکت می‌کند، زاویهٔ ABC ثابت باقی می‌ماند، فکر کردم. من خودم را ســـرزنش کردم که همهٔ این ســـال‌ها، حتی یک‌بار هم از خودم نپرســـیدم که درمورد مساحت **ABCD**، برای نقاط ثابت A و C وقتی نقطهٔ B روی کمان دایره حرکت می‌کند، چه چیز دیگری غیر از اینکه مساحت آن به‌سمت مساحت ACD می‌رود، می‌توانست گفته شود. (شـــکل ۱۹ را ببینید.) اما اکنون، به حرکت دادن B به‌طوری که مساحت برش ABCD ثابت باقی بماند (نصف مساحت دایره) علاقه‌مند شده بودم. اگر قرار باشـــد مساحت ثابت بماند، AC نیز مجبور به حرکت خواهد بود.

سومین مسئلهٔ پیتزای من

چگونه می‌توان تعیین کرد که یک گوه[۱۲] به شکل برش کیک، که متقارن نیست مســـاحتی برابر نصف مساحت یک دایره را دارد؟ (شکل ۱۹ را ببینید.)

اگر چـــه گُـــوهٔ ABCD دیگر متقارن نیســـت، هنوز می‌توانستم نصف زاویهٔ مرکزی را تعیین کنم، چون OA و OC هنوز نســـبت به عمودمنصـــف OD از AC متقارن هستند. مثل حالت متقارن، مساحت



شکل ۲۰:
OD هنوز نسبت به AC به‌طور متقارن قرار گرفته است

گُوه را با در نظر گرفتن مســـاحت مثلـــث ABC به‌اضافهٔ مســـاحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC، محاســـبه کردم– حالا این مســـاحت گُوه را برابر π/۲ ، یعنی نصف مساحت دایره قرار می‌دهیم.

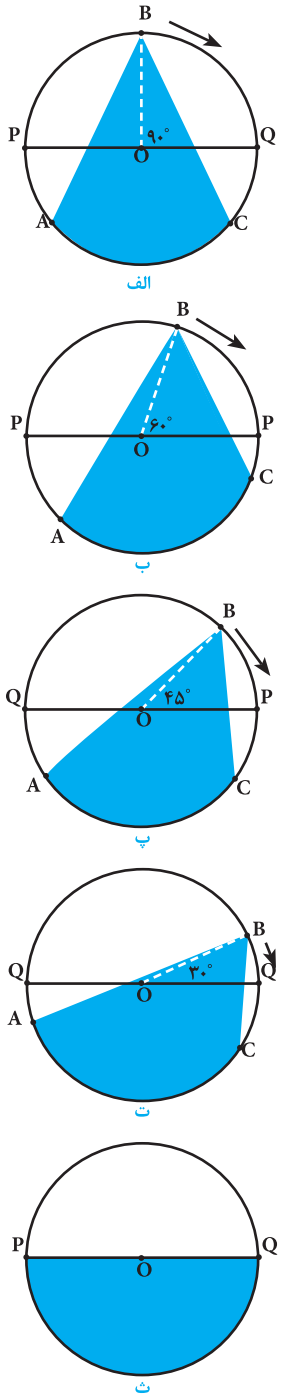
من موقعیت‌هایی را ازنقطهٔ B انتخاب کردم که OB زاویه‌ای زیبا با قطر PQ می‌ساخت. برای مثال، زاویه‌هایی که سینوس و کسینوس آن‌ها را می‌دانستم - (۶۰°،۴۵° و ۳۰°)– شـــکل‌های ۲۱ الف– ث– را ببینید. من انجام محاســـبات را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذارم.

مسئلهٔ سه‌را پیشتر ببریم

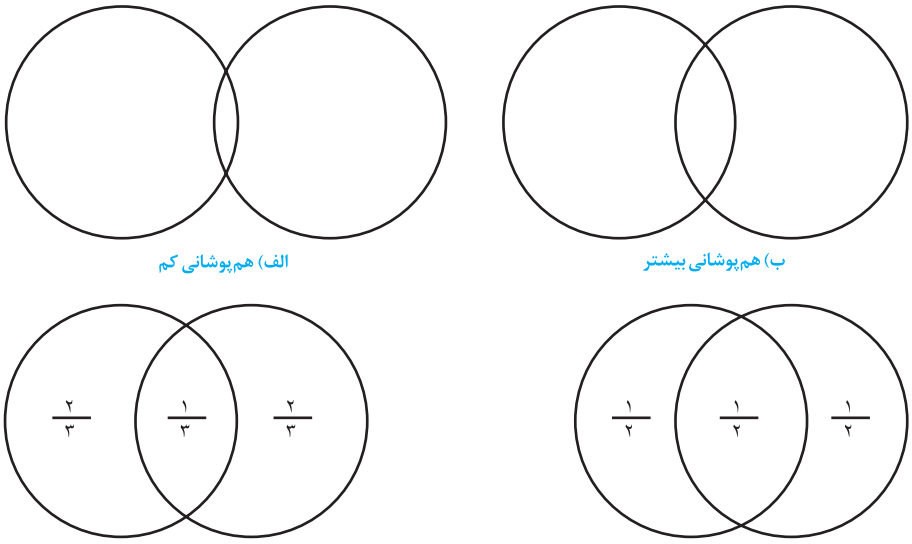
اما من هنوز کارم با مسئلهٔ پیتزا تمام نشده است. چند کاغذ دایره‌ای شـــکلِ یک اندازه برایم باقی مانده بود. شـــروع کردم به حرکت دادن آن‌هـــا و در جایی، دو تـــا از آن‌ها روی هم قرار گرفتند. (شـــکل‌های ۲۲الف– ت را ببینید).

از خودم پرسیدم «مساحت ناحیهٔ روی‌هم افتاده چقدر اســـت؟» بعد از خودم پرسیدم «آیا می‌توانم آن‌ها را جوری قرار دهم کـــه یکی بتواند دو پیتزا را بین سه نفر تقسیم کند؟»

خوب اگر مســـاحت‌ها آن‌گونه باشـــد که در شـــکل ۲۲پ نشان داده شده اســـت، دو نفر می‌توانند



شکل ۲۱:
طرح‌هایی به شکل برش کیک که هر یک مساحتی برابر نصف مساحت دایره را دارد



ب) هم‌پوشانی بیشتر

الف) هم‌پوشانی کم

ت) نصف هر پیتزا

پ) هنوز هم بیشتر

شکل ۲۲

دو سوم یک پیتزا را در قالب یک تکه بگیرند و نفر باقی‌مانده دو تکه را که هرکدام به اندازهٔ یک‌سوم پیتزاست، بگیرد. محاسبات این حالت را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذارم. در عوض، من به حرکت دادن دایره‌ها ادامه دادم (شکل ۲۲ت) و دریافتم که اگر هر ناحیه نصف مساحت دایره را داشته باشد، دو پیتزا را می‌توان به شکل جالب‌تری، به غیر از نصف کردن پیتزاها از وسط، بین چهار نفر تقسیم کرد!

تا چه حد باید دو دایره روی‌هم قرار بگیرند، یا تا چه حد باید مرکز دو دایرهٔ هم‌نهشت از هم دور باشند تا هر یک از ناحیه‌های نشان داده شده نصف مساحت دایره را داشته باشد؟ برای کشیدن یک شکل آراسته، ابتدا از خودم پرسیدم مرکز این دایره‌ها کجا باید بیافتد. خود را متقاعد کن که آن‌ها در ناحیهٔ وسط قرار می‌گیرند.

پس مسئله به اینجا ختم می‌شود که بپرسیم مرکز آن‌ها تا چه اندازه باید از هم فاصله بگیرند.

عایدی من از انجام این محاسبات این بود که پی بردم این مسئله به‌خوبی در مجموعهٔ رو به گسترش مسائل پیتزای من جا می‌گیرد.

مسئلهٔ چهار پیتزا

چگونه می‌توانید دو پیتزای هم اندازه را بین چهار نفر تقسیم کنید؟ البته نه با نصف کردن هر پیتزا با استفاده از یک خط راست (یا با برش‌های فانتزی مانند شکل ۱۳)، بلکه با روی‌هم قرار دادن آن‌ها و بریدن دورِ روی‌هم رفتگی‌ها.

برای انجام محاسبات آسان، به حالت متفاوتی نگاه کنید که در آن، هر دایره از مرکز دایرهٔ دیگر عبور می‌کند. این حالت به‌دلیل زاویه‌های شصت درجه آسان است. مساحت هر ناحیه چقدر است؟ دوباره، دنبالهٔ فیلم به ذهن می‌آید که مساحت ناحیه‌ها، وقتی دایره‌ها روی هم (به سوی هم) حرکت می‌کنند را نشان می‌دهد. مساحت ناحیهٔ روی‌هم رفته، به‌عنوان تابعی از فاصله بین مرکزها، چقدر است؟

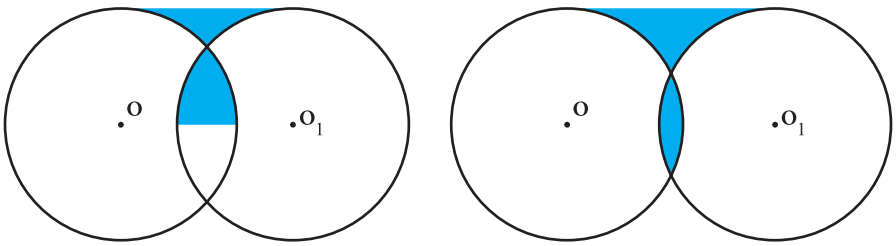
در این حین، داشتم مقالات متنوعی را که طی سال‌ها درمورد قضیهٔ فیثاغورس جمع کرده بودم، مرتب می‌کردم که به مقاله‌ای رسیدم که آن را به‌دلیل عنوانش کپی کرده بودم، اما در حقیقت هنوز آن را نخوانده بودم (مک نیل، ۱۹۹۹). در یک لحظه، متوجه شکل‌های دایره در صفحهٔ دوم آن شدم و بلافاصله آن را خواندم! ضمن طرح مطالب متنوع، این مقاله چگونگی یافتن مساحت دایره‌ای را که مساحت آن برابر تفاضل مساحت دو دایره داده شده باشد، مورد بحث قرار داده بود. من روی حالتی که مجموع دو مساحت، برابر مساحت بزرگ‌تر شود متمرکز شده بودم. البته یک نفر می‌تواند روی آن برحسب تفاضل فکر کند- هر چند که من تا قبل از خواندن مقاله، این کار را نکرده بودم. بنابراین، اینجا هنوز یک مسئلهٔ پیتزای دیگر هست.

مسئلهٔ پنج پیتزا

قطر پیتزایی را بیابید که مساحت آن برابر تفاضل مساحت دو پیتزای داده شده باشد.

دو مقالهٔ دیگر هم هست که من باید به آن‌ها اشاره کنم. در پوشهٔ دیگری که کاملاً هم نامرتبط نبود، به مقاله‌ای برخوردم (پنر[۱۳]، ۱۹۷۸) حاوی مسئلهٔ زیر که منسوب به کروتتسکی[۱۴] (۱۹۷۶، ص. ۳۰۹) بود.

اگر شعاع هر یک از دایره‌ها r=۱ باشد و مساحت ناحیه‌های سایه‌دار مساوی باشد، فاصلهٔ OO_1 را بیابید. (شکل ۲۳الف را ببینید.)



ب) نمودار نادرستی که من کشیدم

الف) نمودار، همان‌طور که در مقاله داده شده

شکل ۲۳

دلیل آوردن این مسئله در اینجا آن بود که این تنها مسئلهٔ موردِ بحث من در کنفرانس ATM بود که آن را خودم نساخته بودم و بدون نگاه کردن به نوشته‌هایم، شکل نادرستی برای آن کشیدم. از این‌رو یک مسئلهٔ زیبای ساده که با یک آها! قابل درک بود، تبدیل شد به یک مسئلهٔ سخت و ناجور که افراد برای حل آن تقلای زیادی کردند، زیرا به آن‌ها گفته بودم که راه‌حل سادهٔ زیبایی برای آن وجود دارد!

کمابیش این مقاله را تمام کرده بودم که جان شارپ، یکی از شرکت‌کنندگان در سخنرانی من در ATM، با ارسال پیام زیر، مرا از وجود مقاله‌ای که ممکن بود مورد علاقه‌ام باشد، مطلع ساخت:

مقاله‌ای در مجلهٔ ریاضی[15] مربوط به اوایل دههٔ ۱۹۶۰ پیدا کردم. این مقاله در مورد بُزی بود که در یک مزرعهٔ دایره‌ای شکل، با طناب، به‌گونه‌ای به نرده‌ها بسته شده که می‌تواند نصف علف‌های آنجا را بخورد. و پرسیده شده بود که طول طناب چقدر است؟ در این مقاله، پیشینهٔ مسئله که به دههٔ ۱۸۹۰ برمی‌گردد، به شکل‌های مختلف ارائه شده است.

من به جان شارپ جواب دادم:

فکر کنم مسئلهٔ مربوط به بز را قبلاً دیده‌ام. اما آن مسئله، مرا جذب نکرد.

او جواب داد: نکته را نگرفته‌اید. این **دقیقاً** همان مسئلهٔ تو با داستانی متفاوت است. پس من هم آن را در اینجا آوردم (فریزر، ۱۹۸۲)، زیرا این مقاله بر مبنای منابع تاریخی زیاد، به‌طور دلپذیری نوشته شده است.

نگاه به عقب

با نگاهی به یک مسئلهٔ قدیمی مربع شروع کردم. در ابتدا هیچ ایده‌ای نداشتم که من را به کجا سوق خواهد داد. حال متعجبم که تا چه حد مرا از مسئلهٔ مربع دور کرده است؛ حتی بدون مطرح کردن سؤالات مربوطه در حالت سه بعدی.

حتماً می‌پرسید از چه روش‌هایی برای خلق این مسائل استفاده کردم؟ من ذهنی باز برای دیدن مشابهت‌ها و دیدن ارتباط بین ایده‌ها داشتم و اجازه دادم که مسائل قبلی با طرح این سؤال که «چطور می‌توانم آن را تغییر قیافه بدهم؟» مسائل جدید را به من نشان دهند. من سؤالات بسیاری پرسیدم، مانند: آیا بیش از یک راه وجود دارد؟ آیا می‌توانم شکل‌ها را حرکت بدهم؟ اگر نه چه؟ کاغذهای دایره‌ای نیز کمک کرد. هنوز هم فکر نمی‌کنم که شیرهٔ مسئلهٔ پیتزا کاملاً کشیده شده باشد. پس امیدوارم خوانندگان به کار کردن روی آن ادامه دهند.

یادداشت‌ها

[۱] من این بخت خوب را داشتم که بیش از چهل سال پیش، در مؤسسهٔ تابستانی NSF در دانشگاه استانفورد، درسی با پروفسور پولیا داشته باشم، و هنوز هم می‌توانم صدای او را بشنوم که می‌گفت «به مسئله نگاه کن».

[۲] آخرین باری که از این مسئله استفاده کردم، در گردهمایی انجمن معلمان انگلستان در آوریل ۲۰۰۱ بود و در آنجا، چند نفر نیم‌دایره‌های کاغذی را به راه‌هایی غیر از راه من مورد استفاده قرار دادند و بعضی‌ها نیز از ربع دایره‌ها استفاده کردند. من قصد داشتم آن روش‌ها را به‌همراه نام مؤلفانشان در اینجا بنویسم، اما چون گزارش دقیقی از آنچه انجام دادند ندارم، تصمیم گرفتم این کار را نکنم.

[۳] این روش می‌تواند این حقیقت را تقویت کند که قضیهٔ فیثاغورس (و عکس آن) حالت خاصی است که در آن سه شکلِ روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مربع هستند. فقط ضروری است که سه شکل روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه متشابه باشند. حالا می‌توانستم همه را دوباره شروع کنم و بپرسم چطور یک نفر می‌تواند به‌سرعت بگوید که یک بیسکویت زنجبیلی دو برابر بزرگ‌تر از یک بیسکویت کوچک‌تر با همان شکل است. حتی بیشتر از آنی که فکر می‌کردم طول کشید تا بفهمم به مسئله‌ای برگشتم که اولین‌بار در دههٔ ۱۹۶۰ آن را مطرح کردم که من و همکارم از آن در کلاس استفاده می‌کردیم. براون و والتر (۱۹۹۰، ص. ۱۰۷) را ببینید.

[۴] برای توضیح کامل تکنیکِ «اگر نه چه؟» و بقیه، براون و والتر (۱۹۹۰، ۱۹۹۳) را ببینید.

[۵] من مساحت گُوه را با در نظر گرفتن مساحت مثلث ABC به‌علاوهٔ مساحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC محاسبه کردم و سپس این مساحت را برابر π/۲ قرار دادم، یعنی نصف مساحت دایره. از کی بایلر، دانشجوی تحصیلات تکمیلی خواستم که راه‌حل مرا که منجر به معادلهٔ زیر شد، با استفاده از ماشین حسابش چک کند.

$$\sin(\theta) + \theta\pi/180 - \pi/2 = 0$$

اگر چه این کار فقط ده ثانیه طول کشید، دوست دارم از او تشکر کنم! [۶] این کاری است که احتمالاً بیش از اندازه انجام می‌دهم و بعضی از دوستانم را کلافه می‌کند، اما می‌تواند خیلی مفید باشد!

پی‌نوشت‌ها

1. Marion Walter
2. Toppings
3. Frank Stella
4. Josef Albers
5. Think of a related problem
6. Look at the problem
۷. در اینجا نقاط قطب‌نما معادل نقاط نشان‌دهندهٔ شمال، جنوب، مشرق و مغرب روی یک قطب‌نما در نظر گرفته شده است.
8. Max Bill
9. What-If-Not?
10. iteration
11. Beeney et al.
12. wedge
13. Penner
14. Krutetskii
15. *Mathematics Magazine*

منبع

Walter M. (2003). Looking at a pizza with a mathematical eye. For the Learning of Mathematics23(2), 3- 10.

عکاس: اعظم لاریجانی

روایت معلمان

گزارشی از یک کلاس ریاضی ششم دبستان

زهرا منتظری ــ دانشجوی کارشناسی ریاضی
سرور شیدانی ــ دانشجوی کارشناسی ریاضی

کلیدواژه‌ها: تدریس ریاضی ششم دبستان، تقسیم اعشاری، روش تدریس، مشاهده از کلاس درس

ساعت ۸ صبح بود که به دبستان دولتی پسرانه* رسیدیم. در ابتدا، آقای مدیر با حضور ما در مدرسه موافق نبود، چون از ادارهٔ آموزش‌وپرورش نامه نداشتیم اما وقتی توضیح دادیم که با معلم هماهنگ کرده‌ایم و اجازه خواستیم خانم معلم را ببینیم موافقت شد و ما را به کلاس ۶/۱ سرکار خانم** معرفی کردند. برایمان دو صندلی اضافه آوردند و ما در انتهای کلاس نشستیم. دانش‌آموزان ۳۵ نفر بودند و پشت نیمکت‌هایی که شبیه میز کنار هم گذاشته شده بود، نشسته بودند. دانش‌آموزان پشت به تخته، مجبور بودند صندلی خود را مایل به‌سمت تخته بگذارند یا کامل برگردند (تعداد ساعات درسی مقرر شده برای ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ ششم در این مدرسه، چهار زنگ در هفته بود که برای کلاس ۶/۱ در روزهای شنبه، یک‌شنبه، سه‌شنبه و پنج‌شنبه زنگ اول برگزار می‌شد). معلم از دانش‌آموزان خواست تا کتاب‌ها و دفترهایشان را آماده کنند و تمرین‌ها را با هم حل کنند. بحث **تقسیم اعشاری** در جلسهٔ قبل آموزش داده شده بود و دانش‌آموزان، تمرین‌ها را از قبل در خانه حل کرده بودند.

در ابتدا، معلم مبحثی از درس جلسات قبل را مجدداً توضیح داد - **ضرب عدد مخلوط**- که به دو روش در کلاس تدریس شد.

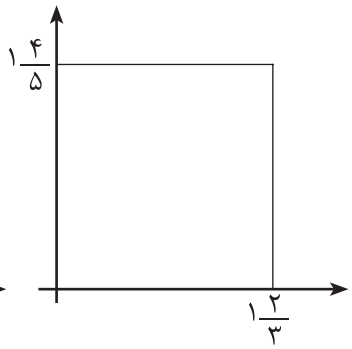
روش اول(روش کتاب درسی):

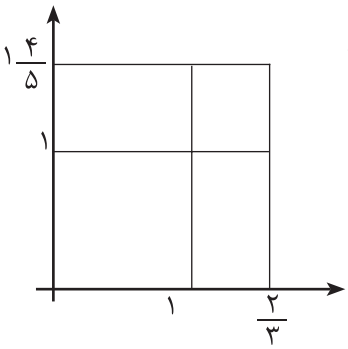
$$۱\frac{۲}{۳}\times ۱\frac{۴}{۵}=$$

	۱×۱		۱×$\frac{۲}{۳}$	
	۱×$\frac{۴}{۵}$		$\frac{۴}{۵}$×$\frac{۲}{۳}$	

$$۱\times۱+۱\times\frac{۲}{۳}+۱\times\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۲}{۳}=۳$$

روش دوم: با استفاده از محورهای مختصات:





معلم: حالا می‌بینیم که حاصل‌ضرب: $1\frac{4}{5}\times1\frac{2}{3}$ برابر با مساحت مستطیل بالاست، از آنجایی‌که ما فقط ضرب اعداد رُند و اعداد کسری را بلدیم، مستطیل بالا را به مستطیل‌هایی می‌شکنیم که مساحت آن‌ها را با چیزهایی که یاد گرفته‌ایم، می‌توانیم حساب کنیم. این کار را با این روش انجام می‌دهیم: اعداد رُندِ روی محور را با خطوط عمودی و افقی به هم وصل می‌کنیم، سپس خطوط را ادامه می‌دهیم. اکنون می‌توانیم مساحت مستطیل‌های کوچک‌تر را به‌دست آورده و با هم جمع کنیم.

$$1\times1+1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=3$$

تقسیم عدد اعشاری

(سؤال ۱، قسمت دوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: پاسخ تقسیم‌های زیر را تا ۲ رقم اعشار به‌دست آورید.)

معلم یکی از دانش‌آموزان را پای تخته صدا می‌کند. سؤال این بود که تقسیم‌های زیر را تا ۲رقم اعشار حساب کنید. دانش‌آموز بلند خواند و پای تخته نوشت:

$$89/94 \,\big|\, 23$$

قبل از اینکه دانش‌آموز چیزی بنویسد، معلم گفت: در این‌صورت، **فرض کن ممیز وجود ندارد** و می‌خواهیم حاصل تقسیم ۸۹۹۴ بر۲۳ را به‌دست آوریم.

معلم: اول چی‌کار می‌کنیم؟!

دانش‌آموزان: (همه با هم) خط می‌کشیم!

دانش‌آموز: (یک خط از زیر ممیز رو به پایین کشید.)

معلم: برای اینکه وسط تقسیم، حواسمون به جای ممیزمون باشه، حالا دستمونو روی ۹ و اونور روی ۳ می‌ذاریم. توی ۸ تا چند تا ۲ تاست؟

دانش‌آموز: ۴ تا.

این دانش‌آموز می‌خواست در گوشهٔ تخته، ضرب را بنویسد که معلم به او گفت دور و بر تقسیمش

را شلوغ نکند. وقتی دانش‌آموز عمل ضرب را انجام داد، متوجه شد که از ۸۹ بیشتر شد.

معلم توضیح داد که: بچه‌ها! ما اول از عدد بزرگ‌تر شروع می‌کنیم. اگر درست نبود، یک عدد می‌آییم پایین‌تر. پس گفت: حالا ۳ رو ضرب کن.

۸۹/۹۴ | ۲۳
-۶۹ | ۳/۹۱
۲۰/۹
-۲۰/۷
۰۰/۲۴
- ۲۳
۰۰/۰۱

پس از پایان محاسبه، معلم پرسید: حالا نوبت چیست؟ و دانش‌آموزان با هم گفتند: **عبارت درستی**.

معلم گفت: عبارت درستی‌ات رو بنویس. بچه‌ها اینو می‌نویسیم که ببینیم کارمون تا الان درست بوده یا نه.

دانش‌آموز پای تخته این‌طور نوشت:

۳/۹۱ | ۰/۰۱
۲۳

معلم پرسید: **بچه‌ها فارسیش چی می‌شه؟ یعنی چی ضرب‌در چی به‌علاوه چی می‌شه چی؟**

دانش‌آموزان جواب دادند: خارج‌قسمت ضرب‌در مقسوم‌علیه به‌علاوهٔ باقی‌مانده، باید مساوی مقسوم باشه.

دانش‌آموز روی تخته نوشت:

۸۹/۹۴=۲۳×۳/۹۱+۰/۰۱

و نشست. یکی از دانش‌آموزان دستش را بلند کرد و پرسید: خانوم اون، که مقسومه، اونم مقسوم‌علیه، اون هم باقی‌مانده. پس عدد ۶۹ که زیر ۸۹، اسمش چیه؟ معلم جواب داد که اسمی ندارد و بخشی از تفریق اون قسمت است و ادامه داد: خب بچه‌ها! دیدین این تقسیم چقدر مبحث داشت؟ هم جمع داشت، هم تفریق، هم ضرب.

(سؤال ۱، قسمت سوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: *پاسخ تقسیم‌های زیر را تا ۲ رقم اعشار به‌دست آورید.*) تقسیم بعدی

۴۳/۴ | ۹

است. یکی دیگر از دانش‌آموزان آمد تا تقسیم را حل کند و صورت آن را نوشت. معلم به او گفت که یک صفر به انتهای مقسوم اضافه کند و گفت که دلیلش این است که از ما خواسته شده تا دو رقم اعشار حساب کنیم.

سپس گچ را از دست دانش‌آموز گرفت و به او گفت: چی باید بنویسم؟

(بقیهٔ این تقسیم را معلم حل کرد).

بعد از دو بار ضرب کردن و تفریق به ۰/۲ که رسیدند، دانش‌آموز از معلم پرسید:

صفری را که اضافه شده بیارم پایین؟

معلم گفت: مطمئنی؟

و دانش‌آموز سؤال کرد: نمره‌ام کم نشه؟ آن‌گاه معلم به دانش‌آموزان توضیح داد که: اگر تا دو رقم اعشار از ما خواسته نشده بود، تقسیممون همین‌جا تموم می‌شد.

بعد تقسیم را تا دو رقم ادامه داد و حل این مسئله را تمام کرد.

۴۳/۴ | ۹
-۳۶ | ۴/۸۲
۷/۴
- ۷/۲
۰۰/۲۰
-۰۰/۱۸
۰۰/۰۲

یکی از دانش‌آموزان پرسید: وقتی داشتیم ۰۰/۰۱ چرا این صفر دوم رو نخوندیم؟ و معلم جواب داد: که صفرهای طرف چپ ممیز مهم نیست که چند تا باشند. صفر در قسمت صحیح، فقط در جلو و وسط عدد مهم است. هنگامی که دانش‌آموز نشست، یکی دیگر از دانش‌آموزان پرسید: اگه بخوایم ۲ رو بر ۳ تقسیم کنیم چی؟ یکی از دانش‌آموزان گفت نمی‌شه! معلم نوشت:

۲۰ | ۳

یکی از دانش‌آموزان گفت: غلطه خانوم! خط اعشارشو نذاشتین. اینکه یهو شد ۲۰.؟! و معلم اشاره کرد که: من این صفر رو اضافه کردم که توی خارج‌قسمت و باقی‌مانده، اعشارشو بزنم. **شماها هم تا حرفه‌ای نشدین، این صفری که اضافه می‌کنین رو رنگی بذارین.**

معلم تقسیم را انجام می‌داد و در هر مرحله، صفر اضافه می‌کرد. بعد از چهار مرحله توضیح داد که؛

معلم: بچه‌ها! من هرچقدر هم ادامه بدم باز هم خارج‌قسمت همین ۶ می‌شه. برای همین می‌نویسم ۰/$\overline{۶}$ و یه خط می‌کشم اینجا. اسمش چی بود؟

دانش‌آموزان: **دورهٔ گردش**

معلم: یعنی تقسیممون همه‌ش همینه.

یکی از دانش‌آموزان پرسید که فرق $\frac{۲}{۳}$ و ۳|۲ چیست؟ و معلم گفت که فرقی نمی‌کنن. $\frac{۲}{۳}$ کسر است اما ۳|۲ عملیات داره. بعد از اینکه دانش‌آموزان اصرار داشتند که این دو یکی نیستند، معلم گفت نمی‌خواسته این را الان بگوید و نوشت $\frac{۲}{۳} \approx ۰/۶$ و افزود این علامت (≈) یعنی تقریباً. مثلاً $\frac{۲}{۴} = ۰/۵$ چون در این تقسیم باقیمانده نداریم یکی از دانش‌آموزان پرسید: پس چون تقسیم ۲ بر ۳ باقی‌مانده داشت **تقریباً** نوشتیم؟ و معلم گفت که همین‌طور است.

روزی دیگر

(سؤال ۲، قسمت اول، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: *تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در خارج‌قسمت به‌دست آورید.*)

معلم: تقسیم‌های زیر رو تا ۳ رقم اعشار در خارج‌قسمت حل کنین.

دانش‌آموزی روی تخته شروع به نوشتن عبارات زیر و حل سؤال کرد.

۱۴/۷۰۰ | ۱۷

۱۴'/۷۰۰ | ۱۷

معلم هم‌چنان توضیح می‌داد: توی ۱۴ تا، ۱۷ تا نیست، یه رقم دیگه برمی‌داریم.

۱۴/۷'۰۰ | ۱۷

اینکه بعد از ۷ دو تا صفر خودش گذاشته برای اینه که غیرمستقیم به ما بگه اگه مثل اینجا بود، دوتا صفر باید بذاریم.

دانش‌آموز نوشت:

```
۱۴/۷۰۰ | ۱۷
-۱۳۶   |  ۸۷
 ۰۱۱۰
 -۱۱۹
```

معلم اضافه کرد: دیگه نباید خط بزنیم کم کنیم، توی رانندگی باید آینه بغل‌ها را هم مواظب باشیم. از ۱۱۰ تا پرتقال نمی‌تونیم ۱۱۹ تا برداریم.

دانش‌آموز نوشتهٔ خود را تصحیح کرد:

```
۱۴/۷۰۰ | ۱۷
-۱۳ ۶  |  ۸۶
 ۰۱ ۱۰
 -۱۰۲
```

معلم: ۲ از ۱۰؟ ۸. گفتیم ۲ از ۱۰ به‌خاطر اینکه هی خط نزنیم، رقم سمت راست که برابر صفره، اگه خط بزنیم دوباره می‌خواد بشه ۱۰.

```
۱۴/۷۰۰ | ۱۷
-۱۳/۶  |  ۸۶
 ۰۱ [۱]۰
 - ۱ [۰]۲
   ۰ ۰۸
```

یکی از دانش‌آموزان پرسید: حالا که باقی‌مانده ۸ شد، می‌شه یه صفر توی خارج‌قسمت گذاشت؟

معلم: اصلاً با صفر شوخی نکنید (با اشاره به صفر دوم در ۱۴/۷۰۰ در صورت سؤال که روی تخته بود). اینجا ما ۸۰ داریم، ۸ نداریم. توی ۸۰، چند تا ۱۷ تایی هست؟

دانش‌آموز به حل سؤال ادامه داد:

```
۱۴/۷۰۰ | ۱۷
-۱۳ ۶  |  ۸۶۴
 ۰۱ ۱۰
 - ۱ ۰۲
   ۰۰۸۰
 -   ۰۶۸
   ۰ ۰۱۲
```

دانش‌آموز بعداً علامت اعشارِ باقی‌مانده و خارج‌قسمت را گذاشت:

```
۱۴/۷۰۰ | ۱۷
-۱۳ ۶  |  ۰/۸۶۴
 ۰۱ ۱۰
 - ۱ ۰۲
   ۰۰ ۸۰
 -    ۶۸
   ۰/۰۱۲
```

معلم: چرا سه رقم اعشار زدی؟ بچه‌ها اعشارو آخر می‌زنیم. با توجه به چی؟

دانش‌آموز: با توجه به مقسوم!

معلم: اگه ما ۱۴/۷۰ داشتیم، با توجه به اینکه تا ۳ رقم می‌خوایم، باید صفر رو اضافه می‌کردیم یا نه؟ (با اندکی مکث) اینجا می‌خواست راهنماییمون کنه، باید می‌ذاشتیم!

(سؤال ۲، قسمت دوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: *تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در خارج‌قسمت به‌دست آورید.*)

یکی از دانش‌آموزان پای تخته آمد و تمرین بعد را روی تخته نوشت:

۳۵/۵ | ۳

معلم: (با اشاره به عبارت بالا روی تخته) این، چند رقم بعد از اعشار داره؟

دانش‌آموزان: ۱رقم.

معلم: پس دو تا صفر با رنگی می‌ذاریم. این بار خط نمی‌کشیم، ببینیم اگه خط اعشار نکشیم باز هم بلدیم کارمونو انجام بدیم یا نه؟

دانش‌آموز: (عبارت زیر را نوشت.)

۳۵/۵ | ۳
-۳ ۱۱

یک دانش‌آموز: خانوم توی ۳۵ تا، ۹ تا ۳تایی هست. چرا نوشت ۱۱؟

معلم: (با اشاره به عدد ۳ در مقسوم‌علیه) نه! این ۳ مگه یک رقم نیست؟ شما وقتی می‌تونی ۳۵ جدا کنی که مقسوم‌علیه ۲ رقم باشه. اینجا چون ۳ یک رقمیه، ما یک رقم جدا می‌کنیم.

دانش‌آموز: (به حل سؤال روی تخته ادامه داد)

۳۵/۵۰۰ | ۳
-۳ ۱۱۸۲۳
۰۵
- ۳
۰۲۵
- ۲۴
۰۱۰
- ۹
۰۱۰
- ۹
۰۱

معلم: (با اشاره به‌سمت راست عدد ۰۱ در باقی‌مانده) حالا خارج‌قسمت رو تا سه رقم اعشار می‌زنیم نمیای اینجا صفر جلوش بذاری (با حالت هشدار!) به‌خاطر اینکه صفر جلوی عدد بذاری اصلاً معنی نداره. باقی‌مانده می‌شه ۰/۰۰۱

۳۵/۵۰۰ | ۳
-۳ ۱۱/۸۲۳
۰۵
- ۳
۰۲۵
- ۲۴
۰۱۰
- ۹
۰۱۰
- ۹
۰/۰۰۱

معلم: حالا عبارت درستی رو بنویس و امتحان کن.

دانش‌آموز:

۱۱/۸۳۳×۳=۳۵/۴۹۹+۰/۰۰۱

معلم: (در حال پاک کردن ۰/۰۰۱ از روی تخته)بعداً یاد می‌گیرین که حق نداریم در ریاضی، عملیات این‌جوری رو پشت هم بنویسیم.

خطی بنویسین یا زیر هم فرقی نمی‌کنه! ولی باید جدا جدا بنویسیم.

دانش‌آموز:

۳۵/۴۹۹+۰/۰۰۱= /۵۰۰

معلم: حالا که جمع داریم، همون موقع اعشارشم بذاریم یا نه؟ می‌ذاریم ولی اعشار توی ضرب رو آخر می‌ذاریم.

۳۵/۴۹۹+۰/۰۰۱=۳۵/۵۰۰

معلم: (رو به دانش‌آموزان) فکر کن اونجا ۳۵/۴۹۹ رو درمی‌آوردیم، به‌جای اینکه توی باقی‌مانده صفر و پشت ۱ بنویسیم، جلوش می‌نوشتیم.

امتحان می‌کنیم ببینیم فرق می‌کرد یا نه.

۳۵/۴۹۹
+۰/۰۱
۳۵/۵۰۹

معلم: این غلطه! عدد اولیمون نشد (با اشاره به رقم سمت راست عدد بالا)، یک رقم هزارم بیشتر داریم.

(سؤال ۲، قسمت سوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: *تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در خارج‌قسمت به‌دست آورید.*)

دانش‌آموز دیگری روی تخته شروع به نوشتن حل سؤال کرد:

۲۲/۵۰۰ | ۷
- ۲۱ ۳/۲۱
۱/۵
- ۱/۴
۰/۱۰
- ۷
۰/۰۳

معلم گفت که ۰/۰۳باقی‌موند، حالا صفرِ بعدو می‌آریم پایین و دانش‌آموز ادامه داد:

۲۲/۵۰۰ | ۷
-۲۱ ۳/۲۱۴
۱/۵
- ۱/۴
۰/۱۰
- ۷
۰/۰۳۰
- ۰/۰۲۸
۰/۰۰۲

۳/۲۱۴×۷=۲۲/۴۹۸
۲۲/۴۹۸+۰/۰۰۲=۲۲/۵۰۰

(سؤال ۴، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی)

معلم صورت سؤال را با صدای بلند خواند: *در همهٔ تقسیم‌های بالا، چه رابطه‌ای بین تعداد رقم‌های اعشار خارج‌قسمت و باقی‌مانده برقرار است؟* و دانش‌آموزان جواب

دادنـــد مســـاوی‌اند. دانش‌آموزی پرسید: اگه صفراشو اول نذاریم ایراد داره؟ و معلم جواب داد اول بذارین بهتره. چون بعداً یادتون می‌ره.

(ســـؤال ۴، تمرین صفحهٔ ۳۵ کتاب درســـی: ضخامت ۲۰۰ برگ کاغذ ۱۲ میلی‌متر است. *ضخامت یک بـــرگ چند میلی‌متر اســـت؟ (پاســـخ را تا دو رقم اعشار به‌دست آورید.)*

دانش‌آموز روی تخته نوشت:

```
 ۱۲/۰۰ | ۲۰۰
-۱۲      ۶
 ۰۰ ۰
-  ۰
    ۰
-  ۰
    ۰
```

معلم نوشته‌های دانش‌آموز را پاک کرد و گفت چون باقی‌مانده‌مون صفر می‌شه، اعشار زدن معنی نداره، و خودش حل سؤال را به‌صورت زیر نوشت:

```
 ۱۲/۰۰ | ۲۰۰
-۱۲/۰۰    ۶
 ۰۰ ۰۰
```

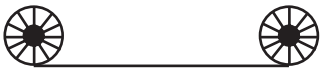
سپس علامت اعشار خارج‌قسمت را نوشت:

```
 ۱۲/۰۰ | ۲۰۰
-۱۲/۰۰   ۰/۰۶
 ۰۰ ۰۰
```

(ســـؤال ۵، تمرین صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی: *وقتی یک چرخ روی زمین یک دور می‌زند، به اندازهٔ یک محیط خود جلو می‌رود.*

یـــک چـــرخ ۶۰ دور چرخیـــده و ۱۱۳/۰۴ متـــر روی زمین به جلو رفته است.

محیط چرخ را تا دو رقم اعشار حساب کنید.)



محیط چرخ

دانش‌آموزی روی تخته شروع به نوشتن کرد:

```
 ۱۱۳/۰۴ | ۶۰
- ۶۰      ۱/۸۸
 ۰۵۳۰
- ۴۸۰
   ۵۰۴
-  ۴۸۰
   ۰/۲۴
```

(ســـؤال ۶، تمریـــن صفحـــهٔ ۳۵ کتاب درســـی: *نمره‌های یک دانش‌آموز به‌صورت زیر است. معدل او را حساب کنید.*

(۱۵/۷–۱۶/۲۵–۱۷/۲۵–۱۸ /۵–۱۹/۵)

معلم یادآوری کرد که معدل یعنی همون میانگینی که پارسال خوندیم. چون تقسیم اعشار نخونده بودیم، یه جوری می‌دادن که رُند در بیاد.

دانش‌آموز روی تخته نوشت:

```
 ۱۵/۷۵
+۱۶/۲۵
+۱۷/۲۵
+۱۸/۵
+۱۹/۵
 ۸۷/۲۵
```

یک دانش‌آمـــوز: چرا رقم رقم جمع بزنیم!؟ دو تا نیم داریم می‌شه ۱، اون ۰/۲۵ هم با ۰/۷۵ می‌شـــه ۱...!)

دانش‌آموز دیگـــر: چه جالب! معدلش شد ۸۷!

معلم: این شد جمع نمره. حالا تقسیم بر تعداد!

دانش‌آموز:

```
 ۸۷/۲۵ | ۵
- ۵      ۱۷/۴۵
  ۳۷
- ۳۵
   ۲۲
-  ۲۰
```

معلم: (با اشاره به علامت اعشار در ۲/۲ و ۲/۰ ایـــن ممکنـــه ما رو به اشـــتباه بندازه! پاکش کن! توی عملیات، نیازی به اعشار نداریم.

دانش‌آمـــوز: (نوشـــته خود را تصحیح کرد و نوشت:)

```
 ۸۷/۲۵ | ۵
-۵       ۱۷/۴۵
 ۳۷
-۳۵
  ۲۲
-  ۲۰
  ۰۲۵
-  ۰۲۵
  ۰/۰۰
```

پس از حـــل تمرین‌هـــای بالا، دانش‌آمـــوزان اصرار زیـــادی بر حل تمرین‌هـــای بخش ماشین‌حســـاب داشـــتند. بالاخره نوبت به حل بخش «**حل مسئله**» رسید که چند صفحه قبل‌تـــر در کتاب درســـی گنجانده شده‌بود. چون انجام این تمرین‌ها نیاز به ماشین‌حســـاب داشتند، به‌صورت جداگانه بررسی شدند.

حل مسئله، صفحه ۳۰ کتاب درسی

ســـؤال ۱، الف: پاسخ ضرب‌های زیر را با ماشین‌حساب به‌دست آورید.

طبـــق معمـــول، یکـــی از دانش‌آموزان برای حل ســـؤال پای

تاریخ مراجعه به دبستان برای تهیه گزارش، چهارشنبه ۱۳۹۱/۰۸/۱۰ و شنبه ۱۳۹۱/۰۸/۱۴ بود.

تخته آمد و معلم هم‌زمان با حل دانش‌آموز، توضیح می‌داد:

۳/۱×۱۰=۳۱

۰/۲۳۱×۱۰۰=۲۳/۱

معلم: عدد صحیحش رو می‌نویسیم تعداد صفرها رو از اعشار کم می‌کنیم. ۱۰۰، دو تا صفر داره. پس جوابمون یه اعشار می‌خوره می‌شه ۲۳/۱.

دانش‌آموز ادامه داد:

۴/۵۷×۱۰=۴۵/۷

۱۴/۲۱×۱۰۰۰=۱۴۲۱۰

۲/۲۳۲×۱۰=۲۲/۳۲۰

معلم: تا وقتی با انگشت می‌شمریم، اول یه صفر می‌ذاریم؛ بعد از سمت راست می‌شمریم می‌ریم جلو اعشار می‌زنیم. اینجا چون ۲/۲۳۲ سه رقم اعشار داره، سه تا می‌ریم جلو. وقتی یاد گرفتیم، **می‌گیم عدد صحیح چون ۲ و یک صفر داره، صفر یه اعشارشو می‌خوره. اعشارمون یه دونه می‌ره جلو** (و با دست در عدد ۲/۲۳۲ جهت را از چپ به راست نشان داد). سپس روی تخته نوشت:

۲/۲۳۲×۱۰=۲۲/۳۲

معلم اعلام نمود که درس تا ابتدای تقسیم یک عدد بر عدد اعشاری داده شد.

پایان تدریس

صدای زنگ استراحت در کلاس شنیده شد. دانش‌آموزان با اجازهٔ معلم، از کلاس بیرون رفتند و بعضی دیگر برای پرسیدن اشکال‌هایی که در کتاب کمک درسی داشتند، در کلاس ماندند.

در زنگ استراحت، قدری با معلم درمورد کتاب درسی و میزان رضایت‌مندی ایشان از تدریس این کتاب صحبت کردیم. از حرف‌هایشان فهمیدیم که بخشی از مطالب، تکرار مطالب کتاب ریاضی پنجم دبستان است که در بعضی موارد، حتی با روشی دیگر در این کتاب نیز وجود دارد. بخشی دیگر هم متشکل از مطالبی است که سال بعد در پایهٔ بالاتر نیز تدریس خواهد شد. همچنین، ایشان اشاره‌ای به گنگ بودن بعضی روش‌های این کتاب درسی داشتند که باعث می‌شد هنگام تدریس مطالب، حتی از چهرهٔ دانش‌آموزان نیز مشخص باشد که در فهم آن‌ها با مشکل مواجه هستند. ایشان سخنان دیگری نیز از این قبیل داشتند که از ذکر بقیه آن‌ها خودداری می‌کنیم.

از آنجایی‌که زمان کمی تا پایان زنگ استراحت باقی مانده بود، خداحافظی کردیم و از مدرسه به‌سمت دانشگاه به راه افتادیم.

با تشکر از کادر دفتری دبستان و معلم محترم که ما را در کلاس خودشان پذیرفتند و اجازه دادند که شاهد تدریسشان باشیم.

روایت معلمان

آموزش مدل میله‌ای

برای حل مسائل ریاضی

مهسا خدایاری
دبیر ریاضی منطقهٔ نوبران استان مرکزی و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

اشاره

حل مسئلهٔ ریاضی، یکی از مؤلفه‌های مهم در فرایند یاددهی - یادگیری ریاضی است. توانایی به‌کارگیری آموخته‌ها در موقعیت حل مسئله، از نشانه‌های یادگیری مؤثر ریاضی دانش‌آموزان به‌حساب می‌آید، به‌طوری که ایجاد توانایی حل مسئله یکی از چشم‌اندازهای آموزش ریاضی است. اینجانب در جریان رویارویی دانش‌آموزان با مسائل ریاضی مربوط به کسرها، مشاهده نمودم که توانایی‌های محاسباتی و استدلالی آنان اندک است و تنها تعداد محدودی از آن‌ها، به‌طور نسبی، توانایی‌های لازم برای حل مسائل کسر را به‌دست آورده‌اند. در بحث و تبادل نظر با همکارانم، متوجه شدم دانش‌آموزان کلاس‌های دیگر نیز، در حل مسائل ریاضی به‌ویژه در حوزهٔ کسر، با مشکل مواجه‌اند. همچنین، در یک ارزیابی ملی از دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی در ایران در سال تحصیلی ۹۱-۹۰ که خودم نیز در بخشی از آن مشارکت داشتم، شاهد عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در حل مسائل مربوط به حوزهٔ کسر بودم. نتایج سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - نیز، مؤید این یافته‌ها بود. همهٔ این‌ها، مرا ترغیب نمود تا به جست‌وجوی راه‌حلی به‌منظور ارتقای توانایی حل مسئلهٔ کسر در دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی بپردازم؛ به‌خصوص که مسائل این حوزه، دربرگیرندهٔ مفاهیم درصد و تناسب نیز هستند و نتایج مطالعات مختلف و نیز تجارب همکارانم، ضعف دانش‌آموزان ایرانی را در رابطه با این مسائل، تأیید می‌کنند.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، یاددهی - یادگیری، روش تدریس، مدل میله‌ای، دورهٔ راهنمایی

حل مسئلهٔ ریاضی در کلاس درس

یکی از مباحثی که در کتاب ریاضی پایهٔ دوم راهنمایی مطرح شده، مسائل حوزهٔ درصد است. یکی از سرفصل‌های مطرح شده در این کتاب، طرح مسئله از «مفهوم درصد» است که حداقل یک جلسه از جلسات کلاس را به خود اختصاص می‌دهد. زمانی‌که من، در سال تحصیلی ۹۲-۹۱، اولین مسئله را در این حوزه روی تختهٔ کلاس نوشتم، با اظهار نظرهای مأیوس‌کننده‌ای از سوی دانش‌آموزان مواجه شدم:

- خانم، ما بلد نیستیم مسئله حل کنیم؛
- خانم، تو رو خدا تمرین حل کنیم، مسئله نه!
- خانم، مسئله‌های ریاضی اصلاً حل نمی‌شن!
- خانم، این مسئله‌ها خیلی سختن و ... .

تعداد زیادی از دانش‌آموزان، حتی تمایلی به فکر کردن درمورد روش حل مسئله‌ها نداشتند و هیچ اعتمادبه‌نفسی در مواجهه با مسائل برای حل آن‌ها نداشتند.

در آزمون ترم اول سال تحصیلی ۹۲-۹۱ نیز، مسئلهٔ زیر را، از مبحث درصد مطرح کردم:

مریم کتابی را با ۵ درصد تخفیف، ۴۰۰۰ تومان خرید. قیمت اولیهٔ کتاب چقدر بوده است؟

از ۳۰ دانش‌آموز کلاس، فقط ۴ نفر به این مسئله پاسخ صحیح دادند. این رقم، بسیار نگران‌کننده بود و مرا به ارائهٔ راهکاری به‌منظور برطرف نمودن آن ترغیب نمود؛ ضمن اینکه می‌دانستم بررسی عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مطالعات و ارزیابی‌های متعدد، مؤید ناتوانی اکثر دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی است.

بدین منظور، به مطالعهٔ مقالات و کتب متعدد در حوزهٔ حل مسئلهٔ ریاضی پرداختم و روشی را برای حل مسائل جست‌وجو کردم که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- به زبانی ساده بیان شود؛
- به درک مسئله کمک کند؛
- در انواع مختلفی از مسائل، قابلیت کاربرد داشته باشد؛
- از حل مسائل ساده، به مسائل چند مرحله‌ای و دشوار، قابل تعمیم باشد.

در بررسی مطالعات بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز- کسب رتبه‌های اول توسط دانش‌آموزان کشور سنگاپور توجهم را به‌خود جلب کرد، چون دریافتم عملکرد موفقیت‌آمیز دانش‌آموزان این کشور در چندین مطالعه تیمز، در حل مسائل چندمرحله‌ای ریاضی، بسیار قابل‌ملاحظه بوده است. بنابراین، تصمیم گرفتم به مطالعهٔ روند آموزش حل مسائل ریاضی به دانش‌آموزان در کشور سنگاپور بپردازم.

در دو مقاله با عنوان‌های **ریاضی سنگاپور: ساده یا پیچیده؟**[1] و **از ریاضی سنگاپور یاد بگیریم**[2] که به بررسی دلایل موفقیت دانش‌آموزان سنگاپوری در مطالعات بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - پرداخته بودند، تأکید بر نقش مؤثر استفاده از **مدل میله‌ای**[3] در درک و فهم مسائل ریاضی، چشمگیر بود. ضمن اینکه از مزایای دیگر آموزش مدل میله‌ای، موارد زیر بیان شده بود:

- مدل میله‌ای، الگویی تصویری برای جزءها و کل‌ها در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و کسرها، نسبت‌ها و درصد است و وجه تصویری بودن آن، شهود را در دانش‌آموزان تقویت می‌کند؛
- دانش‌آموزان سنگاپوری در سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - در مواجهه با دشوارترین مسائل کسر از این مدل استفاده نموده و موفقیت چشمگیری داشته‌اند؛
- مدل میله‌ای، فرصت استفاده از بازنمایی‌های چندگانهٔ تصویری و انتزاعی را هنگام حل مسائل کسر ایجاد می‌کند (لین‌وَند و گینزبرگ، ۲۰۰۷، ص۳۵).

بنابراین، تصمیم گرفتم مدل میله‌ای در حل مسائل ریاضی در کتاب‌های درسی ریاضی سنگاپور را، که پژوهش‌های متعدد آن را تأیید می‌کردند (هوون و گارلیک، ۲۰۰۷؛ لین‌وَند و گینزبرگ، ۲۰۰۷؛ استین، ۲۰۰۸) به دانش‌آموزان خود آموزش دهم. بدین منظور، آموزش حل مسائل ریاضی با استفاده از مدل میله‌ای را از مفاهیم سادهٔ جمع و تفریق در دورهٔ ابتدایی آغاز کردم تا دانش‌آموزان فرایند تکوین حل مسئله را، از مفاهیم اولیه تا مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی، درک کنند و اعتمادبه‌نفس آن‌ها نیز در مواجهه با مسائل ریاضی افزایش یابد. درنهایت، فرایند آموزش این مدل در کلاس درس، سه جلسهٔ ۸۰ دقیقه‌ای به‌طول انجامید.

جلسهٔ اول

در ابتدای جلسه، به معرفی **مدل میله‌ای** به کلاس پرداختم. ضمن این معرفی، بسیاری از دانش‌آموزان ابراز

عدم تمایل به حل مسائل کسری نمودند و این مسئله‌ها را «دشوار» یا حتی «حل‌نشدنی» دانستند. این در حالی بود که از آن‌ها خواستم:

«اجازه بدید تا این روش رو ببینیم؛ شاید نظرتون عوض شـــد و با کمک هم تونستیم مسئله‌های خیلی سخت رو هم حل کنیم.»

پس از آن، جلسه را با مسئلهٔ زیر، شروع کردم:

۱. حسین ۲۳ تیله داشت. ۹ تای آن‌ها را به دوستش داد. چند تیله برای او باقی مانده؟

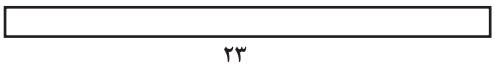
همهٔ دانش‌آموزان با هم ابراز داشتند «اینکه خیلی راحته» و همگی خواستار آمدن پای تابلو برای حل آن شدند.

زهرا[۴] مسئله را روی تخته چنین حل کرد:

زهرا: چون از ۲۳ تیله ۹ تاش رو به دوستش داده، پس باید ۲۳ رو منهای ۹ کنیم که می‌شه ۱۴.

۲۳-۹=۱۴

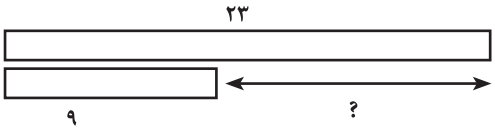
معلم: شما که گفتین مسئله سخته و نمی‌شه حلش کرد ولی الآن همتون این مســـئله رو حل کردین. پس مسئله‌ها سخت نیستن. خودمون فکر می‌کنیم سختن و حل نمی‌شن! حالا ما می‌خوایم با اون روشی که گفتم، مســـئله رو حل کنیم. فرض می‌کنیم این میله، تعداد تیله‌های حســـین رو به ما نشان بده. پس این میله چه عددی رو به ما نشان می‌ده؟



دانش‌آموزان: ۲۳.

معلم: درسته! حالا چطوری می‌تونیم نشون بدیم حسین ۹ تا از تیله‌هاش رو به دوستش داده؟

مریم: می‌تونیم یک میله به اندازهٔ ۹ تا تیله بکشیم و بگیم این قســـمت رو داده به دوستش. جواب می‌شه همون ۲۳ منهای نه.



این مسئله را از دورهٔ ابتدایی مطرح کردم تا انگیزهٔ دانش‌آموزان برای حل مسئله برانگیخته شود. همچنین، آسانی مسئله باعث شـــد تا تمام دانش‌آموزان به حل مسئله بپردازند و همگی برای نوشتن پاسخ خود روی تختهٔ کلاس داوطلب شوند. بازخورد ارائهٔ این مسئله به کلاس، به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که باور عدم توانایی حل مسئله را به خود تلقین کرده بودند، بسیار مثبت بود و باعث شد تا آن‌ها انگیزهٔ زیادی برای حل مسئلهٔ بعدی داشـــته باشند. سپس، مســـائل زیر را به‌ترتیب مطرح کردم که تمام آن‌ها با اســـتفاده از مدل میله‌ای توسط دانش‌آموزان حل شدند.

۲. محمد ۳۰ دوست دارد. احمد ۴۳ دوست دارد. احمد چند دوست بیشتر از محمد دارد؟

۳. مینا ۶ شکلات داشت. پدرش ۴ شکلات دیگر به او داد. او چند شکلات دارد؟

۴. هدی ۲۰۰۰ تومان پول داشـــت. او با نصف پولش برای خودش و دوســـتش بستنی خرید. چقدر از پول هدی باقی مانده است؟

۵. آریا ۳۰ آب‌نبات داشت. او $\frac{3}{5}$ آب‌نبات‌هایش را خورد. چند آب‌نبات برایش باقی مانده است؟

اولین جلســـه از آموزش مـــدل میله‌ای در حل مســـائل ریاضی، پس از آشـــنا کردن دانش‌آموزان با مدل میله‌ای، با طرح پنج مسئلهٔ مربوط به کسر دورهٔ ابتدایی برگزار شد. دانش‌آموزان به‌دلیل برخورداری از توانایی حل این مسائل، انگیزهٔ خوبی برای حل مسئله کسب کردند. همچنین، واگذاری حل مسئله و ترسیم مـــدل میله‌ای در حل آن‌ها، باعث ایجاد حس رقابت برای حل سریع‌تر مسائل در آن‌ها شد و می‌توان گفت تمام دانش‌آموزان در این جلسه، به‌طور کامل درگیر حل مسئله شدند بدون اینکه متوجه گذر زمان باشند. در مجموع، این جلسه از بازدهی خوبی برخوردار بود. این نتایج مرا به ادامهٔ روند آموزش ترغیب نمود.

جلسهٔ دوم

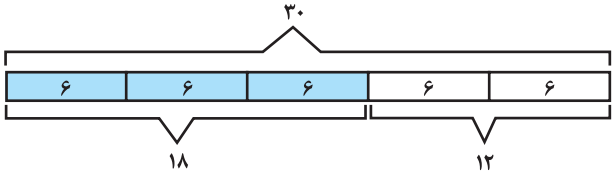
در ایـــن جلســـه، به‌منظـــور ســـنجش یادگیری دانش‌آموزان از جلسهٔ قبل، دو مسئلهٔ زیر را مطرح کردم که تمام دانش‌آموزان به آسانی آن‌ها را حل کردند.

۱. مریم ۱۳ کتاب داستان بیشتر از زهرا دارد. اگر تعداد کتاب داستان‌های مریم ۳۰ جلد باشد، زهرا چند کتاب داستان دارد؟

۲. احمد ۲۳ دوست داشت. در سال تحصیلی جدید، او ۱۵ دوست دیگر نیز پیدا کرد. الآن احمد چند دوست دارد؟

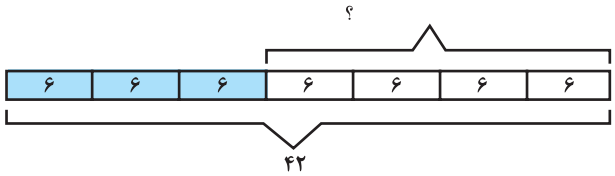
حل موفقیت‌آمیز دو مسئلهٔ فوق توسط تمام دانش‌آموزان کلاس، بیانگر این بود که دانش‌آموزان در حل مسئلهٔ ریاضی از توانایی نسبی برخوردار شده‌اند. بنابراین، مسائل چند مرحله‌ای زیر را مطرح کردم:

۳. آریا ۳۰ آب‌نبات داشت. او $\frac{۳}{۵}$ آب‌نبات‌هایش را خورد. چند آب‌نبات برایش باقی مانده است؟



مسئلهٔ ۳، نیز توسط تمام دانش‌آموزان حل شد. آن‌ها ابتدا به محاسبهٔ سهم هر قسمت پرداختند و سپس تعداد آب‌نبات‌های باقی‌مانده را محاسبه کردند. بعضی از دانش‌آموزان هم، با محاسبهٔ دو قسمت ۶ تایی به جواب نهایی رسیدند و محاسبات کمتری را انجام دادند. در حل این سؤال نیز، کسی ابراز مشکل نکرد.

۴. آقای رضایی در مغازهٔ میوه فروشی خود ۴۲ کیلو سیب دارد. اگر $\frac{۳}{۷}$ سیب‌ها قرمز و بقیهٔ سیب‌ها زرد باشند، چند کیلو سیب زرد در مغازه وجود دارد؟



مسئلهٔ فوق، مشابه مسئلهٔ قبلی بود ولی مخرج آن، ملموس نبود (منظور مخرج‌هایی شامل اعداد متداول ۲، ۳، ۴ و ۵ است.) و تمام دانش‌آموزان آن را حل کردند.

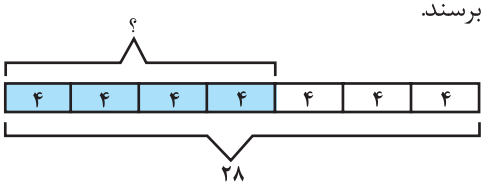
۵. تعداد دانش‌آموزان یک کلاس ۲۸ نفر است. از دانش‌آموزان سؤال شد چند نفر عضو تیم‌های ورزشی مدرسه هستند و مشخص شد که نسبت آن‌ها به سایر دانش‌آموزان ۴ به ۳ است. چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس عضو تیم‌های ورزشی مدرسه هستند؟

مسئلهٔ ۵، برای تعدادی از دانش‌آموزان چالش‌برانگیز بود و آن‌ها نتوانستند به‌آسانی مسائل قبلی به آن پاسخ دهند. برای حل این سؤال، از آن‌ها خواستم اگر ایده‌ای برای حل این مسئله به ذهنشان می‌رسد، آن را در کلاس مطرح کنند تا سایر دانش‌آموزان آن را بررسی کنند.

نگین: ما می‌تونیم بگیم اینجا دو تا نسبت داریم. یکی ۳ و اون یکی ۴. در واقع به ما می‌گه اگه ما هفت تا قسمت داشته باشیم چهار تاشون دانش‌آموزی ورزشکار و سه تاشون ورزشکار نیستن.

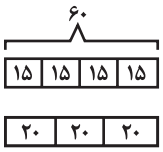
فاطمه: درسته! وقتی به ما گفته نسبت اونا سه به چهاره، پس یعنی ما هر چند تا قسمت که داشته باشیم باید ۴ تا رو ورزشکار بدونیم و ۳ تا از قسمتا رو غیر ورزشکار. که روی هم می‌شه هفت قسمت. پس میله‌ای که می‌کشیم باید به هفت قسمت، تقسیم بشه.

سایر دانش‌آموزان نیز این استدلال‌ها را قبول کردند و درستی آن را تأیید نمودند. آن‌ها با رسم میله و تعیین تعداد افراد هر قسمت، توانستند به پاسخ نهایی برسند.



پس از پرسیدن چند سؤال پیرامون نحوهٔ حل مسئلهٔ ۵ و پاسخ صحیح دانش‌آموزان به آن‌ها که بیانگر درک کامل آن‌ها از روند حل این مسئله بود، مسئلهٔ بعدی را مطرح کردم.

۶. دو گروه ایرانگردی هر کدام شامل ۶۰ نفر هستند. اگر $\frac{۳}{۴}$ افراد گروه اول و $\frac{۲}{۳}$ افراد گروه دوم به موزه بروند، از گروه اول چند نفر بیشتر برای بازدید از موزه رفته‌اند؟



روند حل این مسئله نیز، همانند مسائل قبل، توسط دانش‌آموزان ارائه و توجیه شد. آن‌ها کشیدن دو میله را این‌طور استدلال کردند که «چون دو گروه ایرانگردی داریم، پس باید دو تا میله بکشیم» و راه‌حل را مرحله به مرحله انجام دادند و همهٔ دانش‌آموزان، به‌جز یک نفر، روش فوق را به‌عنوان راه‌حل ارایه کردند.

آن دانش‌آموز در پاسخ به این سؤال، استدلال جالبی داشت. او برای محاسبهٔ اینکه چند نفر از گروه اول بیشتر از گروه دوم به موزه رفته‌اند، ابراز کرد:

«هر قسمت گروه دو ۵ تا بیشتر از گروه اوله. پس بدون ۳ مرحلهٔ آخر، می‌تونیم بگیم تعداد افرادی که از گروه دو نرفتن، ۵ نفر بیشتره. یعنی گروه اول ۵ نفر بیشتر رفتن.»

این استدلال قوی بود و بیانگر آنکه این دانش‌آموز، در سطح بالاتری از تفکر برای حل مسئله قرار دارد. او نرفتن تعداد افراد گروه دوم را به موزه با تعداد افرادی از گروه اول که به موزه رفته‌اند، مقایسه کرد و به پاسخ نهایی رسید و محاسبات کمتری را انجام داد. سپس مسئلهٔ بعدی را مطرح کردم.

۷. فاطمه ۱۰ درصد شکلات‌های خود را خورد. اگر او در ابتدا ۲۰ شکلات داشته باشد، چند شکلاتش را خورده است؟

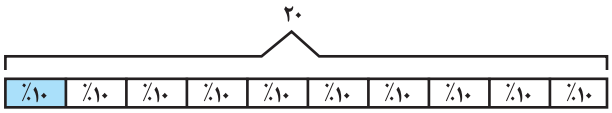
دانش‌آموزان برای پاسخ‌گویی به این سؤال، با مشکل مواجه شدند. آن‌ها ابراز داشتند «ما که نمی‌تونیم ۱۰۰ قسمت رو اینجا بکشیم. خیلی زیاد می‌شه. اصلاً تو دفترمون جا نمی‌شه!». در این بین، چند نفر از دانش‌آموزان به این فکر کردند که با رسم قسمت‌های کمتر، میلهٔ متناسب با داده‌های مسئله را نشان دهند. آن‌ها در نهایت، با همفکری یکدیگر به این نتیجه رسیدند که از یک میلهٔ ۱۰ قسمتی برای حل مسئله استفاده کنند و این‌طور استدلال کردند که:

«چون ۱۰ درصد یعنی ۱۰ قسمت از ۱۰۰ قسمت و چون $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ مساویه با $\frac{۱}{۱۰}$ پس ما یک نمودار میله‌ای می‌کشیم که ۱۰ قسمت باشه. ۱۰ تا خانهٔ ۱۰ قسمتی به‌دست می‌یاد. یک قسمت از ۱۰ قسمت ۱۰ درصد شکلاتای مینا می‌شه و یک قسمت اون، ۲ تا شکلات می‌شه؛ یعنی تو هر قسمت ۲ تا شکلات وجود داره.»

و پس از حل مسئله گفتند: «مشکل ما این بود که اولش به این دقت نکردیم که می‌تونیم از کسر مساوی با ۱۰ درصد، یعنی همون $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ مساوی $\frac{۱}{۱۰}$ هست استفاده کنیم و به‌جای صد تا قسمت، ده قسمت بکشیم».

توجه دانش‌آموزان به کاربرد تساوی کسرها برای حل این مسئله، باعث درک عمیق‌تر روند حل و ایجاد ارتباط بین آموخته‌هایشان شد.

در مجموع می‌توان گفت جلسهٔ دوم نیز همانند جلسهٔ اول آموزش مدل میله‌ای در حل مسئله، از شور و هیجان خاصی برخوردار بود. دانش‌آموزان برای حل



تمام مسائل مطرح شده، داوطلب بودند و با نوشتن هر مسئله بر روی تخته، به‌سرعت به حل آن می‌پرداختند. آن‌ها راه‌حل‌های ارائه شده را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌دادند و زمانی‌که در حل مسئله با مشکلی مواجه می‌شدند، سعی می‌کردند با کمک یکدیگر و بررسی راه‌حل‌های پیشنهادی به پاسخ مسئله برسند. بررسی درستی راه‌حل‌های بچه‌ها توسط خودشان، بسیار قابل‌توجه و بیانگر به چالش کشیده شدن تفکر دانش‌آموزان برای حل مسائل بود. این جلسه نیز از بازخورد خوبی برخوردار بود و دانش‌آموزان با حل هر مسئله، ابراز شادی می‌کردند و با کسب انگیزهٔ بیشتری به حل مسائل بعدی می‌پرداختند.

جلسهٔ سوم: کار گروهی

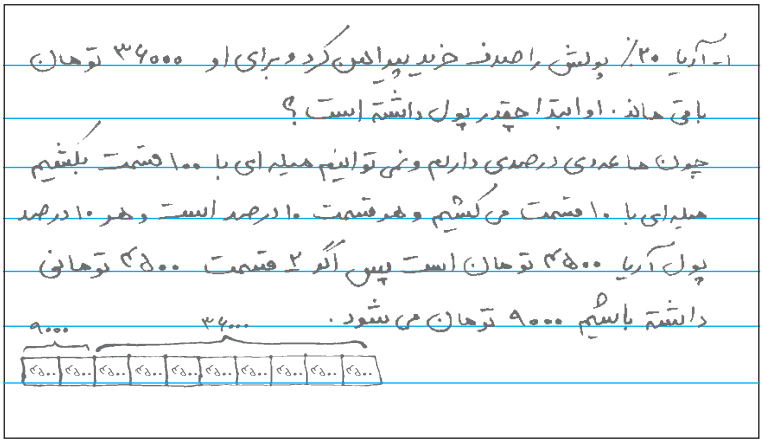
در این جلسه از دانش‌آموزان خواستم به‌صورت گروهی بنشینند و گروه‌بندی آن‌ها را براساس نمرات ترم اول درس ریاضی دانش‌آموزان انجام دادم و سعی کردم تا در هر گروه، دانش‌آموزانی از سطوح متفاوت قرار بگیرند و گروه‌ها به‌صورت تقریبی از نظر میانگین نمرهٔ درس ریاضی، در یک سطح باشند. در نهایت، دانش‌آموزان در هفت گروه قرار گرفتند. همچنین در این مرحله، از مسائل چند مرحله‌ای دشوار از کتاب‌های درسی سنگاپور و مطالعهٔ بین‌المللی تیمز استفاده کردم تا دانش‌آموزان درگیرِ فرایند حل مسئله شوند و به‌آسانی، پاسخ سؤالات را به‌دست نیاورند و مجبور به ارائهٔ بازنمایی‌های جدیدی از مدل میله‌ای در حل مسئله شوند.

دانش‌آموزان در ابتدا، در گروه‌های خود به بحث و تبادل‌نظر برای حل مسائل پرداختند. خود نیز بر کار آن‌ها نظارت داشتم و در مواقعی که گروهی در پاسخ‌گویی به سؤالات، با مشکلی در روند حل مسئله مواجه می‌شد، با طرح چند پرسش پیرامون راه‌حل ارائه شده، سعی می‌کردم تا آن‌ها را متوجه اشتباهشان کنم. پس از گذشت چهل دقیقه، پاسخ‌های هر گروه را توسط تمام دانش‌آموزان، مورد نقدوبررسی قرار دادم و هر گروه، پس از توضیح راه‌حل خود به سؤالات دانش‌آموزان دیگر، درمورد روش به‌کار برده شده، توضیح داد. آنچه که در این جلسه بسیار قابل‌توجه بود، روش‌های به‌کار برده شده در حل مسائل بود که تنوع زیادی داشت.

دانش‌آموزان از تقسیم‌بندی‌های متفاوتی در مدل‌های میله‌ای برای حل استفاده کرده بودند. در ادامه، هر یک از سؤالات مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

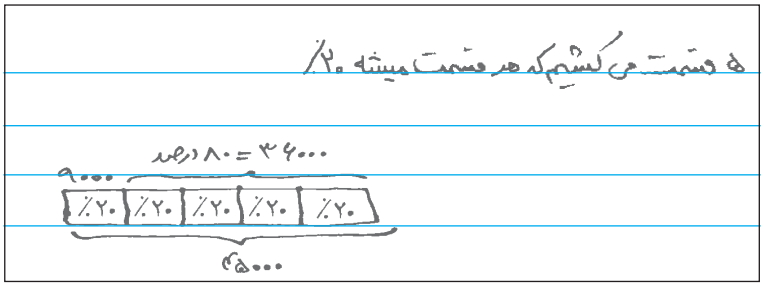
۱. آریا ۲۰ درصد پولش را صرف خرید پیراهن کرد و برایش ۳۶۰۰۰ تومـــان باقی ماند. او ابتدا چقدر پول داشته است؟

تمام گروه‌ها به این سؤال، پاسخ صحیح دادند و از مدل میله‌ای برای حل مسئله استفاده کردند. گروه‌ها در پاسخ‌گویی به مسئله، میله‌ها را به ۵، ۱۰ و یا ۲۰ قسمت تقســـیم کردند و با محاسبهٔ هر قسمت، توانستند پول اولیهٔ آریا را محاســـبه کنند. در شکل‌های ۱ و ۲، تصویر تعدادی از این پاسخ‌ها را می‌بینید.



شکل ۱: نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۱ در کار گروهی با استفاده از میلهٔ ۱۰ قسمتی

در شکل ۱، دانش‌آموزان از یک میلهٔ ۱۰ قسمتی برای حل مسئله اســـتفاده کردند. آن‌ها ابتدا با درنظر گرفتن دو قسمت از این قسمت‌ها به‌عنوان ۲۰ درصد پول آریا، تشخیص دادند که عدد مربوط به هر قسمت برابر است با ۴۵۰۰ و با به‌دست آوردن میزان پول خرج شده، به جواب نهایی رسیدند.



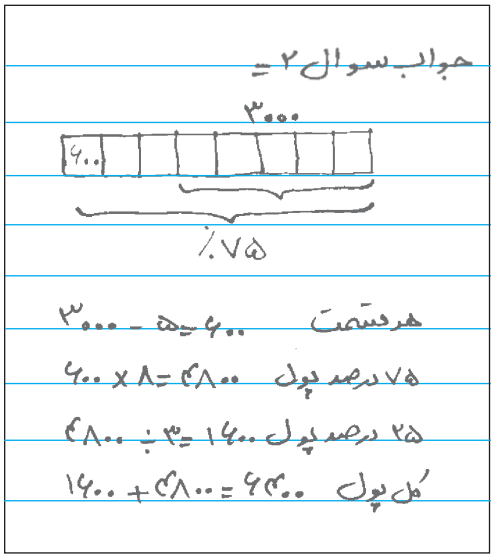
شکل ۲: نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۱ در کار گروهی با استفاده از میلهٔ ۵ قسمتی

این گروه در توضیح روند حل مسئله بیان کردند: «۲۰ درصـــد یعنی همون $\frac{۱}{۵}$. به‌خاطر همین، ما یک میلهٔ پنج قسمتی کشیدیم. بعد گفتیم چون آریا ۲۰ درصدِ پولش رو خرج کرده، پس یکی از قسمت‌ها خرج شـــده و ۳۶۰۰۰ تومنی که مونـــده مالِ چهار قســـمته. به‌خاطر همین، ۳۶۰۰۰ رو به چهار تقسیم کردیم و چون همهٔ قســـمت‌ها با هم مساوی‌اند، پس هر قسمت میشه ۹۰۰۰ تومن و کل پول می‌شه جمع ۳۶۰۰۰ تومنی که خرج کرده با این یک قسمت که ۹۰۰۰ تومنه و جواب می‌شه ۴۵۰۰۰.»

توضیح تمام مراحل حل مســـئله توسط اعضای گروه، حاکی از درک عمیق آن‌ها از فرایند حل مسئله بود. آن‌ها به‌خوبی قسمت‌های مختلف را به یکدیگر مرتبط کردند و توانستند با محاسبهٔ عدد مربوط به هر قسمت، به پاسخ نهایی دست یابند.

۲. مینـــا ۲۵ درصد پولش را دفتر خرید. او با $\frac{۳}{۸}$ باقی‌ماندهٔ پولش، مداد و خودکار خرید و ۳۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. او در ابتدا چند تومان پول داشته است؟

چهار گروه توانســـتند به‌طور کامل به این سؤال پاســـخ دهند و بقیهٔ گروه‌ها نیز تا حدودی به جواب نزدیک شدند. گروه‌ها برای حل این مسئله، از میله‌های هشت قسمتی استفاده کردند. سپس با تشخیص درصد باقی‌مانده از پول و رابطـــهٔ آن با عدد ۳۰۰۰، موفق به محاسبهٔ کل پول شدند.

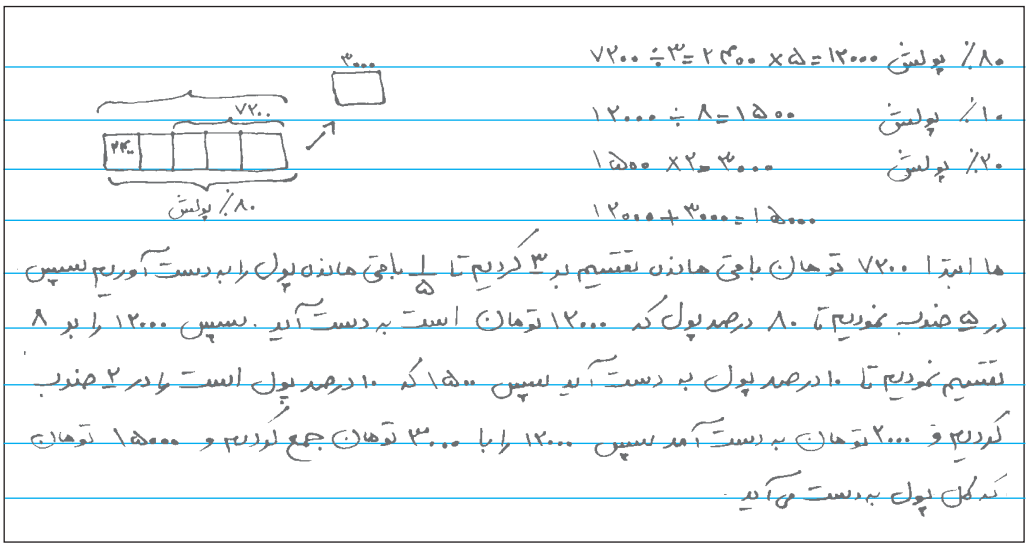


شکل ۳. پاسخ یکی از گروه‌ها به سؤال ۲ در کار گروهی

۳. علی ۲۰ درصد پولش را میوه خرید. سپس با $\frac{۲}{۵}$ باقی‌ماندهٔ پولش، یک کتاب خرید و ۷۲۰۰ تومان برایش ماند. او در ابتدا چقدر پول داشته است؟

۳ گروه به مسئلهٔ فوق پاسخ صحیح دادند. هر سه گروه برای پاسخ به این سؤال، از میله‌ای که به پنج قسمت تقسیم شده بود، استفاده کردند و با مشخص کردن کسر مربوط به باقی‌ماندهٔ پول که ۷۲۰۰ تومان بود، ابتدا مقدار پول باقی‌مانده پس از خرید میوه یعنی ۸۰ درصد را به‌دست آوردند و با توجه به آن، کل پول را محاسبه نمودند.

همچنین، اجرای کار گروهی موجب بروز ایده‌های مختلف برای حل مسئله شد. افراد هر گروه، نظراتشان را مورد بحث‌وبررسی قرار دادند و از نظر خودشان، بهترین ایده را به‌عنوان راه‌حل برگزیده و به مسئله پاسخ دادند. آن‌ها به بررسی علل انتخاب خود پرداختند تا بتوانند به سؤالات سایر گروه‌ها درمورد راه‌حل انتخابی، توضیح دهند که این امر، موجب تعمیق یادگیری در دانش‌آموزان شد. یکی دیگر از مزایای اجرای کار گروهی در این جلسه، ایجاد چالش در دانش‌آموزان بود، زیرا سطح مسائل مطرح شده، پیچیده و دشوار بوده و مسئله‌های دو و سه، نیازمند به‌کار بردن استدلال



شکل ۴. نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۳ در کار گروهی

جمع‌بندی

با توجه به طرح مسائل چند مرحله‌ای و دشوار در جلسهٔ سوم، دانش‌آموزان در گروه‌های خود، برای حل مسائل به چالش کشیده شدند، ایده‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند و تمام مراحل حل مسئله را نیز تجزیه‌وتحلیل کردند. در پایان جلسه نیز ابراز داشتند که:

«مدل میله‌ای خیلی خوبه. ما با این مدل، می‌تونیم به روشی که خودمون دوست داریم مسئله‌ها رو حل کنیم و میله‌ها را تقسیم‌بندی کنیم. انگار کشیدن میله به ما در تشخیص راه‌حل کمک می‌کنه و به ما می‌گه تو هر مرحله باید چه‌کار کنیم. مهم‌تر اینه که یک قاعدهٔ اجباری برای حل نداره».

این امر، نشان‌دهندهٔ این بود که حس اعتمادبه‌نفس در دانش‌آموزان تقویت و قدرت استدلال آن‌ها ارتقا یافته بود.

برای حل بودند. دانش‌آموزان برای پاسخ به هر سؤال، براساس عددی که برحسب درصد بیان شده بود، شکل مناسبی کشیدند و با استفاده از چندین مرحله محاسبه، توانستند به پاسخ نهایی دست یابند. برقراری ارتباط بین قسمت‌های مختلف روند حل مسئله، از عوامل بسیار مهم و تأثیرگذار در روند حل مسئله بود که دانش‌آموزان با کمک مدل میله‌ای، توانستند از عهدهٔ این کار برآیند. ابراز «مفید بودن این روش در حل مسائل دشوار» در پایان جلسه، بیانگر مقبولیت این مدل در دانش‌آموزان بود که موجب ایجاد انگیزه و ذوق‌وشوق فراوانی در آن‌ها برای حل مسائل شد.

در پایان، به معلمان ریاضی پیشنهاد می‌کنم برای آموزش حل مسئله در کلاس درس، زمان کافی اختصاص دهند و با به‌کارگیری شیوه‌های مختلف و ایجاد فضایی امن، به خلاقیت دانش‌آموزان خود، فرصت بروز دهند.

پی‌نوشت‌ها

1. Singapore Math: Simple or Complex?
2. Learning from Singapore Math
3. Bar Model
۴. تمام اسامی به‌کار رفته در این مقاله مستعار است.

منابع

1. Hoven, J.; &Garelick B. (2007). Singapore Math: Simple or Complex? **Educational Leadership**. Vol. 65, Number3, PP. 28-31.Association for Supervision and Curriculum Development.
2. Leinvand, S.; & Ginsburg, A. L. (2007). Learning from Singapore Math. **Educational Leadership**. Vol. 65, Number3, PP. 32-36.Association for Supervision and Curriculum Development.
3. National Council of Teachers of Mathematics. (1981). An Agenda for Action. **Recommendations for School Mathematics**. Reston, VA: Author.
۴. استین، لین آرتور (۲۰۰۸). **چگونه ریاضیات مورد توجه قرار می‌گیرد؟** ترجمهٔ مانی رضایی (۱۳۸۸). نشریهٔ چشم‌انداز آموزشی، شمارهٔ ۴، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش، صص ۱۳-۴.
۵. غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۹۱). **ارزشیابی پایانی از برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ راهنمایی تحصیلی**. پروژه ارزشیابی پایانی از چهارده برنامهٔ درسی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، پژوهشکدهٔ برنامه‌ریزی و نوآوری‌های آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۶. کیامنش، علیرضا (۱۳۸۰). **سنجش و اندازه‌گیری در ریاضی همراه با سؤال‌های ریاضی TIMSS در دورهٔ راهنمائی**، شرکت چاپ افست، چاپ اول، وزارت آموزش‌وپرورش، پژوهشکده تعلیم و تربیت.

مقاله

کلیدواژه‌ها: پداگــوژی، روش تدریس موضوعی، معلمان اتریش، توســعه حرفه‌ای معلمان، تحقیق محل

تا دهۀ ۹۰ میلادی، معلمان ریاضی اتریشــی، مانند بســیاری از معلمان کشورهای دیگر، تلاش می‌کردند تــا محتوایی از پیش تعیین شــده را تدریس و براســاس آن عملکــرد دانش‌آموزان را ارزیابی کنند. با ظهور اندیشه‌هایی مانند ساختن دانش و ارتباط مدارس با محیط بیرون از مدرسه، این فرهنگِ ایستای تدریس و یادگیری مدرسه-مدار دچار تغییراتی شــد. این در حالی بود که با تغییر شــرایط کار و استخدام، از فارغ‌التحصیلان دانشــگاهی انتظار می‌رفت تا دارای مهارت‌های چندبعدی باشند، بتوانند گروهی کار کنند، به‌طور مســتقل تصمیم بگیرند، از دانش خود استفاده کنند و به خود متکی باشــند. علاوه‌بر این، در آن دهه، خانواده‌ها فرزند کمتری داشتند و فرزندان، نقش محوری‌تری در خانواده بازی می‌کردند. این امر باعث شد تا رابطۀ بین فرزندان و والدین تغییر کنــد. آن‌چه در محیط خانــواده مجاز یا ممنوع اعلام می‌شد، بیشتر حاصل گفت‌وگوی والدین و فرزندان بود. با این تجارب بود که بزرگ‌ســالان به‌عنــوان معلم، و فرزندان به‌عنــوان دانش‌آموز وارد مدرســه می‌شــدند. این تجارب با فرهنگ حاکم بر مدرسه، که در آن همیشه بزرگ‌سالان تصمیم‌گیرنده هستند، ناســازگار بود؛ بنابراین، حرفۀ تدریس با چالش‌های مهمی روبه‌رو شد که به تبع آن صلاحیت‌های حرفه‌ای جدیدی را برای معلمان تقاضا می‌کرد. بدین ترتیب در برنامه‌های

توسعۀ کلاس درس توسعۀ حرفه‌ای معلمان و توسعۀ مدرسه

پداگوژی و روش تدریس موضوعی برای معلمان (PFL) [1]

نرگس مرتاضی مهربانی
دبیر ریاضی و دانشجوی دکتری آموزش ریاضی

آموزش معلمـــان در اتریش به ناچار تغییراتی به‌وجود آمد تا بتواند پاسخگوی این نیازها باشد (راش، ۲۰۱۰). یکـــی از این برنامه‌ها، پداگوژی و روش تدریس موضوعی برای معلمان (PFL) بود. این برنامه، یک دورهٔ دانشـــگاهی دوساله اســـت که به‌عنوان آموزش ضمن‌خدمت برای معلمان دبیرستان در اتریش برگزار می‌شود. این برنامه، مبتنی بر این فرض است که در صورتی می‌توان از یادگیری و ابتکارات معلمان به خوبی حمایت نمود که معلمان به‌طور مســـتقیم، با عمل تدریس درگیر باشـــند و برای درک بهتر عمـــل تدریس خود، با معلمـــان دیگر و نیز با جامعهٔ دانشگاهی، شبکه‌های انتقادی مناسبی تشکیل دهند (راش، ۲۰۱۰). هدف این برنامه، «تأسیس انجمن دوستان منتقد» است که در آن، دریافت بازخورد مشـــترک و منظم از عمل تدریس خود و دیگران به‌عنوان جنبه‌ای حیاتی از رشـــد حرفه‌ای معلمان محســـوب می‌شود (کرینر، ۲۰۰۰). از سال ۱۹۸۲، دوره‌های PFL برای ریاضی و علوم و چندین دوره برای دیگر موضوع‌های درســـی تشکیل شده است. هستهٔ اصلی ایـــن دوره‌ها، تحقیـــق کارورز/ تحقیق عمل است. معلمان، عمل‌های تدریس خود را مورد بررســـی قرار می‌دهند تا بتوانند دانش و صلاحیت‌های تدریس و نیز درک نظری خود را توسعه دهند.برای حفظ تعادل بین نظر و عمل، اکثر دوره‌های PFL توســـط یک تیم ۵ نفریِ میان‌رشته‌ای شـــامل آموزشگران، متخصصان موضوع‌های درسی وکارورزان، هدایت می‌شود. در هر دوره، ۳۰ نفر به‌صورت داوطلب شـــرکت می‌کنند و طول دوره چهار نیم‌ســـال تحصیلی است که دو نیم‌ســـال آن به بیان مبانی نظری مربـــوط به آمـــوزش ریاضی و دو نیم‌ســـال به ارائهٔ کارهای عملی معلمان، مبتنی بر مباحث نظری مطرح شـــده در دوره، اختصاص دارد. با این که دوره در خارج از محیط مدرســـه برگزار می‌شـــود، اما مدرســـه محل اصلـــی یادگیری معلمان محســـوب می‌شـــود. این دوره از تنوع خوبی برخوردار است. برای مثال، هر دوره شامل سه ســـمینار یک هفته‌ای، پنج نشست گروهیِ ناحیـــه‌ای به مدت یـــک روز و نیم، و کار عملی فردی و نوشتن گزارش‌های بازتابی است. به گفتهٔ کرینر (۲۰۰۰)، یک جنبهٔ ویژه PFL آن اســـت که تمام معلمـــان، تدریس خود را مورد تحقیق قرار داده و در نهایت، شروع به نوشتن یک موردِ مطالعاتی می‌کنند که گویای یک بازتاب انتقادی و منظم بر عملکردهای خودشان است و این، همان ویژگی تحقیق عمل است. از این گذشته، سؤال تحقیق به انتخاب خود معلم و برگرفته از چالشی اســـت که در عمل تدریس برای وی ایجاد شده است. طبق گفتهٔ معلمان شرکت‌کننده درPFL، از جملهٔ آن چالش‌ها، می‌توان به نیاز معلمان به معرفی روش‌های جدید تدریس یا احساس تنش در رویارویی معلمان ریاضی با اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان اشاره کرد. معلمان شرکت‌کننده از حمایت‌های سایر همکاران و یک یا دو آموزشگر معلمان، بهره می‌برند. این حمایت، بدین‌گونه است که هر شرکت‌کننده برای مدت دو سال، عضو یک گروه شامل ده همکار و یک یا دو آموزشگر معلمان می‌شـــود. این تأثیر متقابل بیـــن عمل و بازتاب، استقلال در کلاس خود و شبکه‌سازی با گروه، به اسناد مکتوب تحقیقاتِ معلمان منجر شده است که به‌طور کلی، به‌گونه‌ای تدوین شده‌اند تا معلمانِ دیگر بتوانند با خواندن آن‌ها، از این تجارب استفاده کنند. در نتیجه، انواع بیشتری از شبکه‌سازی ایجاد می‌شود.

کرینر (۲۰۰۰)، اشاره می‌کند که ارزیابی‌های مستمر برنامهٔ PFL نشان می‌دهند که این پروژه، در ارتقای توســـعهٔ حرفه‌ای معلمـــان و در ایجاد انجمن دوستان منتقد موفق بوده است. با این حال، نتایج پروژه نشـــان داده است که به‌طور میانگین، شـــرکت‌کنندگان به میزان کمی توانسته‌اند تأثیر مناسبی بر توســـعهٔ حرفه‌ای گروه درسی مدارس خود داشته باشند و اغلب فعالیت‌های آن‌ها، مورد مخالفت آشکار یا غیرآشـــکار مدرسه قرار گرفته است که این خود، نشان‌دهندهٔ نیاز به حمایت‌های اجرایی، در انجام هر تغییر آموزشی است.

پی‌نوشت‌ها

۱. PEL، علامت اختصاری برای عبارت آلمانیPädagogik und Fachdidaktik für Lehrerinnen است.

منابع

1. Krainer, K .(2000). Teacher Education as Research – A Trend in European Mathematics Teachers Education. University of Klagenfurt. Lecture at ICME 9, WGA 7, Tokyo, August 2000.
2. Rauch, F. (2010). Practitioner Research and In-Service University Courses: Theoretical Concepts and Evaluation. In M.Khine and I.M. Saleh (Eds.) **Practitioner Research: Teachers' Investigations in Classroom Teaching**. pp.51-66.

یادگیری ریاضی در

چنین گفت پیغمبر راستگوی
زگهواره تا گور دانش بجوی

(فردوسی، شاهنامه)

گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی[1] (PME)، زیرگروه رسمی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی[2] (ICMI) است که در سومین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME 3)، که در شهر کارلسروهه[3] آلمان در سال ۱۹۷۶ برگزار شد، به‌وجود آمد.

قانون اساسی این گروه، در مجمع عمومی سالانه در ۱۷ آگوست ۱۹۸۰ به تصویب رسید و در مجمع‌های عمومی سالانه بعدی و با اکثریت آرا، به ترتیب در ۲۴ جولای سال ۱۹۸۷، ۱۰ جولای ۱۹۹۲، ۲ آگوست ۱۹۹۴، ۱۸ جولای ۱۹۹۷، ۱۴ جولای ۲۰۰۵ و بالاخره ۲۱ جولای ۲۰۱۲ ، دچار تغییراتی شد. اهداف اصلی کنفرانس‌های سالانه این گروه به قرار زیر است:

- ترویج ارتباط‌های بین‌المللی و تبادل اطلاعات علمی در زمینهٔ آموزش ریاضی؛
- ترویج و تقویت تحقیقات میان‌رشته‌ای؛
- پیشبرد درک عمیق‌تر و بهتر از لحاظ روحی و روانی و دیگر جنبه‌های آموزش و یادگیری ریاضیات و پیامدهای آن.

سی و هفتمین کنفرانس گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME 37) در شهر کیل، از ۲۸ جولای تا ۲ آگوست ۲۰۱۳ - ۶ تا ۱۱ مرداد ۹۲- برگزار شد.

برگزارکنندهٔ این کنفرانس، مؤسسهٔ تحقیقاتی لایب‌نیتس[4] برای آموزش علوم و ریاضیات[5] (IPN) بود. این مؤسسه، در سال ۱۹۹۶ تأسیس شده و تا سال ۲۰۰۸، شامل سه گروه پژوهشی آموزش علوم، آموزش زیست‌شناسی و آموزش شیمی و فیزیک بود. در سال ۲۰۰۸، گروه پژوهشی آموزش ریاضی نیز با هدف توسعه تحقیقات و ارتقای آموزش ریاضی از طریق پژوهش، به آن اضافه شد. در این مؤسسه، بسیاری از دانشمندان، کارشناسان و روان‌شناسان، با یکدیگر همکاری می‌کنند.

شهر کوچک کیل، در شمال شرقی کشور آلمان و نزدیک هامبورگ قرار دارد. کیل همان شهری است که

طول عمر

سمیرا مهر آیین
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهر کرمان

در سال ۱۹۳۶، بازی‌های المپیک قایق‌رانی در آن برگزار شد که جزو افتخارات آن شهر محسوب می‌شود.

موضوع اصلی کنفرانس، «یادگیری ریاضی در طول عمـــر» بود و پیامش این بود که یادگیری ریاضی، تنها متعلق به دوران مدرسه نیست، بلکه نیاز به آن، در طول عمر هر فرد احساس می‌شـــود، پس نیازمند پژوهش است.

در این کنفرانس، همه چیز مرتب بود و طبق برنامه پیش می‌رفت. گروهـــی از دو روز قبل از کنفرانس، در محل ورود شرکت‌کنندگان یعنی فرودگاه هامبورگ و ایستگاه قطار کیل و هامبورگ اسکان داشتند و مسئول راهنمایی بودند. در محل کنفرانس هم دانشجویان، با لباس‌های آبی آسمانی و آرم کنفرانس حضور داشتند و راهنمایی افراد را برعهده داشتند. در این کنفرانس، ۶۸۶ نفر از حدود ۵۴ کشور دنیا شرکت کرده بودند که حدود نیمی از آن‌ها از کشورهای غیراروپایی بودند. در مجموع در این کنفرانس، ۱۶۵ گزارش تحقیقی ۴۰ دقیقه‌ای، ۷۴ پوستر، ۲۰۰ سخنرانی کوتاه ۱۰ دقیقه‌ای، ۳ جلسهٔ کاری و ۴ مجمع پژوهشی برگزار شد. تقریباً هر روز، از ساعت ۸ صبح تا ۸ شب برنامه‌های علمی، پشت سر هم و بدون وقفه ادامه داشـــت. البته در هر روز، دو فرصت کوتاه ۲۰ دقیقه‌ای به میان‌وعده و تقریباً یک ساعت به ناهار اختصاص داده شده بود.

روز اول کنفرانس روز ثبت‌نام و آشـــنایی بود. افرادی با لباس‌های یک رنگ آبی و آرم کنفرانس روی آن‌ها، در قسمت‌های مختلف سالن ایستاده و مسئولیت ثبت‌نام افراد را برعهده داشتند. در کنار دید و بازدیدها، کریستینا ریس[۶] از دانشگاه مونیخ، یک سخنرانی با عنوان «شما نمی‌توانید حقه جدیدی را به سگ قدیمی آموزش بدهید» ایراد کرد که هدف آن، این بود که نشان دهد یادگیری ریاضی،یک تجربه‌ای است که هر فرد، در طول عمر خود می‌تواند از ریاضی داشته باشد. بعد از آن، برنامه‌های فرهنگی متعلق به شهر کیل توسط دانشجویان، دانش‌آموزان و گروهی از ملوانان این شهر اجرا شد.

روز دوم کنفرانس، دوشنبه ۲۹ جولای، با سخنرانی داگ کلارک[۷] از دانشـــگاه کاتولیک استرالیا (ویکتوریا) شـــروع شـــد که عنوان آن، «تفاهم، ارزیابی و توسعه تفکر ریاضی کودکان» بود و به لحاظ روشی، تأکید بر مصاحبه مبتنی بر تکلیف به‌عنوان ابزار قدرتمندی در دست معلم برای ارزشیابی بود. این تحقیق توسط یک

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تیم تحقیقی دردانشگاه کاتولیک استرالیا و همکاران وی از دانشگاه موناش در سال ۱۹۹۹ انجام شد و در آن، همکاری نزدیکی بین معلمان و پژوهشگران صورت گرفت. در واکنش به این سخنرانی، ماریا فن دن هُوِل پَن‌هویزِن[8] نظرات خود را بیان کرد. بعد از آن، پوسترها در محل سالن دانشگاه ارایه شدند. هم‌چنین بعد از ناهار، ابتدا بحث‌های گروهی به‌طور موازی و در ادامه، سخنرانی‌ها یا همان گزارش‌های تحقیقی به موازات هم برگزار شدند.

سخنرانی عمومی روز سوم، توسط ایدو گال[9] و با عنوان «مهارت‌های ریاضی فراتر از سال تحصیلی: یک دیدگاه پیمایشی از مهارت‌های بزرگ‌سالان و یادگیری آن‌ها» انجام شد که در آن، بیان شد که «اگر می‌خواهید بهبودی در وضعیت آموزش ریاضی و درک چالش‌های ریاضی در قرن ۲۱ به‌وجود آید، این موضوع باید در طول عمر و همیشه، مورد بررسی و پیگیری قرار گیرد.» در مقابل، ردلف استرسیر از آلمان، به نقد این سخنرانی پرداخت. بعد از آن، در همان سالن، قسمت اول مجمع‌های پژوهشی شکل گرفت. هدف از این مجمع‌ها، ایجاد بحث و گفت‌وگو، ایراد سخنرانی‌های شفاف‌تر، واکنش‌ها و بحث در مورد موضوعاتی مانند درک عددی[10] بود که تحقیقات قابل توجهی در آن حوزه انجام شده نمود. در این قسمت، مدت ۱۵-۱۰ دقیقه به مقدمه و سازماندهی افراد در گروه‌های مختلف و توضیحات اولیه اختصاص داده شد و ۲۵-۲۰ دقیقه اعضای هر گروه، به بحث و تبادل‌نظر در مورد موضوع مربوط پرداختند، ۴۰-۳۵ دقیقه هم بحث و نتیجه‌گیری توسط مسئول هر گروه، برای سایر گروه‌ها انجام شد و در نهایت، ۲۰ – ۱۵ دقیقه، رئیس جلسه به نتیجه‌گیری پرداخت. حدود ۹۰ دقیقه به هر مجمع پژوهشی اختصاص داده شده بود. در این روز بعد از ناهار، جلسه سیاست‌گذاری برگزار شد. بحث این جلسه، در مورد تغییر قانون چاپ مقالات درگزارش این کنفرانس بود.

روز چهارشنبه برنامه‌های کنفرانس در نوبت صبح شامل سخنرانی‌ها و قسمت دوم انجمن‌های پژوهشی و بعد از ناهار برنامه تفریح از طرف کنفرانس برای شرکت‌کنندگان در نظر گرفته شده بود.

روز پنج‌شنبه در نوبت صبح، ادامهٔ سخنرانی‌های کوتاه و بلند و بعد از ناهار در سالن اصلی کنفرانس، طبق معمول همهٔ کنفرانس‌های PME، میزگردی برگزار شد که عنوان آن، «آموزش‌ها و کارهایی که دانشجویان دورهٔ دکتری آموزش ریاضی باید در دورهٔ آموزش خود انجام دهند» بود. مسئول جلسه پیتر لیلیدال[11] از دانشگاه سایمون فریزر[12] کانادا بود. چهار شرکت‌کننده در این میزگرد از کشورهای اتیوپی، فنلاند، برزیل و استرالیا بودند که هریک به نوبهٔ خود، به سؤالات در کمال آرامش و به‌طور کامل پاسخ می‌دادند. از هر یک، سه سؤال پرسیده شد و در نهایت، توسط مسئول جلسه جمع‌بندی شد. بعد از آن، جلسه مجمع عمومی برگزار و توسط کمیته بین‌المللی کنفرانس ۲۰۱۳، در مورد فرایند چاپ گزارش کنفرانس و حمایت‌های مالی از طریق بنیاد اسکمپ به تعدادی از ارایه‌دهندگان مقالات از کشورهای مختلف، توضیحاتی داده شد. بعد هم طبق روال، چهار عضو کمیته بین‌المللی که دوره چهار ساله آن‌ها تمام شده بود با چهار نفری که در همان جلسه و با رأی‌گیری انتخاب شدند، تعویض شدند. پس از رأی‌گیری مجدد برای انتخاب رئیس، باربارا یاورسکی برای سه سال، برگزیده شد.

آخرین سخنرانی عمومی را فیلیپ ماتوس[13] از دانشگاه لیسبون[14] پرتغال با عنوان «روش‌ها و فرصت‌هایی برای روش‌شناسی پژوهش» ایراد نمود. وی به استناد به تحقیقات ارایه شده در PME 36، این پژوهش را انجام داده بود، یعنی با فراتحلیلی که از مقالات پذیرفته شده در کنفرانس قبلی صورت داده بود، به این یافته‌ها رسیده بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Psychology of Mathematics Education (PME)
2. International Congress on Mathematical Education (ICME)
3. Karlsruhe
4. Leibniz Institute
5. Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
6. Kristina Reiss
7. Doug Clarke
8. MarjaVan den Heuvel-Panhuizen
9. Iddo Gal
10. Number Sense
11. Peter Liljedahl
12. Simon Fraser University
13. Filipe Matos
14. Lisbon

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات