زهرا گویا

آرامش را به مدرسه بازگردانیم! «کنکور» تنها یک واژه است!

سال‌هاست که زندگی مدرسه‌ای ما، تحت‌تأثیر پدیده‌ای منحصر به‌فرد به نام «کنکور» قرار گرفته است، کنکوری که به گفته زنده‌یاد پرویز شهریاری «دانش مملکت را ویران می‌کند». کنکوری که آن آموزشگر بزرگ از آن با نگرانی سخن می‌راند، پدیده‌ای است که همچنان، آموزش عمومی و آموزش عالی را به نوعی، در سیطرهٔ خود گرفته به‌طوری که مراکزی که وظیفهٔ راهبری آینده‌سازان جامعه و بعد، آماده کردنشان برای تولید علم و خدمت به همان جامعه را دارند، مستقیم یا غیرمستقیم، از این پدیده آسیب دیده و می‌بینند. اکثر افراد جامعه نیز از کنکور می‌نالند و آن را باعث و بانیِ بیشتر مصائب جریان یاددهی- یادگیری می‌دانند. ولی «پارادوکس» یا «باطل‌نمای» عجیب این است که اِجماع نانوشته‌ای به‌وجود آمده که انگار، برای در امان ماندن از این غولِ دست‌ساز، ساده‌ترین راه این است که از یک‌سو بیشتر و بیشتر تغذیه‌اش کنیم و عرصه را برایش آماده‌تر سازیم و از سوی دیگر، بیشتر و بیشتر نسبت به آن نفرت ایجاد کنیم و هم‌زمان به آن متوسل شویم! خلاصه، هم بِرانیم و هم بِخوانیمش! پارادوکس اینجاست که عامل هر ناکامی را کنکور ببینیم و برای عبور از سدِ آن، همگی تلاش کنیم و بهایش دهیم و به بهانه‌اش گرفتار شویم و مسیر آموزش جامعه را وارونه کنیم!

بدین سبب، لازم است برای سازماندهی این اوضاع و کنترل احساس نیازهای کاذبی که نه فقط در والدین و دانش‌آموزان، بلکه گاهی در مسئولان و تصمیم‌گیرندگان هم ایجاد شده، زمینه‌ای برای هم‌اندیشی فراهم کنیم. در غیر این صورت، بازار عظیم و بی‌قواره و غیرقابل کنترلی که به نام «کنکور» و به کام بسیاری، در تمام سطوح ایجاد شده، با استفاده از حساسیت‌های والدین و مسئولان، یکه تاز میدان می‌شود و مرتب هم نوید موفقیت، اما به «شَرطِها و شُروطِها» می‌دهد! طبیعی است تصور کنیم که شرط اول، پیدا کردن شانس حضور و بهره‌مندی از برنامه‌ها و منابعِ این مراکز و مؤسسات و ناشرانِ به اصطلاح آموزشیِ «معتبر» و اکثراً «تضمینی»، برای قبول شدن در رشته‌های دلخواه داوطلبان است و ادامه این مسیرِ هوشیارانه را هم که مبتنی بر نیازهای احساسی جامعه است، بیش و کم می‌شناسیم. اما سؤال اصلی این است که «چرا چنین شد؟» و از کِی، همه آماده باش ایستادند و این‌چنین، عنان و اختیار را به فرمانِ سرنوشتی سپردند که بشر رقمش زده بود نه تقدیر؟!

یکی از اتفاقات پیش‌بینی نشده‌ای که تقریباً در دو دههٔ اخیر در ایران رخ داده است، استفاده از ابزاری به نام «آزمون»، برای جداکردن هر سَره‌ای از ناسَره است. این اتفاق، آن چنان سریع روی داد و به قدری سودآور بود که برای قبولاندن آن به جامعه، مدارس خاص و مسئولان آموزشی، از هیچ تلاشی فرو گذاشته نشد. یکی از آن تلاش‌ها که عامدانه یا از سرِ ناآگاهی صورت گرفت، استفاده از عنوان «کنکور» بود؛ کلمه‌ای که تنها در پایان سال خروج از آموزش مدرسه‌ای، یعنی دیپلم، معنا دارد و از آغاز برگزاری کنکور دانشگاه‌ها در دههٔ ۴۰، هدفش تسهیل تصمیم‌گیریِ دانشگاه‌ها برای انتخاب دانشجو از بین داوطلبان بوده است. اما «کنکور»، تبدیل به اسم عامی برای تمام «آزمون»ها شد! آزمون‌هایی که آرامش مدرسه را به هم زد و مدرسه را از توجه به کارکرد اصلی خود که جامعه‌پذیر کردن افراد و پرورش شهروندانی مستقل، تصمیم‌گیرنده، خلّاق و نقّاد و قانون‌پذیر بود، بازداشت و خطر تبدیل «مدرسه به‌عنوان خودِ زندگی» را به «مدرسه؛ آموزشگاهی برای کنکور»، جدی‌تر نمود.

اما گمان نکنیم که این اتفاق، بومی است و حاصل خلاقیت‌های وطنی! لازم است بدانیم که در مجموعه کشورهای جنوب شرقی آسیا، تأکید بر «تست و تست‌زنی»، قدمتی دیرینه دارد. چنین تبی از دو دهه گذشته

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

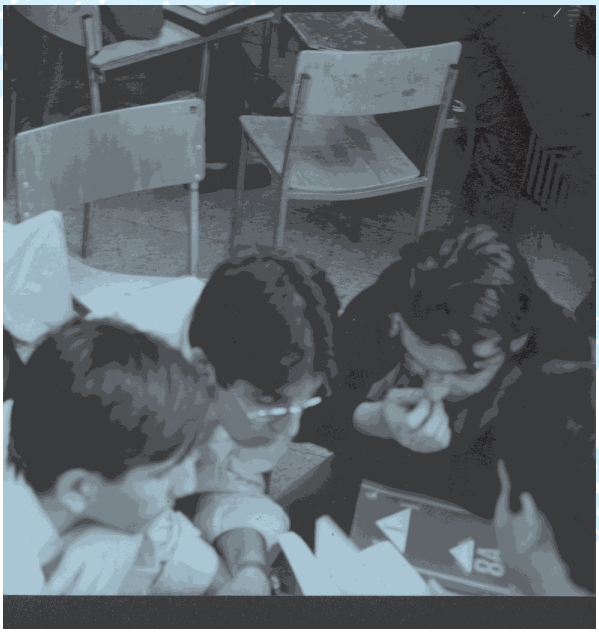
نیز در ایالات متحده، توسط هواداران «استانداردهای برنامه درسی اصلی[1]» که یک روز هم در کلاس درس، ریاضی تدریس نکرده بودند، بالا گرفته است. در ابتدا در آمریکا، بعضی‌ها صادقانه، از تصور به نظم کشیدن مدرسه و برنامه و پاسخگو کردن همهٔ دست‌اندرکاران آموزش مدرسه‌ای نسبت به موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان، از این سوغات سنگاپور- بدون در نظر گرفتن تفاوت همه‌جانبهٔ شرایط بومی در دو کشور- استقبال کردند. آن‌ها همچنین، به‌دلیل امکانی که این برنامه، برای کنترل معلمان فراهم می‌نمود، به‌طور ضمنی از آن حمایت کردند، غافل از آنکه وقتی برنامه از «نیستان» خود «بُبریده» شود، در جای دیگر، احتمال خشکیده شدنش زیاد است، زیرا «بوم‌شناسی» دیگری دارد، چه، شرایط «زیست‌محیطی» هر کجا، ویژه و منحصر به همان‌جاست. با وجود این، در آمریکا، به نصایح متخصصان تعلیم و تربیت گوش ندادند و بیشترین صدمه را به اعتمادبه‌نفس و عزت نفس معلمان وارد کردند و سَکینه و طمأنینه را از مدرسه زدودند که نتیجهٔ آن، اغتشاشی است که در سالیان اخیر در آموزش مدرسه‌ای آمریکا به‌وجود آمده است و فعلاً هم کسی را یارای جلوگیری از آن نیست. از یک طرف بنیادهایی مانند «بیل گیتس[2]» اختیاردار آموزش شده‌اند و از طرف دیگر، ناشرانی که دلسوزانه! معلمان را برای اجرای «برنامه اصلی[3]» آماده می‌کنند. والدین هم برای ثبت‌نام در کلاس‌های بعد از مدرسه «کیومون[4]» به سبک ژاپنی که هدفش افزایش «سرعت[5]» و «دقت[6]» در دانش‌آموزان است، به صف ایستاده‌اند، و رسانه‌ها نیز با تولید فیلم‌های خوش‌ساختی مانند «بازگشت سوپرمن[7]» که تمثیلی برای مدارس «چارتری[8]» است، قند در دل‌ها، اشک در چشمان و بغض در گلوها ایجاد کرده‌اند و خلاصه در این آشفته بازار- هم در آمریکا و هم در ایران- از طریق ایجاد اضطراب در خانواده‌ها، برندگانِ اصلی ماجرا، صاحبانِ سرمایه هستند و بازندگان واقعی، دانش‌آموزان و معلمان شریف و زحمتکش؛ با این تفاوت عمده که در نهایت، دانشگاه‌های آمریکایی به جای جذب آمریکاییانِ آزمون دادهٔ متقاضیِ ورود به آموزش عالی کم‌توان، از بهترین‌های چین و هند و ایران و سراسر دنیا برای ورود به دانشگاه، دانشجو می‌پذیرند، اما صندلی‌های خود را حراج نمی‌کنند و همیشه، آن‌ها را برای بهترین‌ها نگه می‌دارند. این دانشجویان، همگی دارای نمره «آزمون‌های استاندارد» مانند GRE و GMATH هستند و در هر کجای این کره خاکی، می‌توانند این آزمون‌ها را بدهند. در صورتی که در ایران، داوطلبانِ ورود به دانشگاه، با این همه هزینه‌ای که می‌کنند و این همه زحمتی که می‌کشند، بعضی سال‌ها، به‌دلیل این که «حدنصاب» نمره وجود ندارد، با پایین‌ترین کیفیت وارد دانشگاه شده و به سرعت در آموزش عالی، دچار سرخوردگی می‌شوند.

در هر صورت، هدف این نوشته، فقط طرح یک مسئلهٔ مهم و فراگیر در جامعه ایران بود. تجربه کشورهای دیگر، اگر با نقد بی‌غرضانه مورد بررسی قرار گیرد، کمک می‌کند تا از مشابهت‌هایشان بیاموزیم و آزموده‌ها را دوباره نیازماییم. همچنین، دقت کنیم که «آزمون»، معادل «کنکور» نیست. در ایران، «کنکور» به خودیِ خود، به اصطلاح، یک «بِرَند» شده است و مشتریان دوآتشهٔ خود را دارد. زمین و زمان هم در خدمتش هستند. از کودک پیش‌دبستانی گرفته تا مسئولان رده بالا، از خانواده‌های کم‌سواد تا والدین متخصص، خلاصه همه و همه، با پدیده‌ای به‌نام «کنکور» آشنایند و نسبت به آن واکنش نشان می‌دهند. اما وای به روزی که آسیب‌دیدگانِ از «کنکور»، خود جزو تسهیل‌کنندگان و تقویت‌کنندگان آن باشند و با این نگرانی که نمی‌توان این واقعیت عریان را نادیده گرفت، یا به‌دنبال وضع قانون برای از بین بردن آن باشند و یا به کمند گیسویش گرفتار آیند و خودشان، برایش هزینه نمایند. اتفاقی که سال‌هاست واقع شده و آرامش و قرار را از خانواده‌ها ربوده و مسئولان را به حرکت‌های انفعالی سوق داده است. شاید، و تنها شاید، لازم باشد از زاویهٔ جدیدی به این پدیده مهم که پر از خیر و شر است، بنگریم و این پیش‌فرض را در نظر داشته باشیم که «کنکور» و «آزمون»، یکی نیستند و زندگی مدرسه، نباید تحت‌تأثیر «کنکور» که برای سال خروج از مدرسه طراحی شده است، دچار ناآرامی گردد و کارکرد اصلی خود را فراموش کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Core Curriculum Standards
2. Bill Gates Foundation
3. Core Curriculum
4. Kumon Schools
5. Speed
6. Accuracy
7. The Return of Superman
8. Charter Schools

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir



درک دانش‌آموزان پایه اول متوسطه (نهم) از مفهوم تساوی در حل معادلات درجه اول

ملیحه دهقان‌نیری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی باقرشهر، شهرستان‌های استان تهران
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

مقدمه

دانش‌آموزان بسیار مبتکرند. وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که نمی‌دانند چگونه آن را حل کنند، الگوریتم‌هایی ابداع می‌کنند و آن‌ها را برای حل مسئله به‌کار می‌برند، هرچند اغلب این الگوریتم‌ها به پاسخ‌های نادرست منتهی می‌شوند. مثلاً در فرایند یادگیری عمل تفریق، اکثر دانش‌آموزان، اشتباه معروفِ «کوچک‌تر را از بزرگ‌تر کم کن» را مرتکب می‌شوند (بن‌زیو، ۱۹۹۶)

ریاضی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های درسی در مدارس، در جوامع کنونی است، اما تدریس مؤثر و مطلوب آن بسیار مشکل است. می‌دانیم که ریاضی علمی انتزاعی است، بنابراین به‌محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی، که دانش‌آموزان می‌شناسند، از دست می‌دهد، برای بسیاری از آن‌ها بی‌معنی می‌شود. به‌همین دلیل است که در سراسر دنیا، دانش‌آموزان در درس‌های ریاضی خود افت دارند و حتی بسیاری از بزرگ‌سالان نیز آن را درک نمی‌کنند. هم‌چنین، بسیاری از معلم‌ها نیز درک ریاضی را مشکل می‌دانند (بیشاب، ۱۹۹۸). برای مثال، یکی از مفاهیم مشکل‌آفرین در شروع یادگیری جبر، درک **علامت تساوی** است.

به گفته غلام‌آزاد (۱۳۸۰)، دانش‌آموزان عموماً قبل از آنکه وارد آموزش رسمی جبر شوند، شروع به حل معادلات ساده می‌کنند. اما تجربهٔ آن‌ها از علامت تساوی در حساب، که در واقع برای آن‌ها به معنای «دنبال جواب بودن» است، ممکن است در درک آن‌ها از معادله و عبارت‌ها اثر بگذارد. آن‌ها عموماً علامت تساوی را به‌عنوان علامت «جواب را بنویس» در نظر می‌گیرند، به‌جای آنکه این علامت، مفهوم هم‌ارزی دو عبارت را برایشان تداعی کند. در نتیجه، به این دلیل که **معادله** یکی از مفاهیم اولیّه و اساسی جبر است که دانش‌آموزان از آن برای ایجاد مدل‌ها و حل مسائل ریاضی استفاده می‌کنند، بسیاری از محققان، در زمینهٔ

حل معادلات درجهٔ اول، بدفهمی‌هایی را شناسایی کرده‌اند و اکثراً بر بدفهمی‌های دانش‌آموزان نسبت به **علامت تساوی** تأکید نموده‌اند. از نظر کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳)، درک محدود دانش‌آموزان از معنی علامت تساوی، یکی از موانع اصلی در یادگیری جبر است.

کلیدواژه‌ها: حل معادله، علامت تساوی، ریاضی پایهٔ اول متوسطه، معادله درجهٔ اول

کاربرد و تفسیرهای علامت تساوی

برای نشان دادن روابط ریاضی، از علامت‌های < (بزرگ‌تر از) و > (کوچک‌تر از) و ≥ (بزرگ‌تر یا مساوی) و ≤ (کوچک‌تر یا مساوی)، استفاده می‌شود، اما میزان به‌کارگیری علامت تساوی (=) در تمام شاخه‌های ریاضی، بیش از همه است و بر وجود یک **رابطهٔ تعادلی** دلالت می‌کند. علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد رابطه‌ای، به روش‌های مختلفی نمایش داده می‌شود. مثلاً گاهی اوقات، از آن برای نشان‌دادن یک اتحاد استفاده می‌شود، مثل $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. گاهی برای تعریف یک تابع به‌کار برده می‌شود، مثل $f(x)= 2x+3$. زمانی دیگر، به همراه جای خالی استفاده می‌شود و به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی تفسیر می‌شود یا به‌عنوان نمادی که پیامش این است که «جواب را پیدا کن» (--- = ۴+۳).

این در حالی است که سینز- لودلو[1] و والگاموث[2] (۱۹۹۸) نیز به این نکته اشاره دارند که دانش‌آموزان، الزاماً انتخابی برای تعریف و تعیین نمادهایی که به‌کار می‌برند ندارند و در این صورت، تنها قراردادها را می‌پذیرند. برای مثال، قبول علامت تساوی یا استفاده از آن، به این معنی نیست که آن‌ها از نظر ریاضی آن را فهمیده‌اند.

معانی تساوی و علامت تساوی

بسیاری از محققان، بر تمایز مهم بین دو معنی عملیاتی و رابطه‌ای برای تساوی تأکید دارند (کی‌یِرن، ۱۹۸۱؛ وینتر، ۱۹۸۲؛ وُلترز، ۱۹۹۱؛ فیلوی و همکاران، ۲۰۰۳؛ نوث و همکاران، ۲۰۰۶). کی‌یِرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تساوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسئله و پاسخ مسئله را از هم جدا می‌کند. از نظر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتی به رابطه‌ای، قانون قراردادی «جملات هر دو طرف معادله را بخوان» را توجیه می‌کند. پریدیگر[3] (۲۰۱۰) نیز معتقد است که آموزش حساب دورهٔ ابتدایی با تمرکز بر تساوی‌های نامتقارن مثل ۱ = ۳ - ۶ ÷ ۲۴، بر معنای عملیاتیِ علامت تساوی تأکید دارند. در نتیجه، کاربرد متقارن و رابطه‌ایِ علامت تساوی در جبرِ دورهٔ اول متوسطه، با مشکل مواجه می‌شود که به‌عنوان نمونه، می‌توان به عباراتی مانند: ۷ × ۴ + ۷ × ۲۰ = ۷ × ۲۴ یا معادلات جبری مانند $x^2 = -x + 6$ اشاره نمود.

در نتیجه، بسیاری از محققان آموزش ریاضی در مورد مشکلات توسعهٔ معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تساوی برای تسهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تساوی نیز، در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی وارد شود (کی‌یِرن، ۱۹۸۱؛ وینتر[4]، ۱۹۸۲؛ ولترز[5]، ۱۹۹۱؛ تیس[6]، ۲۰۰۵).

پریدیگر (۲۰۱۰، به نقل از میِل، ۱۹۹۳ و کورتِس و همکاران، ۱۹۹۰) بیان می‌کند که فرایند یادگیری جبر، تحت‌تأثیر معنای رابطه‌ای است و علامت تساوی، معناها و تفسیرهای متفاوتی دارد که مهم‌ترین آن‌ها در شش مورد زیر، آورده شده است:

۱. معنای عملیاتی: عملیات برابر است با جواب: ۱ = ۳- ۶ ÷ ۲۴؛

۲. معنای رابطه‌ای:

۲. آ - عبارت حسابی متقارن: ۵ + ۷ = ۷ + ۵ یا $۹^2 - ۱۰^2 = ۱۹$؛

۲. ب- تعادل رسمی که جملات معادل را توصیف می‌کند: $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$؛

۲. ج- معادلهٔ شرطی که مجهول‌ها را مشخص می‌کند: معادله $x^2 = -x + 6$ را حل کنید.

۲. د- پارامترهای زمینه‌ای در فرمول؛ مانند فرمول مساحت دایره ($A = \pi r^2$) یا مثلث قائم‌الزاویه با وتر c و اضلاع a و b، که در $a^2+b^2=c^2$ صدق می‌کنند؛

۳. تعیین یا توصیف:

$m = \frac{\pi}{2}(a+b)$ یا $y = 2x + 52$

دسته اول؛ معنای عملیاتی برای کاربرد غیرمتقارن مورد استفاده قرار می‌گیرد: «عملیات برابر است با جواب» (مک‌نیل[7] و همکاران، ۲۰۰۶)، این دسته اغلب برای حساب دورهٔ ابتدایی توضیح داده می‌شود. هم‌چنین در ریاضیات پایه‌های بالاتر مثل حسابان هنگام مشتق‌گیری از تابع چندجمله‌ای به‌کار می‌رود و برای مثال نوشته می‌شود: $f'(x)=(3x^2)'=6x$.

بسیاری از محققان آموزش ریاضی در مورد مشکلات توسعهٔ معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تساوی برای تسهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تساوی نیز، در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی وارد شود

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دســتهٔ دوم، معنای رابطــه‌ای متمرکز بر کاربرد متقارن علامت تســاوی اســت. این دسته، خود شامل چهار زیردسته است، که هریک متفاوت از دیگری است. پریدیگــر (۲۰۱۰) از کی‌یــرِن (۱۹۸۱) کلمــهٔ عبارت حســابی را قرض می‌گیــرد (زیردســتهٔ ۲. آ). کی‌یرِن (۱۹۸۱) این کلمــه را برای ارتباط با دانش‌آموزان ابداع کرد که بتوانند تساوی‌های حسابی متقارن را از آن‌هایی که شامل متغیرهاست تشخیص دهند.

تعادل رســمی (زیردســتهٔ ۲. ب) بــه تعادل جمــلات جبــری شــامل متغیرهــا اشــاره می‌کند: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ کــه بــرای تمــام مقادیر x صدق می‌کند. این تعادل رســمی، بســته به تفســیر متغیرهای شــامل آن، می‌تواند به روش‌های متفاوت تفسیر شود.

در کلاس درس جبر، مهم است که تعادل رسمی، با تفاسیر متفاوتی که دارد، از معادلات شرطی برای تشــخیص مجهول‌ها متمایز شــود. اگرچــه، معادله $x^2=-x+6$ به‌طور نمادین شبیه $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ اســت، اما ویژگی کاملاً متفاوتی دارد که برای تمام xها به‌کار نمی‌رود. به‌عــلاوه، مجهول‌های خاصی را مشــخص می‌کند و با حل معادله، یک عدد می‌تواند به‌عنوان مجهول مشخص شود.

در زیردستهٔ (۲. د)، پارامترهای زمینه‌ای در فرمول که در یک طرف تســاوی قراردارند، فرمولی مثل فرمول مســاحت دایــره یا معادلــهٔ فیثاغورس $a^2+b^2=c^2$ کــه عبارات اصلی هســتند، امــا از طرف دیگر آن‌ها برای تمام a و bها مثل تعادل‌های رسمی $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ بــه‌کار نمی‌رونــد. آن‌ها فقط در زمینه‌های خاص اصلی هســتند؛ بــرای مثال، به‌کار بردن a، b و c برای طول‌های مثلث قائم‌الزاویه.

کورتــس[8] و همــکاران (۱۹۹۰) معرفی **دســتهٔ سومی را به نام تعیین یا توصیف**، پیشنهاد کردند کــه در آن، پارامترها تشــریح نمی‌شــوند بلکه مثل تعاریف بیان می‌شــوند. تفاوت آن با پارامتر زمینه‌ای این است که به تشخیص بین تعاریف و پیش‌فرض‌ها کمک می‌کند. در مجموع، تفاســیر بسیار متنوعی از علامت تساوی وجود دارد.

درک تساوی به‌عنوان یک رابطه

دانش‌آمــوزان باید بفهمند که تســاوی رابطه‌ای است که بیان می‌کند دو عبارت ریاضی ارزش یکسان دارند. به‌دست‌آوردن این درک، ارتباطات بین حساب و جبر را بیشتر می‌کند. برای مثال، وقتی یک دانش‌آموز مســئلهٔ ۱+(۸-۱۰)=(۱-۸)-۱۰ را حل می‌کند درگیر حساب است و در ضمن در حال یادگیری مهارت‌های فکــری ضــروری برای درگیر شــدن در جبــر، به‌ویژه خاصیت شرکت‌پذیری در اعداد صحیح، است.

بعد از آشــنایی با این نوع رابطه، مسائل مشکل ماننــد: a-(b-c)=(a-b)+c برای دانش‌آموزان دشــوار نیســت. اما اگر فکر کنند که علامت مســاوی به این معنی اســت که باید عملیاتی اجرا شــود، برایشــان دشــوار خواهد بــود بفهمند که وقتــی مقداری مثل c از یــک طــرف معادله کم می‌شــود، از طرف دیگر نیز همان مقدار کاهش می‌یابد (اُکســوز، ۲۰۰۱). در این شرایط، تنها روشی که آن‌ها می‌توانند درگیر آن شــوند، «به‌خاطر سپردن یک سری قوانین برای حل معادلات است». به‌دلیل اینکه چنین قوانینی با درک ناقص همراهند، دانش‌آموزان قادر نیستند به‌درستی آن‌ها را به‌خاطر بیاورند و به‌راحتی از آن‌ها اســتفاده کنند (فاکنر، لــوی و کارپنتر، ۱۹۹۹). دلیل دیگری که دانش‌آمــوزان به این درک نیاز دارند، این اســت که بتوانند روابط بیان‌شــده توســط جملات عددی را ببیننــد. بــرای مثال، وقتی یــک دانش‌آموز جملهٔ عــددی ۷+۸=۷+۷+۱ را می‌بینــد و می‌گویــد «من به‌خاطر نمی‌آورم که ۷ به علاوه ۸ چند می‌شــود، اما می‌دانم که ۷ به اضافه ۷ می‌شــود ۱۴ و سپس یکی بــه آن اضافه می‌کنم و حاصل ۱۵ می‌شــود»، او یک رابطه خیلی مهم یعنی ویژگی شرکت‌پذیری را شرح می‌دهد که این ویژگی در حســاب، یک اصل اســت (فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹.)

بعد از گســترش توانایی بیان روابط، دانش‌آموزان بایــد بتوانند همان اصول ریاضی را برای حل مســائل دشــوارتر مثل ۱۸- ۴۵ به‌کار ببرنــد، یعنی با بیان آن به‌صورت ۲+ ۲۰ - ۴۵=۱۸- ۴۵ (فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹) یــا a-b را به‌شــکل a-b=a-b+۲-۲ دربیاورند. هم‌چنین، اُکسوز (۲۰۰۱) عقیده دارد که درک تساوی به‌عنوان یــک رابطه، فرصتی عالی فراهم می‌کند تا در حل معادلات، جملات قرینه به‌ســادگی حذف شــوند (ساده شوند).

بدفهمی‌های علامت تساوی

براساس یافته‌های تحقیقی متعدد (سینز- لودلو و والگامــوث، ۱۹۹۸؛ بِر، اِرلوانگــر و نیکولز، ۱۹۸۰؛

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

فاکنر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹)، دانش‌آموزان، از سال اول تا ششم ابتدایی، دربارهٔ معنای علامت تساوی بدفهمی‌های جدی دارند، ولی این بدفهمی‌ها هنگامی که دانش‌آموزان فعالیت‌های حسابی را انجام می‌دهند، معمولاً مورد توجه قرار نمی‌گیرند؛ زیرا در این فعالیت‌ها، رابطهٔ بین دو طرف تساوی مورد نظر نیست و فقط یک عدد در سمت راست این علامت ظاهر می‌شود. بدین سبب، هنگامی‌که دانش‌آموزان با انواع دیگر جملات و به‌ویژه عبارات جبری مواجه می‌شوند، موقع استفاده از علامت تساوی، با مشکلات جدی مواجه می‌شوند. آن‌ها تلاش می‌کنند قوانین و درک خودشان از علامت تساوی را به‌کار ببرند، مثل اینکه گاهی اوقات، جواب‌ها را محاسبه می‌کنند و گاهی در جست‌وجوی روابط هستند، گاهی اوقات به دو طرف تساوی توجه می‌کنند و گاهی فقط به یک طرف توجه دارند (مولینا، آمبروس و کاسترو، ۲۰۰۴)

کاراهِر، شلیمَن و بریزولا (۲۰۰۰- نقل‌شده در مولینا، آمبروس و کاسترو، ۲۰۰۴) مطرح می‌کنند که آموزش‌های مقدماتی دانش‌آموزان در ریاضی، یکی از دلایل اصلی مشکلات آن‌ها در یادگیری جبر است. در مطالعات بِر، اِرلوانگر و نیکولز (۱۹۸۰) با کودکان شش تا دوازده ساله، مشاهده شد که دانش‌آموزان نه فقط علامت تساوی را به‌عنوان محرکی برای یک پاسخ می‌بینند و می‌فهمند، بلکه در مورد عباراتی که باید نوشته شوند نیز ایده‌هایی قطعی دارند و این نوع نگاه به علامت تساوی، باعث ایجاد بدفهمی‌های جدیِ بعدی در آن‌ها می‌شود.

کارپنتر، فرانک و لوی (۱۹۹۹) نیز در تحقیقات خود به بدفهمی‌های زیر اشاره کردند:

۱. تفسیر علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان برای به‌دست‌آوردن و پاسخ دادن. با این فرض که عملیات باید در طرف چپ تساوی انجام شود و بلافاصله پاسخ آن در طرف راست تساوی قرارگیرد. برای مثال، برخی دانش‌آموزان به معادلهٔ ۵+ --- = ۴+۸ پاسخ ۱۲ دادند.

۲. عملیات تمام اعداد با هم. برای مثال، پاسخ ۱۷ را برای معادلهٔ ۵+ --- =۴+۸ نوشتند.

هم‌چنین، متیوز و همکاران (۲۰۱۲) به دو مشکلی که ممکن است دانش‌آموزان در زمان حل معادله با آن مواجه شوند، اشاره کردند:

۱. با اینکه کاربرد متغیر و جای خالی از نظر منطقی یکسان است، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در آن‌ها به‌جای متغیر، جای خالی به‌کار رفته است راحت‌تر حل می‌کنند؛

۲. دانش‌آموزان، معادلاتی را که در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

درک دانش‌آموزان از علامت تساوی

تحقیقات نشان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تساوی یعنی به‌طور خودکار پاسخ را بنویس (بِر و همکاران، ۱۹۸۰؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳؛ دمونتی و ولاسیس، ۱۹۹۹؛ فاکنر و همکاران، ۱۹۹۹؛ هرسکوویچ و کی‌یِرن، ۱۹۸۰؛ لوبینسکی و اُتو، ۲۰۰۲؛ سینز- لودلو و والگاموث، ۱۹۹۸؛ استیسی و مک گریگور، ۱۹۹۷- نقل‌شده در اِسیین و سِتَتی، ۲۰۰۶). از این گذشته، بِر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِرن (۱۹۸۱) با دانش‌آموزان شش و هفت ساله کارکردند و فهمیدند که اکثر آن‌ها علامت تساوی را فقط وقتی قبول می‌کنند که در مقابل جمع و تفریق باشد. بنابراین یک عبارت شبیه ۴+۲ = --- برای آن‌ها مفهومی ندارد و بیان کردند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قراردارد.

فاکنر و لِوی و کارپنتر (۱۹۹۹) نیز تحقیق مشابهی انجام دادند. آن‌ها به دانش‌آموزان پایهٔ اول تا ششم، عبارت ۵+ --- =۴+۸ را دادند و از آن‌ها خواستند تا جای خالی را پرکنند. اکثر دانش‌آموزان تمایل داشتند پاسخ سمت چپ را محاسبه کنند و در مقابل علامت تساوی، آن را بنویسند.

افزون بر این، بِر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِرن (۱۹۸۱) بدفهمی دانش‌آموزان از مفهوم علامت تساوی را به روشی که به آن‌ها تدریس می‌شود، نسبت دادند. آن‌ها بحث کردند که درک دانش‌آموزان از علامت تساوی یعنی «خروجی مورد انتظار از آموزش‌هایی که بچه‌ها دریافت کرده‌اند». استیسی و مک گریگور (۱۹۹۷) و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) هم بحث کردند که استفاده از ماشین‌حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمهٔ تساوی، ماشین‌حساب انجام می‌دهد.

دمونتی و ولاسیس (۱۹۹۹- نقل شده در اِسیین و سِتتی، ۲۰۰۶) اشاره کردند که برخی از بدفهمی‌های

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

استیسی و مک گریگور (۱۹۹۷) و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) هم بحث کردند که استفاده از ماشین‌حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمهٔ تساوی، ماشین‌حساب انجام می‌دهد

دانش‌آموزان دربارهٔ علامت تساوی به‌دلیل استفاده از استعاره‌ها در بیان چرایی یک موضوع است، به‌عنوان مثال، ۳+ a بیشتر از این نمی‌تواند ساده شود.

یک اشتباه جبری معمول دانش‌آموزان این است که می‌خواهند ۳+ a را بیشتر ساده کنند و آن را به عبارتی مانند ۳a یا a۳ تبدیل سازند. در این مورد دانش‌آموزان کاملاً تحت تأثیر تفسیر خودشان از علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد برای انجام دادن چیزی، هستند.

فاکنر و همکاران (۱۹۹۹) بحث کردند که «به‌محض اینکه نمادها برای نمایش عملیات روی اعداد معرفی می‌شوند، معلمان باید دربارهٔ فهم دانش‌آموزان از تساوی نگران باشند».

کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) نیز مطرح می‌کنند که از به‌کار بردن علامت تساوی به روش‌هایی که رابطهٔ تساوی بین اعداد را نشان نمی‌دهد دوری کنید. مثال‌های چنین نمایش‌های اشتباه از علامت تساوی عبارت‌اند از: لیست‌های سنی (مثل جان=۸ و مارکی=۹) یا مشخصه‌های عددی افراد یا چیزها یا استفاده از علامت تساوی در معرفی تعداد اشیاء در یک مجموعه یا مقایسهٔ دو عکس (کارپنتر، ۲۰۰۳)

پژوهش حاضر

در پژوهشی که در این مقاله معرفی می‌شود، نویسندهٔ اول، پس از معرفی خود و توضیح سؤالات، از دانش‌آموزان یک کلاس پایهٔ نهم درخواست کرد که، در صورت تمایل، با دقت و حوصلهٔ کافی به سؤالاتی در مورد چگونگی درک آن‌ها از علامت تساوی، پاسخ دهند. در این کار آن‌هایی که مایل به پاسخ دادن به سؤالات نبودند، می‌توانستند از کلاس خارج شوند. ضمناً به دانش‌آموزان این اطمینان نیز داده شد که نمرهٔ آزمون، هیچ تأثیری بر نمرهٔ ریاضی آن‌ها نخواهد داشت و صرفاً یک کار تحقیقاتی است و نوشتن نام و نام خانوادگی‌شان ضرورتی ندارد. لازم به ذکر است که مدت زمان در نظر گرفته‌شده برای پاسخگویی به سؤالات، پانزده دقیقه بود. ابزار جمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش، چند مسئله بود که قبل از اجرای اصلی، چند بار اجرای آزمایشی شد تا مشکلات احتمالی آن برطرف و اعتبار ابزار در رابطه با هدف تحقیق روشن شود.

نتایج

در این قسمت، به تحلیل نتایج آزمون اصلی، به تفکیک هر سؤال، می‌پردازیم.

سؤال۱. در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

بخش‌های مختلف سؤال ۱، به نوعی حل معادلهٔ درجهٔ اول بدون استفاده از متغیرها بود تا میزان درک دانش‌آموزان از نماد تساوی، قبل از اینکه وارد قوانین حل معادله شوند، مشخص‌شود.

الف. ۳-. . . . . = ۳×۱۴

به این سؤال حدود ۶۶ درصد (۲۹ نفر) دانش‌آموزان پاسخ درست دادند و عدد ۴۵ را در جای خالی قراردادند. حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) نیز به این سؤال پاسخ‌های متفاوت دادند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴۲ را به‌عنوان پاسخ در جای خالی نوشتند، که به‌نظر می‌رسد بدون در نظرگرفتن عددِ بعد از جای خالی حاصل عملیات قبل از تساوی را به‌دست آوردند و یادداشت کردند. این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را «نمادی برای انجام دادن چیزی» می‌بینند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۴۸ را در جای خالی قراردادند، که به‌نظر می‌رسد بر اثر اشتباه محاسباتی این اتفاق رخ داده است.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۳۹ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان تشخیص داده بودند که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد اما بدون در نظرگرفتن علامت تفریقِ بعد از جای خالی، عدد ۳۹ را به‌عنوان پاسخ نوشته و درحقیقت ۳۹ را با ۳ جمع کرده بودند.

عبارت ۱۴× را نیز حدود ۷ درصد (۳ نفر) از دانش‌آموزان در جای خالی قرار دادند، به‌نظر می‌رسد برای این دانش‌آموزان علامت تساوی نمادی برای جابه‌جایی اعداد است.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ب. ۹-۵ =.....-۹

۷۰ درصد (۳۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح و ۳۰ درصد (۱۳ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ اعداد ۴ و ۵ را در جای خالی قراردادند.

۱۴ درصد (۶ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴ را بعد از علامت تساوی نوشتند. این‌ها، طبق نظر مولینا و آمبروس و کاسترو (۲۰۰۴) نماد تساوی را فرمانی برای انجام عملیات دیده بودند.

۱۶ درصد (۷ نفر) دانش‌آموزان عدد ۵ را در جای خالی نوشتند. اینان، طبق نظر اِسیین و سِتَتی (۲۰۰۶) به بیش تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارند.

ج. ۳۱+۲۷ =.....+۲۴

به این سؤال، حدود ۹۰ درصد (۴۰ نفر) پاسخ درست و ۵ درصد (۲ نفر) پاسخ نادرست (عدد ۵۸) دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز پاسخی به این سؤال ندادند.

از دو نفری که عدد ۵۸ را به‌عنوان پاسخ نوشته بودند، یک نفر به تمامی بخش‌های سؤال ۱ پاسخ نادرست داده بود و بلافاصله عملیات قبل از علامت تساوی را انجام داده بود.

د. ۵÷۱۰۰ = ...+۵

۹۳ درصد (۴۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست دادند و ۷ درصد (۳ نفر) عدد ۲۰ را در جای خالی قرار دادند.

ه. $\frac{۱۶۹}{۱۳}$ = ۱۳- .....

در مجموع، ۷۳ درصد (۳۲ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۳ درصد (۱۰ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۴ درصد (۲ نفر) نیز به کلی پاسخ ندادند.

از بین ده نفری که به این سؤال پاسخ نادرست دادند، پنج نفر عدد ۲۶، دو نفر عدد ۱۶۹، دو نفر عدد ۱۲ و در کمال تعجب یک نفر حاصل $\frac{۱۶۹}{۱۳}$ را ۵/۳۰ به‌دست آورده بود و در کنار سؤال، یادداشت کرده بود که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد و در جای خالی عدد ۱۸/۳۰ را قرارداده‌بود.

نتایج به‌دست‌آمده از سؤال ۱

با توجه به مراحل تکامل درک علامت تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) به آن اشاره کردند، نتایجی که از این تحقیق به‌دست آمد، مشخص کرد که دانش‌آموزان به مراحل اول و دوم درک دست‌یافته‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند و به‌عنوان فرمانی برای اجرای عملیات درک می‌کنند، همچنین ویژگی تقارنی (از چپ به راست و از راست به چپ) این نماد را تشخیص می‌دهند، اما هنوز به مرحلهٔ بیان تعادل، که باعث درک کامل مفهوم تساوی می‌شود، دست نیافته‌اند.

در حقیقت، علامت تساوی را نمادی برای اجرای عملیات و یافتن یک پاسخ برای آن می‌بینند و بنا به عقیدهٔ بِر و همکاران (۱۹۸۰) این علامت را نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند.

به‌عنوان مثال، در قسمت الف سؤال ۱، دانش‌آموزانی که عدد ۴۲ را در جای خالی نوشتند نشان دادند که تنها به مرحلهٔ اول درک تساوی رسیده‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند.

دانش‌آموزانی که عدد ۳۹ را به‌جای پاسخ نوشتند، مرحلهٔ دوم درک یعنی ویژگی تقارنی علامت تساوی را فهمیده‌اند و می‌توانند به این علامت از چپ به راست و از راست به چپ نگاه کنند، اما هنوز به مرحلهٔ بیان تعادل نرسیده‌اند.

آن دسته از دانش‌آموزان که ۱۴× را در جای خالی نوشتند، مطابق با نظر اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) با توجه به خاصیت جابه‌جایی که قبلاً در مورد ضرب یاد گرفته‌اند، به بیش‌تعمیمی این خاصیت تمایل پیدا می‌کنند.

دانش‌آموزانی که پاسخ‌های نادرستی به قسمت ب سؤال ۱ دادند، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

دستهٔ اول، دانش‌آموزانی که عدد ۴ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان حاصل عبارت ۵-۹ را به‌دست آوردند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی نشان ندادند؛ که طبق نظر پریدیگر (۲۰۱۰) فقط معنی عملیاتی علامت تساوی، یعنی کاربرد غیرمتقارن آن را درک کرده‌اند.

دستهٔ دوم، کسانی بودند که عدد ۵ را به‌عنوان پاسخ نوشتند. آن‌ها کاربرد متقارن علامت تساوی را می‌دانند اما به‌خاطر عدم وجود تفکر رابطه‌ای مرتبط، آن را به خاصیت جابه‌جایی در تفریق گسترش می‌دهند.

نتایج به‌دست‌آمده از قسمت **ج** و **د** نیز مشابه قسمت‌های **الف** و **ب** است.

در قسمت **ه** حدود ده نفر عدد ۲۶ را در جای خالی قرار دادند. به‌نظر می‌رسد این دانش‌آموزان

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

درک کرده بودند که دو طرف علامت تساوی باید به تعادل برسد، اما بررسی این پاسخ نشان داد که ممکن است دانش‌آموزان به‌طور ضمنی مفهومی را درک کنند در حالی‌که قادر نیستند آن مفهوم را در فرایند حل مسائل مرتبط به‌کار برند.

همچنین نتایج به‌دست‌آمده با نتایج تحقیقی که اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) بر روی دانش‌آموزان پایهٔ هشتم و نهم انجام دادند، سازگار است. به این معنی که با بزرگ‌تر شدن دانش‌آموزان از نظر سنی و بالارفتن پایهٔ تحصیلی آن‌ها، درکشان از علامت تساوی به‌طور کامل اصلاح نمی‌شود و هنوز این نماد را علامتی برای رسیدن به جواب می‌دانند.

به‌نظر می‌رسد این بدفهمی، از جمله، ریشه در آموزش پیشین دانش‌آموزان دارد، زیرا به گفتهٔ پریدیگر (۲۰۱۰) آموزش حساب دورهٔ ابتدایی با تمرکز بر تساوی‌های نامتقارن مثل ۱=۳-۶÷۲۴ به معنی عملیاتیِ علامت تساوی تأکید می‌کند و در نتیجه، کاربرد متقارن و رابطه‌ای علامت تساوی در جبر دورهٔ راهنمایی و دبیرستان با مشکل مواجه می‌شود.

کارپنتر، فرانک و لوی (۲۰۰۳) نیز با تحقیقی که بر روی دانش‌آموزان پایهٔ اول تا ششم انجام دادند، به این نتیجه رسیدند که حتی با بالارفتن پایهٔ تحصیلی دانش‌آموزان، باز هم در حل سؤال ۵+ --- = ۴ + ۸ با مشکل مواجه می‌شوند و عدد ۱۲ یا ۱۷ را در جای خالی قرار می‌دهند.

برای انجام بهتر تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و آگاهی از چگونگی و چرایی درک دانش‌آموزان از علامت تساوی، مصاحبه‌ای با دو نفر از دانش‌آموزان که به سؤال ۱ پاسخ اشتباه دادند، صورت گرفت:

پژوهشگر: چرا در قسمت د عدد ۲۰ را قرار دادی؟

دانش‌آموز ۱: چون ۱۰۰ تقسیم بر ۵ می‌شود ۲۰.

پژوهشگر: به‌نظر تو علامت تساوی به چه معنی است؟

دانش‌آموز ۱: علامت تساوی مثل این می‌ماند که دو چیز را جمع کنی و در نهایت جواب را بنویسی یا دو چیز را از هم کم کنی و بعد از علامت تساوی جوابش را بنویسی. تساوی، برابر بودن را نشان می‌دهد.

پژوهشگر: در سؤال ۱، قسمت ب، عدد ۵ را قرار دادی. توضیح بده که چطور به این عدد رسیدی.

دانش‌آموز۲: چون سؤال می‌گوید ۹ منهای ۵ برابر است با یک چیزی منهای ۹. من گفتم، چون برابرند پس همان چیزی که در طرف چپ است باید در طرف راست قرار بگیرد، به‌همین دلیل نوشتم ۹ منهای ۵ مساوی است با ۵ منهای ۹.

همان‌طور که از مصاحبه‌ها مشخص است، این دو دانش‌آموز هر کدام درک خاصی از علامت تساوی دارند. دانش‌آموز ۱ مانند حساب دورهٔ ابتدایی علامت تساوی را نمادی برای رسیدن به جواب می‌داند و به عملیاتی که بعد از جای خالی قرار گرفته است، توجهی نشان نمی‌دهد.

دانش‌آموز ۲ نیز به بیش‌تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارد و چون می‌داند علامت تساوی ویژگی تقارنی دارد از این خاصیت برای پاسخ به این سؤال استفاده می‌کند.

با توجه به نتایجی که به‌دست آمد، به‌نظر می‌رسد پیشنهاد محققان، مبنی بر آموزش زود هنگام جبر یعنی از دوران ابتدایی پیشنهاد منطقی‌ای‌باشد.

بنابراین به‌دلیل این‌که علامت تساوی پل ارتباطی بین حساب و جبر است، توجه ویژه به یادگیری کامل این مفهوم در دوران ابتدایی توصیه می‌شود.

سؤال۲. عبارت ریاضی زیر درست است یا نادرست؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵+۹ =۱۴÷۲ =۷×۳ =۲۱

حدود ۶۳ درصد (۲۸ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست و حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۳ درصد (۱ نفر) نیز پاسخ نداند.

از بین پاسخ‌های متفاوتی که به این سؤال داده شده است، دو پاسخ، نظر پژوهشگر را بیشتر به خود جلب کرد:

۱. درست است؛ چون ابتدا ضرب یا تقسیم هرکدام را، که از سمت چپ اولویت دارد، باید انجام داد، سپس جمع را؛

۲. درست است؛ چون هرکدام از عبارت‌ها مضربی از ۷ هستند.

این پاسخ‌ها در واقع تأیید گفتهٔ آیزنر (۲۰۰۰) است که می‌گوید: «دانش‌آموزان، هم بیشتر و هم کمتر از آنچه که به آن‌ها تدریس می‌شود، می‌آموزند».

فهم علامت تساوی به‌عنوان یک نماد تک‌جهتی کاملاً مرتبط با درک آن به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی است. هر دو مفهوم به‌دنبال محاسبهٔ کمیت طرف چپ علامت تساوی هستند (اِسیین و سِتتی، ۲۰۰۶).

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

برای مثال، بِر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌یِرن (۱۹۸۱) دریافتند که دانش‌آموزان از پذیرش این‌که عبارت ریاضی ۴+۲= ---، از نظر ریاضی صحیح است، خودداری می‌کنند و اظهار می‌کنند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قراردارد. از نظر این دانش‌آموزان فقط وقتی این عبارت ریاضی صحیح است که به‌شکل --- = ۴+۲ نوشته شود و بتوان این عبارت را از چپ به راست خواند.

همچنین مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) بیان کردند که دانش‌آموزان وقتی با جملات عددی ناآشنا مواجه می‌شوند، که متفاوت از شکل قراردادی a ± b=c هستند، در تفسیر علامت تساوی به‌عنوان نماد تعادلی با مشکل روبه‌رو می‌شوند.

پژوهشگر برای اینکه از چگونگی و چرایی پاسخ به این سؤال آگاه شود، از یکی از دانش‌آموزان در مورد نحوهٔ پاسخگویی به این سؤال مصاحبه به‌عمل آورد:

پژوهشگر: تو در سؤال ۲ بیان کردی که این عبارت، صحیح است. چطور به این نتیجه رسیدی؟

دانش‌آموز: این عبارت، از نظر ریاضی درست است. چون ۹+۵ برابر است با ۱۴ و ۱۴ تقسیم بر ۲ برابر است با ۷، ۷ هم ضرب در ۳ می‌شود، ۲۱. که جواب آن هم درست است.

بعد از گفت‌وگو با این دانش‌آموز، برای پژوهشگر مشخص شد که نحوهٔ آموزش گذشتهٔ دانش‌آموزان در حساب می‌تواند یکی از دلایل این اشتباه باشد. به‌همین دلیل است که استانداردهای انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰) پیشنهاد می‌کند که تفکر جبری باید در اوایل دورهٔ ابتدایی گسترش یابد.

با توجه به مراحل درک تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) در نظرگرفته‌اند، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان به مرحلهٔ اول درک یعنی محرکی برای پاسخ دست یافته‌اند.

در مورد این سؤال حتی به ویژگی تقارنی علامت تساوی (مرحلهٔ دوم درک) نیز توجه نکرده‌اند. همین موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در محاسبات می‌توانند به‌خوبی عمل کنند اما درک ناقص آن‌ها از تساوی باعث می‌شود که این عبارت را از نظر ریاضی درست بدانند.

نتایجی که از تجزیه‌وتحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایجی که اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) به‌دست‌آوردند، سازگار است. به این معنی که هنوز در پایهٔ اول متوسطه (نهم) دانش‌آموزانی هستند که درک کاملی از علامت تساوی ندارند و به این علامت به‌صورت نمادی تک‌جهتی نگاه می‌کنند و به این موضوع توجه نمی‌کنند که علامت تساوی باید یک رابطهٔ تعادلی را نشان دهد، بنابراین عدد ۱۴ نمی‌تواند با ۲۱ برابر باشد.

سؤال ۳. در یک ظرف میوه ۵ عدد سیب قرار دارد. اگر یک سیب دیگر به سیب‌ها اضافه شود، تعداد سیب‌های ظرف، ۶تا می‌شود. اگر باز هم دو سیب دیگر در ظرف گذاشته شود، تعداد سیب‌های داخل ظرف میوه چندتا می‌شود؟ با نوشتن راه‌حل توضیح دهید.

این سؤال در ابتدا، برای دانش‌آموزان، ساده به‌نظر می‌رسید و آن‌ها بلافاصله جواب را اعلام می‌کردند، اما زمانی که از آن‌ها خواسته شد که راه‌حل سادهٔ آن را بنویسند، ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها پاسخ را به‌صورت ۸=۲+۶=۱+۵ نوشتند که به عقیدهٔ اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را نمادی **تک‌جهتی** می‌بینند، یعنی نمادی که از چپ به راست برای آن‌ها معنی دارد.

برای پژوهشگر جالب بود که هشت نفر از دانش‌آموزانی که به سؤال ۲ پاسخ نادرست دادند، راه حل سؤال ۳ را درست نوشتند و پنج نفر از آن‌ها که به سؤال ۲ پاسخ صحیح دادند برای سؤال ۳ پاسخ ۸=۲+۶=۱+۵ را نوشته بودند. شش نفر هم هر دو سؤال ۲ و ۳ را اشتباه جواب دادند.

در مجموع، ۶۸ درصد (۳۰ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۷ درصد (۱۲ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز به‌کلی پاسخ ندادند.

برای اینکه پژوهشگر در مورد نحوهٔ تفکر دانش‌آموزان راجع به این سؤال آگاه شود، با یکی از دانش‌آموزان که به این سؤال پاسخ نادرست داده بود مصاحبه‌ای انجام داد.

پژوهشگر: می‌توانی در مورد راه‌حلی که نوشته‌ای، توضیحی بدهی؟

دانش‌آموز: در ابتدا به ۵ سیب خود، ۱ سیب دیگر اضافه می‌کنیم تا تعداد سیب‌ها به ۶ برسد. اگر باز هم ۲ سیب دیگر به مجموع سیب‌های خود اضافه کنیم، حاصلِ ما به ۸ می‌رسد.

این خطا در نمادگذاری، ناشی از ترجمهٔ عبارت کلامی به جملهٔ ریاضی است (لیون، ۲۰۰۳، نقل شده در اِسیین و سِتتی، ۲۰۰۶)

کی‌یِرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی علامت تساوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسئله و پاسخ مسئله را از هم جدا می‌کند. از نظر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتی به رابطه‌ای، قانون قراردادی «جملات هر دو طرف معادله را بخوان» را توجیه می‌کند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

توضیح شفاهی این دانش‌آموز صحیح اما ترجمه‌اش به جملهٔ ریاضی نوشتاری نادرست است.

شلیمن، کاراهر، بریزولا و جونز (۱۹۹۸) و فاکنر و همکاران (۱۹۹۹) نیز مشاهده کردند که دانش‌آموزان زمانی‌که درگیر زمینه‌های فیزیکی واقعی یا مسائل کلامی شفاهی می‌شوند، درک صحیحی از تساوی نشان می‌دهند.

در مورد سؤال ۳، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان علامت تساوی را برای بیان تعادل بین دو عبارت به‌کار نمی‌برند، بلکه از آن به‌عنوان یک دستور برای محاسبهٔ مقدار عبارت قبلی استفاده می‌کنند.

در واقع، نتیجه‌ای که از این سؤال به‌دست آمد، تأییدی بر گفته اَسکیو و ویلیام (۱۹۹۵- نقل شده در لی، ۲۰۰۶) است که می‌گویند: «به‌نظر می‌رسد، آموزش به روشی که مانع ایجاد هر نوع بدفهمی در دانش‌آموزان شود، ممکن نیست. ما باید بپذیریم که دانش‌آموزان برخی تعمیم‌ها را که صحیح نیستند می‌سازند. بسیاری از این بدفهمی‌ها پنهان می‌ماند تا اینکه معلم با تلاش‌های ویژه‌ای آن‌ها را آشکار کند. »

شاید به‌همین دلیل است که یکی از نگرانی‌های اصلی معلمان ریاضی، اصلاح یادگیری و درک دانش‌آموزان است (هال، ؟). تحلیل خطا می‌تواند ابزار مفیدی در این فرایند باشد. همان‌طور که لابینوویچ (۱۹۹۳، نقل شده در هال، ؟) بیان می‌کند «خطاهای کودک در واقع، مراحل طبیعی یادگیری هستند».

نتیجهٔ به‌دست آمده از این سؤال، مشخص کرد که با توجه به معانی متفاوتی که پریدیگر (۲۰۱۰) برای علامت تساوی در نظرگرفته است، معنی عملیاتی این نماد باز هم بیشتر مورد توجه دانش‌آموزان است و به‌جز تعداد کمی از آن‌ها، به این علامت به‌عنوان یک رابطهٔ تعادلی نگاه نمی‌کنند.

همچنین، با توجه به مراحل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) برای علامت تساوی در نظرگرفته‌اند، مشخص می‌شود که، با اینکه دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور شفاهی به جواب درست برسند، اما به‌دلیل اینکه به مرحله سوم درک تساوی، یعنی بیان تعادلی، نرسیده‌اند، قادر نیستند علامت تساوی را به‌درستی تفسیر کنند.

نتایجی که از تحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایج تحقیق اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) سازگار است، به این معنی که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به این سؤال نشان دادند که علامت تساوی را نه‌تنها به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند، بلکه آن را به‌عنوان نمادی تک‌جهتی تفسیر می‌کنند.

سؤال ۴. معادلهٔ زیر را حل کنید. هر مرحله از راه‌حل خود را بنویسید و بیان کنید در هر مرحله، چه کاری انجام داده‌اید.

۴x+۴ = ۴x+۱

این سؤال برای روشن شدن این موضوع طراحی شد که آیا دانش‌آموزان، با توجه به تصوری که از مفهوم تساوی دارند به این نتیجه می‌رسند که معادله جواب ندارد؟ و یا اینکه براساس رویه‌هایی که برای حل معادله یاد گرفته‌اند، معادله را حل می‌کنند و به جواب می‌رسند.

تنها حدود ۳۸ درصد (۱۷ نفر) به این سؤال پاسخ درست دادند، که البته بعد از انجام دادن رویه‌های حل معادله (معلوم و مجهول کردن) به عبارت ۳- = ۰ رسیدند و در نهایت به این نتیجه رسیدند که معادله جواب ندارد.

حدود ۵۷ درصد (۲۵ نفر) معادله را حل کردند و به پاسخ نادرست x = -۳ رسیدند و حدود ۵ درصد (۲ نفر) به این سؤال پاسخی ندادند.

به‌نظر می‌رسد، حفظ‌کردن قوانینِ بدون دلیل آن‌قدر در ذهن دانش‌آموزان رسوخ کرده‌است که حتی دانش‌آموزانی که به سؤالات قبلی پاسخ درست دادند، نتوانستند به این سؤال پاسخ صحیح دهند.

در مجموع، ۲۰ درصد (۹ نفر) دانش‌آموزان به تمامی سؤالات پاسخ صحیح دادند و بقیه آن‌ها حداقل یک پاسخ نادرست در آزمون داشتند.

تحقیقات متعدد نشان می‌دهد که تفسیر دانش‌آموزان از علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، ناشی از روش آموزشی سال‌های قبل است (بِر و همکاران، ۱۹۸۰؛ فرودنتال، ۱۹۸۳؛ کی‌یِرِن، ۱۹۸۰؛ استیسی و مک گریگور، ۱۹۹۷؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳- نقل شده در اسیین و ستتی، ۲۰۰۶.)

در پایه‌های بالاتر تحصیلی، این تصور همچنان باقی می‌ماند و حتی از طریق آموزش دستورالعمل‌ها در جبر تقویت می‌شود: آموزش قوانین (بدون دلیل) برای کار با عبارات جبری منجر به درک محدود می‌شود. برای مثال، پژوهشگر، از یکی از دانش‌آموزانی که به این سؤال

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

پاسخ نادرست داده بود، مصاحبه به‌عمل آورد:

پژوهشگر: توضیح بده این معادله را چگونه حل کردی؟

دانش‌آموز: ابتدا باید تمام جملات مشابه را به یک طرف منتقل کنیم، بنابراین تمام اعداد را به یک طرف و تمام xها را به‌طرف دیگر می‌بریم، سپس جملات متشابه را با هم می‌گیریم. یک ۴x در این طرف داریم، برای آوردن ۴x دیگر از طرف دیگر باید علامت آن را عوض کنیم، که در اینجا علامتش منفی می‌شود، یعنی ۴x-۴x.

عدد ۴ هم باید در کنار عدد ۱ قرار بگیرد، پس آن هم منفی می‌شود. یعنی بعد از معلوم مجهول کردن، معادله را حل می‌کنیم.

پاسخ دانش‌آموز به این سؤال نشان می‌دهد، که درک او از علامت تساوی، ابزاری است.

هیچ یک از دانش‌آموزان، روش حل خود را طوری توضیح نداد که به نقش مهم علامت تساوی در معادله اشاره کند. هیچ‌یک حتی توضیح نداد که وقتی یک کمیت به‌طرف دیگر برده می‌شود، چگونه علامتش تغییر می‌کند، یا اضافه کردن مقادیر یکسان به دو طرف معادله، برای برابر نگه داشتن دو طرف، ضروری است. آن‌ها فقط «قوانین بدون دلیل» را می‌دانند. (اسکمپ، ۱۹۷۶- نقل شده در اِسیین وِستتی، ۲۰۰۶)

اولیویر (۱۹۹۶) نیز بحث می‌کند که «یادگیری جدیدِ نادرست، اساساً نتیجه یادگیری درست گذشته است».

البته نمونه‌های بسیاری وجود دارد که با تفسیر علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، پاسخ صحیح را فراهم می‌آورد.

کی‌یِرِن (۱۹۸۱) نیز مشاهده کرد که حتی دانش‌آموزانی که یک روش آموزشی مناسب را دریافت کرده‌اند، که در آن روش بر علامت تساوی به‌عنوان یک رابطه تأکید می‌شود، هنوز نمی‌توانند مفهوم صحیح علامت تساوی را بپذیرند. چنین بدفهمی‌هایی در دبیرستان و دانشگاه نیز وجود دارد. (کلمنت، ۱۹۸۲- به نقل از لی، ۲۰۰۶)

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال، تأییدی بر یافته‌های مک‌نیل و آلی بالی (۲۰۰۵) است، که می‌گویند: درجهٔ پیوستگی دانش‌آموزان به الگوی عملیاتیِ علامت تساوی اساساً مرتبط است با اینکه چگونه آن‌ها یک روش صحیح را برای حل معادلات تولید می‌کنند.

در مورد سؤال ۴، دانش‌آموزان با استفاده از معنی رابطه‌ایِ علامت تساوی و بدون اینکه معادله را حل کنند، می‌توانستند از دو طرف معادله دو جملهٔ یکسان ۴x را حذف کنند و به این نتیجه برسند که معادله جواب ندارد. در حالی‌که چون قوانین معادله را بدون دلیل یاد گرفته‌اند، ابتدا معادله را حل می‌کنند و سپس بیان می‌کنند که معادله غلط است و جواب ندارد.

نتایج به‌دست‌آمده با نتایج تحقیقات پیشین سازگار است، به این معنی که:

اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) مطرح کردند که دانش‌آموزان نتوانستند، معادله را، بدون استفاده از قوانین حل آن، حل کنند و به معنی رابطه‌ای علامت تساوی توجهی نشان ندادند.

متیوز و همکاران (۲۰۱۲) نیز بیان کردند که، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

با تفسیری که پریدیگر (۲۰۱۰) از علامت تساوی دارد، در این سؤال دانش‌آموزان به معنی عملیاتی علامت تساوی توجه دارند.

با توجه به مراحل تکامل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) از علامت تساوی بیان کرده‌اند، نتیجه تحلیل این سؤال نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در زمان حل معادله به مرحلهٔ اول و دوم درک رسیده‌اند اما به این نکته توجه ندارند که معادله به نوعی بیان یک رابطهٔ تعادلی است.

برخی از محققان برای یادگیری بهترِ معادله ایدهٔ استفاده از ترازوی متعادل را پیشنهاد می‌کنند، که بازنمایی یک رابطهٔ معادل بین دو کمیت است. اما اِسیین و سِتتی (۲۰۰۶) عقیده دارند که چگونه می‌توان با استفاده از ترازوی متعادل $\sin ۳۰ = ۰/۵$ یا $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲..$ را نشان داد. یا حتی این موضوع، مشکل‌تر می‌شود، وقتی که موضوع بحث وارد جبر می‌شود.

بحث و نتیجه گیری

تجزیه‌وتحلیل داده‌های تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان ابزارهای لازم را برای حل معادله، که همان قوانین حل معادله است، در اختیار دارند. اما به‌دلیل اینکه درک درستی از علامت تساوی ندارند قادر نیستند با کمک گرفتن از معنی رابطه‌ایِ علامت

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

تساوی به حل معادله بپردازند.

در واقع، بیشـــترین تفســـیری که دانش‌آموزان از علامت تساوی دارند، این است که آن را نمادی برای **انجام دادن چیزی** یا **یافتن یک پاســخ** می‌دانند. از این نظر، علامت تساوی ابزاری برای نوشتن جواب است.

مفهوم دیگری که در این مطالعه مشــخص شد، درک علامت تســاوی به‌عنوان نمــادی **تک‌جهتی** بود، که این نوع درک در ســؤال‌های ۲ و ۳ مشخص شد. یعنی این نماد برای اکثر دانش‌آموزان از چپ به راست معنی دارد.

دانش‌آمــوزان پایهٔ اول متوســطه (نهم) در مورد مفهــوم علامت تســاوی با بدفهمی‌هــای زیر مواجه هستند.

۱. به علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای اجرای یک عملیات نــگاه می‌کنند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی ندارند؛

۲. بــه بیش‌تعمیمیِ خاصیــت جابه‌جایی تمایل دارند؛

۳. علامت تساوی را نمادی تک‌جهتی می‌بینند، که عملیات را از چپ به راست اجرا می‌کند؛

۴. بدفهمی دیگری که مشــخص شــد، در مورد ترجمهٔ یک مســئله کلامی به زبان ریاضی بود. یعنی دانش‌آموزان به‌طور شــفاهی قادرند راه‌حل مسئله را بیان کنند، اما هنگامی‌که از آن‌ها خواســته می‌شود، راه‌حل را به زبان ریاضی بنویســند، علامت تساوی را برای ارتبــاط و اتصال بین مراحل حل ســؤال به‌کار می‌برند. علی‌رغم اینکه در ابتدا، دانش‌آموزان به ساده بودن سؤال اشاره کردند، اما ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها راه‌حل را به‌صورت ۸=۲+۶=۱+۵ نوشتند.

۵. بیشــترین اشتباه در حل معادله، این است که دانش‌آمــوزان معادله و نماد تســاوی را به منزلهٔ یک نمــاد برای انجام چند عملیات ریاضی و ســاده‌کردن می‌بینند و با دیــدن آن بدون حتی لحظه‌ای درنگ، از اطلاعاتشــان در مورد نوع معادلــه کمک گرفته و شــروع به حل می‌کنند و حل معادله را مستلزم طی یک ســری مراحل می‌داننــد و در میان راه‌حل خود، به مفهوم آنچه می‌نویســند، کمتر توجه دارند و فقط سعی می‌کنند از یک مرحله، مرحلهٔ دیگری را نتیجه بگیرند (برهمند، ۱۳۸۶). این نوع اشــتباه در بررسی سؤال ۴ مشخص شد.

برخی از فعالیت‌های آموزشــی کــه می‌توانند به یادگیری بهتر مفهوم تســاوی کمک کنند، عبارت‌اند از:

۱. روش جایگزینــی: استیســی و مک‌گریگــور (۱۹۹۹) پیشنهاد کردند که دانش‌آموزان باید تشویق شــوند به روش جایگزینی، جواب‌هایشان را بنویسند. بــرای مثال، به‌جای ۱۵=۷+۸، بنویســند ۹=۶+۷+۸، ۸+۷=۳×۵. این فعالیت نه‌تنها منجر به درک تساوی می‌شــود، بلکه به دانش‌آموزان می‌فهماند که هر عدد ترکیبی از اعداد دیگر است.

۲. عبارت‌هــای صحیح/ غلط: بــه این معنی که از دانش‌آموزان خواســته شود، درســتی یا نادرستی عبارت‌هایــی ماننــد، ۴۱=۱۴+۲۷، ۲×۵=۳÷۱۵، ۲-۵=۹-۱۴ را مشــخص کنند. این فعالیت، به معلم فرصتی می‌دهد تا بدفهمی‌هــای دانش‌آموزان مانندِ «بعد از نماد تساوی، جواب می‌آید» را ببینند.

پی‌نوشت‌ها

1. Saenz-Ludlow
2. Walgamuth
3. Prediger
4. Winter
5. Wolters
6. Theis
7. McNeil
8. Cortes

منابع

1. Ben-zeev, T. (1996). **When erroneous mathematical thinking is just as "correct"**: the oxymoron of rational errors. IN R. J. Sternberg & T. Ben-zeev (Eds). The Nature of Mathematical Thinking, (55-79). LEA Publishers.

2. Carpenter, T. P. , Franke, M. L. , & Levi, L. (2003). **Thinking mathematically**: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann.

3. Falkner, K. & Levi, L. & Carpenter, Th. (1999). **Children's understanding of equality: A foundation for Algebra**. Teaching children mathematics. (pp 232-236).

4. Foster, D. (2007). **Making Meaning in Algebra Examining Students'Understandings**

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

and Misconceptions. Assessing Mathematical Proficiency
MSRI Publications, Volume 53, 2007,(pp. 163-176).
5. Griffin, P. & Hirst, Sh. & et al. (1989). **Project Mathematics update: preparing to teach equations**. In centre for Mathematics Education, The open university.
6. Hall, R. (). **An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations**. (pp. 7-8).
7. Knuth, E. , & Stephens, A. , & McNeil, N. , & Alibali, M. (2006). **Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equtions**. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37, No. 4, (pp. 297-312).
8. LI, X. (2006). **Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations, and Functions**. Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY. (pp. 33-36).
9. LIoyd, M. G. & Pitts Bannister, R. V. (2010). **Secondary School Mathematics Curriculum Materials as Tools for Teachers' Learning**. In B. J. Reys; & R. E. Reys; & R. Rubenstein (Eds.), Mathematics Curriculum: Issues, Trends, and Future Directions: Seventy-second Yearbook, (pp. 327-331). Reston,VA, NCTM.
10. Matthews, P. , & Rittle-Johnson, B. , & McEldoon, K. , & Taylor, R. (2012). **Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality**. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 43, No. 3, (pp. 220-254).
11. Molina, M. , Ambrose, R. & Castro, E. (2004). **In the transition from arithmetic to algebra:misconceptions of the equal sign**. Presented at the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, July 14-18, 2004.
12. Molina, M. & Ambrose, R. (2006). **Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign**. Teaching Children Mathematics Vol. 13, No. 2, (pp. 111-117).
13. Molina, M. & Ambrose, R. (2008). **From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking**. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 30, No. 1, (pp. 61-80).
14. Oksuz, C. (2001). **Children's understanding of equality and the equal symbol**. In Adnan Menderes university.
15. Prediger, S. (2010). **How to develop mathematics for teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign**. J Math Teacher Edu, Vol. 13, (pp. 73–93). Published online: 27August 2009, Springer Science+Business Media B. V. 2009.
16. Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). **Third graders' interpretation of equality and the equal symbol**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 35, (pp. 153-187).
17. Skemp, R. R. (1989). **Mathematics in the primary school**. London: Rutledge.

۱۸. آیزنر، الیوت دبلیو. (۲۰۰۰). **آنان که گذشته را نادیده می‌گیرند...** ترجمه: سپیده چمن‌آرا و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۹، شماره (۶۹)، صص ۴ تا ۱۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۱۹. برهمند، علی. (۱۳۸۶). **فهم دانش‌آموزان از معادلهٔ درجهٔ اول**. رسالهٔ منتشرنشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی.
۲۰. بن زیو، تالیا. (۱۹۹۶). **منشأ خطاهای دانش‌آموزان**. ترجمه: سپیده چمن‌آرا (۱۳۹۰). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۹، شمارهٔ (۱۰۶)، صص ۱۱ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۱. بیشاب، آلن- جی. (۱۹۹۸). **آموزش ریاضی و فرهنگ**. ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور و زهرا گویا (۱۳۷۶). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شمارهٔ (۵۰)، صص ۳ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۲. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۳). **تدریس ریاضی: انتقال مفاهیم یا کمک به کشف آن‌ها؟!**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شمارهٔ (۷۸)، صص ۷ تا ۱۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۳. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). **آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت وسازگرایی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۳، شمارهٔ (۸۱)، صص ۲۱ تا ۳۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شمارهٔ (۴۶)، صص ۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۲۵. حسام، عبدالله. (۱۳۸۳). **شهود، ریاضیات و آموزش**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شمارهٔ (۷۸)، صص ۱۳ تا ۲۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

آموزش رهیافت‌های حل مسئله

بهناز ساویزی
دکترای آموزش ریاضی و دبیر ریاضی منطقه ۱ تهران
مقالهٔ ارائه شده در سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

چکیده

این نوشتار، مروری بر نظریات و نتایج تحقیقات مختلف در زمینهٔ آموزش رهیافت‌های حل مسئله است. هدف مقاله رد یا تأیید آموزش رهیافت‌ها نیست بلکه هدف آن بررسی موضوع از زوایای مختلف و تأمل عمیق‌تر بر چرایی و چگونگی آموزش رهیافت‌هاست. البته در تهیهٔ این نوشتار فصل اول کتاب ریاضی هفتم مورد نظر بوده و نظر نویسنده در مورد این فصل با توجه به تحقیقات و نظریات موجود در زمینهٔ آموزش رهیافت‌ها بیان شده است.

کلیدواژه‌ها: رهیافت، حل مسئله، آموزش

مقدمه

حل مسئله از ارکان مهم آموزش ریاضیات است. بیانیهٔ عمل NCTM در آغاز دههٔ هشتاد میلادی، حل مسئله را هسته اصلی آموزش ریاضیات معرفی نمود. در بخشی از این بیانیه آمده بود: «... تلاش برای آموزش تمام مهارت‌ها و محتوای ریاضیات، پیش از [آموزش] حل مسئله کارایی چندانی ندارد... مشکل [دانش‌آموزان] در محاسبات نباید مانعی برای یادگیری راهبردهای حل مسئله باشد...» (کلاین، ۲۰۰۳). حل مسئله یکی از پنج استاندارد فرایند NCTM، یکی از استانداردهای هشت‌گانهٔ CCSSI[1]، محور اصلی برنامه درسی ریاضیات در سنگاپور و یکی از موضوعات مورد تأکید برنامه درسی چین است. (دو کشور اخیر از موفق‌ترین‌ها در عرصهٔ آموزش ریاضی مدرسه‌ای می‌باشند. (برون، ۲۰۱۳) (دبلیو، ۲۰۱۲) (کار، مترجم: غلام‌آزاد). رویکردهای مختلفی برای حضور «حل مسئله» در برنامهٔ درسی ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به آموزش حل مسئله، آموزش ریاضی به‌منظور حل مسئله و آموزش از طریق حل مسئله اشاره نمود. این سه رویکرد با سه مقطع تاریخی در آموزش، یعنی دورهٔ تدریس محور[2] در اوایل قرن بیستم، دورهٔ پردازش اطلاعات[3] در اواسط قرن بیستم و دورهٔ ساخت‌وسازگرایی و محوریت فعالیت دانش‌آموز از اواخر قرن بیستم تاکنون مطابقت دارد. آموزش رهیافت‌های حل مسئله در عصر طلایی خود، یعنی اواسط قرن بیستم، مصادف بود با دورهٔ علاقه‌مندی متخصصان هوش مصنوعی به اینکه ماشین‌ها بتوانند مسئله حل کنند، بنابراین استخراج اِلمان‌ها و رهیافت‌های کلی حل مسئله، مستقل از محتوا و نوع مسئله و به‌عنوان استراتژی‌های قابل تعمیم مورد توجه بود. (پِرکینس و سالمون، ۱۹۸۹)

در تحقیقات اخیر آموزش از طریق حل مسئله را بیش از رویکردهای دیگر مورد تأکید قرار می‌دهند(کای و لِستر، ۲۰۱۰)، (تاپالین، مترجم: فروزبخش، فیروزه، ۱۳۹۲). آموزش حل مسئله به‌معنای آموزش استراتژی‌ها و رهیافت‌هایی است که منجر به ایجاد مهارت حل مسئلهٔ ریاضی در دانش‌آموز می‌گردد.

رهیافت چیست؟

پولیا (۱۹۴۵) از شناخته‌شده‌ترین افرادی است که فرایند حل مسئله را به شکلی نظام‌مند فرموله و تبیین کرد (پولیا ۱۹۴۵). وی فرایند حل مسئله را در چهار گام کلی فهم مسئله، طرح نقشه، اجرای نقشه و بازگشت به عقب (به پس نگریستن) مدل‌سازی نمود. البته برای هر گام استراتژی‌هایی نیز مطرح می‌شد. جان دیویی[۴] (۱۹۳۳) و کرولیک[۵] و رادنیک[۶] (۱۹۸۰) نیز به‌نوبهٔ خود مدل‌هایی برای حل مسئله ارائه داده‌اند که در جدول ۱ آورده شده است (کارسون ۲۰۰۷).

پولیا رهیافت‌ها را همان راهبردهایی معرفی می‌کند که ریاضی‌دانان و مسئله‌حل‌کن‌های ماهر برای حل مسائل ریاضی از آن‌ها بهره می‌برند (پولیا ۱۹۴۵). شونفیلد رهیافت‌های حل مسئله را راهبردهایی می‌داند که به دانش‌آموز کمک می‌کنند تا صورت‌مسئله را بفهمد و حل کند (۱۹۸۵ شونفیلد).

برونر (۱۹۶۰) رهیافت‌ها را روش‌ها و راهبردهایی برای آسان‌تر شدن حل مسئله تعریف می‌کند (سیو، ۲۰۰۵).

گام‌های حل مسئله	جان دیویی (۱۹۳۳)	جرج پولیا (۱۹۴۵)	کرولیک و رادنیک (۱۹۸۸)
	با مسئله مواجه شدن	درک مسئله	خواندن
	تشخیص و تعریف مسئله	طرح نقشه	جست‌وجو کردن
	فهرست کردن راه‌حل‌های ممکن	اجرای نقشه	انتخاب استراتژی
	حدس زدن روابط و نتیجهٔ راه‌حل‌ها	بازپس‌نگریستن (به عقب بازگشتن)	حل کردن
	آزمون نتیجه		مرور و توسعهٔ حل

دیدگاه‌های مختلف در رابطه با تدریس رهیافت‌های حل مسئله

پولیا اولین ارائه‌کنندهٔ رهیافت‌های حل مسئله است؛ با وجود این هیچ‌گاه ادعایی نکرد که می‌توان این رهیافت‌ها را آموزش داد (پولیا ۱۹۴۵ در شونفیلد ۱۹۸۳). شونفیلد (۲۰۱۲) بیان می‌کند: «پولیا رهیافت‌ها را شرح داد، من فهمیدم و از آن‌ها استفاده کردم! در آن وقت تأسف می‌خوردم که چرا پیش‌تر آن‌ها را آموزش ندیده بودم. درسی که گرفتم این بود که وقتی افراد می‌خواهند راهبردهای کتاب پولیا را آموزش دهند دانش‌آموزان استفادهٔ مؤثر از آن‌ها را یاد نمی‌گیرند. اگرچه این ناامیدکننده بود ولی آموزش ریاضی را با چالشی مفید و جدید مواجه ساخت...» (شونفیلد ICME 2012). شونفیلد نتایج تحقیقات تجربی (آزمایشگاهی) چند سالهٔ خود در حل مسئله، چگونگی حل مسئلهٔ متخصصان و نوآموزان و عناصر حل مسئله را در کتاب «حل مسئلهٔ ریاضی» جمع‌بندی کرد (شونفیلد ۱۹۸۵). وی معتقد است آموزش تعداد محدودی رهیافت حل مسئله تحت شرایطی معلوم و کنترل شده می‌تواند منجر به بهبود حل مسئله در تازه‌کاران شود ولی به‌دلیل پیچیدگی استفاده از رهیافت‌ها در عمل این موضوع قابل تعمیم به کل نیست. (شونفیلد ۱۹۸۳)

لستر[۷] (۲۰۱۰) بیان می‌کند که هیچ‌یک از تحقیقات انجام شده تقویت مهارت حل مسئله در دانش‌آموزان را از طریق یک برنامهٔ درسی که شامل آموزش مفاهیم و رویّه‌ها، طرح مسئله و آموزش رهیافت‌های حل مسئله باشد به‌طور قطعی تأیید نمی‌کند (لستر ۲۰۱۰) . از این‌رو امروزه تحقیقات کمتری دربارهٔ این موضوع انجام می‌شود (لستر ۲۰۱۰). لستر معتقد است اگر انتظار داریم دانش‌آموزان مسئله‌حل‌کن‌های ماهری شوند ناچاریم نگرشمان در موضوع حل مسئله را بدین‌گونه تغییر دهیم که «مسئله عاملی خارجی و تزریقی در برنامهٔ درسی ریاضی نیست که برای آموزش حل آن ناگزیر از تدریس رهیافت‌ها و استراتژی‌ها باشیم. بلکه برنامه درسی ریاضی تلفیقی از مسئله و حل مسئله است. آموزش، از طریق حل مسئله و مفاهیم، از دل حل مسئله بیرون کشیده شده و آموخته می‌شود» (لستر ۲۰۱۰). البته هر نوع تمرین و تکلیفی «مسئله» محسوب نمی‌شود. مسائل مفید برای برنامهٔ درسی ده ویژگی دارند که لاپان[۸] و فیلیپس[۹] (۱۹۹۸) آن‌ها را بیان کرده‌اند که از این میان چهار ویژگی برای مسائل کلاس درس ضروری است. این چهار ویژگی عبارتند از:

۱. مسئله باید حاوی ریاضیات مهم و مفید باشد؛

۲. حل مسئلهٔ مطرح شده باید نیازمند تفکر سطح بالا باشد.

۳. مسئله باید در رشد مفهومی دانش‌آموز نقش داشته باشد.

۴. مسئله باید طوری باشد تا معلم به میزان یادگیری مفاهیم و دشواری‌های دانش‌آموزان طی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

حل آن نظارت و کنترل داشته باشد (لاپان و فیلیپس ۱۹۹۸ به نقل از لستر ۲۰۱۰).

در آمـوزش از طریق حل مسـئله دانش‌آموز آزاد اسـت هر نوع رویکردی را که مایل است انتخاب کند، هر نوع دانشـی را که می‌دانـد فراخواند و نظرات خود را به هر شـیوه‌ای که با آن راحت‌تر است ارزیابی نماید (لستر ۲۰۱۰). دانش‌آموز طی چالش برای حل مسئله، شـرح و ارزیابی اندیشـهٔ خود و نیز همکلاسی‌هایش، موفق می‌شود اندیشهٔ خود را سازماندهی کند و صاحب «دانستن» خود باشـد (لمپرت ۱۹۹۰ به نقل از لستر ۲۰۱۰).

کارسون[10] (۲۰۰۷) موضع مخالفی در قبال تئوری آموزش مهارت حل مسـئله اتخاذ می‌کند (کارسـون ۲۰۰۷). محوریت حل مسئله در استانداردهای نوین برنامه درسی ریاضی به شکل ضمنی بدین‌معناست که رهیافت و اسـتراتژی‌های حل مسئله مقدم بر تسلط بر مفاهیم و دانش‌ها هستند (مراجعه کنید به بخشی از بیانیـهٔ عمـل NCTM کـه در مقدمه آورده شـده است). کارسـون بیان می‌کند که تئوری حل مسئله، رهیافت‌های بی‌محتـوا[11] را مقدم بر دانش محتوایی و مفهومی می‌داند (کارسـون ۲۰۰۷). وی مهارت حل مسئله را بدون دانش محتوایی و مفهومی لازم و اولیه ممکن نمی‌داند. تناقض موجـود در ادبیات تحقیقات حل مسئله آنجا آشکار می‌گردد که طرفداران آموزش از طریق حل مسئله و آموزش حل مسئله، رویکرد خود را ضد محتوا ـ محور بودن برنامه درسی معرفی می‌کنند و از سـوی دیگر حل مسئله را مستلزم داشتن دانش محتوایی و مفهومی قبلی می‌دانند. کارسـون معتقد اسـت این تناقض خود «مشکل یا مسئلهٔ حل مسئله است» و نتیجه می‌گیرد که «تسلط بر دانش مفهومی و محتوایی» مقدم بر «مهارت حل مسئله» است و این دو با هم ملازمه دارند. کارسون بیان می‌کند رهیافت‌های حل مسئلهٔ پولیا و دیویی، به روشنی معلوم نمی‌کنند تا چه حد مستقل از محتوای دانشی می‌توانند کارایی داشته باشند. رهیافت‌های حل مسئلهٔ «خالی از محتوا» از نظر کارسون خود دارای مسئله‌اند، زیرا دانش و تفکر را دو حـوزه و مقولهٔ جدا از هم می‌دانند. حل مسـئله به‌طور طبیعی منجر به کشف الگوریتم‌ها و رهیافت‌های حل مسئله می‌شود و باید دانش‌آموز را در جهتی سوق داد که بتواند معلومات و دانش لازم را بیاموزد، به‌خوبی آن‌هـا را فرا خواند و در حل مسـئله از آن بهره گیرد. (کارسون ۲۰۰۷)

در سیلابس آموزش ریاضی سنگاپور ۱۳ رهیافت حل مسئله معرفی شده است ولی به هیچ‌یک از آن‌ها در متن کتاب‌های درسی اشارهٔ مستقیمی نشده است (سـیو ۲۰۰۵). سـیو این سـیزده رهیافت را در سه دسـتهٔ کلی: رهیافت‌های بیان[12] مسئله، رهیافت‌های ساده‌سـازی[13] و رهیافت‌های مسـیر[14] تقسـیم‌بندی می‌کند. وی معتقد بـه آموزش جداگانه و به اصطلاح از بالا به پایین رهیافت‌هاسـت ولی همهٔ رهیافت‌ها را بـه هر طریق دلخواه قابل تدریـس نمی‌داند. تدریس یک رهیافت و سـپس مطرح نمودن مسئلهٔ مرتبط با همان رهیافت، از نظر سیو، کارایی چندانی ندارد زیرا رهیافت‌هـا هر یک به‌طور جدا از هم تدریس شـده و ارتبـاط بین رهیافت‌ها و ایدهٔ اصلی مسـتتر در آن‌ها آشکار نمی‌شود (سیو ۲۰۰۵).

کدام رهیافت‌ها و چگونه؟

شـونفیلد برای تدریـس و به‌کارگیری رهیافت‌ها پاسـخگویی به تعدادی پرسـش را ضـروری می‌داند: «پیش‌زمینه و معلومات قبلی دانش‌آموزان چقدر باشد تا بتوان به آن‌ها اسـتراتژی‌های حل مسئله را آموزش داد؟ علاوه‌بر اسـتراتژی‌های شـخصی حل مسئله به چـه چیزهای دیگری نیازمندیم؟ تدریس و اسـتفاده از اسـتراتژی کلی مانند تعیین اهداف جزئی‌تر به چه طریق و تا چه حد ممکن است؟» (آموزش مهارت‌های حل مسئله شـونفیلد). به بیان شونفیلد دشواری‌ها و نکات مهمی در رابطه با آموزش رهیافت‌ها وجود دارد: اول اینکه رهیافت‌ها بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که در نگاه اول و در بیان‌شان به‌نظر می‌رسند. دوم تدریس رهیافت‌ها تنها به شرط اینکه به تعداد کم و محدود و تحت شـرایط کاملاً کنترل شده باشند منجر به ایجاد تغییر در مهارت حل مسئلهٔ دانش‌آموز می‌گردد و این موضوع در حالت کلی تعمیم‌پذیر نیست و سوم اینکه دانسـتن تنها استراتژی‌های حل مسئله کافی نیست. فرد باید بداند کدام رهیافـت را چه زمان به‌کار گیرد. (شـونفیلد۱۹۸۳). شـونفیلد در رابطـه با پیچیدگی اسـتفاده از رهیافت‌ها مثال‌هایی می‌زنـد. برای مثال یکی از رهیافت‌های معروف و سرانگشتی «استفاده از مسئله ساده‌تر» است. در همهٔ موارد زیر استفاده از این رهیافت کارساز است.

۱. اگـر a، b، c، d اعـداد بین صفر و یک باشـند ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۲. حاصل‌جمع زیر را بیابید.

$$\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+...+\frac{n}{(n+۱)!}$$

۳. ثابت کنید اگر $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲=ab+bc+cd+ad$ آن‌گاه $a=b=c=d$

بـرای مسـئلهٔ اول یک فرد تازه‌کار ممکن اسـت پرانتزها را در هـم ضرب کند و عملیات را ادامه دهد. درحالی‌که مسئله‌حل‌کن ماهر با کاهش تعداد متغیرها و سـاده‌تر کردن مسئله آغاز می‌کند. در مورد مسئلهٔ ۲، مسئلهٔ سـاده‌تر عبارت از محاسبهٔ چند جملهٔ اول سری اسـت. گاهی دیدن متغیر طبیعی (n) می‌تواند یادآور مسئلهٔ اسـتقرا و آزمودن چند جملهٔ اول باشد. در حالی‌که در مسئلهٔ «ثابت کنید $۲^n-۱$ به‌ازای اعداد طبیعی عددی اول اسـت» فرد باتجربه سراغ اثبات به کمک برهان خلف می‌رود و مسـئله‌حل‌کن تازه‌کار به احتمال زیاد شـروع به امتحان کردن اعداد مختلف و محاسبهٔ عدد می‌نماید. در مسئلهٔ سوم، مسئلهٔ ساده‌تر (با متغیر کمتر) به دو شکل به ذهن دانش‌آموز می‌رسد (شونفیلد ۱۹۸۵):

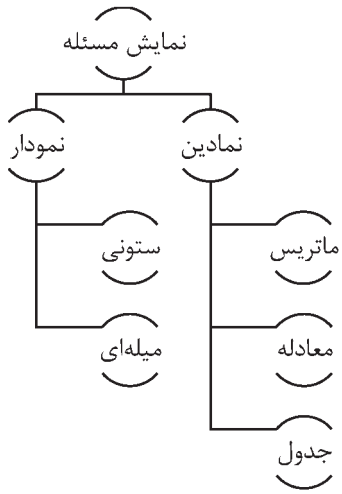
الف. $a^۲+b^۲=ab$ آن‌گاه $a=b$

ب. $a^۲+b^۲=ab+ba$ آن‌گاه $a=b$

در دو مسئلهٔ اول رهیافت «مسئلهٔ ساده‌تر» به شکل متفاوتی به‌کار رفته است. در اولی به شکل کاهش تعداد متغیرها و در دومی به شکل محاسبهٔ چند جملهٔ اول. در مسئله سوم مسئلهٔ ساده‌تر با کاهش تعداد متغیرها حاصل می‌شود ولی این کاهش منجر به دو نوع مسئلهٔ ساده‌تر می‌گردد. شـونفیلد بیان می‌کند به‌کارگیری رهیافت‌های به‌ظاهر ساده برای تازه‌کارها اغلب کاری پیچیده است. وی معتقد اسـت آموزش رهیافت‌های حل مسئله تنها زمانی مفید است که تعداد رهیافت‌ها کم باشند، در رابطه با تعداد محدودی مسئله مستقیماً بیان شده باشند و به‌صورت گام‌به‌گام و دوره‌ای یادآوری و تشریح گردند (شـونفیلد۱۹۸۳). به‌علاوه، شونفیلد آموزش رهیافت‌های کلی مانند «یافتن مسئلهٔ مشابه» یا «تعیین اهداف جزئی‌تر مسـئله» را مفید نمی‌داند؛ در عوض شکستن رهیافت‌های کلی را به رهیافت‌های جزئی‌تر کارامد می‌داند (شونفیلد ۱۹۸۵ ص ۹۵).

برخلاف شونفیلد که تدریس رهیافت‌های جزئی‌تر به جـای تدریـس رهیافت‌های کلی حل مسـئله را پیشـنهاد می‌دهد، سـیو تدریسِ از بالا به پایین[۱۵] و سلسـله مراتبی رهیافت‌ها را مفید می‌داند. برای مثال وی رهیافت «نمودار رسـم‌کن» را زیرشـاخهٔ رهیافت کلی «نمایش مسـئله» دانسته و رهیافت «هیستوگرام رسـم‌کن» را زیرشاخهٔ آن دو دیگر معرفی می‌کند. وی بیان می‌کند که دانش‌آموز ابتدا باید ایدهٔ رهیافت کلی «بیان یا نمایش مسئله» را درک کند و سپس به مرحلهٔ «نمودار رسم‌کن» و بعد از آن به «هیستوگرام رسم‌کن» برسـد که این کار مسـتلزم تمرین گام‌به‌گام و آهسته است. وی نظر خود را وام‌دار نظر برونر (۱۹۶۰) مبنی بر تدریس اولیهٔ ساختارهای کلی می‌داند (سیو ۲۰۰۵). با این حال سـیو در مثالی که ارائه می‌دهد سناریوی حل مسئله را از فعالیت‌های شخصی و گروهی دانش‌آموزان، بحـث روی نتایـج کار ایشـان، معرفـی رهیافت‌های کلی‌تر براسـاس نتایج کار دانش‌آموزان و سـپس بیان رهیافت‌های جزئی‌تر ترسیم می‌کند (و نه بالعکس یعنی معرفی رهیافت پیش از شـروع به حل مسـئله) (سیو ۲۰۰۵).

دانلوپ[۱۶] (۱۹۸۸) به نقل از ماسـر[۱۷] و شونسـی[۱۸] (۱۹۸۰) پنج رهیافت حل مسـئله را مناسب‌تر از باقی رهیافت‌ها در دورهٔ دبیرسـتان معرفی می‌کند. این پنج رهیافت عبارت‌اند از: آزمون و خطا، الگویابی، ساده‌سازی مسئله، یافتن مسئلهٔ مشابه و به عقب نگریستن. دانلوپ طی تحقیق تجربی (آزمایشگاهی) که انجام داد به این نتیجه رسـید که اولاً تعـداد رهیافت‌هایی که آموزش داده می‌شـود باید کم باشـد (دو یا سه رهیافت) و دوم اینکـه دانش‌آموزان منطق اسـتفاده از یک رهیافت را در نمی‌یابند مگر آنکه به خوبی شـرح داده شود و نحوهٔ اسـتفاده از آن در مسائل متعدد و مرتبطی که زمینهٔ کاربرد آن رهیافت را دارند بیان شده باشد. به‌علاوه وی تأکید می‌کند دانش‌آموز باید به اندازهٔ کافی وقت داشته باشد تا روی حل مسئله و استفاده از رهیافت‌ها کار کند (دانلوپ ۱۹۸۸).



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

در مطالعـهٔ انجام شـده روی ۷۲ معلـم ابتدایی آمریکایـی، برون دریافت که آن‌هـا تمام رهیافت‌های حل مسئلهٔ پیشنهاد شده توسط استانداردهایی مانند NCTM و CCSSI را در کلاس‌هـای درس خود به‌کار نمی‌گیرند، بلکه بیشـتر از دو رهیافت «رسم شکل» و «بیرون کشـیدن اطلاعات کلیدی مسـئله» استفاده می‌کنند (برون ۲۰۱۳).

بررسی آموزش رهیافت‌های حل مسئله در کتاب ریاضی هفتم

نویسنده در مورد حل مسئله با رویکرد اخیر، یعنی آموزش از طریق حل مسئله، موافقت بیشتری دارد. آنچه تاکنون مـورد تأیید قطعی بوده تنها تحقیقات تجربی محققان در شرایط و محیط‌های کاملاً کنترل شده بوده است. با این حال برای آموزش رهیافت‌های حل مسئله، مطابق با آنچه تاکنون گفته شـد، پیشـنهادهایی ارائه می‌گردد. مرور نتایج تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد که در آمـوزش رهیافت‌های حل مسـئله نکاتی حائز اهمیت هستند؛ از جمله: زمان، تعداد رهیافت‌های مورد تدریـس، نوع رهیافت‌ها، نحوهٔ بیان و ارائهٔ رهیافت‌ها و میزان اثربخشی تدریس رهیافت‌ها.

با توجه به آنچه گفته شـد فصل اول کتاب ریاضی هفتـم که به‌طور مسـتقل به ارائـهٔ رهیافت‌های حل مسئله اختصاص یافته است مورد بررسی اجمالی قرار می‌گیرد. در این فصل هشت راهبرد هر یک در کادری جداگانه و در ابتدای یک قسـمت مطرح می‌شود. پس از ارائهٔ هر راهبرد چند مسـئله در همان رابطه مطرح شـده است. اولین مسئله با توضیحات و راهنمایی‌های مؤلفان کتاب همراه اسـت. در انتهای فصل بخشی به نام «مرور راهبردها» آورده شـده است. به‌نظر نویسنده راهبردهایی مانند رسم شکل، حذف موارد نامطلوب یا الگویابی، که برای معلمان آشـناتر است، برای تدریس مناسـب‌اند (به‌ویژه که در سـال‌های گذشته به آن‌ها اشاره شده است).

راهبردهـای «زیر مسـئله» و «تبدیل به مسـائل سـاده‌تر» و «راهبرد روش‌های نمادین» نیاز به زمان و کار بیشـتری دارند. سه مسـئلهٔ مطرح شده در بخش «راهبرد مسئلهٔ ساده‌تر» با یکدیگر ارتباطی ندارند و این راهبرد کلی در مورد هر یک به شیوه‌ای جداگانه عمل نموده است. برای مثال، در مورد مسئلهٔ اول، راهبرد حل مسئله به یک راهبرد محاسباتی ساده، یا همان محاسبهٔ تقریبی، تقلیل یافته است. مسائل ۲ و ۳ با بحث استقرا مرتبط‌اند که در حوزه‌های حسـاب و هندسـه مطرح شـده‌اند. ممکن اسـت دانش‌آموز نحـوهٔ به‌کارگیری رهیافت در این سـه مسـئله را بفهمد ولی در مسیر برگشـت، یعنی به‌کارگیری رهیافت در مسـائلی نو و با سـاختار متفاوت، جای شـک باقی است. در مورد رهیافت «روش‌های نمادین» دو مسـئله مطرح شده اسـت که اساسـاً با مقدمه و آغاز جبر مرتبط اسـت. به‌نظر نویسـنده این راهبرد به‌طـور طبیعی در ورود بـه مرحلهٔ پیـش ـ جبر و جبر مدنظر قـرار گرفته و بدون برچسب *راهبرد حل مسئله* تدریس می‌شود. لذا مطرح کـردن آن در قالب یک راهبرد نمی‌تواند تأثیر چندانی در حل مسئلهٔ دانش‌آموزان داشته باشد.

تأکیـد و بیان مسـتقیم راهبردهـای کلی مانند «زیرمسئله» فرصت دانش‌آموز برای چالش با مسئله را کم‌رنگ می‌کند و نیز کمی مبهم است. اگر دانش‌آموز بداند دقیقاً از کجا مسـئله را، به اصطلاح، بشـکند و به مسـائل کوچک‌تر تبدیل نماید خود مهارت بزرگی است. این راهبرد کلی برای دانش‌آموزی که برای آغاز به حل مسئله دچار مشکل است شاید چندان کارساز نباشـد. این‌گونه راهبردها (و به‌طور کل هر راهبردی) بهتر اسـت با راهنمایی معلم توسـط خود دانش‌آموز و طی کلنجار رفتن با مسـئله کشـف و بیان شـوند. تعریف مسئله عبارت از مواجه شدن با موقعیتی است که توسـط راه‌های معمول، روش‌ها و الگوریتم‌های از پیش‌شـناخته شده به آسانی قابل حل نباشد. چالش دانش‌آموز با یک مسئلهٔ جدید، هرچند زمان‌بر باشد، ارزشمند است و موجب کشف استراتژی‌ها، راهکارها و مفاهیم نو توسـط خود او می‌گردد که ماندگاری و اثربخشی بیشتری دارد.

به هرحال سنجش میزان اثربخشی رهیافت‌های مطرح شـده در کتـاب هفتم در بهبود حل مسـئلهٔ دانش‌آموزان نیازمند تحقیق و بررسـی بیشتر است و نویسـندهٔ این مقاله تنها با توجه بـه تحقیقات انجام یافتهٔ پیشـین و تجربهٔ معلمی نظـرات خود را بیان می‌کند.

جمع‌بندی

نظـرات راجع‌به حل مسـئله و رهیافت‌های حل مسئله را می‌توان به ۳ دستهٔ زیر تقسیم کرد:

۱. آمـوزش رهیافت‌هـای به‌اصطلاح مسـتقل یا خالی از محتوا منجر به بهبود حل مسـئلهٔ دانش‌آموز می‌گردد.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۲. آمــوزش رهیافت‌های حل مســئله تنها تحت شــرایط خاص و کنترل شده در بعضی مواقع منجر به بهبود حل مسئله می‌گردد.

۳. آمــوزش رهیافت‌ها به‌تنهایــی تأثیری در حل مسئله ندارد بلکه دانش محتوایی و مفهومی مقدم است و برای حل مسئله کافی است.

ایــن نظــرات را می‌توان روی یک طیــف از ـ صد در صــد مؤثر بودن آموزش اولیــهٔ رهیافت ـ تا ـ کاملاً بی‌فایده بودن آموزش رهیافت‌های حل مســئله ـ قرار داد. آموزش رهیافت‌های حل مسئله می‌تواند به بهبود حل مســئله و باز شدن افق دید دانش‌آموز منجر شود، به شــرط آنکه در این کار دقت و احتیاط لازم به‌عمل آید و شــرایط مهیا باشد. ویلســون و همکاران هشدار می‌دهند تأکید بر اســتراتژی‌های حل مسئله نباید ما را به سمتی سوق دهد تا به‌دنبال آن باشیم که «به چه چیزی بیندیشیم» زیرا هدف از راهبردهای حل مسئله به گفتهٔ خود پولیا «چگونه بیندیشیم» است. (ویلسون، فرناند و هَدوِی، ۱۹۹۳)

لازم نیســت در ایــن نــوع آموزش تعــداد زیادی رهیافــت در یــک دورهٔ زمانی محدود تدریس شــود. می‌توان تعداد راهبردها را به همان‌هایی محدود کرد که نتایج تحقیقات کارایی آن‌ها را بیشتر به اثبات رسانده‌اند و زمان بیشــتری صرف کار روی همین تعداد محدود نمود. در ضمن همان‌گونه که شــونفیلد مطرح نموده می‌توان یک رهیافت را با چندین مسئلهٔ مرتبط با هم و به شکل گام‌به‌گام و آهسته و با شرح جزئیات تدریس نمود. (در کار شونفیلد از رهیافت ساده کردن مسئله به شــکل کاهش تعداد متغیر به دفعات استفاده می‌شود و ســرانجام در پس ـ آزمون نیز مسئله‌ای قابل حل با همین رهیافت مطرح می‌شود.) (شونفیلد ۱۹۸۵).

در انتها یک پرسش را مطرح می‌کنیم: اگر مسئله‌ای مطرح شــود که هیچ‌یک از رهیافت‌های شناخته شدهٔ پیشــین برای حل آن کاربردی نداشــته باشــند کدام گروه در حل مسئله موفق‌ترند: آن‌هایی که پیش از این رهیافت‌های حل مسئله را آموخته و سپس مسائل‌شان را حــل کرده‌اند یا آن‌هایی که رهیافت‌ها را نیاموخته و لذا برای حل مسائل‌شان در گذشته درگیر چالش‌های بیشتری شده‌اند؟

پی‌نوشت‌ها

1. Common core state standard initiative
2. instructionism
3. Information processing
4. John Dewy
5. Krulik
6. Rudnick
7. Lester
8. Lapan
9. Philips
10. Carson
11. Content- less heuristics
12. representation
13. simplification
14. pathway
15. Top-down
16. Dunlop
17. Musser
18. shaughnesy

منابع

1.Bruun, F. (2013). Elementary Teachers' Perspectives of Mathematics Problem Solving Straegies. *The mathematics educator.*

2. Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is Teaching with problem solving important to student learning*? NCTM.

3. Carson, J. (2007). A problem with problem solving: Teaching Thinking Without teaching Knowledge. *Mathematics Educator.*

4. Dunlop, J. (1988). An Investigation of the Effects of Compressed Heuristics Instruction Problem Solving in Mathematics. Unpublished Masters' Thesis University of North Florida.

5. Klein, D. (2003). a Brief History of American K-12 mathematics education. *Mathematical cognition.*

6. Perkins, D., & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills Context-bounded? *Educational Reseacher.*

7. Shoenfeld, A. (1983). Teaching Problem solving skills. In *Learning to think mathematicaly.*

8. Shoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem solving.* Academic Press.

9. Shoenfeld, A. (2012). How we Think: A Theory of Human Decision-making , with a Focus on Teaching. *ICME12.*

10. Siew, T. (2005). *Top-Down approach to Teaching Problem Solving Heuristics in Mathematics.* NIE.

11. W, B. (2012). *School- Based Curriculum Development in China.* Netherlands Instituite for Curriculum Development.

12. Wilson, J., Fernande, M., & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problen solving. In Research Ideas for the Classroom. NCTM.

۱۳. پولیا، ج، **چگونه مسئله حل کنیم** ۱۹۴۵ مترجم: آرام، ا..

۱۴. تاپالیــن، م **ریاضیــات از طریــق حــل مســئله**. مترجم: فروزبخش، فیروزه. (۱۳۹۲). مجله رشد آموزش ریاضی.

۱۵. کار، بریندرجیت، **آموزش ریاضیات در ســنگاپور**، ۱۳۹۱، مترجم غلام آزاد، سهیلا، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۱۰

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

رایج شدن یک فرهنگ اثبات در هندسه مدرسه‌ای:

تکامل اثبات دوستونی در اوایل قرن بیستم

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

(بخش دوم)

پاتریسیو جی. هربست
ترجمه: حسین غفاری
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده بخش اول

همراه با اصلاحات دهۀ ۱۸۹۰، و در زمانی‌که هندسه به‌عنوان جایی برای دانش‌آموزان جهت یادگیری «هنر اثبات کردن»، در نظر گرفته شد؛ در آمریکا انتظار از دانش‌آموزانِ دبیرستانی برای اثبات حکم‌های هندسی، تبدیل به یک هنجار شد. در واکنش به مطالبۀ اصلاحات، در حرفۀ معلمی فرهنگی شکل گرفت که طی آن از دانش‌آموزان خواسته می‌شد که «اثبات» تولید کنند و آن را در « قالب دوستونی» به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلیل درستی هر گزاره بنویسند. در قسمت اول این مقاله گزارشی از زمانی که هندسه به‌عنوان یک موضوع درسی مطرح شد تا وقتی که اثبات به مرکز و محور درس هندسه تبدیل شد، عرضه گردید. همچنین با استفاده از توجیهات تاریخی توضیح داده می‌شودکه چگونه قالب اثبات دوستونی این امر را امکان‌پذیر ساخت که معلمان بتوانند ادعا کنند اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دهند و در عین حال دانش‌آموزان بتوانند نشان دهند فعالیت‌های آن‌ها شامل اثبات کردن می‌شود. در ادامه آشکار می‌شود که ماهیت هندسۀ مدرسه‌ای، تحت تأثیر اصرار بر یاددهی اثبات، به چه چیزی تبدیل شده است.

کلیدواژه‌ها: اثبات، هندسه، هندسه مدرسه‌ای

مطالبی که باید نحوۀ اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دادند

متفاوت بودن حکم‌های بنیادی و تمرین‌ها، نقش مهمی در امکان‌پذیر ساختن تدریس هنر اثبات کردن، ایفا کرد. حکم‌های بنیادین هم موضوع درس را بسط و گسترش دادند و هم ابزاری برای دانش‌آموزان جهت انجام اثبات، فراهم ساختند، اما بسیار ضروری بود که دانش‌آموزان روی تمرین‌ها کار کنند و با موفقیت آن‌ها را اثبات کنند. کتاب‌های درسی هندسۀ آن زمان نشان می‌دهند که نویسندگان هنگام ایجاد تعادل بین حکم‌های بنیادین و تمرین‌ها، با پرسش‌های مشکل فراوانی مواجه بودند. اینکه چه حکم‌هایی باید بنیادین در نظر گرفته شوند؟ با چه ترتیبی باید در کتاب آورده شوند؟ نحوۀ «اکتشاف» اثبات آن‌ها چگونه باید در کتاب شرح داده شود؟ تنوع بسیاری در نحوۀ ارائۀ این حکم‌های بنیادین در کتاب‌های درسی هندسه، از اوایل قرن، قابل مشاهده است (اسمیت، ۱۹۰۹؛ شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳؛ شیبلی، ۱۹۳۲). با توسل به شیوه‌های مختلف، نویسندگان سعی داشتند که با حفظ تعادل بین یکپارچگی موضوع هندسی ارائه شده و سودمند بودن آن، در دانش‌آموزان توانایی انجام تمرین‌ها را ایجاد کرده و آن‌ها را در این راه حمایت کنند. آن‌ها همچنین تلاش کردند که تعداد حکم‌های بنیادین را کم، و تعداد تمرین‌ها را زیاد کنند.

تغییرات در مسائلی که باید اثبات می‌شدند و گزاره‌هایی که می‌شد به‌عنوان اصل در نظر گرفت

کمیتۀ ۱۸۹۹ با توسل به ملاحظات پداگوژیکی پیشنهاد کرد که شیوۀ ارائۀ اصول تغییر کند. این کمیته توصیه کرد که معرفی اصولی که «تقریباً بدیهی» هستند به مراحل بعد موکول (نایتینگل و

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

همکاران، ۱۸۹۹، ص۱۴۲)، و حکم‌های بدیهی مانند «تمام زاویه‌های قائمه با هم برابرند» حذف شوند.

در همان زمان، ریاضی‌دانان پیشرفت‌های مهمی در زمینهٔ ارائهٔ هندسهٔ اقلیدسی براساس اصولی یکپارچه، کرده بودند. مثلاً نکاتی را که اقلیدس بدون هیچ توضیحی مفروض گرفته بود، به‌عنوان اصل در نظر گرفتند (برای نمونه هیلبرت[1]، ۱۸۹۹/۱۹۷۱). البته این امر با توصیه‌های رایج آن دورهٔ ایالات متحده دربارهٔ روش تدریس هندسه، هم‌سو نبود. کمیتهٔ پانزده، جهت تصمیم‌گیری در این باره، توصیهٔ ریاضیاتی مبنی بر «کم‌ترین فرض‌های ممکن» را در برابر ملاحظات پداگوژیکی که بیان می‌داشت «چنین فهرستی برای دانش‌آموزان قابل فهم نیست»، مورد بررسی و ارزیابی قرار داد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱). اصولی که آن‌ها انتخاب کردند بین ملاحظات ریاضیاتی و ملاحظات دربارهٔ یادگیرنده‌ها، تعادل برقرار کرد:

مبنایی که باید در نظر گرفته شود این است که ترتیب منطقی حفظ شود و اثبات رسمی حکم‌هایی که برای رعایت چنین ترتیبی ضروری هستند، ارائه شود. این شیوه با اصول آموزشی مربوط به سازگاری موضوع با ذهن یادگیرنده، همخوانی دارد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱).

همچنین شولتز (۱۹۱۲) ابراز داشت که پیشرفت در بنیان نهادن هندسه بر مبنای اصول، بر هندسهٔ درسی تأثیر گذاشت، چرا که در نظر گرفتن اصولی را غیر از اصول اقلیدس برای تدریس هندسه توجیه کرده بود:

هنگام گردآوری اصول، تلاش برای دست‌یابی به فهرستی جامع و کامل ضروری نیست. یک گزاره را می‌توان به‌عنوان یک اصل در نظر گرفت حتی اگر بتوان آن را از اصول دیگر نتیجه گرفت؛ و اگر لازم شد گزاره‌ای به‌عنوان اصل در نظر گرفته شود می‌توان حتی دلیل همه فهمی[2] برای آن ارائه کرد.

به‌طور مشابه، جورج کارسون[3] پیشنهاد کرد که تمام ویژگی‌هایی که «می‌توان به دانش‌آموزان القا کرد که بدون اندازه‌گیری عددی قبول کنند»، در قالب مفروضات ارائه شوند (کارسون، ۱۹۱۳، ص ۹۸).

این امکان که اصل‌های پیشنهادی قابل انتخاب بودند بسیار راهگشا بود. تأکید کمیتهٔ ده نفره بر استفاده از هندسه به‌عنوان زمینه‌ای برای یادگیری اثبات، به متداول شدن یک تصور ویژه دربارهٔ اثبات در هندسه کمک کرده بود که قبلاً و در دورهٔ کارهای اصیل، به شکل بالقوه‌ای وجود داشت. طبق این تصور، وجود و خواص اشیاء هندسی، مستقل از اینکه اثبات شده باشند، حقایقی مفروض بودند. پشتوانهٔ چنین تصوری، وجود اثبات‌هایی هستند که درستی آن خواص را نشان می‌دهند که می‌توان با بیان کردن شرایط نظری آن‌ها، خواص مذکور را به‌عنوان حقایقی درست در نظر گرفت. در نتیجهٔ چنین حرکتی، زیاد یا کم بودن تعداد اصول تفاوت چندانی نداشت چراکه تمام آن‌ها حقایقی پذیرفته شده بودند؛ و این نکته باعث کاهش تعداد حکم‌های بنیادینی بود که دانش‌آموزان باید چگونگی اثبات آن‌ها را می‌دانستند. حکم‌های بنیادینی که باید اثبات شوند، آن‌هایی بودند که یا نقشی اساسی در توسعهٔ موضوع درس داشتند و یا روش‌های اثبات کردن را نشان می‌دادند؛ نه آن‌هایی که بسیار بدیهی بودند و می‌شد آن‌ها را به‌عنوان اصل در نظر گرفت. کاهش در تعداد حکم‌های بنیادین، اجازه می‌داد که دانش‌آموزان بیشتر وقت کلاس را صرف تولید اثبات برای تمرین‌ها کنند. همچنین وجود فهرستی طولانی از حکم‌هایی که به‌عنوان اصل در نظر گرفته شدند، به دانش‌آموزان این اجازه را می‌داد که از نتایج آن‌ها استفاده کنند، بدون اینکه بدانند آن نتایج به چه دلیل درست هستند. بنابراین، از هر فرضی می‌توانستند به‌عنوان دلیل، در اثبات یک حکم استفاده کنند، چراکه آن را درست فرض کرده‌اند و مطرح کردن این پرسش که آیا این حکم با استفاده از حکم‌های دیگر قابل اثبات هست یا نه، ضروری نخواهد بود. در آخر، این حقیقت که هندسهٔ ملموس (شامل نحوهٔ کشیدن اشیای هندسی)، قبل از هندسهٔ اثباتی تدریس می‌شود، پرسش‌های مربوط به وجود اشیاء هندسی را از میان خواهد برد. از این جهت مهم است که توجه شود که در دههٔ اول قرن، کتاب‌های درسی هندسه شروع به ارائهٔ بخش مقدمهٔ مفصلی (که معمولاً برای تعریف بعضی از اشیاء هندسی و بیان چند اصل، استفاده می‌شد) کردند که شامل عناصر هندسهٔ ملموس (به‌ویژه ترسیم‌ها) بود. از این‌رو، حتی اگر دانش‌آموزی هندسهٔ ملموس را قبلاً در دورهٔ ابتدایی ندیده بود، در هندسهٔ دبیرستان، در دو بخش با هندسه مواجه می‌شد. در بخش اول با حقایق هندسی و در بخش دوم با سازماندهی منطقی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به‌گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است

آن‌ها، همان‌طور که کمیتهٔ ده نفره پیشنهاد کرده بود.

تغییرات در نشانه‌گذاری و چگونگی ارائهٔ شکل‌ها

نوآوری‌هایی که در نشانه‌گذاری و زبان استفاده می‌شد در جهت حمایت اثبات دانش‌آموزی بودند. این عقیده که اثبات از «مراحل موجزی» تشکیل شده است (بمن و اسمیت، ۱۸۹۹، ص ۲۰)، دانش‌آموزان را از مواجهه با بحث‌های غیرضروری دور می‌کرد. با این وجود، برای اینکه این اتفاق بیفتد، باید زبانی که در دسترس بود، اجازهٔ این خلاصه‌نویسی را می‌داد. بنابراین، نوشتن اثبات‌ها با نمادهای انعطاف‌پذیرتر، متداول شد (برای مثال، نشان دادن زاویه با نمادهای مختلف). همچنین، بیان خلاصهٔ حکم‌های خاصی، رایج گردید (برای نمونه، قضیه‌ای که تساوی دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین را تضمین می‌کرد، به‌طور خلاصه «ز ض ز» نامیده می‌شد). این‌طور به‌نظر می‌رسید که چنین خلاصه‌نویسی‌هایی دانش‌آموزان را کمک می‌کرد که هنگام نوشتن اثبات، به قضیه‌های قبلی دسترسی مستقیم داشته باشند. تمام این تغییرات به دانش‌آموزان کمک کرد که این باور را که اثبات از گزاره‌ها و دلایلشان تشکیل شده، به‌طور مؤثری به‌کار ببندند. تنوع نمادها و تعدد واژگان تخصصی، به‌عنوان محافظی در برابر خطر تبدیل شدن فعالیت تولید اثبات به جست‌وجو برای یافتن راهی متعارف برای نوشتن گزاره‌ها و دلایلشان، عمل می‌کرد. در عوض، در دسترس بودن سریع و مستقیم حکم‌هایی که می‌توانستند به‌عنوان دلیل استفاده شوند، باعث می‌شد که بتوان از آن‌ها به‌عنوان رهیافت‌هایی برای یافتن گزاره‌های مورد نیاز برای اثبات، استفاده کرد.

موضوع دیگری که دانش‌آموزان را در امر اثبات حمایت می‌کرد، نحوهٔ ارائهٔ شکل‌ها بود. نیوکمب و همکاران (۱۸۹۳) توصیه کرده بودند که دانش‌آموزان پای تخته‌سیاه، با استفاده از شکل، تمرین‌ها را به‌صورت شفاهی انجام دهند. یانگ و همکاران (۱۸۹۹) نیز بیان کرده بودند که معلمان باید به دانش‌آموزان «تمرین‌های زیادی بدهند که روابط را در یک شکل ببینند» (ص ۱۴۲).

برای اینکه دانش‌آموزان راحت‌تر بتوانند شکل‌ها را بررسی کنند، شولتز (۱۹۱۲) «روش‌های گرافیکی برای نمایش حقایق هندسی» را تهیه کرد که طرحی بود در جهت «از میان برداشتن مشکلات بیرونی» برای «دانش‌آموزانی که می‌توانند به‌صورت منطقی استدلال کنند»، اما «بعضی از قسمت‌های اثبات را فراموش می‌کنند و در نتیجه قادر به ادامه دادن اثبات نیستند» (ص ۱۱۰). شولتز همانند تعدادی از پیشینیانش، از شماره‌های کوچکی برای نشان دادن زاویه‌هایی که در اثبات مؤثرند، استفاده می‌کرد. همچنین، او پیشنهاد کرد که زاویه‌های قائمه با رسم مربع کوچکی، و زاویه‌های مساوی با رسم تعداد کمان‌های برابری داخل آن‌ها، مشخص شوند. نمادهای دیگری نیز برای نشان دادن خط‌های موازی و پاره‌خط‌های برابر، طراحی شدند. این «روش‌های گرافیکی» فقط برای نشان دادن فرض‌های مسئله نبود، بلکه برای تجزیه و تحلیل کردن فرض‌هایی بود که در صورت مسئله وجود داشت. برای مثال، به‌جای گفتن «یک مثلث متساوی‌الساقین را در نظر بگیرید»، مثلثی رسم می‌شد که روی هر یک از دو ضلع برابرش یک خط کوچک، و داخل هر یک از دو زاویه برابرش دو کمان کوچک کشیده شده بود. در واقع هدف از این کار نشان دادن این موضوع بود که آن فرض‌ها در اثبات استفاده می‌شوند.

قالب اثبات دوستونی: ثبات بخشیدن به درس هندسه

بخش‌های ۳ تا ۶ به شرح تکامل یک فرهنگ اثبات دانش‌آموزی اختصاص یافت. فرهنگی که همزمان با تلاش حرفهٔ معلمی و نویسندگان کتاب‌ها برای برآورده کردن این انتظار که درس هندسه باید به دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد دهد، توسعه یافت. تکاملی که در دورهٔ تمرین اتفاق افتاد، شامل تغییراتی در درس هندسه بود که بعضی از آن‌ها در جهتی متفاوت از تغییرات دورهٔ کارهای اصیل بود. این باور که تمام دانش‌آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اما از همـهٔ آن‌ها انتظار نرود کـه دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود. جهت باز کردن فضای کار بر روی تمرین‌ها و حمایت مؤثر از آن، تعداد «حکم‌های بنیادین» درس هندسه کاهش یافت؛ حکم‌هایی کـه دانش‌آموزان باید اثبات آن‌هـا را یـاد می‌گرفتند تا هـم روش اثبات کردن را بفهمند و هم بدانند که از چه چیزهایی در انجام اثبات می‌توانند اسـتفاده کنند. در این بخـش از آن روایت تاریخی استفاده می‌کنم تا بتوانم تفسیری دربارهٔ نقش قالب دوسـتونی در گسـترش آن فرهنگ، ارائه دهم. قصـد دارم این فرضیه را مطـرح کنم که قالب اثبات دوسـتونی، از طریق یکی کردن اثبات ارائه شـده در کتاب با اثبات خواسـته شـده از دانش‌آموز، به برنامهٔ درسی هندسه ثبات بخشید. در زیر بخش بعدی، این فرضیه را شرح خواهم داد.

تفاوت‌ها و شباهت‌های مسائل بنیادین و تمرین‌ها

دو اصطلاح «مسـائل بنیادین» و «تمرین‌ها» به دو دسـته از حکم‌هایی که باید اثبات می‌شدند اشاره داشتند. مدعی هسـتم که کارکرد متفاوتی که به هر کدام از این دو دسته اختصاص یافته بود، باعث ایجاد فاصله بین اثبات دانش‌آموز و اثبات معلم (و یا کتاب) می‌شد. برای مثال، در حالی‌که اثبات حکم‌های بدیهی در متن درس دیده نمی‌شـد، تمرین‌ها شامل مسائلی بودند که اثبات ساده‌ای داشتند و فقط با دیدن شکل آن‌ها، اجزای اصلی اثبات مشخص می‌شد. همچنین، در حالی‌کـه مسـائل بنیادین از ایـن جهت اهمیت داشـتند که اجزای اصلـی درس بودند و به این دلیل انتخاب شده بودند که در اثبات حکم‌های دیگر به کار آیند، معیار اصلی انتخاب تمرین‌ها فراهم کردن فرصت تمرینِ اثبات کردن بـرای دانش‌آموزان و موفقیت در آن بود و جذاب بودن آن‌ها و همچنین داشتن ارتباط منطقی با یکدیگر، اهمیتی نداشت.

به هر حـال، هر دو نوع از حکم‌هـا، صرف‌نظر از محتوایشـان، ابزارهایـی بـرای حمایت از مشـخصهٔ جدید درس، یعنـی تمرکز بر اثبات دانش‌آموزی بود. در واقـع، دانش‌آموزانی که بـرای تمام گزاره‌هایی که اثبات می‌کردند، باید دلیل می‌آوردند، نیاز به نتایجی قدرتمند داشتند که مسـائل بنیادین برایشان فراهم می‌کـرد. هرچه اثبـات مسـائل بنیادیـن قاطع‌تر و قانع‌کننده‌تر بود، دانش‌آموزان «زنجیرهٔ استدلال‌هایی را که به کشف و پدیدار شدن اثبات منجر می‌شدند» (یانـگ، ۱۹۰۶، ص ۲۶۱)، بهتـر می‌دیدند. بنابراین، اثبات مسـائل بنیادین، روشـن می‌سـاخت که چرا اثبات‌های ریاضی ضروری هسـتند و نشان می‌دادند که چه نوع استدلال‌هایی در اثبات استفاده می‌شوند. ارائهٔ آن اثبات‌ها برای معلمان هندسـه امری ضروری بود. چنین کاری فقط برای نشـان دادن درسـتی آن مسـائل نبود، بلکه مجوزی بـود که طبق آن معلمان می‌توانستند ادعا کنند که در کلاس درس، هنر اثبات را به‌طـور واقعی، تدریس می‌کنند. با این وجود، برای اطمینان از اینکه دانش‌آموزان واقعاً چنین هنر اثباتی را یـاد گرفته‌اند، لازم بود کـه دانش‌آموزان در تولید اثبات موفق عمل کنند. وجود تمرین‌ها در این جهت بود که دانش‌آموزان را کمک کند که با انجام بحث‌های سـاده‌تری، بدون اینکه موفقیتشان مشروط به یافتن ایدهٔ اثبات باشـد، جنبه‌های رسـمی اثبات را تمرین کنند. بنابراین، اگرچه هویت درس هندسـه براساس وابستگی متقابل بین تمرین‌ها و مسائل بنیادین شکل گرفت، اما شرط بقای آن، با فاصله گرفتن تمرین‌ها از مسائل بنیادین حاصل شد. همزمانیِ بین آن وابستگی و فاصله، موقعیتی مشـکل‌آفرین ایجاد کرد. در بخش بعـد توضیـح خواهم داد کـه چرا چنیـن وضعیتی مشکل‌آفرین بود.

اشاره داشتن مسائل بنیادین و تمرین‌ها به یک موضوع مشترک

بـا نمایان شـدن فاصله بین تمرین‌ها و مسـائل بنیادین، مشکلی که ایجاد می‌شد این بود که چه‌طور دو فعالیت متفاوت را مانند اثبات مسائل بنیادین و حل کردن تمرین‌ها، به یک موضوع مشترک در یادگیری، یعنی «هنـر اثبات کردن» ارتباط دهند؟ تمرین‌ها به لحاظ محتوایی بسیار متفاوت از مسائل بنیادین بودند. در حالی‌که مسـائل بنیادین اغلـب قضیه‌هایی مهم در هندسـه بودند و در اثبات مسـائل بعدی استفاده می‌شـدند، اما تمرین‌هایی بدیهی یا نتیجهٔ واضحی از یک حکم دیگر بودند و در فعالیت‌های دیگر استفاده‌ای نداشـتند. اثبات مسـائل بنیادین از نظر ریاضی باید به‌ترتیب انجام می‌شد، چراکه آن‌ها از لحاظ ریاضی به یکدیگر مرتبط بودند. اما اثبات حکم‌هایی که به‌عنوان تمرین مطرح شـده بودند، خیلی خسته‌کننده بود و حتی از نظر کسانی که متعصبانه اصرار به اثبات همه

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

چیز دارند، آن تمرین‌ها به اثبات نیازی نداشتند. برای قابل مقایسه نگه‌داشتن تمرین‌ها و مسائل بنیادین، باید اقدامی در مورد دستورالعمل‌های آموزشی صورت می‌گرفت، که این اقدام تزلزل و ناپایداری در موضوع مورد مطالعه را پدید آورد.

برای حل آن مشکل، اثبات به‌عنوان یک هدف و فعالیت در مبحث هندسه، باید که ورای تصور سنتی از آن، که فرایندی برای نشان دادن درستی یک حکم بود (لژاندر، ۱۸۴۱، ص۳)، توسعه یابد. تفاوت‌های بین مسائل بنیادین و تمرین‌ها باید کم‌رنگ شود و با به خدمت گرفتن هر دوی آن‌ها اهداف کلاس هندسهٔ دبیرستان، برآورده شود. به محض اینکه مسائل بنیادین و تمرین‌ها نمونه‌هایی از یک گونه در نظر گرفته شوند، می‌توان مسائل بنیادین را مقدمه‌ای برای تمرین‌ها دانست و در آن صورت تمرین‌ها را هم می‌توان معیاری معتبر برای ارزیابی میزان فهم دانش‌آموزان از مسائل بنیادین دانست. قالب اثبات دوستونی می‌تواند آن کار را انجام دهد، البته به این قیمت که اثبات را وسیله‌ای برای تدریس و یادگیری موضوعی بدانیم که بخش عمدهٔ آن در قالب یک کار منطقی انجام می‌گیرد تا در یک محتوای هندسی. حرکت از این قاعدهٔ ضمنی که اثبات به‌صورت کامل بیان شود (برای نمونه، ونت‌ورث، ۱۸۸۸)، به سمت توصیف کردن اثبات (برای نمونه، بمن و اسمیت، ۱۸۹۹) و سرانجام، بیان آن در قالب دوستونی (برای نمونه، شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳)، بر روی تثبیت درس هندسه تأثیر داشته است. این کار باعث شد که در نظر دانش‌آموزان شباهت‌های دو کار متفاوت اثبات تمرین‌ها و اثبات حکم‌های بنیادین پررنگ‌تر گردد و آن شباهت‌ها را بهتر و ساده‌تر تشخیص دهند.

تأکید زیاد بر جنبه‌های رسمی اثبات، اجازهٔ نوعی داد و ستد را بین معلم و دانش‌آموزان هنگام اثبات مسائل بنیادین و تمرین‌ها می‌داد. این موضوع پذیرفته شده بود که خوانندگان پخته و بالغ برای درک یک اثبات نیاز ندارند که دلیل تمام گزاره‌ها را ببینند. در هر صورت، این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به‌گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است (یانگ، ۱۹۰۶، ص۲۶۲).

نظر یانگ این‌طور بود که ارائه دادن هر گزاره به‌همراه دلیلش معادل این است که شرایطی که آن گزاره را به اثبات مرتبط می‌کند، شرح داده شود. اگر معلم مسئول باشد که چنان رهیافت‌هایی را به اشتراک بگذارد، می‌تواند دانش‌آموزان را قادر سازد تا اثبات مسائل بنیادین را کشف کنند. معلم با بحثی مشابه قادر است دانش‌آموزان را به سمت ارائهٔ اثبات‌های رسمی، که در قالب دوستونی تجسم یافته است، سوق دهد- معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح *اثبات* به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح *اثبات* به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به‌کار ببرد.

فرهنگ اثبات دوستونی در برآورده کردن توصیه‌هایی که دربارهٔ درس هندسه انجام شده بود موفق عمل کرد، اما این موفقیت رایگان به‌دست نیامد. در واقع جنبهٔ منطقی اثبات بسیار پررنگ شد و در عوض نقش اثبات در ساختن دانش از بین رفت. پرسش‌هایی در مورد مرتبط بودن و میزان سختی حکم‌های اثبات شده، و همچنین دربارهٔ میزان موفقیت و قابل استفاده بودن نظریه‌های مطرح شده، در حاشیه ماندند. رخ دادن این اتفاق به این خاطر نبود که چنین موضوع‌هایی طرفدار نداشتند (دیویی[۴]، ۱۹۰۳؛ مور[۵]، ۱۹۰۲؛ اسمیت، ۱۹۰۹)، بلکه شاید به این دلیل بود که در عمل، سازگار کردن چنان موضوعاتی با این الزام که در درس هندسه باید به همهٔ دانش‌آموزان هنر اثبات کردن تدریس شود، مشکل بود.

نتیجه‌گیری: از تاریخ اثبات در هندسه، چه می‌توانیم یاد بگیریم؟

واقعیت‌های تاریخی در مورد اینکه چگونه درس هندسه در دبیرستان، الزام تدریس هنر اثبات کردن را پذیرفت، شباهت‌هایی مهم و قابل تأمل را در مورد تأکیدهای اخیر بر وجود اثبات در آموزش ریاضی، خاطرنشان می‌سازد. یاد می‌گیریم که گنجاندن اثبات دانش‌آموزی به‌عنوان عضوی دستوری[۶] در برنامهٔ درسی، شامل فعالیت‌های مهمی است که طبیعتی نظام‌مند دارند. بسیاری از جنبه‌های برنامهٔ درسی هندسه درگیر پاسخ‌گویی به خواستهٔ کمیتهٔ ده نفره

معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح اثبات به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح اثبات به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به‌کار ببرد

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

بودنـد. به‌ویژه اینکه تغییـرات در نقش دانش‌آموزان به‌عنوان یادگیرنده‌ها، هم بر تغییرات ماهیت موضوع مورد مطالعه تأثیر گذاشت و هم از آن تأثیر پذیرفت. همچنین برای اینکه اثبـات دانش‌آموزی امکان‌پذیر شـود، نظامی از منابع باید برای آن‌ها فراهم می‌شـد تـا اثبات‌ها را با موفقیت انجام دهند. تجمیع تمام آن عناصر، یک درس هندسهٔ پایدار را با این جهت‌گیری که دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد بگیرند، تولید کرد و این امر در قالب دوسـتونی تجسم یافت. به هر حال، این پایداری هزینه‌ای در پی داشت- که عبارت بود از جدا سـازی اثبات کردن از سـاختن دانش. در حالی‌که تلاش‌های چشم‌گیری در جهت تغییر دادن نقش اثبات در هندسهٔ مدرسه‌ای در قرن بیستم اتفاق افتاده بود (برای نمونه، فاوست، ۱۹۳۸)، تقلیل اثبات به جنبهٔ منطقی و رسـمی آن، طی قریب به یک قرن اخیر تداوم داشـته اسـت. نظر یکی از دانشـجوهای خودم در دورهٔ کارشناسی، کم و بیش چنین موضوعی را بیان می‌کند: «ما در مدرسـه عمـل اثبات را انجام می‌دادیم، اما چیزی را اثبات نمی‌کردیم.»

وقتـی بـه توصیه‌هـای حاضـر مبنی بـر اینکه دانش‌آمـوزان باید در طول سـال‌های تحصیل خود مشغول اثبات کردن در تمام موضوعات باشند (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) فکر می‌کنیم، باید آن درس‌هایـی را کـه از تاریخ گرفته‌ایم در نظر داشـته باشـیم. نخسـت اینکه، توصیه‌های دسـتوری لزوماً قابلیت اجرا ندارند و برای اجرای آن‌ها باید یک‌سـری فعالیت‌ها انجام شود که عمدتاً ماهیتی نظام‌مند دارند. جهت تبدیل شدن اثبات به یک عنصر مهم و اصلی در ریاضی مدرسه‌ای، باید اقداماتی نیز در مورد بسیاری از عناصر دیگر انجام پذیرد. باید بپرسیم که آیا نگاه ما در مورد اثبات با درک ما از دانش‌آموز به‌عنوان یادگیرنده و موضوع‌هـای ریاضی مـورد مطالعـه، جایی که آن یادگیری قرار اسـت اتفاق بیفتد، همبسـتگی دارد؟ به‌علاوه، چه نوع از منابع و قواعدی جهت قادر ساختن دانش‌آموزان برای انجام اثبات لازم است؟ چنان اثباتی که سـزاوار جایگاهی در دروس مدرسه‌ای باشد و در ضمن با اهدافی که ما برای یادگیری دانش‌آموزان طی فعالیت‌هـای کلاسـی در درس ریاضی در نظر داریم، همبستگی داشته باشد.

درس دوم این اسـت که اگـر می‌خواهیم در مورد مشغول شدن دانش‌آموزان به امر اثبات صحبت کنیم، خطرنـاک خواهد بود که چنین بحث و صحبتی بدون

این باور که تمام دانش‌آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند اما از همهٔ آن‌ها انتظار نرود که دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود

توجه به موضوع توسـعهٔ دانش دربارهٔ ایده‌های ریاضی ویژه و یافتن نتایجی جالب در مورد آن ایده‌ها، باشد. از لاکاتوش (۱۹۷۶، ۱۹۷۸) یاد می‌گیریم که اثبات ریاضی یک فرایند منطقی کلی نیست، بلکه ابزاری روشمند و بنیادی جهت توسعه و شکل دادن مفاهیم است تا بدانیم که کدام یک از قضیه‌ها می‌تواند درست باشد و چرا؟ اگر نقش ارزشمند اثبات به‌عنوان ابزاری برای خلق دانش، شایستهٔ جایگاهی در کلاس‌های درسی باشد- که فکر می‌کنم همین‌طور باشد- لازم است نسبت به این تصور بدگمان باشیم که اثبات چیزی مستقل از زمینهٔ فعالیت ریاضی است که در آنجا استفاده می‌شود. اثبات و انجام آن، بسته به پرسشی که مطرح می‌شود و دانش و ابزاری که در دسترس افرادی است که قصد حل آن پرسش را دارند، ممکن است متفاوت به‌نظر برسد. ضروری بودن وجود اثبات در آموزش ریاضی، فقط به این دلیل نیست که فرایندی ارزشـمند برای درگیر کردن دانش‌آموزان است (مانند توسعهٔ ظرفیت دانش‌آموزان در استدلال‌های ریاضی)، بلکـه این دلیل که یکی از جنبه‌های ضروری در ساختن دانش است، بسیار مهم‌تر است. این مطالعهٔ تاریخی دربارهٔ تحول و توسعهٔ اثبات در آموزش آمریکا، پیشنهاد می‌کند که در نظر گرفتن اثبات به‌عنوان یک شـی مجزای مورد مطالعه، دانش‌آموزان را در استفاده از اثبات به‌عنوان ابزاری برای دانستن، تواناتر نمی‌سازد؛ بلکه تمرین برای اثبات کردن را از تمرین برای دانستن جدا می‌کند.

منصفانه نیست که تحول و تکامل فرهنگ اثبات دوسـتونی را با معیارهای امـروزی قضاوت کنیم. به همان اندازه غیرمنصفانه اسـت کـه تأکید دوباره بر حضور اثبات در آمـوزش را به‌عنوان توجیهی جهت اصـرار بر آمـوزش و یادگیری «هنـر اثبات کردن» بدانیم. اصول و اسـتانداردها (شورای معلمان ریاضی آمریـکا، ۲۰۰۰) عناصری را فراهم کـرد که بتوان کلاسـی را تصور کرد کـه در آن همـکاری فعالانهٔ دانش‌آمـوزان در تولیـد ادعاهایـی در دانش با این مسـئولیت همراه شود که در مورد منطقی بودن آن

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

ادعاهــا بحث انجام شــود. در نتیجه لازم اســت که ابزارهایی را برای اثبات و اســتدلالِ اســتاندارد مهیا کنیــم که وقتی از دانش‌آموزان خواســته می‌شــود اســتدلال یا اثباتی ارائه کنند، بیــن محتوا و قالب، تعادل برقرار گردد. پرسش مهم و حیاتی این نیست کــه آیا اســتدلال‌های دانش‌آمــوزان در قالبی ارائه شــده‌اند که مورد تأیید منطق‌دان‌ها باشد، بلکه این نکته مهم اســت که آیا دانش‌آموزان با اشیاء ریاضی که جامعهٔ مطلعین[7] می‌خواهند دربارهٔ آن‌ها بیشــتر بدانند، سازگار شده‌اند یا نه.

پی‌نوشت‌ها

1. Hilbert
2. Common Sense
3. George Carson
4. Dewey
5. Moore
6. Normative
7.Community of Knowers

منابع

1. Baker, J.: 1969, ‘Minority report to the national council of education’, in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 56–59. (Original work published 1893)
2. Ball, D.L. and Bass, H.: 2000, ‘Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom’, in D. Phillips (ed.), *Constructivism in Education: Yearbook of the National Society for the Study of Education*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 193–224.
3. Beman, W. and Smith, D.E.: 1899, *New Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
4. Carson, G.: 1913, *Essays on Mathematical Education*, Ginn, London.
5. Chauvenet, W.: 1870, *A Treatise on Elementary Geometry with Appendices containing a Collection of Exercises for Students and an Introduction to Modern Geometry*, Lippincot, Philadelphia.
6. Chauvenet, W.: 1898, *Treatise on Elementary Geometry*, W. Byerly (ed.), Lippincot, Philadelphia. (Original work published 1887)
7. Davies, C.: 1850, *The Logic and Utility of Mathematics, with the Best Methods of Instruction Explained and Illustrated*, Barnes, New York.
8. Dewey, J.: 1903, ‘The psychological and the logical in teaching geometry’, *Educational Review* 25, 387–399.
9. Donoghue, E.: 1987, *The Origins of a Professional Mathematics Education Program at Teachers College*, Unpublished doctoral dissertation. Columbia University Teachers College.
10. Eliot, C. et al.: 1969, ‘Report of the Committee of Ten to the National Education Association’, in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 3–5. (Original work published 1893)
11. Eliot, C.: 1905, ‘The fundamental assumptions in the report of the Committee of Ten (1893)’, *Educational Review* 30, 325–343.
12. Fawcett, H.: 1938, *The Nature of Proof – The National Council of Teachers of Mathematics Thirtheenth Yearbook,* Bureau of Publications of Teachers College, Columbia University, New York.
13. Greenleaf, B.: 1858, *Elements of Geometry with Practical Applications to Mensuration,* Robert Davis, Boston.
14. Halsted, G.: 1893, ‘The old and the new geometry’, *Educational Review* 6, 144–157.
15. Harris, W.T.: 1894, ‘The committee of ten on secondary schools’, Educational Review 7, 1–10.
16. Hilbert, D.: 1971, *Foundations of Geometry*, L. Unger, Trans., P. Bernays, Rev.. Open Court, La Salle, IL. (Original work published in German in 1899)
17. Hill, F.: 1895, ‘The educational value of mathematics’, *Educational Review* 9, 349–358.
18. Howson, G.: 1982, *A History of Mathematics Education in England,* Cambridge University Press, Cambridge.
19. Jones, P.: 1944, ‘Early American geometry’, *The Mathematics Teacher* 37, 3–11.
20. Kilpatrick, J.: 1992, ‘A history of research in mathematics education’, in D. Grouws (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, pp. 3–38.
21. Kliebard, H.: 1986, *The Struggle for the American Curriculum* 1893–1958, Routledge and Kegan Paul, Boston.
22. Kline, M.: 1965, ‘View of the new math’, in E. Moise, A. Calandra, R. Davis, M. Kline and H. Bacon (eds.), *Five Views of the “New Math’*, (Council for Basic Education, Washington, DC, pp. 13–16.
23. Krug, E.: 1964, *The Shaping of the American High School*, Harper and Row, New York.
24. Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations: The Logic ofMathematical Discovery*, J.Worrall and E. Zahar (eds.), Cambridge University Press, Cambridge.
25. Lakatos, I.: 1978, ‘A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?’ in J. Worrall and G. Currie (eds.), *Imre Lakatos. Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*,

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

40. Schultze, A.: 1912, *The Teaching of Mathematics in Secondary Schools,* MacMillan, New York.
41. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1901, *Plane and Solid Geometry*, MacMillan, New York.
42. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1913, *Plane Geometry*, A. Schultze, (rev.),MacMillan, New York.
43. Shibli, J.: 1932, *Recent Developments in the Teaching of Geometry*, Author, State College, PA.
44. Shutts, G.: 1892, 'Old and new methods in geometry', *Educational Review* 3, 264–266.
45. Simson, R.: 1756, *The Elements of Euclid, viz. the First Six Books together with the Eleventh and Twelfth. In this edition, the Errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these Books, are corrected, and some of Euclid's Demonstrations are Restored,* Foulis, Glasgow.
46. Sizer, T.: 1964, *Secondary Schools at the Turn of the Century*, Yale University Press, New Haven.
47. Slaught, H. et al.: 1912, 'Final report of the National Committee of Fifteen on geometry syllabus', *The Mathematics Teacher* 5, 46–131.
48. Smith, D.E.: 1911, *The Teaching of Geometry*, Ginn, Boston.
49. Smith, E.R.: 1909, *Plane Geometry Developed by the Syllabus Method,* American Book Co, New York.
50. Stanic, G.M.A.: 1983, *Why Teach Mathematics? A Historical Study of the Justification Question*, Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin, Madison.
51. Stanic, G.M.A.: 1987, 'Mathematics education in the United States at the beginning of the twentieth century', in T. Popkewitz (ed.), *The Formation of School Subjects: The Struggle for Creating an American Institution*, Falmer, New York, pp. 145–175.
52. Wells, W.: 1887, *The Elements of Geometry*, Leach, Shewell, and Sanborn, Boston.
53. Wells, W.: 1908, *New Plane and Solid Geometry*, Heath, Boston.
54. Wentworth, G.: 1878, *Elements of Geometry*, Ginn and Heath, Boston.
55. Wentworth, G.: 1888, *A Text-Book of Geometry*, Ginn, Boston.
56. Wentworth, G.: 1899, *Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
57. Young, J.W.A. et al.: 1899, 'Report of the Committee of the Chicago section of the American Mathematical Society', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July, 1899*, NEA, Chicago, pp. 135–149.
58. Young, J.W.A.: 1906, *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School*, Longmans, Green, and Co, New York.
Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 2, pp. 24–42.
(Original work published in 1967)
26. Legendre, A.-M.: 1819, *Elements of Geometry,* J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard and Metcalf, Cambridge, New England.
27. Legendre, A.-M.: 1841, *Elements of Geometry*, J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard Gray, Boston.
28. Legendre, A.-M.: 1848, *Elements of Geometry and Trigonometry*, D. Brewster (trans.), C. Davies (rev. and ed.), Barnes, New York.
29. Moore, E.H.: 1926, 'On the foundations of mathematics', in C. Austin, H. English, W. Betz, W. Eells and F. Touton (eds.), *A General Ssurvey of Progress in the Last Twenty- Five Years: First Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC, pp. 32–57. (Original speech delivered in 1902)
30. NCTM: 2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, Author, Reston, VA.
31. Newcomb, S. et al.: 1893, 'Reports of the conferences: Mathematics', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New
York, pp. 104–116. (Original work published 1893)
32. Nightingale, A. et al.: 1899, 'Report of the Committee on College entrance requirements', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July*, 1899, NEA, Chicago, pp. 5–49.
33. Playfair, J.: 1860, *Elements of Geometry; Containing the First Six Books of Euclid, with a Supplement on the Quadrature of the Circle, and the Geometry of Solids. To which are Added Elements of Plane and Spherical Trigonometry*, Collins and Hannay, New York. (Original work published 1795)
34. Poincaré, H.: 1899, 'La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement', *L'Enseignement Mathématique* 1, 157–162.
35. Quast, W.G.: 1968, *Geometry in the High Schools of the United States: An Historical Analysis from 1890 to 1966*, Unpublished doctoral dissertation. Rutgers – The State University of New Jersey, New Brunswick.
36. Rav, Y.: 1999, 'Why do we prove theorems?' *Philosophia Mathematica* 7, 5–41.
37. Ravitch, D.: 2000, Left Back: *A Century of Failed School Reforms*, Simon and Shuster, New York.
38. Richards, E.: 1892, 'Old and new methods in elementary geometry', *Educational Review* 3, 31–39.
39. Schoenfeld, A.: 1987, 'On having and using geometrical knowledge', in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 225–264.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

گروه‌های آموزشی چه می‌کنند؟

لازم است در آموزش ریاضی بیشتر از فکر استفاده شود تا حافظه

میرزاجلیلی

کلیدواژه‌ها: تدریس ریاضی، فکر کردن، حفظ کردن

خانم آموزگاری تعریف می‌کرد که دانش‌آموزان اصرار داشتند من سؤالات امتحان را از مسائل کتابشان بدهم. در اوایل خدمت من به حرف آن‌ها گوش می‌دادم و مسائل امتحانی را عین مسائل کتاب می‌دادم و در عمل مشاهده می‌کردم که نمرهٔ اکثر دانش‌آموزان بالاتر از ۱۶ است و نمرات یک رقمی خیلی کم داریم.

در یک امتحان تصمیم گرفتم که پیشنهاد کلاس را نادیده گرفته مسائل را خارج از کتاب طرح نمایم، مسائلی که در آن‌ها تنها جای اعداد جابه‌جا شده یا جملات تغییر کرده بود، مثلاً به‌جای آنکه بگویم اختلاف دو عدد a است نوشتم تفاضل دو عدد a است پس از تصحیح اوراق، دیدم سطح نمرات خیلی خیلی پایین آمده و نمرات زیر ۱۰ فراوان است!

به فکر فرو رفتم و در پی چاره برآمدم، ابتدا علت را از خود دانش‌آموزان پرسیدم؛ آن‌ها تنها جواب می‌دادند خانم سؤالات مشکل بود! بعداً موضوع را با رئیس مدرسه در میان گذاشتم او پاسخ داد که معلمین کلاس‌های سوم، چهارم و پنجم بیشتر سؤالات امتحان را عین مسائل کتاب انتخاب می‌کنند (که البته این مسائل قبلاً به‌وسیله معلم در کلاس حل شده است) و بچه‌ها حل این مسائل را از بر می‌کنند و در امتحان می‌نویسند و هیچ عادت نکرده‌اند که در ریاضی از مغز و فکر خود استفاده کنند یا جملات مسئله را در ذهن خود تجزیه و تحلیل نمایند و معنا و مفهوم مطلب را درک کنند که در مسئله چه مفروضاتی داده شده و چه چیز از آن‌ها خواسته شده است.

خانم معلم گفت: موضوع را در شورای معلمان مدرسه مطرح کردم دیدم همهٔ آن‌ها با همین مشکل مواجه‌اند! در شورا از رئیس مدرسه خواستم که در این زمینه چاره‌ای بیاندیشد و از راهنمایان تعلیماتی کمک بگیرد، پیشنهاد دادم که برای معلمین دوره‌های بازآموزی گذاشته شود تا در آن دوره‌ها به معلمین آموزش بدهند که به بچه‌ها یاد دهند در فرا گرفتن ریاضیات، برخلاف درس‌های تاریخ و جغرافیا، از مغز و فکر خود استفاده کنند و در حل مسائل بیندیشند، مفروضات مسئله و خواسته‌های آن را از هم تشخیص دهند و سعی کنند با استفاده از مفروضات داده شده مجهول خواسته شده را پیدا کنند.

در آن سال این موضوع در منطقه هم انعکاس پیدا کرد و رئیس منطقه اذعان کرد که فرزند خودش نیز به همین درد مبتلاست و در حل مسائل ریاضی عاجز است در حالی‌که سایر درس‌های او ۲۰ می‌شود. فعالیت‌هایی در این زمینه آغاز شد که نسبتاً نتیجه‌بخش بود.

سؤال: شما در تدریس خود از کدام روش استفاده می‌کنید؟ فکر کردن یا حفظ کردن؟

وقتی فکر کردن و اندیشیدن عملی می‌شود که معلم دانش‌آموزان را در درس خود شرکت دهد و سعی کند جواب سؤالات را با راهنمایی‌های لازم، خود دانش‌آموزان پیدا کنند و کشف نمایند؛ به عبارت دیگر، تا سؤالی را مطرح می‌کند خودش بلافاصله پاسخ ندهد و بچه‌ها را در یافتن پاسخ به کار گیرد یعنی از روش مشارکتی در

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

کلاس استفاده کند.

معلم دیگری تعریف می‌کرد که در کلاس دوم دبستان تدریس می‌کردم و می‌دیدم که بچه‌ها مسائل داده شده را در دفتر خود درست حل کرده‌اند اما وقتی آن‌ها را پای تخته فرا می‌خوانم که حل کنند درمی‌مانند. پس از پرس‌وجو، یکی از دانش‌آموزان گفت خانم این‌ها را مادرم حل کرده است! و این یک تذکر بسیار مهمی برای والدین است که اگر فرزندانشان سؤالی مطرح کردند آن‌ها فوری جواب ندهند یا مسئله را حل نکنند، چه فرزند از همان کودکی عادت به داشتن حل آماده می‌کند و هیچ‌گاه فکر خود را به‌کار نمی‌اندازد و این نحوهٔ اندیشیدن تا پایان تحصیلات متوسطه ادامه پیدا می‌کند.

وقتی فرزندی از مادر یا پدر یا برادر بزرگ‌تر خود سؤالی می‌کند یا کمک می‌گیرد، آن‌ها باید قدم به قدم او را راهنمایی کنند تا خودش جواب سؤال را بیابد و به این روش صحیح آموزش ریاضی که او همیشه باید فکر کند و مغزش را به‌کار اندازد عادت کند تا در کلاس‌های بالاتر دچار دردسر و مشکل نشود.

در همین زمینه باز دبیری روایت می‌کرد که دانش‌آموزی را پای تخته‌سیاه خواندم تا مسئله‌ای را حل کند و دفترش را هم برای استفاده کردن من، همراه بیاورد. او ابتدا دفترش را به من داد و بعد پای تخته رفت. دفتر را برگ زدم و نگاه کردم دیدم همهٔ مسائل را صحیح حل کرده است. از دانش‌آموزان خواستم تمرین ۷ را حل کند (تا ۶ قبلاً حل شده بود) او هرچه زور زد نتوانست حل کند. گفتم تمرین شماره ۵ را که همین الان دوست شما حل کرد حل کن! باز نتوانست از او سؤال کردم که این تمرینات که در دفترت درست حل شده است! پس چرا نمی‌توانی حل کنی؟ او ساکت ماند، یکی از همکلاسی‌هایش گفت: آقا من علت را بگویم؟ گفتم بگو. گفت آقا حمید آخر هر سال و بعد از امتحانات دفتر پاکنویس شدهٔ مسائل دوستش را می‌گیرد و در طول سال تحصیلی از این دفتر استفاده می‌کند و حل مسائل را عیناً در دفتر جدید پاک‌نویس می‌کند ولی یاد نمی‌گیرد؛ یعنی از مغز و فکر خود استفاده نمی‌کند.

دانش‌آموزی که به هر شکل، بدین ترتیب بالا می‌آید، در امتحانات رقابتی، مثل کنکور سخت درمی‌افتد؛ چه می‌بیند هرچه زحمت می‌کشد موفق نمی‌شود! علتش این است که خیلی از سؤالات کنکور فکری است واگر دانش‌آموز فکر خود را به‌کار نیاندازد و فقط به‌دنبال قوانین کلاسیک حفظ شده برود عقب می‌افتد؛ مثلا در مورد معادلهٔ:

$$(2x+1)^2+(x-2)^2=-(x-1)^2$$

کدام درست است؟

الف: $x=-\frac{5}{2}$

ب: $x=\frac{5}{2}$

ج: ریشه ندارد؟

د. x منفی است

دانش‌آموزی که با حافظه کار کرده فوری دست به‌کار شده پرانتزها را به توان ۲ می‌رساند، و یک سه جمله‌ای درجه ۲ به‌دست می‌آورد و سپس این معادلهٔ درجه۲ را طبق فرمول حل می‌کند و این راه اگرچه درست هم باشد وقت‌گیر است و مسلماً طراح سؤال این راه مورد نظرش نبوده است.

ولی دانش‌آموزی که با فکر و مغز خود کار می‌کند فوری پرانتز طرف راست را به طرف چپ می‌برد و می‌نویسد:

$$(2x+1)^2+(x-2)^2+(x-1)^2=0$$

و می‌گوید مجموع سه عبارت مثبت برابر صفر شده است و این وقتی روی می‌دهد که هر کدام از پرانتزها صفر باشد؛ لذا می‌نویسد

$$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$x-1=0 \rightarrow x=+1$$

و لذا مجموع آن‌ها برابر می‌شود:

$$-\frac{1}{2}+2+1=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

و گزینه «ب» درست است

یا در مورد سؤال، اگر a و b مثبت باشند $\sqrt{\frac{a}{-b}}$ جواب دارد؟

شاگردی که با فکر کار کرده فوری می نویسد:

$$\sqrt{\frac{a}{-b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

و $\sqrt{-\frac{a}{b}}$ یک عدد منفی است و دارای ریشه زوج نیست

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

و یا هر گاه، | | نماد قدرمطلق و [ ] نماد کوچک‌ترین جزء صحیح باشد کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

الف- $|-a| = -|a|$

ب- $\sqrt[4]{-a} = -\sqrt[4]{a}$

ج- $[-a] = -[a]$

د- $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

شاگردی که با فکر کار می‌کند بدون دست به کار شدن عملیات روی جواب‌های الف، ب و ج فوری می‌گوید جواب «د» درست است اما کسی که با حافظه کار می‌کند می‌خواهد یکی‌یکی تساوی‌های را حل کند و این وقت زیادی از او می‌گیرد.

و یا این سؤال: آیا تساوی $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[2]{a^3}$ همیشه درست است؟

اگر دانش‌آموزی فکر نکند فوری جواب مثبت می‌دهد، زیرا، تصور می‌کند که می‌تواند همیشه فرجهٔ رادیکال و توان عدد زیر رادیکال را بر یک عدد (در صورت امکان) تقسیم کند ولی اگر فکر خود را به کار بیاندازد؛ متوجه می‌شود که در $\sqrt[4]{a^6}$ ، a چه مثبت باشد چه منفی، چون بر توان زوج می‌رسد مثبت می‌شود و ریشه زوج آن بامعناست.

اما اگر a منفی باشد پس از تقسیم فرجه و توان بر دو به رادیکال $\sqrt[2]{a^3}$ می‌رسیم که اگر a از اول منفی فرض شود، $\sqrt[2]{a^3}$ جواب ندارد.

دبیری تعریف می‌کرد پس از تدریس نامعادلات گنگ از کلاس خواستم که فوری جواب دهند آیا نامعادلهٔ $+5<-2(x-1)^2$

جواب دارد یا نه؟ همهٔ دانش‌آموزان کاغذ و قلم برداشتند و طرف راست را به توان ۲ رساندند و عدد ۵ را نیز به طرف راست نامساوی بردند و طبق قانون تعیین علامت سه‌جمله‌ای عمل کردند اما فقط یکی دو نفر فوری جواب دادند نامعادله جواب ندارد؛ زیرا، طرف راست آن همیشه منفی است و عدد مثبت ۵ نمی‌تواند کوچک‌تر از یک عدد منفی باشد.

پدری تعریف می‌کرد که فرزندش در سال اول راهنمایی در ریاضیات سخت مشکل داشت و از معلمش شکایت می‌کرد که همیشه سؤالات مشکل و خارج از کتاب می‌دهد و من نمی‌توانم حل کنم! می‌گفت نه‌تنها من بلکه بیشتر بچه‌های کلاس نمرهٔ بد می‌گیرند؛ لذا اصرار داشت که دیگر سر کلاس ریاضی شرکت نکند یا مدرسه‌اش را عوض نماید! بالاخره پس از مشورت با دوستان و صاحب‌نظران و تحقیق فراوان یکی از آشنایان یک دبیر ریاضی راهنمایی را که نحوهٔ فکر کردن را یاد می‌داد به ما معرفی کرد، این دبیر خصوصی ظرف ۵ یا ۶ ماه با برگشتن به کتاب‌های ابتدایی و شیوه یاد گرفتن مطالب آن به‌طور صحیح و منطقی، توانست نحوهٔ تفکر این بچه و نظرش راجع‌به یادگیری ریاضی را زیر و رو کند و او را، قبل از اینکه قلم روی کاغذ ببرد، به فکر کردن وا دارد و این اندیشه که ریاضی را عدهٔ خاصی یاد می‌گیرند نه همه دانش‌آموزان از سرش بیرون نماید.

امروزه مسلم و ثابت شده است که همه دانش‌آموزان استعداد یادگیری ریاضی را دارند به شرطی که از اول با یادگیری آن به‌طور درست برخورد کنند. البته وظیفه مسئولین آموزش‌وپرورش نیز هست که معلمین را مرتب در دوره‌های بازآموزی شرکت دهند و پیوسته یادآورشان شوند که به بچه‌ها نحوهٔ استفاده از مغز و فکر خود در ریاضی را یاد دهند نه بدین طریق که مطالب را طوطی‌وار مثل تاریخ و جغرافیا به ذهن بسپارند.

نتیجه

والدینی که انتظار دارند ریاضی بچه‌هایشان در کلاس‌های بالا خوب باشد و در کنکور سؤالات را صحیح و سریع پاسخ دهند؛ لازم است از همان کلاس اول ابتدایی و شروع کار، نحوهٔ فکر کردن و اندیشیدن و از مغز استفاده کردن را به او یاد دهند و اگر در درس به او کمک می‌دهند در جواب سؤالات ولی، او را با پرسش و جواب راهنمایی کنند که خودش جواب سؤال را پیدا و کشف نماید و از پاسخ فوری دادن و یا راه‌حل مسئله را بلافاصله در اختیارش گذاشتن خودداری کنند چه با این کار به او از نظر یادگیری علمی لطمه وارد می‌سازند.

البته تشویق و امتیاز دادن به بچه‌ها از طرف والدین، می‌تواند در یادگیری آن‌ها مؤثر واقع شود و یا در مدرسه ایجاد رقابت بین کلاس‌های شعبه‌های مختلف و همچنین دانش‌آموزان یک کلاس در پیشرفت دانش‌آموزان بی‌تأثیر نیست.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دنیا که آخر نشده است!

پای صحبت دانش‌آموزان داوطلب ورود به دانشگاه‌ها (کنکوری‌ها)

میرزا جلیلی
پیشکسوت ریاضی و عضو هیئت تحریریه مجله

کلیدواژه‌ها: آموزش ریاضی، کنکور، تست

در امتحان ورودی دانشگاه‌ها برای سال تحصیلی ۹۴ـ۹۳، رتبهٔ فرزند یکی از خویشانم ۵۰۰۰ اعلام شده بود. این دانش‌آموز پس از اطلاع از رتبهٔ خود، عصبی شده و در نگرانی شدید به سر می‌برد و دیگر حوصلهٔ هیچ کاری نداشت، چه، اطمینان داشت که او با این رتبه در هیچ‌یک از دانشگاه‌های دولتی در رشتهٔ مهندسی مورد نظرش قبول نخواهد شد. پدرش گفت که یک کلمه حرف با او نمی‌توان زد، چون داد و فریاد راه می‌اندازد و به زمین و زمان بد می‌گوید. این نوجوان را که کاملاً روحیه‌اش را از دست داده و خود را باخته بود پیش من فرستادند تا با استفاده از تجربیات و نفوذ کلامم، از نظر روانی او را تسلی داده راهنمایی کنم و به آینده امیدوارش سازم شاید قدری آرام بگیرد. در ملاقات با من، او می‌گفت که تمام جزوات و کتاب‌های کنکور را در طول سال تحصیلی خوانده است، در کلاس‌های کنکور معروف شهر شرکت کرده است، هزاران نکته از سؤالات کنکوری را یادداشت و مطالعه کرده و هزاران تست حل کرده است، یک سال تمام شبانه‌روز، در ایام تعطیل و غیرتعطیل، درس خوانده و متحمل زحمت و کم‌خوابی شده است به امید اینکه به هدف خود برسد و رتبه‌اش در کنکور زیر ۵۰۰ شود. می‌گفت اکنون با رتبه ۵۰۰۰ کجا می‌توانم بروم!؟ امید به زندگی را از دست داده‌ام؛ از همه بدتر این‌که دوستان و خویشانم تصور می‌کنند که من کودن، تنبل و سهل‌انگار بوده‌ام که نتوانسته‌ام رتبهٔ بهتری در کنکور به‌دست آورم؛ حالا شما می‌گویید من چکار باید بکنم؟ حتماً باید دنبال کار و کسبی بروم؟!

من پس از استماع حرف‌های این نوجوان، در حالی‌که برای او ناراحت شده بودم، شروع به تسلی و دلداری وی کردم و دو سه مثال از خویشان دیگر که در سال‌های قبل با چنین مشکلی برخورد کرده و دلسرد نشده بودند و در سال‌های بعد موفق شده و وارد دانشگاه شده بودند ذکر کردم و به او گفتم که زندگی مجموعه‌ای از موفقیت‌ها و شکست‌هاست و معمولاً بعد از هر شکست یک موفقیت در پیش است. باید تحمل و صبر داشته باشید.

صبر و ظفر هردو دوستان قدیم‌اند
بر اثر صبر نوبت ظفر آید

گفتم شما روحیه خود را حفظ کنید و آرام بگیرید وگرنه ممکن است مریض شوید!

گفتم دنیا که آخر نشده است! شما جوان هستید و هنوز خیلی فرصت دارید! پس از آن نام مدرسه و دبیران ریاضی او را پرسیدم. ضمن نام بردن آن‌ها متوجه شدم که اتفاقاً یکی از این دبیران از معلمان نسبتاً قدیمی و

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

با من آشناست. از این پسر خواستم شمارهٔ تلفن مرا به آن دبیر بدهد تا با من تماس بگیرد؛ چه واقعاً خودم هم علاقمند شـدم تا از شرایط موجود و حاکم بر کنکورها در حال حاضر اطلاعاتی کسـب کنم و این اطلاعات را در اختیار والدین این دانش‌آموز و دیگران قرار بدهم و جواب قانع‌کننده‌ای هم برای امثال این پسر پیدا کنم و از علت شکست آن‌ها، از نظر علمی، آگاه شوم.

می‌دانسـتم آن دبیـر موفق بیش از ۲۰ سـال در صحنه‌هـای آموزشـی کشـور و در مـدارس مختلف شهرسـتان‌ها و تهران مشـغول فعالیت بوده و ناظر و شـاهد پیاده شـدن چند نظام آموزشی در کشور بوده است. همچنین بر گذر هزاران دانش‌آموز از دبیرستان به دانشگاه نظارت و مطالعه داشته است.

او در تمـاس تلفنی با من چنیـن مطرح کرد که «من در سال‌های اخیر بر قبولی دانش‌آموزانم در کنکور دقت کرده‌ام و در این زمینه مطالعه و تحقیق نموده‌ام و نتایج حاصل از این تحقیقات و بررسـی‌ها را با نتیجهٔ قبولـی دانش‌آموزان زمان تحصیل خـودم که همین مسیر را پیموده بودند مقایسه نموده‌ام و به نتایج قابل ملاحظه‌ای رسیده‌ام.» سپس اضافه کرد: «این یافته‌ها را در سـمینارهای آموزشی کشـور، با سایر همکاران دبیر در میان گذاشـته‌ام و آن‌ها نظـرم را کاملاً تأیید کرده‌انـد. می‌گفت:« از نظر علمی من متوجه شـده‌ام که مشکل کار این قبیل دانش‌آموزان (نظیر دانش‌آموز خویش شـما) در کجاسـت، و چگونه می‌توان به این قبیـل دانش‌آموزان کمک کرد و به احساسـات پاک و زاینده آن‌ها پاسـخ قانع‌کننـده‌ای داد. اما این یافته‌ها: بیشتر دانش‌آموزان در کلاس‌های اول و دوم دبیرستان، بعضی از مطالب کلیدی و پایه‌ای ریاضی را با دقت‌های محاسـباتی، که لازمـهٔ ادامهٔ کارهای بعـدی آن‌ها در کلاس‌های سوم و چهارم است، خوب پخته نمی‌کنند، یعنی این مطالب برای آن‌ها کاملاً جا نمی‌افتد و با این ضعف و نارسـایی به کلاس‌های بالا و پیش‌دانشگاهی می‌رسـند. دبیرانی هم که در سال‌های آخر دبیرستان مشـغول تدریس‌اند، معمولاً درس خود را بر این مبنا قرار می‌دهند که دانش‌آموزان این مطالب پایه و اساسی را در کلاس‌هـای قبل یاد گرفته‌اند، لذا آن‌ها نیز وقت زیادی در این زمینه صرف نمی‌کنند تازه اگر هم متوجه مشـکل کار بشـوند؛ حجم کار و محدودیت زمانی به آنان اجـازهٔ پرداختن به مطالب گذشـته را نمی‌دهد. تنها با یک اشـارهٔ مختصر به آن‌ها، درس خود را ادامه می‌دهد.» وی اضافه کرد: «خود دانش‌آموز هم به علت وجود دروس متعدد و پرحجم و تشویش و دلهره کنکور قدری شتاب‌زده شده بیشتر وقت خود را در این سال‌ها صرف مطالعه جزوات کنکور و یادداشت کردن نکته‌های کنکـوری که در کلاس‌های مربوطـه مطرح می‌گردد، می‌کند در نتیجه او در یادگیری ریاضی مسیر طبیعی آموزش را طی نمی‌نماید، به عبارت دیگر، او هنوز ابزار کار برای یادگیری مفاهیم پیشـرفته در دست نداشته که باب مطالب پیشرفته و مسائل کنکور بر وی گشوده می‌شـود.» اکنون براسـاس آنچه آن دوست دبیر من گفت مطالبم را ادامه می‌دهم.

راستی! شما فکر می‌کنید چند درصد از دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی قادرند محاسبات مقدماتی زیر را درست انجام دهند.

- $\sqrt{-x^2}$ ، $-\sqrt{-x^2}$ ، $-\sqrt{-x}$
- $\sqrt{|x|}$ ، $\left|-x^2\right|$ ، $-|-x|$ ، $-|x|$
- $\left[\sqrt{-2x}\right]$ ، $\left[x^2\right]$ ، $[-2x]$ ، $[|x|]$ (نمـاد [ ] برای کوچک‌ترین جزء صحیح به‌کار رفته است)
- $\left[2x^2-2x-1\right]$ ، $[|x|]$
- برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{|-x|}{\sqrt{1-[x]}}$ ، کدام است؟
- هـرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بـردار موازی باشـند حاصل $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ، کدام است؟

در حالی‌که وقتی به سؤالات کنکور نظر می‌افکنید می‌بینید بیشتر سؤالات در همین مایه‌ها طرح شده و

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

نیاز به دانستن مفاهیم و محاسبات مقدماتی دارد، مثلاً:

محاسبه حد تابع: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{[x]}{\sqrt{x-|x|}}$

ـ یا پیوستگی تابع حقیقی $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-[-x]}}$ در بازهٔ $(-1,1)$، (بازه باز است)

ـ یا مشتق‌پذیری تابع $y = \left||x|-1\right|^2$ در بازهٔ $[-1,0]$ (بازه بسته است)

ـ یا تابع:

$y = \begin{cases} [2x] & |x|<2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases}$، چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

که پاسخ صحیح دادن به آن‌ها نیاز به تسلط بر محاسبات کلیدی و مفاهیم نخستین دارد؛ نتیجه:

ـ دانش‌آموزان برای بالا بردن درصد پاسخ‌های صحیح ریاضی و در نتیجه موفق شدن در کنکور نیاز به دانستن و تسلط بر مفاهیم اولیه و پایه‌ای و محاسبات ظریف ریاضی در سال‌های اول و دوم دبیرستان دارند.

ـ در تألیف کتب ریاضی سال‌های اول و دوم به مراحل و اصول آموزش ریاضی که شامل مفهوم، تکنیک محاسبه، رسیدن به سرعت و مهارت در آن‌ها و کاربرد است باید توجه کامل شود.

ـ در هر جلسه درس وقتی یک مفهوم کلیدی مطرح می‌شود آن مفهوم به‌وسیلهٔ دبیر کاملاً پخته توجیه و تشریح شده و با طرح مثال‌های مختلف طرز محاسبات ظریف ریاضی یاد داده شود.

ـ با توجه به جوّ موجود آموزشی و گرایش خارق‌العادهٔ دانش‌آموزان به تست، در کتاب‌های اول و دوم علاوه‌بر مثال‌های فراوان، «تست‌های هدف‌داری» نیز آورده شود؛ این تست‌ها باید طوری انتخاب شوند که بتوان فکر پشت هر تست نیز تشخیص داده شود و وسیلهٔ دبیر توجیه گردد که مثلاً تست‌های شماره ... تست موقعیتی است و اصلاً نیاز به محاسبه ندارد، تست‌های شماره .... توجیه مفهوم با استفاده از تصویر و شکل است و نیاز به محاسبه ندارد، تست‌های شماره ... محاسباتی است و نیاز به دقت در محاسبه دارد و ...

خلاصه انتخاب صحیح تست‌های کتاب به‌منظور تأمین دو هدف مهم آموزشی باشد:

الف. سرعت در به یاد آوردن مفاهیم اولیه؛

ب. سرعت در اعمال و محاسبات ظریف ریاضی؛

اگر مفاهیم و محاسبات ظریف هر بخش کاملاً توجیه شده باشد و مطالب تدریس شده کاملاً به‌وسیلهٔ دانش‌آموزان درک شده باشد، تست‌ها نه‌تنها خواننده را خسته نمی‌کند بلکه او را برای مطالعه بیشتر تشویق و آماده می‌سازد.

امروز متخصصین آموزش ریاضی چون **برونر**، **گاتیه**، **کروتسکی** و **شونفیلد** که بعضی از آن‌ها از پیروان **پولیا** هستند معتقدند که در آموزش ریاضی توجه به مفاهیم کلیدی و رعایت ترتیب در یاد دادن آن‌ها از جمله ضروریات یادگیری است. شونفیلد معتقد است که برای تسلط بر یک مفهوم ریاضی، لازم است آن را با دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار داد، مثلاً در یادگیری بُردار باید به تعریف عمومی، هندسی، جبری و محاسباتی آن توجه کرد.

متأسفانه کتاب‌های جنبی که در ایران بدون تجزیه و تحلیل مفاهیم کلیدی و پایه‌ای مربوط به هر قسمت از درس منتشر می‌شود، ارزش آموزشی ندارند. کتاب‌های جنبی باید تأکید بر مفاهیم اولیه و محاسبات ظریف ریاضی را در سرلوحه هدف‌های خود قرار دهند؛ متأسفانه کمتر کتاب جنبی را در بازار می‌بینید که با دقت وارد جزئیات مفاهیم و محاسبات شده و مطالب را از نظر علمی موشکافی کرده باشد.

کتاب‌های جنبی باید برای کسانی که در مفاهیم پایه ضعیف هستند نوشته شود و به‌منزلهٔ عینک طبی باشد که شخص با دید ضعیف، به‌کار می‌برد تا تصاویر را روشن‌تر و بهتر و هر چیز را به جای خود ببینند.

کتاب‌های جنبی فعلی بیشتر روی «تست زدن» و قوانین و نکته‌های مربوط به آن بحث می‌کنند و تأکید بر این دارند که هرچه دانش‌آموز بیشتر تست بزند موفقیت وی در کنکور بیشتر خواهد بود و حال آنکه در عمل، مثل پسر خویشاوند ما، این طرز کار جواب نمی‌دهد و رتبه کنکور به جای ۵۰۰ به ۵۰۰۰ می‌رسد.

کتاب‌های جنبی باید برای کسانی که در مفاهیم پایه ضعیف هستند نوشته شود و به‌منزلهٔ عینک طبی باشد که شخص با دید ضعیف، به‌کار می‌برد تا تصاویر را روشن‌تر و بهتر و هر چیز را به جای خود ببینند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

نرگس عصارزادگان

ریاضیات و فرهنگ

بخش پایانی

اشاره

در بخش نخست این نوشته، تعاریف مربوط به ریاضیات قومی و تأثیرات متقابل ریاضیات قومی و عوامل اجتماعی و فرهنگی بیان شد. در این بخش، از دیدگاه برنامه درسی، نگاهی به موضوع ریاضیات و فرهنگ داریم، همچنین روش قوم‌نگاری که برای انجام پژوهش‌های ریاضیات قومی ضروری است به تفصیل بیان می‌شود.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات قومی، ریاضیات، فرهنگ، برنامه درسی

بخش سوم: برنامه درسی

در سه دهۀ گذشته، نیروهای آموزشی، فرهنگی و سیاسی، ریاضیات را با توجه به فرهنگ به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار داده‌اند. بنابراین، مطالعاتِ شامل ریاضیات و فرهنگ، در روش‌شناسی آموزشی و به‌ویژه برنامۀ آموزش معلمان بسیار اساسی و مهم است.

در طول سی سال گذشته، نویسندگانی چون ولوس گردیس[1] از موزامبیک، مرشا اشر[2] از ایالات متحده، و آلن بی شاپ[3] از انگلستان، به تحقیقاتی فرهنگی در زمینۀ ریاضیات و محققان ریاضی دست زدند. (بارتون[4]، ۱۹۹۶). بیشتر کارهای آن‌ها ابتدا در دو ژورنال بین‌المللیِ آموزش ریاضی برای *یادگیری ریاضیات*[5] و مطالعات آموزشی در ریاضیات[6]، با انتشار رساله‌ای که بی‌شاپ ویرایش کرده بود منتشر شد. نویسندگان، مبانی مهمی را برای نوشته‌های بعدی دربارۀ فرهنگ و ریاضیات پی‌ریزی کردند و دامنۀ گوناگونی از پژوهش‌ها را بنا نهادند.

وقتی ریاضیات قومی در سال ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ به عنوان حوزه‌ای از مطالعات در آموزش ریاضی پیشنهاد شد خیلی چیزها جدید و ناآشنا به‌نظر می‌رسید. ایدۀ جست‌وجوی ریاضیات در فرهنگ‌های دیگر و استفاده از این یافته‌ها در یک کلاس درس عادی ممکن است برای بیشتر معلمان غیرعادی باشد، منتهای مراتب، می‌تواند به‌عنوان یک موضوع ممکن برای غنی‌سازی مواد درسی به‌کار رود. در بخش‌های بسیاری از جهان، آموزش ریاضی بر اساس الگوی محتوا، ساختار، و الگوریتم‌های اروپایی بود. برنامۀ درسی و تجربۀ آموزشی موسوم به برنامۀ «ریاضیات جدید» در ۱۹۶۰ رشد یافت، اما الگوها بیشتر با مرکزیت الگوهای اروپایی و بعد آمریکایی باقی ماند که در دهه‌های قبلی تبیین شده بودند.

دی آمبروسیو در سخنرانی خود با عنوان «مبانی اجتماعی- سیاسی آموزش ریاضیات» در پنجمین کنگرۀ بین‌المللی آموزش ریاضی (دی آمبروسیو، ۱۹۸۴) بعضی مطالب جالب توجه را ارائه داد. به عقیدۀ

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

وی تحقیق روی مسائل اجتماعی و فرهنگی در آموزش ریاضیات تا آن زمان بیشتر از چند مسئله راجع به تبعیض جنسیتی یا مطالعات تطبیقی مشابه انجام نشده بود. این احساس مشترک وجود داشت که ریاضیات، ریاضیات است، چون معمولاً ریاضیات به‌معنای محض ریاضیات اروپایی در نظر گرفته می‌شد. مسائل جامعه شناختی در مورد کاربرد ریاضیات وجود دارد، البته گاهی به‌نظر می‌رسد آموزش ریاضی و محتواهای مدرسه‌ای ثابت و تهی از فرهنگ هستند. به‌نظر می‌رسد تاریخ و فرهنگِ ریاضیات، به‌عنوان حاشیه‌های غیر ضروری برای غنی‌سازی مواد درسی به شمار می‌روند.

به هرحال، در بسیاری از کشورها که مدرسه رفتن یک امر تجملی برای خانواده‌های بزرگان به شمار می‌رفت، آموزش رفته‌رفته به‌عنوان حقیقتی برای همه به‌کار رفت، بنابراین آوردن دامنهٔ گسترده‌تری از دانش‌آموزان در کلاس درس موضوع مهمی بود. پس خیلی مهم بود که مطمئن شویم محتوای برنامهٔ درسی ریاضی مسائل فرهنگی مربوط به همهٔ اقشار مردم را منعکس می‌کند.

برنامه‌های ضمن‌خدمت معلمان می‌تواند شامل مباحث فرهنگی باشد. اخیراً معلوم شده است که فرهنگ می‌تواند احساس دانش‌آموز برای مشارکت در بحث‌های کلاسی، سؤال‌های آغازگر، به یادآوری حقایق، جست‌وجوی روش‌های درک مبدعانه، و بسیاری از جنبه‌های دیگر آموزش در کلاس درس را افزایش دهد. بد تعبیر کردن نشانه‌های فرهنگی می‌تواند به عدم درک فرایندهای یادگیری یا اشتباه دانش‌آموزان توسط معلم و پاسخ طبیعی برای بی‌میلی به یادگیری منجر شود. از این رو، NCTM (۱۹۹۱، ص. ۲۵)، کلید آموزش موفقیت‌آمیز را آگاهی معلمان از ادراکات، علایق، و تجربیات دانش‌آموزان و دانستن روش‌های موجود برای یادگیری ریاضیات توسط دانش‌آموزان بیان کرده است.

دو مورد از فرایندهای ریاضی شرح داده شده در استانداردهای NCTM (۱۹۸۹ و ۲۰۰۰) عبارت است از ارتباط[۷] و اتصال[۸]. این دو مورد به ریاضیات قومی مربوط می‌شود:

ارتباط به این معناست که دانش‌آموزان افکار خود را بیان کرده و ایده‌های خود را با دیگران مبادله کنند. سند اصول و استانداردهای NCTM (۲۰۰۰) بیان می‌کند که برنامه‌ها باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا «تفکر ریاضی خود را به‌طور شفاف با همکلاسی‌های خود، معلمان، و دیگران ارتباط دهند». معلم باید مشارکت همه را تشویق کند و به ارزش مشارکت هرکس در فرایند یادگیری تأکید ورزد. دانش‌آموزان باید با بررسیِ ایده‌های خود در مسیر یادگیری قرار بگیرند، بنابراین باید جوّی از اطمینان وجود داشته باشد و دانش‌آموزان برای بیان ایده‌های خود احساس آزادی داشته باشند (NCTM ۲۰۰۰، ص ۶۰). ایده‌های دانش‌آموزان ممکن است به چالش کشیده شود و بدون نکوهش کردن دفاع شود، و وقتی همه دربارهٔ مفاهیم به توافق رسیدند و آن‌ها را درک کردند می‌تواند به قالب درآید.

«اتصال» فرایند دیگر استاندارد NCTM است که بیشتر به ریاضیات قومی مربوط می‌شود. «اتصال» به‌معنای یافتن ارتباط‌هایی درون ریاضیات، بین ریاضیات و دیگر موضوع‌ها، و در ریاضیات به‌عنوان بخشی از تجربیات روزینهٔ یادگیرنده‌هاست. چنانچه شرلی[۹] (۱۹۹۵) و مسینگیلا[۱۰] (۱۹۹۵) بیان داشته‌اند، ریاضیات قومی کلیدی برای یافتن اتصالات- درون ریاضیات در بین گروه‌های فرهنگی است که دو یا چندین حوزه را برای تحقق نیازهای گروه‌ها، در موضوع‌های دیگری چون هنر، جغرافی، اقتصاد و ... با هم در می‌آمیزد.

دانش‌آموزان نیاز دارند که بتوانند ریاضیات را در بافت‌هایی بیرون مدرسه تشخیص دهند و به‌کار ببرند (NCTM ۲۰۰۰، ص ۶۴). بحث اتصال، میراث فرهنگی- مذهبی، هنر، منسوجات، موسیقی یا جشنواره‌های مربوط به آن‌ها را در بر می‌گیرد. هم‌چنین، ممکن است به مطالعات ریاضی اقتصاد و بازرگانی زندگی روزمرهٔ سنتی، آمارهای ارتباط‌های اجتماعی جدید، یا سیاست‌های مسائل بین‌المللی مربوط شود.

سازنده گرایی[۱۱] آموزشی یک نظریهٔ غالب در دو دههٔ گذشته بوده است. «*ایجاد اتصال*» مرحله‌ای است که برای بسیاری از اسناد برنامه درسی ریاضی مشترک است. این مرحله می‌تواند با توجه به موارد زیر صورت پذیرد:

- دنیای روزمرهٔ دانش‌آموزان،
- دانش قبلی دانش‌آموزان،
- بافت‌های آشنای درون و بیرون مدرسه،
- عناوین دیگر درون مدرسه،
- موضوع‌های دیگر درسی، و
- گذشته و شاید آینده.

مفهوم ایجاد اتصالات عبارت است از ساختن «شِمای دانش»، یا نقشه‌های ذهنی، که به این ترتیب پیوندهایی بین اجزای دانش ساخته می‌شود

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

و در ایـن حوزه ارتباط بیـن اجزا به اندازهٔ خود اجزا مهم است.

بنابراین ایدهٔ دیگری که برای ضرورت بررسی رابطهٔ ریاضیـات و فرهنـگ وجود دارد «ایجـاد اتصالات» با دانش قبلی، با دنیای دانش‌آموزان، و با افراد جهان است. دیدگاهی که سـاختن اتصالات را با موضوع‌های دیگر درسـی در برمی‌گیرد، نیز می‌توانـد به‌عنوان توجیهی برای یک برنامه درسی کل‌نگر استفاده شود. به هرحال، با داشتن یک توجیه مبتنی بر تئوری دو سؤال زیر باقی می‌ماند:

ـ ما دربارهٔ ریاضیات درون هر فرهنگی چگونه فکر می‌کنیم؟ و،

ـ آیـا ریاضیات قومـی در حال رسـیدن به نقطهٔ مطلوب است؟

در نوشـته‌های نویسـندگانی چـون گیلگـن[12] (۱۹۸۲)، بیلنکـی[13] (۱۹۸۶)، کلینچی[14]، گلدبرگر[15] و تاروله[16] (۱۹۸۶) عبارت «ایجاد اتصالات» به‌عنوان دانـش متصل شـده، دانش مجزا شـده یـا متمایز نامیده شـده اسـت. برای مثال، آن‌ها دانش متمایز را در مقایسـهٔ روش‌هـای فکر کردن مـردان و زنان در قیاس با همدیگر مشـاهده می‌کنند. شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارد که تنها برای جامعهٔ سفید (در فرهنگ‌های آمریکایـی و اروپایی) نتیجه‌گیری‌هایی داشته است، اما در تجربه‌های دیگر شواهدی از تفکر متصل شدهٔ درون بسیاری از فرهنگ‌های غیرغربی و بومی وجود دارد.

با همهٔ مـوارد مذکور، بدیهی اسـت که ریاضیات قومی کانونی بـرای فرایند یادگیری و روش‌شناسـی آموزشی است. نیاز است که برنامه‌های آموزش ریاضی قبـل از خدمت برای معلمان تهیه شـود. معلمان باید دانش‌آموزان را با تاریخ ریاضیات در فرهنگ و کشـور خود آشنا کنند.

بارتون (۱۹۹۶) پس از تجزیه و تحلیل نوشته‌های دی آمبروسیو، گردیس، اشـر و دیگران، بیان کرد که بحث دربارهٔ ریاضیات قومی دربارهٔ ریاضیات یا آموزش ریاضی اسـت. وی در هر دسته، چهار حوزه از نوشته‌ها را مشخص کرد.

نوشته‌ها دربارهٔ ریاضیات قومی

ریاضیات

۱. ماهیت فرهنگی ریاضیات
۲. تفکر ریاضی در فرهنگ‌های دیگر
۳. تاریخ فرهنگی ریاضیات
۴. سیاست‌های ریاضی

آموزش ریاضی

۱. یادگیری ریاضیات در فرهنگ‌های دیگر
۲. شناخت موقعیتی شامل زبان و دوزبانگی
۳. تأثیرات اجتماعی آموزش ریاضی
۴. ارتباط‌های بین ریاضیات و آموزش ریاضی

او تعریف دیگری از ریاضیات قومی، که سـعی در پوشش همهٔ حوزه‌ها دارد، پیشنهاد داد: ریاضیات قومی برنامهٔ تحقیق از روش‌هایی است که گروه های فرهنگی مختلـف دربارهٔ مفاهیم و تجربیـات مربوط به ریاضی فهمیده‌انـد، و به‌طور مفصل بحث و اسـتفاده کرده‌اند (ص ۲۱۴).

بر طبق نظر بارتون، تعریف فوق بر این موارد دلالت دارد: (الف) ریاضیـات قومی یک مطالعهٔ صرفاً ریاضی نیست، و بیشتر شـبیه به مردم‌شناسی یا تاریخ است؛ (ب) خود تعریف وابسته به شخصی است که آن را بیان می‌کند، و از لحاظ فرهنگی خاص است؛ (ج) تجربه‌ای که شـرح می‌دهد از لحاظ فرهنگی خاص است؛ و (د) ریاضیـات قومی به چند صورت به نسـبیت‌گرایی در ریاضیـات دلالـت دارد (ص ۲۱۵). هم‌چنین، بارتون چارچوبی برای تحقیق روی فرهنگ و ریاضیات، فراهم کرد.

ایدهٔ مهمی که وجود دارد این است: ریاضیات قومی چیزی بیشتر از یک زایدهٔ بیگانه برای غنی‌سازی کلاس درس ریاضی است. از یک دیدگاه ریاضیات قومی برای توضیـح این مطلب که ریاضیـات و ارزش‌های ریاضی مخصوص غرب نیسـت و حتی مشارکت‌های همگان برای پیشرفت‌های پیوستهٔ آن لازم است بسیار ضروری اسـت. ریاضیات قومی برای آماده‌سازی معلمان جهت اطمینان از این که پیام‌های فرهنگی به نسل‌های جدید منتقل می شود اساسی است. معلمان جدید باید با ذهن باز و آماده این نگرش را به کلاس‌های خود نشان دهند.

نخستین ضرورتِ بررسی رابطهٔ ریاضیات و فرهنگ بر یک تفکر سـاده دربارهٔ آموزش یعنی «*نیاز به شروع از جایی که یادگیرنده قرار دارد*» مبتنی است. به‌عبارت دیگر این فرض وجـود دارد که دانش‌آموز با ریاضیات برآمده از درون فرهنگ خود نسبت به ریاضیات بیرون از فرهنگ بیشـتر آشناسـت. ضرورتِ دیگر «*شروع با علایق دانش‌آموزان*» است و بنابراین شاید بتوان فرض کرد که دانش‌آموزان احتمالاً بیشـتر بـه این موضوع

فرهنگ می‌تواند احساس دانش‌آموز برای مشارکت در بحث‌های کلاسی، سؤال‌های آغازگر، به یادآوری حقایق، جست‌وجوی روش‌های درک مبدعانه، و بسیاری از جنبه‌های دیگر آموزش در کلاس درس را افزایش دهد. بد تعبیر کردن نشانه‌های فرهنگی می‌تواند به عدم درک فرایندهای یادگیری یا اشتباه دانش‌آموزان توسط معلم و پاسخ طبیعی برای بی‌میلی به یادگیری منجر شود

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

علاقه‌مندند که دیگــران در فرهنگ خود چگونه عمل می‌کنند. سومین مورد این است که، «*ریاضیات به یک صورت بشــری نیاز دارد*» و این اعتقــاد وجود دارد که به‌کارگیری ایده‌ها در ریاضیات با توجه به تاریخ و محیط گروه‌های فرهنگی دانش‌آموزان به پیوندهای مهم‌تری با ســاخته‌های دست بشر مثل هنر، معماری و ... منتهی می‌شود.

حال این پرسش به وجود می‌آید که آیا موضوع‌ها یــا فعالیت‌های مربــوط به رابطهٔ ریاضیــات و فرهنگ بایــد با توجه به ریاضیات ســنتی غربی در نظر گرفته شود، یا به‌عنوان حوزه‌ای برای غنی‌سازی مواد درسی؟ دو پاســخ به این سؤال داده می‌شــود. اول اینکه برای تعریف دوبارهٔ ریاضیات متناســب با گروه‌های فرهنگی مورد نظر می‌توان عناویــن و فعالیت‌ها را، هم با توجه به فرهنگ سنتی غربی و هم با غنی‌سازی مواد درسی بررسی کرد. پیشــنهاد دوم با توجه به این حقیقت در نظر گرفته می‌شــود که فرهنگ ممکن است تمایل به دستیابی به جامعهٔ غربی داشته باشد، روش‌های غربی را برای پیشــرفت دلخواه ببیند، و ریاضیات خودش را کافی نبیند.

قدم بعدی در چنین بحثی احتمالاً سوالی به‌دنبال دارد: ریاضیــاتِ فرهنگ مورد نظر چــه نوع ریاضیاتی است؟ می‌توان این‌گونه نتیجه‌گیری کرد که ریاضیات، بخشــی از یک تقسیم‌بندی غربی از دانش است که در فرهنگ‌های دیگر به همان شکل غربی رخ نمی‌دهد. در عوض، با فرض این که ریاضیات قومی به‌عنوان روشــی در ریاضیات مدرســه‌ای و برای غنی‌سازی مواد درسی مناســب اســت، می‌توان دو یا چند انتخاب دیگر را در نظر گرفت. یکی در نظر گرفتن شــش فعالیت بی‌شاپ (۱۹۸۸)ـ شــمارش، اندازه‌گیری، جایگذاری، طراحی، بازی کردن و توضیح دادن ـ است که به‌عنوان پیش‌نیاز آموزش دیده می‌شــود و اســتفاده از این مــوارد برای معرفی ریاضیات به مدارس ابتدایی مناسب است و البته برای نقطهٔ آغاز در دبیرســتان در ریاضیات غربی کافی نیســت. انتخاب دیگر، تمرکز روی یک برنامه درســی کل‌نگر است که به موضوع‌های جزیی تقسیم نمی‌شود.

با توجه به مطالب فوق سه دغدغهٔ اصلی برای ما به وجود می‌آید:

ـ چه عناصری از دانش در هر فرهنگی ممکن است به ریاضیات مربوط شود؟

ـ آیا افراد همهٔ فرهنگ‌ها به یک روش یاد می‌گیرند و مدرسه‌سازی غربی برای همهٔ افراد مناسب‌ترین است؟

ـ آیا ما باید دانش را به موضوع‌های مختلف جدا کنیم، و اگر نه، چه روشی برای سازماندهی برنامه درسی مناسب‌ترین است؟

اولیــن دغدغه با این ســؤال که به‌نظر می‌رســد افراد فرهنگ‌های خاص باید در نظر بگیرند بیان می‌شود: چه عناصری از دانش در هر فرهنگی ممکن است به‌عنوان دانش ریاضی منظور شود. پاسخ این سؤال نباید توسط افرادی که در ریاضیات غربی غرق شده‌اند معین شود. یعنی درست نیست که بگوییم ما نقشی برای ایفا کردن نداریم. ما می‌توانیم تصمیمات موجود را حمایت کنیم. ما می‌توانیم مطمئن باشیم که اسناد برنامه درسیِ غالب، فضایی را برای شــمول عناوین دیگر اجازه می‌دهند، و اینکه می‌توانیم جوّ فرهنگی را به رسمیت بشناسیم.

دغدغــهٔ دیگر با این ســؤال بیان می‌شــود که آیا افراد همــهٔ فرهنگ‌ها به یک روش یــاد می‌گیرند، آیا مدرسه‌سازی غربی برای ما مناسب‌ترین است، آیا باید دانش ریاضی را از موضوع‌های گوناگون دیگر جدا کنیم، و چه راهی برای سازماندهی برنامه درسی مناسب است. این پرسش‌ها نیاز به آنچه ما آموزش قومی می‌نامیم را نشان می‌دهد.

اگــر تمایلــی بــه ســاختن اتصال‌ها بــر مبنای پیش‌زمینه‌های یادگیرندگان داریم، ضروری اســت به ریاضیات نگاهی داشته باشم. لازم است مسائل مربوط به زبان، شناخت دیدگاه‌های مختلف تاریخی، و فوریت علم ـ قومی و تکنولوژی قومی بررســی شود. بیشترین حمایت باید برای شــکل‌گیری آمــوزش قومی در نظر گرفته شود. در این ایدهٔ وسیع‌تر تفکر دربارهٔ مفروضات ساخته شده درون فرهنگ‌ها ضروری به‌نظر می‌رسد. ما نیاز داریم که تأثیر باورها، زبان، و استعاره‌های به‌کار رفته در زبان را، که به تعیین الگوها کمک می‌کند بشناسیم و نیاز داریم از روش‌هایی که مردم برای دانستن استفاده می‌کننــد، از روش‌های ســنتی و فرهنگــی گرفته تا روش‌هایی که در حال حاضر در یادگیری مدرســه‌ای رخ می‌دهــد، و آنچه افراد در فرهنگ‌ها به آن‌ها ارزش می‌نهند آگاه باشیم.

این کار یک مرور اساسی بر آموزش را می‌طلبد که ما به‌عنوان آموزشگران ریاضی نیاز داریم در آن شرکت داشــته باشــیم و به‌دلیل آنکه بحث ما ریاضیات قومی اســت به آن بپردازیم. از آنجا که ممکن است این مرور را ســاده انگاریم، مهم اســت که دیدگاه‌های غالب در غرب را مرور کنیم. هم‌چنین، بررســی آموزش با توجه به تنوع فرهنگــی، و همهٔ کاربردهای عمیق آن، به ما

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

فرصتی برای ارزیابی دوبارهٔ گرایش‌های اجتماعی غرب، جامعه‌ای که برای فرزندانمان نیاز داریم، و نوع آموزشی که ممکن است برای پیشرفت به ما کمک کند می‌دهد. البته در چنین شرایطی به‌زعم برخی صاحب‌نظران مثل پستمن[17] و وینگارتنر[18] (۱۹۷۱) آموزش به‌عنوان یک فعالیت واژگونه (خرابکارانه) در نظر گرفته شده است.

با چنین مروری باید نگاهی به اهداف آموزش و جامعه داشت. به شیوهٔ سنتی، اهداف ما به‌طور آکادمیک یا به‌طور تجربی جهت‌دهی شده‌اند. اخیراً اهداف اجتماعی‌تر و شخصی‌تری اضافه شده‌اند، و خیلی جدیدتر برخی پیوندها با رشد اقتصادی افزوده شده‌اند. پس از اینکه اهداف کلی در نظر گرفته شد ما باید دربارهٔ اینکه چگونه برای موضوعاتی چون ریاضیات با توجه به یادگیری، یاددهی، ارزیابی، برنامه درسی و توسعهٔ منابع عمل کنیم تصمیم بگیریم.

انتظار می‌رود بیشتر افراد فکر کنند که این چالش‌ها خیلی پیچیده‌اند. در هر صورت اگر ما، به‌عنوان آموزشگران، پایه‌ای را بنا نکنیم، مسائل جاری جامعه ادامه می‌یابد. مسائل گوناگون زندگی گاهی به شکل هزینه‌های زندگی، مالیات‌ها و سیستم‌های اجتماعی دیده می‌شود.

دغدغهٔ دیگری که وجود دارد با این سؤال‌ها مطرح می‌شود که چه عناصری از دانش فرهنگ‌های دانش‌آموزان در کلاس‌های درس، ریاضی در نظر گرفته می‌شود یا به منظور آشنایی با موضوع‌ها یا غنی‌سازی به‌کار می‌رود؟ چگونه می‌توان دریافت که استفاده از این عناصر در تدریس می‌تواند مناسب باشد؟ چه کسی از این فرهنگ‌ها می‌تواند در ایجاد این تصمیم‌ها یاری رساند؟

چگونه می‌توان دریافت‌هایی از دانش‌آموزان با توجه به فرهنگ و علائقشان داشت؟ چگونه می‌توان دریافت‌هایی دربارهٔ چگونگی یادگیری افراد این فرهنگ‌ها داشت؟ چه کسانی از این فرهنگ‌ها ممکن است ما را برای یافتن این موارد یاری رسانند؟ و چگونه ممکن است این ایده‌ها را در کلاس درس به‌کار برد؟

آیا می‌توان اجزا، یا کل برنامه درسی کنونی (ریاضیات و موضوع‌های دیگر) را آموزش داد به‌گونه‌ای که بهتر دانش را تلفیق کند و به دانش‌آموزان کمک کند تا اتصالات بیشتری بسازند؟

بسیاری از ما به ریاضیات و فرهنگ علاقه‌مندیم، اما چه‌قدر با آن فاصله داریم؟ این اعتقاد وجود دارد که وقتی اقدامات و تصمیمات بتواند روی جهت آموزش ریاضی تأثیر داشته باشد در حال پیشرفت هستیم، اما آیا ما برای برخاستن و ادامه دادن آماده هستیم؟

ریاضیات قومی، که سعی در پوشش همهٔ حوزه‌ها دارد، پیشنهاد داد: ریاضیات قومی برنامهٔ تحقیق از روش‌هایی است که گروه های فرهنگی مختلف دربارهٔ مفاهیم و تجربیات مربوط به ریاضی فهمیده‌اند، و به‌طور مفصل بحث و استفاده کرده‌اند

بخش چهارم: قوم‌نگاری

قوم‌نگاری عبارت است از هنر و علمی که برای توصیف یک گروه یا فرهنگ استفاده می‌شود (فترمن[19]، ۱۹۹۸). مطابق با نظر آنگروسینو[20] (۲۰۰۷)، تحقیق قوم‌گرایانه برای الگوهای قابل پیشگویی در تجربیات زیستهٔ بشر توسط مشاهده و شرکت دقیق در زندگی‌های افراد تحت مطالعه به‌کار می‌رود. قوم‌نگاری ممکن است شامل غوطه‌ور شدن محقق در زندگی روزبه‌روز یا فرهنگ افراد تحت مطالعه باشد. قوم‌نگاری به‌عنوان یک روش، ویژگی‌های معین متمایزی دارد (آنگروسینو ، ۲۰۰۷). ابتدا، در یک مجموعهٔ طبیعی زندگی واقعی افراد جمع‌آوری می‌شود. دوم، شخصی است؛ چون محقق هم به‌عنوان مشاهده‌گر و هم مشارکت‌کننده در زندگی افراد تحت مطالعه وارد می‌شود. هم‌چنین در قوم‌نگاری، داده‌ها به روش‌های گوناگون برای مثلثی‌سازی داده‌ها در یک دوره زمانی مبسوط جمع‌آوری می‌شود. فرایند استقرایی کل‌نگر و تعهدات طولانی مدت نیاز است. در نهایت، قوم‌نگاری، محاوره‌ای است؛ چون نتایج و تفسیرها می‌تواند از طریق قوم‌نگاری پیشنهاد شود یا توسط افراد تحت مطالعه منعکس شود.

فعالیت‌هایی کلی وجود دارد که نیاز است قبل از شروع انجام شود (راپر[21] و شپیرا[22]، ۲۰۰۰). نخست، محقق باید سؤالات تحقیق خود را تعیین کند. صحبت با دیگران دربارهٔ پروژهٔ تحقیق و مشورت با منابع مختلف می‌تواند مفید باشد. دوم، محقق نیاز دارد ارزیابی کند که چه‌قدر دربارهٔ موضوع می‌داند. سوم، محقق به افراد آگاه در زمینهٔ مطالعه نیاز دارد. در آخر، نیاز است که زمان و منابع ارزیابی شود.

سینگلتون و استریتز[23] (۲۰۰۵) مراحل زیر را در زمینهٔ تحقیق قوم‌نگاری معین کرده‌اند:

ـ *گردآوری و ثبت اطلاعات:* گاهی ثبت و گردآوری داده‌ها در یک زمان می‌تواند دشوار باشد. انواع اطلاعاتی که باید به‌عنوان یادداشت ثبت شود چیست؟ اگر نتوان به‌طور کامل اطلاعات را ثبت کرد، چه باید کرد؟ همیشه یک دفتر یادداشت

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

برای خلاصه‌نویسی نیاز است. گاهی راه‌حل دیگری جز انتظار و ثبت مشاهده بعد از ترک محل وجود ندارد. تجهیزاتی مثل ضبط‌صوت، دوربین و غیره لازم است. مطابق با نظر سینگلتون و استریتز (۲۰۰۵)، یادداشت‌های زمینه‌ای یا دفاتر (حساب‌های) توصیفیِ مفصل هر مشاهده، در یک دورهٔ زمانی باید عناصر زیر را شامل شود:

ـ *توصیف احساس:* هدف ثبت دقیق مشاهدات روزانه است. هم‌چنین باید از تجزیه و تحلیل افراد یا رخدادها پرهیز شود.

ـ *اپیزودهای فراموش شده:* به اپیزودهای قبلیِ فراموش شده که محقق در محیط به یاد می‌آورد، اشاره دارد.

ـ *ایده‌ها و یادداشت‌هایی برای استفاده‌های بعدی:* به جابه‌جایی سریع و آنی ایده‌های مربوط به تجزیه و تحلیل داده‌ها، جمع‌آوری داده‌ها، تفکر و تعمق دربارهٔ ارتباط‌ها و غیره اشاره دارد. این‌ها یادداشت‌هایی هستند که محقق برای خودش می‌نویسد، برای مثال، طرح‌هایی برای مشاهدات آینده، چیزهای خاص یا افراد خاص برای جست‌وجوهای بعدی.

ـ *عقاید و احساسات شخصی:* به ثبت اطلاعات با توجه به واکنش موضوعی نسبت به زمینهٔ مورد مطالعه اشاره دارد که برای اشتباهاتی که روی مشاهدات محقق سایه افکنده راه‌حل هایی فراهم می‌کند.

ـ *یادداشت‌های متدولوژیک:* به همهٔ ایده‌های مربوط به روش‌های به‌کار رفته برای انجام تحقیق اشاره دارد، برای مثال، هر مشکلی که در گردآوری داده‌ها به وجود می‌آید، هر اشتباهی که توسط روش‌های جمع‌آوری داده‌ها رخ می‌دهد یا هر تغییری که در چگونگی ثبت اطلاعات توسط محقق ایجاد می‌شود.

در روش قوم‌نگاری از فنون مختلف پژوهش، از جمله مشاهدهٔ طبیعی و مصاحبه، استفاده می‌شود (سیف، ۱۳۸۹). آنگروسینو معتقد است سه روش برای جمع‌آوری داده‌ها در قوم‌نگاری وجود دارد: مشاهده، مصاحبه و تحقیق بایگانی شده (۲۰۰۷).

ـ *مشاهده:* مشاهده، مشارکتی منحصربه‌فرد است که از مشارکت محقق در زندگی افراد تحت مطالعه، در ضمنِ حفظ فاصلهٔ حرفه‌ای تشکیل شده است (فترمن، ۱۹۹۸). مطابق با نظر آنگروسینو (۲۰۰۷)، مشاهده عبارت است از عمل درک فعالیت‌ها و ارتباط‌های افراد در زمینهٔ موردنظر.

ـ *مصاحبه:* مصاحبه، فرایند هدایت یک مکالمه برای گردآوری اطلاعات است (آنگروسینو، ۲۰۰۷).

ـ *تحقیق آرشیوی:* یعنی تجزیه و تحلیل مواد موجود که برای تحقیق، خدمات یا اهداف اداری و یا غیر اداری دیگر ذخیره شده‌اند (آنگروسینو، ۲۰۰۷).

در این بخش، یک سؤال پیش می‌آید. چگونه کیفیت تحقیق قوم‌نگارانه را کنترل کنیم. سه مسئله وجود دارد که وقتی محقق کیفیت را در تحقیق زمینه‌ای یا قوم‌نگارانه کنترل می‌کند باید در نظر بگیرد: واکنش‌پذیری[۲۴]، روایی[۲۵] و پایایی[۲۶].

واکنش‌پذیری: واکنش‌پذیری درجه‌ای است که شخصیت فرد به‌عنوان محقق روی رفتارهای دیگران تأثیر می‌گذارد زیرا آن‌ها می‌دانند که در یک تحقیق شرکت دارند و ممکن است به این منجر شود که تحت این مطالعه به‌گونهٔ متفاوتی برخورد کنند (نیومن[۲۷]، ۲۰۰۳). محقق ممکن است محبوب یا نفاق‌افکن شروع کند، و یا خود را با زندگی‌های دیگران آشنا کند که ممکن است تأثیر واکنش‌پذیری را کاهش دهد.

پایایی: پایایی در تحقیقِ زمینه‌ای، به این سؤال که آیا محقق می‌تواند داده‌هایی را که از لحاظ داخلی و خارجی ثابت و معتبر هستند جمع‌آوری کند؟ پاسخ می‌دهد (نیومن، ۲۰۰۳). وقتی محقق در طول زمان و در بافت‌های اجتماعی مختلف رفتارهایی را که ثابت هستند ثبت می‌کند داده‌ها از لحاظ درونی ثابت هستند. ثبوت خارجی می‌تواند با تشخیص یا بررسی مقطعی داده‌ها با منابع دیگر توسط محقق به‌دست آید. تحقیقات قوم‌نگارانه به آنچه دیگران به آن‌ها می‌گویند متکی هستند بنابراین، اعتبار منابع اطلاعاتی مورد استفاده برای ارزیابی موردنیاز است. اطلاعات به اشتراک گذاشته شده می‌تواند به‌صورت خبر نادرست، تجاهل، دروغ و از قلم‌افتادگی باشد (نیومن، ۲۰۰۳). پایایی در تحقیق زمینه‌ای متکی به بینش محقق، آگاهی، سؤالات و جست‌وجو در رفتارها و رخدادها از زوایا و چشم‌اندازهای مختلف است (نیومن، ۲۰۰۳).

روایی: روایی در تحقیقِ زمینه‌ای، اطمینان از توانایی محقق برای گردآوری و تجزیه و تحلیل دقیق داده‌ها، بازنمایی زندگی‌ها یا فرهنگ تحت مطالعه است (نیومن، ۲۰۰۳). روایی می‌تواند به روش‌های زیر بررسی شود. روایی اکولوژیک درجه‌ای برای جمع‌آوری داده‌ها و توصیف توسط محقق

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

است که دنیای تحت مطالعه را بازتاب می‌دهد (نئومن، ۲۰۰۳). تاریخ طبیعی یک توصیف کامل و فاش‌سازی فعالیت‌های محقق، مفروضات، و رویه‌هایی برای ارزیابی است. اگر مطالعه پذیرفته شود یا برای دیگران درون یا بیرون موضوع معتبر باشد، از لحاظ تاریخ طبیعی روایی دارد (نیومن، ۲۰۰۳). هم‌چنین برای بررسی روایی اعضای تحت مطالعه می‌توان دیدگاه‌های آن‌ها را به دقت بررسی کرد (نیومن، ۲۰۰۳). به‌علاوه، باید عملکرد داخلی وجود داشته باشد یعنی محقق به‌عنوان یک غیر عضو از گروه یا فرهنگ تحت مطالعه برای تعامل مؤثر به‌عنوان یک عضو وارد شود (نیومن، ۲۰۰۳). در نهایت، مطالعه باید روایی عملی[۲۸] و انتقال‌پذیری[۲۹] داشته باشد روایی عملی یعنی درجه‌بندی نتایج و جمع‌بندی‌های مطالعه مربوط به خود مطالعه شود (آنگروسینو، ۲۰۰۷).

شیوه‌های تحلیل اطلاعات در قوم‌نگاری

تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها در قوم‌نگاری می‌تواند مورد چالش قرار گیرد (راپر و شپیرا، ۲۰۰۰). ابتدا، نیاز است بفهمید مواد شما چیست. فرایند، فهمیدن عبارت است از استنتاج آنچه در ابتدا از داده‌ها می‌فهمید به جای آغاز با ایده‌هایی که از قبل به آن‌ها معتقد بوده‌اید (راپر و شپیرا). هم‌چنین، تجزیه و تحلیل داده‌ها باید از همان آغاز گردآوری داده‌ها شروع شود به‌طوری که محقق بتواند موضوع‌های اضافی را کشف کند و تصمیم بگیرد که آیا برای بررسی بیشتر آن را ادامه دهد یا نه. راپر و شپیرا راهبردهایی برای تجزیه و تحلیل قوم‌نگارانه بیان داشته‌اند:

● *کدگذاری برچسب‌های توصیفی:* چون مواد گردآوری شده به‌صورت کلماتِ نوشته شده‌اند، کلمات ابتدا باید به‌صورت طبقات معنادار یا برچسب‌های توصیفی گروه‌بندی شوند، سپس برای مقایسه سازماندهی و مقابله شوند و الگوها تشخیص داده شوند. قبل از اینکه یک فرد فرایند کدگذاری را آغاز کند، ممکن است برای دسته‌بندی دامنه‌های مبنایی فرمولی یافت شود که می‌توان به این وسیله دامنهٔ وسیعی از پدیده‌ها را برای مثال به‌صورت تنظیمات، انواع فعالیت، رخدادها، ارتباط‌ها و ساختار اجتماعی، دیدگاه‌های عمومی، راهبردها، فرایندها، عبارات مهم و تکرار شده دسته‌بندی کرد.

● مرتب کردن الگوها: گام بعدی مرتب کردن یا گروه‌بندی برچسب‌های توصیفی درون مجموعه‌های کوچکتر است. محقق می‌تواند موضوع‌ها را از دسته‌بندی‌ها و ارتباط‌های ممکن بین اطلاعات گسترش دهد.

● تعیین خارج از رده‌ها: ممکن است موارد، موقعیت‌ها، رخدادها یا تنظیماتی که نمی‌تواند با باقی‌ماندهٔ یافته‌ها برازش شود تشخیص داده شود. این موارد باید به‌عنوان گام‌های متفاوتی در فرایند تحقیق که توسعه یافته در ذهن حفظ شود.

● تعمیم سازه‌ها و تئوری‌ها: الگوها یا یافته‌های متصل شده به‌منظور ایجاد حس توانمندی و گردآوری داده‌های پیچیده به تئوری‌هایی مربوط می‌شوند. ادبیات موجود نیز بررسی می‌شود.

● یادآوری با اظهارات انعکاسی (تفکری): یادداشت‌های فرد بینش‌ها یا ایده‌هایی هستند که یک شخص می‌تواند دربارهٔ داده‌ها داشته باشد. آن‌ها در حالی نوشته می‌شوند که محقق می‌داند هر چیزی شفاف‌سازی یا آزمون بیشتر نیاز دارد. هم‌چنین به محقق برای حفظ خط سیر اصلی مفروضات، اریبی‌ها و انتخاب‌ها در کل فرایند تحقیق کمک می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Paulus Gerdes
2. Mercia Ascher
3. Alan J Bishop
4. Barton
5. For the learning of Mathematics
6. Educational Studies in Mathematics
7. Communication
8. Connection
9. Shirley
10. Masingila
11. Constructivitism
12. Gilligan
13. Belenky
14. Clinchy
15. Goldberger
16. Tarule
17. postman
18. Weingartner
19. Fetterman
20. Angrosino
21. Roper
22. Shapira
23. Singleton & Straits
24. Reactivity
25. Validity
26. Reliability
27. Neuman
28. Pragmatic Validity
29. Transferability

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

منابع

۱. سماور، لاری. ای پرورتر، ریچارد. استفانی لیزا (۱۳۷۹). **ارتباط بیـــن فرهنگ‌ها**. مترجمان: کیانی، غلامرضا و میرحسینی، سید اکبر. چاپ اول. انتشارات باز. تهران.

۲. سیف، علی‌اکبر (۱۳۸۹). **روان‌شناسی یادگیری و آموزش**. ویرایش ششم. چاپ چهل و هفتم. نشر دوران.

۳. گال، مردیـــت. بورگ، والتـــر. گال، جویس. **روش‌های تحقیق کمـــی و کیفـــی در علـــوم تربیتـــی و روان‌شناســـی**، ترجمهٔ احمدرضا نصر و همکاران (۱۳۸۲). تهران مرکز چاپ و انتشـــارات دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت). چاپ اول. جلد۱و ۲.

۴. گویا، زهرا (۱۳۸۹). «ســـنت آمـــوزش ریاضی در دوران طلایی ایرانی/ اســـلامی»، فصل‌نامهٔ مطالعات برنامه درســـی ایران. سال پنجم، شماره ۱۷: ص۱۲۶.

۵. فتحی واجارگاه، کوروش. **اصول برنامه‌ریزی درسی**، انتشارات ایران زمین. ۱۳۸۸.

۶. قورچیان، نادرقلی و دیگران. سیمای روند تحولات برنامه درسی. مؤسسهٔ پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش عالی. ۱۳۷۴.

7. Bishop, Alan (2010): Mathematics Education: Major Themes in education. Routledge Publication.

8. Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. Educational Studies in Mathematics, 31, 201-233.

9. Ascher, M. (1991). Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing.

10. Bishop, A. J. (1983). Research on the social context of mathematics

11. education. Wlough, UK: NFER-Nelson.

12. Bishop, A. J. (1988a). Mathematics enculturation: A cultural perspective on mathematics education. Dordrescht, Netherlands: Kluwer.

13. Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. Educational Studies in Mathematics, 19, 179-191.

14. Bishop, A. J. (1990). Western mathematics: The secret weapon of cultural imperialism. Race and Class, 32(2), 51-65.

15. Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. For the Learning of Mathematics, 14(2), 15-18.

16. Bradley, C. (1984). Issues in mathematics education for Native Americans and directions for research. Journal for Research in Mathematics Education, 15(2), 96-106.

17. Campbell, P. F., & Silver, E. A. (1999). Teaching and learning mathematics in poor communities. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

18. Carey, D. A. (1992). The patchwork quilt: A context for problem solving. Arithmetic Teacher, 40(4), 199-203.

19. Carraher, T. N., Carraher, D., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. British Journal of Developmental Psychology, 3, 21-29.

20. D'Ambrosio, U. (1984). The intercultural transmission of mathematical knowledge: Effects on mathematical education. Campinas: UNICAMP.

21. Nasir, Na'ilah Suad; Hand, Victoria: Taylor Edd V. (2008). Culture and Mathematics in School: Boundaries Between ''Cultural'' and ''Domain'' Knowledge in the Mathematics Classroom and Beyond. Available from http://rre.sagepub.com/content/32/1/187.

22. D'Ambrosio Ubiratan, (2001). What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? Teaching Children Mathematics; Reston. Volume 7. Issue 6. P. 308.

23. Bishop, A. J. (1997, August). The relationship between mathematics education and culture. Opening address delivered at the Iranian Mathematics Education Conference in Kermanshah, Iran.

24. Zaslavsky, Claudia. (1988). Integrating Mathematics with the study of cultural Traditions. Paper presented at the ICME6. Budapest, Hungary. Available from ERIC.

25. Rahul Mitra (2010). Doing Ethnography, Being an Ethnographer: The Autoethnographic Research Process and I. Journal of Research Practice, Volume 6, Issue 1.

26. Bush, William S. (2002). Culture and Mathematics: An Overview of the Literature with a view to Rular Contexts, Working Paper. Ohio university, Athens. Available from ERIC.

27. Sangasubana, Nisaratana. (2011). How to Conduct Ethnographic Research. The Qualitative Report Volume 16 Number 2 March 2011 567-573 http://www.nova.edu/ssss/QR/QR16-2/sangasubanat.pdf

28. Favilli, Franco. ETHNOMATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION. Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education Copenhagen.

29. Frederick Leung; Kyungmee Park; Yoshinori Shimizu; Binyan Xu. (2012). MATHEMATICS EDUCATION IN EAST ASIA. ICME12. Plenary Activities6. Korea.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

کنترل از دیدگاه شونفیلد

آذر کرمیان
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی دبیرستان‌های قم

چکیده

در ایـن مقاله ضمـن معرفی مفهوم کنتـرل از دیدگاه شـونفیلد و ارتباط آن با فراشـناخت، به جایگاه این مفهوم در کلاس درس و ضـرورت توجـه بـه آن از دیدگاه برخی آموزشـگران ریاضی می‌پردازیم. همچنین روش شونفیلد را، در اسـتفاده از گروه‌های کوچک برای تدریس به شیوه حل مسـئله در کلاس درس، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ضمناً نگارنـده روش خـود در کلاس درس را مطرح می‌کند و در پایان با تکیه بر دیدگاه شونفیلد، برخی از آموزشگران ریاضی و تدریس خود در کلاس درس پیشنهادهایی ارائه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: کنترل، فراشناخت، حل مسئله

مقدمه

– همه را بلد بودم ولی به جواب نرسید،
– هر کار کردم به نتیجه‌ای که شما خواستید نرسیدم،
حل شد ولی برای رسیدن به جواب دو صفحه نوشتم.

این‌ها جملاتی است که معمولاً بعد از هر امتحان یا در موقع حل تمرین از دانش‌آموزان می‌شـنویم. در بسیاری از مواقع متوجه می‌شـویم دانش‌آموز همهٔ اطلاعات لازم برای حل مسـئله را داشـته و همه را در برگهٔ خود آورده است اما روش چینش آن‌ها را نمی‌دانسته و نهایتاً به جواب نرسیده، و یا اینکه از راهی بسیار طولانی که نیازی به آن نبوده مسئله را حل کرده است. بر این اساس، به‌دنبال یافتن راه حلی برای این مشـکل، به شـرح و تبیین مفهومی که شونفیلد آن را «کنترل» می‌نامد می‌پردازیم.

مفهوم کنترل

شونفیلد با مطالعهٔ توسـعهٔ حل مسئله در دانش‌آموزان از عامـل حسـاس و مؤثری در مهـارت آن‌ها، کـه او آن را «استراتژی کنترل» نامیده است آگاه شد. در تجزیه‌وتحلیلِ شونفیلد، استراتژی‌های کنترل با تصمیمات اجرایی ارتباط دارد، مانند تولید فعالیت‌های متناوب، ارزیابی راه‌حل، ارزیابی آنچه احتمالاً قادر به انجام آن هستید، بررسی رهیافت‌هایی که به‌کار می‌برید، ارزیابی آنچه برای توسعهٔ راه‌حل می‌سازید، و نظایر آن.[۱]

شـونفیلد (۱۹۸۵) متأثر از الگوی چهار مرحله‌ای حل مسئله پولیا (۱۹۴۵) به بررسی عوامل تأثیرگذار بر حل مسئله ریاضی پرداخت. از دیدگاه او، این عوامل شامل منابع دانشی، رهیافت‌های حل مسئله ریاضی، کنترل و نظام‌باوری مسئله حل کن هسـتند. بررسی نتایج مقدماتی، نقش این عوامل و به خصوص، نقش کنترل را به‌عنوان یک عامل تعیین‌کننده، برجسته کرد.

همان‌طور که شونفیلد اشاره می‌کند، کنترل به معنای انتخاب و به‌کارگیری منابع و استراتژی‌های مناسبی است که به حل مسـئله کمک می‌کند. از جمله توانایی‌های کنترلی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. طرح کلی حل مسئله؛
۲. بازنگری و تصمیم‌گیری؛
۳. دانش فراشناختی هوشیارانه.

تحقیقـات انجام شـده در زمینه حل مسـئله ریاضی، نشـان می‌دهد که آگاهی فرد از دانسته‌های خود در زمینه ریاضی و نحوه استفاده از آن‌ها در موقعیت مناسب، همچنین بازبینی فرد از عملکرد خود در ضمن حل مسئله و بعد از آن (توانایی‌های فراشناختی)، بر میزان موفقیت او در حل مسئله ریاضی تأثیر مستقیمی دارد (صمدی، ۸۰- ۱۳۷۹).[۳]

ضرورت توجه به مفهوم کنترل

با افزایش توانایی‌های کنترلی، مسئله حل کن می‌تواند بیشـترین منابع خود را به‌کار گیرد تا مسـائل مشکل را ، با کارایی بیشـتری حل کند؛ زیرا در صورت عدم توانایی‌های

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

کنترلی، ممکن است منابع دانشی او به هدر روند یا مورد استفاده قرار نگیرند.

به گفته گویا (۱۳۷۷) نکته مهم در حل مسئله آن است که شخص دربارهٔ چگونگی و زمان استفاده از آنچه می‌داند تصمیم بگیرد. توانایی استفاده نکردن از یک استراتژی حل مسئله پس از آزمایش آن و انتخاب یک استراتژی مناسب‌تر دیگر، ارزشیابی موقعیت و تجزیه‌وتحلیل فرایند انجام شده جهت شروع بعدی، لازمهٔ حل مسئله هستند که همگی از نوع فراشناخت می‌باشند.[۴]

توانایی‌های کنترلی، آن قدر در موفقیت مسئله حل کن مؤثر است که امکان دارد شخص، در عین حال که به تمام مفاهیم و روش‌های حل آن تسلط دارد، چون توانایی‌های کنترلی را نمی‌شناسد، در حل مسئله باز هم شکست بخورد و به نتیجهٔ مطلوب نرسد (شونفیلد، ۱۹۸۵).

گرچه دانش‌آموزان می‌توانند به دانش یا مهارت‌هایی برای تفسیر یک مسئله مجهز شوند، اما ناکارا بودن ساختار کنترل می‌تواند مانع اصلی آن‌ها در طول تلاش‌هایی که برای حل مسئله می‌کنند باشد. (کارلسون ۱۹۹۹) کارلسون توضیح می‌دهد که قطع نظر از زمینه غنی دانشی دانش‌آموزان، ناکارایی تصمیمات کنترلی اغلب نشان می‌دهد که دانش ریاضی آن‌ها قابل دسترس نیست، و عموماً از استراتژی‌های حل مسئله نمی‌توانند استفاده کنند. به گفته لین (۱۹۹۴) فعالیت فراشناختی درونی، یک یادگیرنده کلیدی را برای موفقیت فراگیری تحت موقعیت‌های کنترلی یادگیرنده آماده می‌کند. [۲]

روش شونفیلد

از نظر دانش‌آموزان یادگیری ریاضی، معمولاً به معنی یادگیری مجموعه‌ای از عملیات و روش‌های ریاضی است. شونفیلد برای بررسی استراتژی‌های کنترلی و بهبود آن روشی را ارائه کرد. روش او تدریس برای انجام ریاضی است که نه فقط شامل به‌کارگیری شیوه‌های حل مسئله است بلکه شامل استدلال، مدیریت مسئله‌ها و استفاده از رهیافت‌ها و استراتژی کنترل می‌باشد.

تدریس شونفیلد شامل به‌کارگیری عناصر مدل‌سازی، آماده‌سازی، اسلوب‌بندی، حذف در فعالیت‌های گوناگون در نظر گرفته شده برای برجسته کردن مفاهیم مختلف مراحل شناختی و ساختارِ دانشی لازم برای مهارت است. برای مثال، او در معرفی رهیافت‌های جدید، مسائلی را برای مدل‌سازی مطرح می‌کند. به‌عبارت دیگر او فرایند تفکر را نمایش می‌دهد (رهیافت‌ها و استراتژی کنترل). روش او حل مسائل ویژه، اما با تمرکز دانش‌آموزان بر استفاده و مدیریت ویژهٔ رهیافت‌هاست. او از دانش‌آموزان می‌خواهد مسائل کلاسی را با استفاده از رهیافت‌ها حل کنند و خود در طی این کار به‌عنوان یک مدیر عمل کرده، و رهیافت‌ها و تکنیک‌های حل را از دانش‌آموزان می‌خواهد، در ضمن اینکه آن‌ها استراتژی‌های کنترل گوناگون را مدل‌سازی می‌کنند تا بهترین نتیجه را کسب کنند. این تقسیم کار چندین عامل دارد. اولاً، با طرح چند فعالیت متوالی روند حل مسئله را برای دانش‌آموزان تغییر داده و مسیر را برایشان مشخص می‌کند. ثانیاً، به‌طور عمده، او مراحل حل مسئله را با همان ترتیب در نظر گرفت ولی مرکزیت را از کاربرد رهیافت‌ها به استفاده از استراتژی‌های کنترل در مدیریت رهیافت‌ها تغییر داد.[۱]

شونفیلد، در جلساتی، دانش‌آموزان را در گروه‌های کوچک برای حل مسئله شرکت داد. در طول جلسات، او همچون یک «مشاور» برای اطمینان یافتن از اینکه گروه‌ها با شیوه‌ای منطقی جریان را دنبال می‌کنند، بر کارشان فعالانه نظارت داشت. او از آن‌ها سه سؤال را می‌پرسید: الف. چه کاری انجام می‌دهید، ب. چرا این کار را می کنید، ج. این روش چگونه در موفقیت برای حل مسئله به شما کمک می‌کند؟ پرسیدن این سؤالات به دو صورت به آن‌ها در رسیدن به هدف کمک می‌کند: اول، دانش‌آموزان را به بازتاب روی فعالیت‌هایشان تشویق می‌کند، به این ترتیب که پیشرفت خود ارزیابی عمومی و مهارت‌های تشخیصی آن‌ها را توسعه می‌دهد، دوم، آن‌ها را تشویق می‌کند که به‌طور روشن دلایل خود را بیان و از انتخاب خودشان، همچنان که در استراتژی کنترل تمرین کردند، حمایت کنند.[۱]

شونفیلد(۱۹۸۳) با استفاده از دلایل متعددی از گروه‌های کوچک دفاع می‌کند. اول، این روش فرصتی را در اختیار معلم قرار می‌دهد تا در هنگامی که دانش‌آموزان به‌طور نیمه‌مستقل حل مسئله را به‌کار می‌گیرند آن‌ها را هدایت کند؛ او نمی‌تواند به‌طور مستقیم حل مسئله و تمرین کلاسی آن‌ها را هدایت کند. دوم، ضرورتاً تصمیم گروهی از بین شیوه‌های مختلف حل، و در بین بحث و استدلال، با انجام مراحل کنترل ناشی می‌شود. همچنین این بحث‌ها مهارت‌های فراشناختی را توسعه می‌دهد. سوم، دانش‌آموزان در مدرسه فرصت کمی برای همکاری با هم دارند؛ گروه‌های حل مسئله به آن‌ها اجازه می‌دهد که با همکاری در حل مسئله، همکاری در جهان واقعی را تجربه کنند. چهارم، دانش‌آموزان اغلب به توانایی‌های خودشان اطمینان ندارند، مخصوصاً اگر با مسئله مشکل پیدا کنند. مشاهده دیگرِ دانش‌آموزان تا حدی این عدم اطمینان آن‌ها را می‌کاهد، آن‌ها متوجه می‌شوند که این مشکلات تنها برای فهم و درک آن‌ها از مسائل نیست، پس با همکاری با دیگران باور نسبت به خودشان را بیشتر می‌کنند.[۱]

به گفته گویا (۱۳۷۷) «در چنین روش تدریسی، مسئله‌ها را باید با دقت زیادی انتخاب کرد که علاوه بر کشش

توانایی‌های کنترلی، آن قدر در موفقیت مسئله حل کن مؤثر است که امکان دارد شخص، در عین حال که به تمام مفاهیم و روش‌های حل آن تسلط دارد، چون توانایی‌های کنترلی را نمی‌شناسد، در حل مسئله باز هم شکست بخورد و به نتیجهٔ مطلوب نرسد

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

و جذابیت، به فراگیرندگان فرصت پیدا کردن ارتباط بین ایده‌ها و مفاهیم ریاضی را بدهد تا آن‌ها بتوانند از یک مفهوم به مفهوم دیگری برسند».[۴]

تجربهٔ نگارنده

روشی که من در کلاس (البته به‌طور بسیار محدود) استفاده کردم با الهام از الگوی شونفیلد و تحقیق گویا (۱۳۷۷) به‌صورت حل مسئله گروهی بود، که به‌علت محدودیت زمانی، در جلساتِ کم باید تعداد سؤالات زیادی را مطرح می‌کردم؛ پس سؤالاتی که به هر گروه اختصاص داده می‌شد متفاوت بود تا دانش‌آموزان ضمن ارزیابی گروهی سؤالات، نمونه سؤال‌های زیادی را بررسی کنند و پاسخ دهند. سؤالات در عین سادگی، دیدگاه گسترده‌تری نسبت به بحث داشت، به عبارتی باز پاسخ بود و اجازهٔ بحث و بررسی را به دانش‌آموزان می‌داد و از روش‌های مختلف قابل حل بود. در زمان حل مسائل توسط دانش‌آموزان به گروه‌ها سر زدم و ضمن قرار گرفتن در گروه‌های مختلف به‌عنوان یکی از اعضایشان عملکرد آن‌ها را تحت نظر داشتم. دانش‌آموزان در گروه‌ها بسیار فعال بودند به‌طوری که دانش‌آموزان ضعیف سعی داشتند به هیچ وجه از دوستانشان عقب نباشند و در تمام مراحل شرکت کنند. به تبع آن، من نیز در چنین شرایطی بهتر می‌توانستم علت بدفهمی‌ها یا ضعف بعضی از دانش‌آموزان را متوجه شوم؛ ضمن اینکه با روش‌های یادگیری و تفکر آن‌ها آشنا می‌شدم.

پیشنهاد و نتیجه‌گیری

پیشنهادهایی که ضمن بررسی کلاس به نظر نگارنده رسید به شرح زیر است:

۱. لازم است امکان اجرای کلاس‌های حل مسئله گروهی در مدارس فراهم شود، حتی در برنامه درسی گنجانده شود و مدیران مدارس همکاری لازم را در این زمینه با معلمان داشته باشند.

۲. چنان‌که صمدی (۱۳۸۰) بیان می‌کند دانش‌آموزان در حل مسئله به‌گونه‌ای برخورد می‌نمودند که گویی مسئله تنها یک راه حل صحیح دارد و این نحوه برخورد را به‌طور ضمنی از اطرافیان خود خصوصاً آموزگاران خود کسب کرده بودند.[۵] استفاده از سؤالاتی که راه‌حل‌های متنوع می‌طلبد و امکان طرح آن‌ها در کلاس و بحث و بررسی آن‌ها توسط دانش‌آموزان.

۳. بهتر است نمونه چنین سؤالاتی در کتاب‌های درسی درج شود و حتی راه حل بعضی ارائه گردد و از دانش‌آموزان بخواهیم دربارهٔ آن‌ها قضاوت کنند.

۴. همان‌طور که شونفیلد می‌گوید مطرح کردن استراتژی‌هایی که توسط مسئله حل‌کن‌های خبره استفاده می‌گردد در کلاس و ارائه نمونه‌هایی از آن‌ها، که توسط دانش‌آموزان حل شود، لازم است.

۵. به گفته گویا، بحث همگانی و کار در گروه‌های کوچک لازم و ملزوم یکدیگرند و کارایی یکی در نبود دیگری کاهش می‌یابد[۳] در صورت امکان از یک دانش‌آموز بخواهیم افکارش را بروز دهد، بلند فکر کند، تا دانش‌آموزان دیگر به بررسی آن بپردازند.

۶. به بچه‌ها بیاموزیم با دید جامع‌تری به مسائل نگاه کنند. برای این کار باید از نمونه سؤال‌های جامع‌تری استفاده کنیم، یعنی سؤالی که فقط مطلب اخیر را در برنگرفته باشد بلکه بعضی مطالب قبلی را نیز در بر بگیرد.

۷. در پایان، چنان‌که گویا اشاره می‌کند، انعطاف‌پذیری و قابلیت تغییر معلم، لازمه افزایش تأثیر این روش تأثیر است. از همه مهم‌تر، تعامل بین معلم و فراگیرندگان از مؤلفه‌های اساسی است.[۴]

و به گفتهٔ بَس، زمان آن رسیده است که استادان ریاضی نقش خود را به‌عنوان آموزشگران [ریاضی] بازبینی کنند. هنوز استادان ریاضی دانشگاهی- که به‌طور خاص، دست کم نیمی از عمر حرفه‌ای خود را صرف تدریس کرده‌اند- به‌عنوان آموزشگران[ریاضی]، به جز مدل‌های ایفای نقش مربی‌هایشان، هیچ آماده‌سازی یا توسعه حرفه‌ای ندیده‌اند.[۶]

لازم است معلمان ما بیش از پیش به‌دنبال یادگیری و استفاده روش‌های نوین آموزشی باشند و آموزش‌های مناسب ضمن خدمت و پیش از خدمت نیز به آن‌ها داده شود. همچنین امکان استفاده از این آموزش‌ها در مدارس ایجاد گردد.

منابع

1. Allan Collins, John Seely Brown, and Ann Holum. Cognitive Apprenticeship: Making Thinking Visible
2. Asmamaw Yimer-Nerida F. Ellerton Cognitive and Metacntive Aspects of Mathematical Problem Solving: An Emerging Model

۳. گویا، زهرا؛ رفیع پور، ابوالفضل. **چرا عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در تیمز منحصربه‌فرد بود؟** مجله رشد آموزش ریاضی. شماره۷۵. صص۱۵تا۲۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی.(۱۳۸۳)

۴. گویا، زهرا. **نقش فراشناخت در یادگیری حل مسئله ریاضی.** مجله رشد آموزش ریاضی. شماره۵۳. صص۱۳تا۱۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی.(۱۳۷۷)

۵. صمدی، معصومه. **نقش دانش فراشناخت در حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی.** مجله رشد آموزش ریاضی. شماره۶۱. صص۱۱تا۱۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی.(۱۳۸۰)

۶. بس، هیمن(۱۹۹۷). **ریاضی‌دان‌ها به عنوان آموزشگران ریاضی.** ترجمه نرگس مرتاضی مهربانی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره۹۸. صص۱۲تا۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی.(۱۳۸۸)

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

گزارشی از یک کلاس درس

مطهره سامانی و سپیده ملائی، دانشجویان رشتهٔ ریاضی
دانشگاه شهید بهشتی
استاد راهنما: دکتر زهرا گویا

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

آغاز

مدرسه‌ای که برای این گزارش انتخاب کردیم، یک دبیرستان نمونه‌دولتی دخترانه واقع در ناحیه ... تهران بود. علاقمندانِ ورود به این مدرسه، باید در آزمون ورودی ویژه مدارس نمونه پذیرفته شوند و در هرسال، تنها صد نفر اول آزمون اجازه ورود به این مدرسه را می‌یابند.

هنگامی‌که به مدرسه رسیدیم، ساعت ۸ صبح بود. از قرار معلوم در آن روز دانش‌آموزان آزمون کنکور آزمایشی داشتند. معاون مدرسه به محض رسیدنمان، ضمن استقبال فراوان، از ما خواهش کرد سر جلسه آزمون برویم، زیرا با کمبود مراقب مواجه شده بودند. ما هم این وظیفهٔ خطیر را پذیرفتیم و پس از سه ساعت سر پا ایستادن در جلسه، بالاخره به دفتر معلمان راه یافتیم، آن‌گاه به

پیشنهاد خانم مدیر، به یک کلاس پایه اول برای تهیه گزارش رفتیم.

پایه اول، دارای دو جلسه کلاس ریاضی اصلی و یک جلسه ریاضی تکمیلی در هفته بود. البته **این دو کلاس توسط دو معلم که مستقل از هم کار می‌کردند تشکیل می‌شد.** از آنجا که مطالب کلاس ریاضی اصلی به کتاب نزدیک‌تر بود، آن را برای مشاهده انتخاب کردیم.

پس از انجام هماهنگی‌های لازم با معلم، وارد کلاس شدیم. فوراً **برپا** دادند. معلم ما را معرفی و به گوشهٔ سمت چپ کلاس هدایتمان کرد. جمعیت کلاس ۳۲ نفر بود و دانش‌آموزان در ۳ ردیف، روی نیمکت‌های دو نفری نشسته بودند. آن‌طور که معلم می‌گفت، روش تدریسش به این صورت بود که در ابتدای سال تحصیلی، یک سری کامل پلی‌کپیِ جزوه دست‌نویس خود را به دانش‌آموزان داده بود و در هر جلسه مشخص می‌کردند که در جلسهٔ بعد کدام صفحات را می‌خواهد تدریس کند. بنابراین از دانش‌آموزان می‌خواست تا آن صفحات را **پیش‌خوانی** و در حد توانشان، تمرین‌ها و مثال‌ها را حل کنند.

یکی دیگر از فعالیت‌هایی که در این کلاس انجام می‌شد، این بود که قبل از شروع هر جلسه، یکی از دانش‌آموزان، داوطلبانه پاسخ تعداد محدودی از تمرین‌های کتاب را که از قبل توسط معلم تعیین شده بود، پای تخته می‌نوشت. چیزی که بیش از پیش توجه ما را در این کلاس جلب کرد، **مشارکت همگانی** دانش‌آموزان و **رقابت زیاد** میان آن‌ها برای پاسخ دادن به سؤالات معلم بود.

شروع کلاس

مبحث درس، در جلسه‌ای که ما در کلاس حضور داشتیم، **مجموعه‌ها** بود. ابتدا معلم کلاس را با نام خدا آغاز کرد، سپس به رفع اشکال سؤال‌های امتحانی که جلسه قبل گرفته بود، پرداخت. او از دانش‌آموزان خواست تا **از روی سؤالاتی که جواب اشتباه داده‌اند یا جواب نداده‌اند، دو بار همراه با پاسخ صحیح بنویسند.** معلم سؤال‌ها را می‌خواند و همهٔ دانش‌آموزان با صدای بلند، پاسخ می‌دادند. او به بچه‌ها تأکید می‌کرد که «مشابه همه سؤالات، قبلاً حل شده و شما باید از راه حل‌های مشابه استفاده می‌کردید. در غیر این صورت، بی‌جهت نمره از دست داده‌اید».

سپس این مسئله امتحان را پای تخته حل کردند:

مسئله: فرض کنید مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳،...،۵۰\}$ باشد. A چند زیرمجموعه دارد به‌طوری که هر یک حداقل یک عدد صحیح زوج داشته باشند؟

معلم توضیح داد که اگر **واژهٔ حداقل** در سؤالی به‌کار رفته باشد، باید این‌گونه عمل کنیم: «حالت نامطلوب-کل حالات = حالت مطلوب» و از دانش‌آموزان خواست که **در صورت متوجه نشدن مطلب حتماً بپرسند، در غیر این صورت در امتحان ضرر می‌کنند** و بعد ادامه داد که «پس در این سؤال، کل حالات $۲^{۵۰}$ است و حالت نامطلوب زمانی رخ می‌دهد که در تمام زیرمجموعه‌ها، همهٔ اعضا فرد باشند. یعنی همه زیرمجموعه‌های مجموعه {۴۹، ...، ۵، ۳، ۱} که برابر با $۲^{۲۵}$ است. حال داریم «$۲^{۵۰}-۲^{۲۵}$= حالت مطلوب» و تأکید کرد که «از روی تابلو کپی نکنید و سؤالات خود را الآن بپرسید!»

یکی از دانش‌آموزان از معلم خواست دوباره توضیح دهد و او پس از توضیح مجدد، پرسید«همه فهمیدند؟» و همه با صدای بلند گفتند«بله!».

معلم گفت «این سؤالی بود که بی‌جهت، ۲ نمره را از دست داده‌اید!»

بعضی دیگر هم در امتحان، نوشته بودند $۳^{-۲} = -\frac{۱}{۹}$. معلم گفت «اشتباه است! فلاسفه اشتباه نوشتند!» و همه دانش‌آموزان خندیدند! وی با

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دیدن خنده آن‌ها گفت: «نخندید! چشم‌ها را باز کنید و صورت مسئله را ببینید!» و بالاخره، آخرین مسئله که از آن امتحان حل کردند، این بود:

مسئله: اگر $M=\{3^x : x\in Z\}$ و $A=\{9^x : x\in Z\}$ را داشته باشیم، متمم A را با علائم ریاضی مشخص کنید.

معلم به دانش‌آموزان گفت که «A و M را با اعضایشان مشخص کنید. سپس شکل بکشید تا اشتباه نکنید» و با حل این مسئله، رفع اشکال سؤالات امتحانی تمام شد.

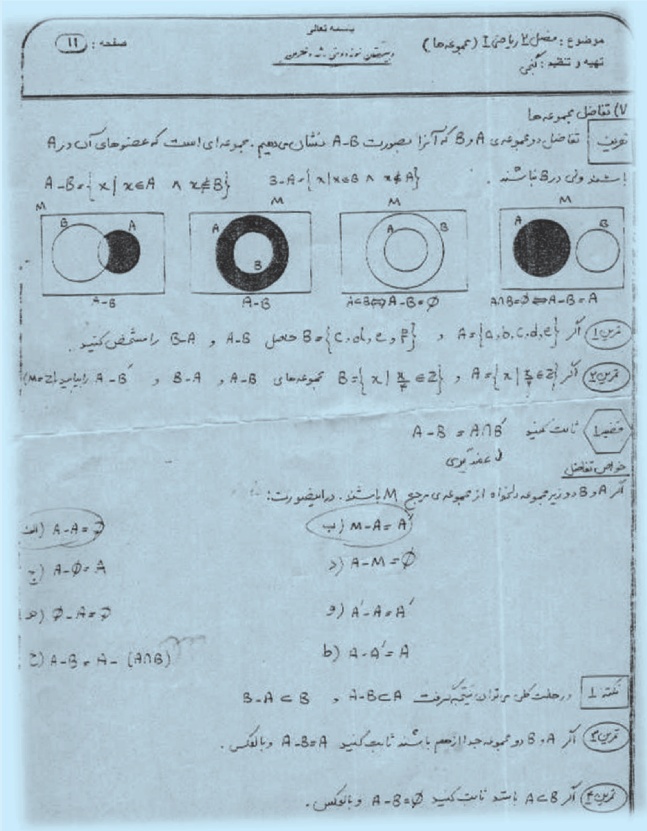
سپس، معلم به بررسی پاسخ دو تمرین کتاب، از بخش مجموعه‌ها که قبل از شروع کلاس روی تخته نوشته شده بود، پرداخت. بعضی از دانش‌آموزان با صدای بلند گفتند که «صورت مسئله اشتباه است!» و معلم خطاب به آن‌ها گفت «کی می‌خواین درست شین»! و بعد شروع به نوشتن صورت درست تمرین، همراه با جواب نمود و دانش‌آموزان هم، کم و بیش، وی را همراهی می‌کردند. در حل تمرین دوم، جواب درست بود، اما معلم از آن‌ها خواست **راه‌حل هوشمندانه‌ای** ارائه دهند. بعد از کمی همهمه، یک نفر ایده داد که «از راه دمورگان حل کنیم». معلم هم گفت «آفرین! بسیار هوشمندانه بود. البته اگر از راه قبلی هم بنویسید، نمره می‌گیرید».

ادامه درس

معلم درس را این‌گونه ادامه داد که: تعریف AUB چه بود؟ xهایی که عضو A یا عضو B باشند و تأکید کرد که به لفظ «یا» دقت کنند. سپس از دانش‌آموزان پرسید که A∩B چه بود؟ پاسخ دادند: «xهایی که هم عضو A و هم عضو B باشند».

بعد به تعریف A-B پرداخت.گفت عضوهایی از A که در B نباشند. از آن‌ها پرسید که B-A چه می‌شود؟ همه پاسخ را گفتند. معلم افزود که «در تفاضل مجموعه‌ها نیز، مانند اعداد، ترتیب مهم است. یعنی همان‌طور که ۷-۵≠۵-۷ است، B-A≠A-B است». سپس برای دانش‌آموزان تعریف ریاضی تفاضل را نوشت و از آن‌ها خواست که به **نمودارهای ون** داخل پلی‌کپی خود نگاه کنند.

دانش‌آموزان از نمودار دریافتند که آن تکه از A که به B تعلق ندارد، همان تعریف A-B است. آن‌گاه معلم از آن‌ها خواست که B-A را در شکل هاشور بزنند. بعد به سراغ تک‌تک دانش‌آموزان رفت تا شکل‌هایشان را بررسی کند. آن‌ها کمی در B-A=Ø اشکال داشتند که



موضوع: مفصل ریاضی I (مجموعه‌ها)
تهیه و تنظیم: کبری
صفحه: ۱۱

۷) تفاضل مجموعه‌ها

تعریف: تفاضل دو مجموعه‌ی A و B که آن را بصورت A-B نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشند ولی در B نباشند.

$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$ $B-A=\{x \mid x\in B \wedge x\notin A\}$

A-B A-B $A\subset B \Leftrightarrow A-B=\emptyset$ $A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow A-B=A$

تمرین ۱: اگر $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{c,d,e,f\}$ حاصل A-B و B-A را مشخص کنید.

تمرین ۲: اگر $A=\{x \mid \frac{x}{2}\in Z\}$ و $B=\{x \mid \frac{x}{3}\in Z\}$ مجموعه‌های A-B و B-A و $A-B'$ را بیابید ($M=Z$)

قضیه ۱: ثابت کنید $A-B=A\cap B'$ (عضو گیری)

خواص تفاضل

اگر A و B دو زیرمجموعه دلخواه از مجموعه‌ی مرجع M باشند. در اینصورت:

الف) $A-A=\emptyset$ ب) $M-A=A'$

ج) $A-\emptyset=A$ د) $A-M=\emptyset$

هـ) $\emptyset-A=\emptyset$ و) $A'-A=A'$

ز) $A-B=A-(A\cap B)$ ح) $A-A'=A$

نکته ۱: در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت $A-B\subset A$ و $B-A\subset B$

تمرین ۳: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند ثابت کنید $A-B=A$ و بالعکس.

تمرین ۴: اگر $A\subset B$ باشد ثابت کنید $A-B=\emptyset$ و بالعکس.

معلم توضیح داد اشکالشان کجاست و پرسید «اگر A زیرمجموعه B باشد، A-B چه می‌شود»؟ دانش‌آموزان پاسخ دادند «تهی». معلم افزود «اگر یک مجموعه از دیگری کوچک‌تر باشد، همیشه اشتراکشان، مجموعهٔ کوچکتر می‌شود» و **از دانش‌آموزان خواست این نکته را ۲۰ بار تکرار کنند و ۴۰ بار بنویسند (البته به شوخی)** و سؤال کرد:

چه رابطه ای بین B-A و A-B است؟

یک دانش‌آموز: برعکسِ هم هستند!؟

معلم: نه! اشتباه است.

دانش‌آموز دیگر: متمم هم هستند؟

معلم: باز هم اشتباه است!

یک نفر دیگر: اشتراکشان تهی است!

معلم: چرا؟

همان نفر: سکوت! (او دلیل را نمی‌دانست!)

معلم: از A قسمت مشترک را برداشته‌ایم، از B نیز همین‌طور. پس اشتراکی بین آن‌ها نمی‌ماند. بنابراین اشتراکشان تهی است.

معلم از دانش‌آموزان خواست این جمله را دائم با خود تکرار کنند که «ویروس اشتراک، تهی است»! سپس دو نفر را پای تخته آورد تا تمرین ۱ و ۲ را حل کنند (از پلی‌کپی پیوست) که آن‌ها نیز به درستی حل کردند و بعد از آن قضیه ۱ را اثبات کردند.

قبل از اثبات، معلم از دانش‌آموزان پرسید که آن را به چه روشی اثبات کنیم؟ آن‌ها یک صدا پاسخ دادند «عضوگیری!» و قضیه به آسانی اثبات شد!

سپس معلم به‌سراغ **خواص تفاضل** رفت و از دانش‌آموزان خواست که یک‌به‌یک، پای تخته بیایند و خواص را اثبات کنند. برای اثبات خاصیت (ب)، معلم یکی از دانش‌آموزانی را که نسبت به بقیه ضعیف‌تر بود (به گفته ایشان) پای تخته آورد. دانش‌آموز در اثبات به مشکل برخورد. معلم از او خواست دقیق به سؤال نگاه کند و شکل بکشد، اما باز هم نتوانست. **معلم سر او داد زد که «تا شب هم که شده می‌ایستی تا این مسئله را حل کنی!».**

دست آخر، دانش‌آموز با راهنمایی همکلاسی‌هایش موفق شد مسئله را حل کند. معلم گفت «خب این کاری داشت؟!!» (با لحنی کنایه‌آمیز که دانش‌آموزان با خنده و شوخی، به آن خاتمه دادند.)

چیزی که معلم بسیار بر آن تأکید داشت، این بود که **دانش‌آموزان موقع اثبات، روی مساوی‌ها یا فلش‌ها بنویسند که از چه قضیه یا خاصیتی استفاده کرده‌اند.**

او برای تکلیف منزل، به آن‌ها گفت که پلی‌کپی خود و کلاس دیگر را حل کنند و از روی قضیه‌ها و تمرین‌ها، دو بار بنویسند.

پایان مشاهده

طی صحبتی که بعد از کلاس با معلم داشتیم، وی اشاره کرد که «سطح کتاب بسیار پایین است. به‌خصوص در تألیف‌های جدید، کاهش مطالب بیشتر به چشم می‌خورد. اگر سطح کنکور این‌قدر پایین بود، ما از کتاب استفاده می‌کردیم، اما با این وضعیت، نمی‌توانیم به کتاب اکتفا کنیم».

البته او در تدریس، از کتاب درسی استفاده نمی‌کرد، و تنها برای تعداد محدودی از تمرین‌ها، به کتاب رجوع می‌نمود. آخرین سؤال ما این بود که «آیا به دنبال روش‌های بهتر تدریس هستید؟» و پاسخ این بود که «هر لحظه به این موضوع فکر می‌کنم و از روش‌های بهتر و کارآمدتر، بسیار استقبال خواهم کرد».

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فعالیت هدف‌دار و بستر معنادار

دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

مترجم: محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

کلیدواژه‌ها: کمترموفق (ضعیف)، بازی به‌عنوان یک بستر برای یادگیری ریاضی، حل مسئله، استفاده و به‌کارگیری ریاضی، خانه به‌عنوان بستری برای سواد عددی، بستر معنی‌دار، فعالیت هدف‌دار

معرفی مفهوم

منظور از «فعالیت‌های هدف‌دار»[1] در ریاضیات دورهٔ ابتدایی، آن دسته از فعالیت‌هایی است که از نگاه معلم و دانش‌آموز دارای هدف باشد و دانش‌آموز هدف‌مند بودن آن را به‌خوبی حس کند. این فعالیت‌ها باید برای به تحرک واداشتن دانش‌آموزان و درگیر کردن آن‌ها با خود به اندازهٔ کافی غنی باشند و به‌گونه‌ای طراحی شوند که تعهد و التزام لازم را در دانش‌آموزان، برای انجام و تکمیل آن‌ها، به‌وجود آورند.

بحث و توضیح

معلمان دورهٔ ابتدایی، از انتخاب یا اجرای یک فعالیت در کلاس ریاضی خود، اهداف خاصی چون توسعهٔ یادگیری، تقویت یادگیری، سنجش یادگیری و رشد و توسعهٔ انواع مختلف تفکر در ریاضی را دنبال می‌کنند. آن‌ها باید این اهداف را با دانش‌آموزان نیز در میان گذارند تا آن‌ها نیز بدانند که واقعاً با چه منظور و هدفی از آن‌ها خواسته شده است که فعالیت‌ها را انجام دهند.

روشن بودن هدف در انجام یک فعالیت می‌تواند، در دست‌یابی به آن هدف، هم یاری‌گر دانش‌آموزان و هم تسهیل‌کنندهٔ کار معلم باشد. برخی از معلمان در هنگام طراحی یک فعالیت یا یک تجربهٔ ریاضی برای دانش‌آموزانشان، همهٔ جوانب آن را بررسی می‌کنند تا مطمئن شوند که از دیدگاه دانش‌آموزان این فعالیت بی‌ارزش نیست و هدفمندی آن را درک می‌کنند.

بیش از یک دهه پیش آینلی و پرات[2] (۲۰۰۲) بیان کردند که نگاهی نو به رویکرد ساخت‌وسازگرایی در حال شکل‌گیری است (برای مثال، هارل و پیپرت[3]، ۱۹۹۱) و برخی از تحقیقات نیز در جست‌وجوی نظامی معتبر در یادگیری ریاضیات هستند (برای مثال، نانز و همکاران، ۱۹۹۳؛ شلیمن[4]، ۱۹۹۵) و در همهٔ این تحقیقات، اجزای حیاتی در تدریس ریاضی، مثل چالش و ارتباط، به هدفمند بودن فعالیت‌های یادگیرندگان وابسته شده است. برخی از جمله‌های مهم این محققان عبارتند از «هدفمندی برای یادگیرنده در محیط کلاس درس را از اجزای کلیدی طراحی کارهای آموزشی می‌دانیم» و «[کار هدف‌دار عبارت است از] آنچه که برای یادگیرنده یک خروجی معنی‌دار داشته باشد، چه [آن خروجی] یک محصول واقعی باشد چه محصولی مجازی، یا راه‌حلی برای یک مسئلهٔ جذاب» (آینلی و پرات، ۲۰۰۲: ۲۰).

لیو و ونگر[5] (۱۹۹۱)، تفاوت‌های یادگیری معمولی در کلاس و «یادگیری در موقعیت[6]» را مورد بررسی قرار

داده‌اند. منظور آن‌ها از «یادگیری در موقعیت» این است که به‌جای آنکه در محیط کلاس درس به‌صورت خیالی و مجازی در مورد یک واقعیت تدریس شود، یادگیری دقیقاً در فضای همان موقعیت و به‌صورت واقعی و در حین لمس آن موقعیت اتفاق بیفتد. لیو و ونگر در تحقیقات خود، پنج موقعیت یا شغل مختلف از جمله مامایی، خیاطی و قصابی را به‌منظور تحلیل این نوع یادگیری انتخاب کردند. آن‌ها مشاهده کردند که در همهٔ موقعیت‌های مورد مطالعه، یادگیرندگان به‌تدریج دانش و مهارت کسب کرده و از یک مبتدی و نوآموز به یک خبره در آن کار تبدیل می‌شوند. مطالعهٔ آن‌ها بیشتر بر روی ریاضیات روزمره‌ای متمرکز بود که در این مشاغل مورد استفاده قرار می‌گرفت. آن‌ها متوجه شدند که نوآموزان، برخی از محاسبات و مفاهیم ریاضی را که قبلاً در کلاس درس به سختی می‌توانستند بفهمند، اکنون به‌راحتی می‌فهمند. تفاوت اصلی یادگیری در کلاس و یادگیری در موقعیت (در این مورد کارآموزی) آن است که برخلاف یادگیری معمولی در کلاس، در یادگیری موقعیتی، محصول خروجی دقیقاً همان ریاضیاتی است که مردم در زندگی واقعی خود با آن سروکار دارند و آن را به‌کار می‌گیرند. یادگیری در موقعیت به این دلیل حائز اهمیت است که هدف‌دار است و در حین آن، یک هدف مشخص و واقعی برای یادگیری وجود دارد. علاوه بر آن در این نوع یادگیری، فرصت‌هایی برای بروز اشتباه و تصحیح آن به‌وجود می‌آید که کمتر در بستر کلاس درس شاهد آن هستیم.

شاید برای بسیاری از دانش‌آموزان دبستانی، تنها خوش‌رویی، مهربانی و تدریس جذاب معلمشان، هدف و عاملی کافی برای تحرّک و پویایی و انجام بهتر فعالیت‌های ریاضی باشد. برای برخی دیگر از دانش‌آموزان، کنجکاوی و تمایل طبیعی و ذاتی آن‌ها برای فهمیدن و کشف الگوها و روابط، یک هدف و انگیزه برای تحرک آن‌ها در ریاضیات است و این موضوعی است که در تحقیق‌ها، مسائل و معماهای جذاب ریاضی نمودِ بیشتری دارد. با وجود این، قاطبهٔ دانش‌آموزان، وقتی با کار یا فعالیتی در ریاضی درگیرند، به دنبال یافتن نوعی ارتباط بین آن فعالیت و زندگی‌شان هستند، یعنی به‌طور خلاصه، به‌دنبال هدف از انجام آن فعالیت هستند.

هایلاک (۱۹۹۱: ۸۸- ۱۸۴) به چهار نوع ارتباط ریاضی اشاره می‌کند که می‌توانند دلایلی برای هدفمندی فعالیت‌های ریاضی باشند و معلمان ریاضی می‌توانند فعالیت‌های خود را به استناد یکی از این ارتباطات طراحی و اجرا کنند. اولین نوع ارتباط، که اتفاقاً در هدفمندسازی و ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزان دارای کمترین تأثیر است، «ارتباط بلندمدت»[۷] نام دارد. در این نوع ارتباط، معلم یک فعالیت را فقط به‌دلیل پیش‌نیاز بودن آن و نه برای نیازهای کوتاه‌مدت، بلکه برای نیازهایی که در آینده و در دوره‌ای بلندمدت مانند دورهٔ متوسطه و یا محیط کار احساس می‌شود طراحی و اجرا می‌کند. نوع دیگر ارتباط «ارتباط نیابتی»[۸] نام دارد که در آن، معلم، فعالیت‌ها و مسائلی از زندگی واقعی را در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهد؛ اما با این ویژگی که این مسائل در حقیقت مسئلهٔ دیگران هستند تا مسئلهٔ دانش‌آموز! به این صورت که گرچه این مسائل به موقعیت‌ها و مشاغلی واقعی پرداخته‌اند اما دانش‌آموز با آن موقعیت‌ها احساس بیگانگی می‌کند و باید به نیابت از افراد عنوان شده درون مسائل، آن‌ها را حل کند که این خود تا حدودی می‌تواند باعث کاهش انگیزه و هدفمندی این نوع فعالیت برای دانش‌آموزان شود. هدف سوم از طراحی یک فعالیت، «ارتباط مصنوعی»[۹] است. در این نوع ارتباط، گاهی معلم به ناچار احتیاج دارد که به‌منظور جلب توجه و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان نسبت به یک موضوع ریاضی، فوراً از طرف خود یک ارتباط یا هدف ساختگی مصنوعی طرح و عنوان کند. مانند اینکه مجبور باشد دائماً از زمینه‌هایی که بچه‌ها به آن‌ها علاقه‌مندند مثل بازی فوتبال یا جدول برنامه‌های تلویزیون و... که ممکن است حتی همخوانی چندانی با آن موضوع ریاضی نداشته باشد، فعالیتی طرح کند تا شاید به‌طور موقت بتواند در آن‌ها انگیزه ایجاد کرده و آن موضوع را هدف‌دار جلوه دهد. البته مصنوعی بودن این مثال‌ها باعث می‌شود که آن‌ها مسئله‌های اصیلی نباشند و لذا کم‌کم برخی از بچه‌ها دلسرد می‌شوند. به گفتهٔ آینلی و همکارانش (۲۰۰۵)، شواهد زیادی در دست است که نشان می‌دهد برخی از فعالیت‌های طراحی شده بر بستر دنیای واقعی در رسیدن به مقاصدشان با شکست روبه‌رو می‌شوند و از دید دانش‌آموز از هدف‌مندی کمی برخوردارند. هایلاک، چهارمین نوع ارتباط را «ارتباط بی‌واسطه و اصیل»[۱۰] می‌نامد که از مهم‌ترین ابزارها برای به حداکثر رساندن هدفمندی فعالیت‌های ریاضی به‌شمار می‌رود، به‌خصوص در مورد دانش‌آموزان ضعیف و کمتر موفق. در این نوع رابطه، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که به کمک ریاضی، به نتایجی دست یابند که خود می‌توانند همان لحظه آن را دیده و لمس کنند و از نزدیک با محصولات آن فعالیت ارتباط برقرار سازند. او از این نوع ارتباط، با عنوان «استفاده از ریاضیات برای اتفاق افتادن چیزها»[۱۱] نیز نام می‌برد و به ذکر مثال‌هایی می‌پردازد که در آن‌ها، دانش‌آموزان در هنگام مواجهه با فعالیت‌هایی از این نوع (ارتباط بی‌واسطه و اصیل)، دارای بهترین عملکرد بوده‌اند.

آینلی و پرات (۲۰۰۲: ۳- ۲۲) به پژوهش بر روی تفاوت عملکرد دانش‌آموزان در فعالیت‌های مبتنی بر رایانه

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

(بسته‌های کمک‌آموزشی چندرسانه‌ای) با فعالیت‌های معمول کلاسی که از جانب معلمان طراحی و اجرا می‌شوند پرداخته و به این نتیجه رسیده‌اند که دانش‌آموزان در فعالیت‌های رایانه‌ای عملکرد بهتری دارند. آن‌ها سه دلیل را برای این نتیجه عنوان می‌کنند. اول اینکه این نوع فعالیت‌ها [مبتنی بر رایانه] دارای خروجی مشخص و آشکار برای دانش‌آموزان است. دوم اینکه می‌توان به کمک آن‌ها، برای دیگر بچه‌ها نیز چیزهایی ساخت، و دلیل سوم نیز آن است که این نوع فعالیت‌ها، فرصت‌هایی برای تصمیم‌گیری معنی‌دار در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند.

هایلاک (۱۹۹۱: ۷۰- ۶۷) در هنگام کار بر روی موضوع «فعالیت‌های هدف‌دار در بسترهای معنی‌دار»[۱۲] به‌عنوان عاملی مهم در به تحریک واداشتن دانش‌آموزان کمترموفق، شش دسته کار هدفمند را که می‌تواند دانش‌آموزان را در هنگام استفاده از ریاضی درگیر خود سازد و آن‌ها را با خود همراه کند، پیشنهاد می‌کند، این شش دسته عبارت‌اند از:

- حل یک مسئلهٔ واقعی[۱۳]
- برنامه‌ریزی یک رویداد[۱۴]
- طراحی کردن و ساختن[۱۵]
- شبیه‌سازی رایانه‌ای[۱۶]
- نقش- بازی[۱۷]
- بازی‌ها و مسابقات[۱۸]

البته دسته‌های فوق برای هدفمند ساختن و پویاسازی فعالیت‌های دانش‌آموزان در همهٔ پایه‌ها به‌صورت یکسان مناسب نیستند. مثلاً دانش‌آموزان بزرگ‌تر ترسی از انجام نقش- بازی‌ها ندارند در حالی‌که دانش‌آموزان کوچک‌تر ممکن است به اندازهٔ کافی با مهارت‌های اجتماعی در اجرای بازی‌ها در قالب گروه‌های کوچک آشنایی نداشته باشند و لذا این بازی‌ها آن‌طور که باید مفید واقع نشود. اما همهٔ دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی، صرف‌نظر از اینکه در چه پایه‌ای در حال تحصیل هستند، می‌توانند از طریق سه دستهٔ اول از فعالیت‌های عنوان شده برانگیخته شوند. هایلاک (۱۹۹۱: ۹- ۱۸۸) همچنین توصیه‌هایی به معلمان دارد که باید معلمان، در حین طراحی یک فعالیت، به آن‌ها توجه کنند تا آن فعالیت دارای بیشترین سطح هدفمندی باشد و بتواند بیشترین سهم را در پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان داشته باشد. نکات مورد توجه هایلاک عبارتند از:

- موقعیت‌هایی را که در آن‌ها دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور واقعی برای حل مسئلهٔ خودشان فعالیت کنند شناسایی کنید؛
- به آن‌ها یاد بدهید مسئولیت طراحی و انجام یک کار را خودشان به عهده بگیرند؛
- به آن‌ها کمک کنید تا بتوانند، با دید باز، مراحل استفاده از مهارت‌های ریاضی را که در اختیار دارند برای رسیدن به هدف موردنظر پایش کنند؛
- فرصت‌هایی را تحت قالب فعالیت‌های بی‌واسطه و اصیل برای کسب مهارت‌های جدید توسط خود دانش‌آموزان، برایشان فراهم کنید؛
- تضمین کنید که در پایان یک فعالیت ریاضی حتماً چیزی عینی برای آن‌ها اتفاق می‌افتد؛
- ضمن محصور قرار دادن ارتباط بی‌واسطه و اصیل بین ریاضی و هدف و سود حاصل از آن در یک فعالیت، با دانش‌آموزان به‌طور صریح در مورد ریاضیاتی که برای رسیدن به محصول استفاده شده است بحث کنید.

مثال‌های عملی

در ادامه برای سه دستهٔ اول از فعالیت‌هایی که هایلاک به آن‌ها اشاره کرد نمونه‌ای عملی ارائه می‌کنیم. این مثال‌ها دارای سطح بالایی از هدفمندی هستند و موجب به‌وجود آمدن حس تعهد و مسئولیت در دانش‌آموزان می‌شوند. همچنین این فعالیت‌ها می‌توانند دامنهٔ وسیعی از دانش و مهارت‌های ریاضی را در بر گیرند.

حل یک مسئلهٔ واقعی

می‌توان در یک کلاس معمولی از گروه سنی ۱۰ و ۱۱ساله، دربارهٔ چگونگی تغییر چیدمان وسایل کلاس یک مسئلهٔ واقعی طراحی کرد. مثلاً می‌توانیم از دانش‌آموزان بخواهیم در مورد اینکه چگونه می‌توان به بهترین شکل وسایل محیط کلاس را تغییر داد تصمیم‌گیری کنند تا شرایط لازم برای انجام بیشتر فعالیت‌های گوناگونی که معلم قصد دارد در کلاس انجام دهد مهیا شود. این پروژه، دانش‌آموزان را با کارهایی چون، استفاده از چهار عمل اصلی در محاسبات، استفاده از ماشین‌حساب‌ها، اندازه‌گیری طول، طراحی در مقیاس‌های متفاوت، مفهوم محیط و مساحت و برخی مفاهیم فضایی، درصدها، عامل‌ها، گردآوری داده‌ها و سازماندهی، نمایش هندسی و تفسیر آن‌ها درگیر می‌کند.

طراحی یک رویداد

می‌توان از تعدادی دانش‌آموز ضعیف و کمترموفق ۸ تا ۹ساله خواست که مسئولیت طراحی، برنامه‌ریزی و اجرای مسابقات فوتبال مدرسه و همهٔ مسائل مربوط به آن را قبول کنند. آن‌ها باید به کمک معلم خود سعی کنند همهٔ جزئیات این رویداد را در مدرسه شناسایی و آن‌ها را در طراحی برنامهٔ مسابقات لحاظ کنند. این پروژه نیز مباحثی مانند استفاده و به‌کارگیری عمل جمع، تفریق و ضرب،

تفاوت اصلی یادگیری در کلاس و یادگیری در موقعیت (در این مورد کارآموزی) آن است که برخلاف یادگیری معمولی در کلاس، در یادگیری موقعیتی، محصول خروجی دقیقاً همان ریاضیاتی است که مردم در زندگی واقعی خود با آن سروکار دارند و آن را به‌کار می‌گیرند. یادگیری در موقعیت به این دلیل حائز اهمیت است که هدف‌دار است و در حین آن، یک هدف مشخص و واقعی برای یادگیری وجود دارد

برنامه‌ریزی زمانی، جدول‌بندی، مهارت‌های فضایی، مرتب کردن رویدادها و ثبت آن‌ها، خرید، کار با نسبت‌های ساده، اندازه‌گیری حجم مایعات، محاسبات مالی و کنترل بودجه را شامل می‌شود.

طراحی کردن و ساختن

قرار است به دانش‌آموزان ۹ تا ۱۰ساله مهارت اندازه‌گیری طول با واحد سانتی‌متر و میلی‌متر را آموزش دهیم. موضوع فعالیت موردنظر، طراحی و ساخت یک جعبه برای بسته‌بندی ۳۰ عدد ماشین حساب یکسان است. قبل از شروع کار، دانش‌آموزان متعهد می‌شوند که بهترین جعبه را برای این کار به معلم تحویل دهند. آن‌ها در حین انجام این فعالیت با برخی از مفاهیم مهم ریاضی سروکار دارند که مهم‌تر از این مفاهیم، تعهد آن‌ها به ارائهٔ کار به‌نحو احسن و هدف‌دار بودن این فعالیت است. این پروژه شامل مفاهیمی چون: اندازه‌گیری دقیق در حد سانتی‌متر و میلی‌متر، استفاده از مکعب‌ها و مفهوم زاویهٔ قائمه، برخی مفاهیم فضایی خاص، محیط، مساحت، حجم، تخمین زدن و تأثیر خطای اندازه‌گیری بر محصول نهایی را در بر می‌گیرد.

مطالعهٔ بیشتر

تاکر (۲۰۰۵) سعی در معرفی و ارائهٔ مثال‌هایی از نقش- بازی‌ها دارد که برای کودکان کم‌سن و سال بسیار مناسب است و فرصت‌هایی را نیز برای یادگیری و به کارگیری مفاهیم ریاضی به شکلی هدف‌دار برای آن‌ها ایجاد می‌کند. همچنین نوشته‌ای تحت عنوان «فعالیت‌های هدف‌دار در بسترهای معنی‌دار» از هایلاک (۱۹۹۱)، از منابع اصلی به‌کار گرفته شده در این بخش است. لیو (۱۹۸۸)، در راستای «یادگیری در موقعیت»، ریاضی فراگرفته شده در مدرسه را با ریاضی فراگرفته شده در محل کار مقایسه می‌کند. اتکینسون[۱۹] (۱۹۹۲) مجموعهٔ کامل و مفیدی از فعالیت‌های هدف‌دار برای دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر دورهٔ ابتدایی را جمع‌آوری کرده است.

بستر معنادار

معرفی مفهوم

بستر معنادار[۲۰] به آن دسته از تجربه‌های روزمرهٔ دانش‌آموزان گفته می‌شود که در آن‌ها زمینه‌هایی از ریاضیات وجود دارد و یا می‌توان ریاضی را با آن‌ها عجین ساخت. چنین تجاربی تشکیل یک بستر یا محتوای معنادار برای ریاضی می‌دهند که به توسعه و کاربرد ریاضی دانش‌آموزان در کارهای چالش‌برانگیز کمک می‌کند. بستر معنادار هم برای معناسازی از مفاهیم ریاضی و هم برای درگیر کردن فعالانهٔ دانش‌آموزان با موقعیت‌های واقعی از ریاضی بسیار مفید است. معیارهای اصلی که باید رعایت شوند تا یک بستر، برای دانش‌آموزان، بستری معنادار باشد آن است که دانش‌آموزان توجیه باشند که چنین کاری واقعاً برای چیست. دانش‌آموزان وقتی با یک مسئله روبه‌رو می‌شوند باید بتوانند به‌راحتی راه‌حل آن را شناسایی کنند؛ بدانند که چه هنگام با یک چالش روبه‌رو می‌شوند و قدر معیارهای مهمی را که با بستر معنی‌دار در ارتباط‌اند بدانند.

توضیح و بحث

معلمان برای آنکه بتوانند به دانش‌آموزان خود در یادگیری معنادار ریاضی کمک کنند، باید به‌جای آنکه به‌دنبال گسترش یادگیری طوطی‌وار در قالب روش‌ها و قاعده‌های مرسوم باشند، بیشتر به‌دنبال درک تجربه‌های مختلف دانش‌آموزان در اثر ارتباط با آن‌ها باشند تا بتوانند فرصت‌های بیشتری را برای تعبیهٔ ریاضی در بسترهای معنادار فراهم کنند.

بسترهای معنادار به این دلیل که باعث ارتقا و افزایش یادگیری معنادار می‌شوند، در توسعهٔ آموزش و کاربردی کردن دانش و مهارت‌های ریاضی مهم هستند. در این زمینه، همان ساختاری که در برنامه‌های تدریس مبتنی بر استراتژی ملی سواد عددی (1999b, DFEE) مدنظر قرار می‌گرفت، امروزه در چارچوب ملی بازبینی شده (2006a, DFES) نیز تکرار و تداوم یافته است. برای مثال، این سیاست که باید مسائل و مهارت‌های عددیِ انتزاعی متناسب با «زندگی واقعی[۲۱]» توسعه یابند از جملهٔ این سیاست‌هاست. این‌چنین سیاست‌هایی موجب شده‌اند که ناخواسته ایده‌هایی در اذهان معلمان مدارس ابتدایی تقویت شود؛ مثلاً این ایده که باید همهٔ ریاضی را در ارتباط با زندگی واقعی آموزش داد و این بهترین راه برای یادگیری مؤثرتر ریاضی است. اما متأسفانه این ایده و سیاست به‌تنهایی پاسخ‌گوی رویکرد مبتنی بر بسترهای معنادار نبوده و کافی نیست. در ایدهٔ مبتنی بر «زندگی واقعی»، ابتدا مهارت‌های ریاضی، خارج از بستر واقعی خود، آموزش داده می‌شوند و سپس کاربردهای آن‌ها در موقعیت‌های زندگی واقعی و مسائل عملی به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که این متناسب با خواسته و انتظارات ما در این بخش از بستر معنادار نیست؛ زیرا لزوماً یادگیری یک فرایند جهت‌دار از تجرّد به‌سوی عینیّت نیست، بلکه به‌طور طبیعی دارای فرایندی عکس این است. اگر مفاهیم و مهارت‌های ریاضی در یک بستر معنادار معرفی و آموزش داده شوند، احتمال آنکه دانش‌آموزان بتوانند معناسازی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

بهتری از آن مفاهیم و مهارت‌ها داشته باشند افزایش می‌یابد. وایت‌برید[۲۲] (۱۹۹۵: ۳۹) پیشنهاد می‌کند که به‌منظور کمک به دانش‌آموزان کم‌سن و سال در گذار از ریاضیات غیررسمی موجود در بستر خانه به‌سمت ریاضیات رسمی کلاس درس، بهتر است معلمان در هنگام آموزش مفاهیم و مهارت‌ها، «از مسائل واقعی آغاز کنند تا بچه‌ها با فرایندهای ریاضی نهفته در بسترهای معنادارِ متنوع آشنا شوند».

هایلاک (۱۹۹۱: ۷۰- ۶۵) شرح می‌دهد که چگونه دانش‌آموزان کمترموفق می‌توانند از ریاضیاتی که در راستای «فعالیت‌های هدف‌دار در بسترهای معنادار[۲۳]» تدریس می‌شوند بهره ببرند. او نمونه‌هایی را ارائه می‌کند که در آن‌ها به‌طوری غیرمنتظره کارایی و تعهدِ این‌گونه دانش‌آموزان، در هنگام کار بر روی تکالیفِ هدف‌دار و معنادار افزایش یافته است. او به یک دانش‌آموز ۹ ساله اشاره می‌کند که بعد از حل یک مسئلهٔ چالش‌برانگیز، دربارهٔ تعداد بطری‌های آب مورد نیاز یک تورنومنت فوتبال، به یک دیدگاه مهم دست پیدا می‌کند و آن اینکه «پس می‌توانیم از جمع کردن برای حل این مسئله استفاده کنیم، من همیشه با خودم فکر می‌کردم که چرا باید جمع کردن را یاد بگیریم؟! حال فهمیدم برای استفاده در این‌جور جاها خوب است!». محققان دیگری همچون دونالدسون (۱۹۸۶)، هیوگس (۱۹۸۶) و نانس و همکارانش (۱۹۹۳) نیز گزارش‌ها و نمونه‌های مشابهی در مورد درک و فهم بهتر دانش‌آموزان در ردهٔ سنی دورهٔ ابتدایی، وقتی که مفاهیم در قالب یک بستر معنادار تدریس می‌شوند، ارائه می‌کنند. بسیاری از پاسخ‌ها و ایده‌های دانش‌آموزان پس از استفاده از این رویکرد، جالب و غافلگیرکننده بود و نشان از افزایش درک آن‌ها از مفاهیم و مهارت‌های ریاضی داشت.

یکی از بسترهای معنادار بدیهی که ریاضیات را می‌توان در قالب آن گنجاند، زندگی روزمرهٔ دانش‌آموزان در مدرسه، کلاس درس و زمین‌های بازی مدرسه است. زندگی در مدرسه شامل جنبه‌هایی از سازماندهی امور مدرسه، کلاس، جدول‌های زمانی، معلمان و دانش‌آموزان است. همچنین بستر مدرسه می‌تواند شامل امور طبیعی کلاس درس، منابع، مطالعهٔ کتاب‌ها، گروه‌بندی دانش‌آموزان، فهرست اسامی، حضور و غیاب، چیدمان اشیاءِ کلاس، جمع‌آوری پول، سازماندهی رویدادها و فعالیت‌ها و غیره باشد. در زمین بازی نیز دانش‌آموزان درگیر با فضا، ابزار و امکانات مختلف هستند که این‌ها می‌توانند بسترهایی بالقوه برای افزایش معناداری در یاددهی و به‌کارگیری ریاضیات باشند. در قالب این بسترهاست که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند چگونه شمارش کنند، چه چیزهایی مهم‌تر است، چه چیزهایی مسئله است و چه چیزی راه‌حل. البته بسترهای معنادار به این موارد محدود نمی‌شوند. دیگر بسترهای معناداری که می‌توان از آن‌ها بهره برد عبارتند از زندگی روزمرهٔ دانش‌آموزان در خانه، برنامه‌های روزهای تعطیل و پایان هفته، مسافرت، ورزش، پس‌انداز پول، آشپزی، خرید، رایانه و سرگرمی (مانند سینما، تلویزیون، DVDها و...). معلمان می‌توانند از این موارد به‌عنوان بستری برای تعبیهٔ ریاضی در آن‌ها استفاده کنند تا دانش‌آموزان با احتمال بیشتری ریاضی را به‌صورت معنادار فرا گیرند.

بخشی از زندگی کودکان را بازی‌ها تشکیل می‌دهند و این موضوع دارای اهمیت بسیاری است. کودکان زمان زیادی را صرف لذت بردن از بازی‌های تخیلی، بازی‌های ساخت یافته و بازی‌های بدون ساخت می‌کنند که هر کدام از این بازی‌ها می‌تواند فراهم‌کنندهٔ یک بستر معنادار برای یادگیری و به‌کارگیری ریاضیات باشد. حتی بازی‌ها و معماهایی که در آن‌ها به‌طور محض به ریاضی پرداخته شده است نیز می‌توانند دارای سطحی از معناداری باشند، زیرا همگی بازی هستند و بچه‌ها به‌خوبی می‌دانند که بازی‌ها دربارهٔ چه چیزی هستند و آن‌ها باید چه کار کنند تا در بازی برنده باشند.

معلمان برای آنکه بتوانند به دانش‌آموزان خود در یادگیری معنادار ریاضی کمک کنند، باید به‌جای آنکه به‌دنبال گسترش یادگیری طوطی‌وار در قالب روش‌ها و قاعده‌های مرسوم باشند، بیشتر به‌دنبال درک تجربه‌های مختلف دانش‌آموزان در اثر ارتباط با آن‌ها باشند تا بتوانند فرصت‌های بیشتری را برای تعبیهٔ ریاضی در بسترهای معنادار فراهم کنند

مثال‌های عملی

در ادامه، چهار مثال عملی دربارهٔ استفادهٔ مؤثر از بسترهای معنادار در تدریس ریاضی آورده شده است.

گروه‌بندی دانش‌آموزان در یک درس PE[۲۴]

قصد داریم به یک کلاس ۲۸ نفره در ردهٔ سنی ۹ تا ۱۰ساله، محاسبات مربوط به یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم‌ها و گرد کردن پاسخ به بالا یا پایین را آموزش دهیم. معلم ایده‌های ریاضی خود را در بستر یک درس PE در سالن مدرسه به اجرا می‌گذارد. جایی‌که دانش‌آموزان در گروه‌های ۴ نفره، ۵ نفره، ۷ نفره و ۶ نفره برای فعالیت‌های مختلف قرار می‌گیرند. عبارت‌های مربوط به عملیات تقسیم دانش‌آموزان در گروه‌های مذکور را کتباً از دانش‌آموزان دریافت و پس از ثبت نتایج آن‌ها را برای بحث به کلاس درس ریاضی آورد.

شمارش کردن و ثبت کردن مجموعه‌هایی از دانش‌آموزان

بچه‌های یک کلاسِ متشکل از کودکان ۴ تا ۵ ساله یاد می‌گیرند که چگونه اعداد از ۱ تا ۳۰ را بشمارند، ثبت کنند و بخوانند. این آموزش را می‌توان در قالب یک بستر

ســاده اما معنادار آموزش داد. مثــلاً هر روز یکی از بچه‌ها مأمور شمارش و حضور و غیاب شود؛ یعنی تعداد بچه‌ها را بشمارد و تعداد غایبین را مشخص کند. همچنین می‌تواند تعداد بچه‌هایی که ناهار خود را از خانه به مدرسه می‌آورند (بــا بلند کردن دستشــان) یا تعداد بچه‌هایــی که از ناهار مدرسه استفاده می‌کنند (با بلند کردن دستشان) بشمارد. هر بچه، در پایان کار خود، نتایج به‌دست آمده را به کلاس گــزارش می‌دهد و مربی اعــداد را بر روی یک نمودار ثبت می‌کند.

تریل ریاضی

یک تریل ریاضی[25] حول حیاط مدرســه یا یک قطعه زمین محلی می‌تواند فرصت‌هایی را برای انجام فعالیت‌های ریاضــی در بســتری معنــادار فراهــم کنــد. گروه‌هایی از دانش‌آمــوزان تریــل را دنبال می‌کنند، دســتورالعمل‌ها و پرســش‌ها را از روی دفترچهٔ راهنمــای تریل می‌خوانند. پرسش‌ها می‌تواند در مورد کارهای عددی همچون شمارش کردن، تخمین زدن و محاسبه کردن بر روی تعداد آجرها، پنجره‌ها، تجهیزات موجود در زمین بازی، درختان و غیره باشــد. همچنیــن کار اندازه‌گیری نیــز می‌تواند به‌صورت تخمین فاصله‌ها، مســاحت‌ها و غیره باشــد. یافتن اشکال دوبعدی و ســه‌بعدی در اطراف زمین بازی، ساختمان‌های مجاور، پنجره‌ها و نمای ساختمان‌ها نیز می‌تواند گزینه‌هایی برای پرســش‌های تریل‌هــای ریاضی باشــد. به‌علاوه، این دانش‌آمــوزان می‌تواننــد بــرای کامل کردن هــر کدام از فعالیت‌ها، زمان مشخصی را تعیین کرده و در هنگام انجام تریل این زمان را ثبت کنند. فعالیت‌ها نیز می‌تواند شــامل حل مسئله یا گردآوری داده‌ها برای استفاده در کلاس باشد. برخی از مؤسســات در زمینهٔ طراحــی و عرضهٔ تریل‌های ریاضــی فعال‌انــد و آن‌ها را برای اســتفادهٔ عموم منتشــر می‌کنند. برای مثال می‌توان به تریل‌های ریاضی دانشــگاه ادینبــور[26] به همراه رویال مایل[27] (موجود در وب‌ســایت www.maths.ed.ac.uk/pg/trail.pdf) اشاره کرد.

برنامه‌ریزی برای یک اردوی کلاسی

مســئولیت طراحی و برنامه‌ریزی یک اردوی کلاسی برای بازدید از قلعهٔ تاریخی شــهر بــه دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۱ســاله سپرده می‌شــود. این اردو مربوط به پروژهٔ درس تاریــخ آن‌هاســت. بچه‌ها میان خــود گروه‌هایــی را برای طراحی و انجام وظایفی مشــخص از اردو تعیین می‌کنند. مثلاً هر گروه می‌تواند یکی از کارهای تنظیم جدول زمانی، برنامه‌های جانبی و تفریحــی، مدیریت هزینه‌ها، مدیریت ایــاب و ذهاب و حضور و غیــاب را به عهده بگیرد. آن‌ها با انجــام این کار، حوزهٔ وســیعی از دانش و مهارت ریاضی را به‌صورت مســائل واقعی و مرتبط در بستری معنادار به‌کار می‌برند.

مطالعهٔ بیشتر

اتکینسون (۱۹۹۲) مثال‌های متنوعی از موقعیت‌هایی که معلمــان می‌توانند ریاضی را بــرای دانش‌آموزان خود در بســترهایی معنــادار گنجانــده و آموزش دهنــد ارائه می‌کند. مثلاً بازی‌ها، جشن تولدها، آشپزی، خرید کردن، برنامه‌ریزی یک پیک‌نیک، ورزش و ساخت یک فضای سبز نمونه‌هایــی از این موقعیت‌ها هســتند. همچنین بورتون (۱۹۹۴) منبعی جالب و مرتبط با این موضوع است. نیکول و کرســپو[28] (۲۰۰۵) این دیدگاه را که بســترهای معنادار در یادگیری ریاضی باید از موقعیت‌های واقعی سرچشــمه بگیرند به چالش کشــیده و معتقدند که «آموزشگران لازم است به کارهای معنادار اما خیالی نیز توجه داشته باشند». آن‌ها پیشنهاد می‌کنند که معلمان از مسئله‌های تخیلی و درگیرکننده که لزوماً واقعی نیستند نیز به‌عنوان بسترهای معنی‌دار استقبال کنند.

پی‌نوشت‌ها

1.Purposeful Activity
2 .Ainely and Pratt
3 .Harel and Papert
4 .Schliemann
5 .Lave and Wenger
6 .Situated learning
7 .Long.term relevance
8 .Vicarious relevance
9 .Artificial relevance
10 .Immediate and genuine relevance
11.Using mathematics to make things happen
12 .Purposeful activities in meaningful contexts
13 .Solving a real problem
14 .Planning an event
15 .Design and construction
16 .Computer simulation
17 .Role.play
18 .Games and competitions
19 .Atkinson
20. Meaningful context
21. Real life
22. Whitebread
23. Purposeful activities meaningful contexts
24. Physical Education
نوعــی از آموزش که بــا فعالیت‌های فیزیکی، بــازی، تحرک و موسیقی همراه است.
25. Mathematics Trail
26. University of Edinburgh
27. Royal Mile
28. Nicol and Crespo

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مقدمه‌ای بر «چرایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان»
به‌عنوان واحد درسی دانشجومعلمان و تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی

صمد شعبانی‌فر
دکترای آموزش ریاضی

دانش‌آموزان چرا در یادگیری ریاضی مشکل دارند؟ چرا در یادگیری ریاضی دچار بدفهمی می‌شوند؟ چرا به‌صورت سیستماتیک خطا می‌کنند و به آن اصرار می‌ورزند؟ چرا معلمان هر کاری انجام می‌دهند این نوع خطاهای دانش‌آموزان از بین نمی‌رود؟ اگر از بین بردن این خطاها امکان‌پذیر است، چرا ما عاجز از این کاریم و موفق نمی‌شویم؟ مقصر اصلی کیست؟ و...

این سؤال‌ها و سؤال‌های مشابه آن‌ها را آموزشگران حرفه‌ای ریاضی، یعنی دبیران و آموزگاران ریاضی، در هر کارگاه آموزشی و در هر جمع خصوصی خود از خود و دیگران می‌پرسند و ذهنشان همواره درگیر آن‌هاست. این سؤالات علاقه بسیاری از محققان و متخصصان آموزش ریاضی کشورهای مختلف را به خود جلب کرده و در این راستا نه تنها تحقیقات زیادی انجام شده بلکه برنامه‌ریزان، با استناد به همین تحقیقات باعث تغییر در برنامه درسی دانشجومعلمان ریاضی شده‌اند.

ناگفته نماند که در کشور ما نیز، از زمانی‌که تحصیلات تکمیلی رشتهٔ آموزش ریاضی در معدودی از دانشگاه‌ها دایر شد، این موضوع عنوان پایان‌نامه‌های دانشجویی قرار گرفت و در بعضی از مباحث ریاضی نیز مورد بررسی واقع شد. اما هنوز سؤال اساسی این است که آیا این اقدامات در این راستا کافی بوده است؟ آیا این اقدامات در جهت آگاهی دبیران ریاضی و آموزگاران دورهٔ ابتدایی، که ذی‌نفعان اصلی این مسئله می‌باشند، مؤثر بوده است؟ آیا می‌توان بدون مسلح کردن کسی او را به مبارزه فرستاد؟ آیا این انتظار بی‌جایی نیست؟ آیا زمان آن نرسیده است که حداقل در راستای تحول بنیادین در آموزش‌وپرورش در برنامه درسی دانشجو معلمان ریاضی و تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی تجدید نظر شود و درسی مبنی بر این موضوع، یعنی «چرایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان» به واحدهای درسی اضافه گردد؟ آیا کمبود منابع و همین مشکل وظیفهٔ ما متخصصان آموزش ریاضی را دو چندان نمی‌کند که با یکدیگر همفکری کرده و مبادرت به تهیه کتاب و منبعی در این مورد کنیم و آن را در اختیار جامعهٔ آموزشی قرار دهیم تا حداقل بتوان از خسارات نبود چنین موضوع درسی در برنامه درسی دانشجو معلمان کاست؟ به امید آنکه این موضوع مورد توجه مسئولان امر قرار گیرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

صفر به توان صفر چیست؟

میشل هوبر، فردریک ریکی
مترجم: معصومه عرب‌پور
مدرس دانشگاه فرهنگیان؛ پردیس شهید باهنر کرمان

مقدمه

وقتی در کتاب‌های حسابان بیان می‌شود که 0^0 یک صورت مبهم است، معنایش این است که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وجود دارند، به گونه‌ای که $f(x)$ و $g(x)$، هر دو به سمت صفر میل می‌کنند و باید حد $\left[\underset{x\to 0}{f(x)}\right]^{g(x)}$ محاسبه شود. اما اگر ۰، تنها یک عدد باشد چه می‌شود؟ در چنین حالتی، ما بحث می‌کنیم که مقدار آن، برخلاف آن‌چه که اغلب کتاب‌های درسی می‌گویند، کاملاً خوش ـ تعریف است. در حقیقت، $0^0=1$

کلیدواژه‌ها: صورت‌های مبهم، رفع ابهام

کتاب‌های جبر در عصر حاضر

یک کتاب درسی ریاضیات دبیرستانی را بردارید خواهید دید که در آن، صفر به توان صفر(0^0) به‌عنوان یک صورت مبهم بیان شده است. برای مثال، متن زیر از یک کتاب درسی ریاضی که در یکی از نواحی نیویورک تدریس می‌شود، آورده شده است [۶]:

قاعدهٔ تقسیم توان‌ها را با پایه‌های مساوی، یادآوری می‌کنیم:

$$x^a \div x^b = x^{(a-b)} \qquad (x \neq 0)$$

اگر نیازی به این که $a>b$ نباشد، آن‌گاه a با b مساوی است. وقتی $a=b$:

$$x^a \div x^b = x^a \div x^a = x^{(a-a)} = x^0$$

اما

$$x^a \div x^a = 1$$

بنابراین، به‌منظور با معنی بودن x^0 باید تعریف زیر را بیان کنیم:

$$x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$$

از آنجا که تعریف $x^0=1$ براساس تقسیم بنا شده و تقسیم بر صفر ممکن نیست، باید فرض کنیم $x\neq 0$. در واقع عبارت صفر به توان صفر یکی از صورت‌های مبهم در ریاضی است و غیر ممکن است که یک مقدار را به یک عبارت مبهم نسبت داد.

صورت‌های مبهم

در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، این مسئله معمولاً تحت عنوان «قاعده هوپیتال» مطرح می‌شود.

فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند، به‌طوری که $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. وقتی بخواهیم حد تابع $[(f(x)]^{g(x)}$ را در a به‌دست بیاوریم، می‌گوییم این یک صورت مبهم از نوع 0^0 است و حد می‌تواند مقادیر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

گوناگونی از f و g را به خود بگیرد. در این حالت، این سؤال پیش می‌آید که: آیا می‌توان بین 0^0 به‌عنوان صورت مبهم و 0^0 به‌عنوان یک عدد فرق گذاشت؟

رفتار 0^0 چند صد سال است که مورد بحث بوده است. دونالد نوث [۷] اشاره می‌کند که یک ایتالیایی به نام گوگلیمو لیبری در سال ۱۸۳۰ چندین مقاله دربارهٔ 0^0 و خواص آن منتشر کرد. با این حال، اویلر در کتاب «اصول جبر» خود [۴] در سال (۱۷۷۰)، که سال‌ها قبل از لیبری به چاپ رسیده بود، چنین نوشت:

چون در این سری، توان‌های هر جمله از ضرب جملهٔ قبلی در a تولید می‌شود، که توان را، یک واحد افزایش می‌دهد، پس هرگاه جمله‌ای داده شود، می‌توان با تقسیم بر a، جمله قبلی را به‌دست آورد. زیرا این کار، توان را یک واحد کاهش می‌دهد. این روند نشان می‌دهد که جمله قبل از a^1 باید $\frac{a}{a}$ یا همان ۱ باشد، و اگر به همین ترتیب، با توجه به توان‌ها، ادامه دهیم، فوراً نتیجه می‌گیریم که جمله‌ای که قبل از جملهٔ اول است، a^0 است و به این خاصیت قابل توجه برسیم که a^0 همیشه برابر با ۱ است. با وجود این عدد a ممکن است مقادیر بزرگ یا کوچکی را به خود بگیرد؛ حتی زمانی که a هیچ باشد، می‌توان گفت که a^0 برابر با ۱ است.

مطالبی بیشتر در بارهٔ اویلر:

اویلر در سال ۱۷۴۸ در کتابی با عنوان «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت » [۵] می نویسد، «a^z را یک تابع نمایی در نظر بگیرید که در آن، a عددی ثابت و z یک متغیر است». اگر $z=0$، آن‌گاه داریم $a^0=1$. اگر $a=0$، در مقدار a^z پرش بزرگی برمی‌داریم وقتی مقدار z مثبت است، $a^z=0$. اگر $z=0$ آن‌گاه داریم $a^0=1$.

اویلر لگاریتم y را به‌عنوان مقدار تابع z تعریف می‌کند به‌طوری که $a^z=y$. او می‌نویسد که می‌دانیم ۱ که مبنای لگاریتم، باید عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ باشد و بدین ترتیب، از ارجاع قبلی خود به احتمال مسئله‌دار بودن 0^0، اجتناب می‌کند.

جورج بارون

تعریف توان، اغلب با بی‌دقتی انجام شده است. جورج بارون تقریباً سی سال قبل از اولین مقالهٔ لیبری، مقاله‌ای با عنوان «یک بحث کوتاه دربارهٔ واژهٔ توان در حساب و جبر» [۱] در مجلهٔ Mathematical correspondent (۱۸۰۴) منتشر کرد که با این تعریف آغاز می‌شد: «توان‌های هر عدد، عبارت است از ضرب‌های متوالی که از یک عدد شروع شده و به طور مستمر، آن عدد در خودش ضرب می‌شود.»

به‌عنوان مثال، او نوشته بود که $1\times5=5$ که اولین توان ۵ است و $1\times5\times5=25$ که دومین توان ۵ است و همین طور تا آخر. به همین روش توان‌های هر عدد x را می‌توان به‌صورت x^1 و x^2 و ... نشان داد که $x^1=1\times x$ و $x^2=x^1\times x$ که بدین ترتیب ادامه می‌یابد.

بارون پس از بیان چند نتیجه، اظهار می‌داشت که «آیا تعریف مشابهی ما را به یک راه حل دقیق و قابل درک برای آنچه که توان هیچ‌ام (توان صفر) اعداد نامیده شده، راهنمایی نمی‌کند؟» و برای پاسخ به سؤال خود، برای تقسیم توان‌ها قاعده‌هایی را آدرس می‌دهد، و در همان حال، یک نتیجه متفاوت را نیز به‌دست می‌آورد.

اگر توان اول x با جواب x خلاصه شده باشد، به کمک معنای تقسیم داریم توان تبدیل به هیچ خواهد شد، ولی ۱ باقی خواهد ماند: $[x^1/(x)]=[(1\times x)/(x)]=1$، یعنی $x^0=1$، که دراینجا، x نشان‌دهندهٔ هر عدد دلخواهی است. اما از آنجا که عدد x در اینجا محدود نشده، در نتیجه توان هیچ ام هر عدد، برابر ۱ است.

در آن مقاله، بارون نوشته‌های ویلیام امرسون (۱۷۸۰) [۳] و جارد منیفلد (۱۸۰۲) [۹] را دربارهٔ «هیچ» تأیید کرد و بحث‌های آن دو را یک پله جلوتر برده و ادعا نمود که عدد x می‌تواند هر عدد بزرگ یا کوچکی باشد. وی می‌نویسد:

«به‌دنبال تعریف کاربردی ما، برای مقدار بی‌نهایت کوچک، فرض کنیم x هر مقدار کسری را نشان دهد. به عبارت دیگر، x هر مقداری از اعداد را نشان دهد (جزئی از واحد اندازه‌گیری آن). در این صورت تعریف می‌کنیم $x^1=1\times x$.

حال فرض کنید این ضرب در x خلاصه شده باشد و به دلایل پیشرفته‌تری که قبلاً آوردیم، داریم: $x^0=1$. چون در

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

اینجا x یک مقدار کسری بدون هیچ محدودیتی از مقادیر خیلی کوچک است، بنابراین فرض کنید x با کاهش تدریجی از مقدار کنونی خود، از بین اعداد خیلی کوچک عبور کند تا این که x به هیچ برسد. واضح است که در طول این کاهش یا نزول x^{0} ، x همواره مساوی یک واحد ثابت است و دقیقاً در لحظه‌ای که x به هیچ چیز تبدیل شود، x^{0} یا 0^{0} نیز برابر یک است.»

البته بارون، هیچ اشاره‌ای به صورت مبهم عبارت نمی‌کند و مقالهٔ خود را با توضیح زیر، به پایان می‌رساند:

همچنین چون به ازای هر مقدار x داریم $x^{0}=1$، در نتیجه لگاریتم ۱ در هر مبنایی، برابر ۰ است.

گوگلیمو لیبری و کوشی آگوستین

با توجه به مقالهٔ نوث لیبری (۱۸۳۳) [۸] تحت عنوان «تولید چندین ریز موج در آب‌های ریاضیات، هنگامی که چیزی ریشه‌ای به‌نظر می‌رسد چرا که بحث دربارهٔ اینکه آیا 0^{0} تعریف شده است؟ ایجاد می‌شود». اکثر ریاضیدانانِ حاضر توافق دارند که $0^{0}=1$ با اینکه **آگوستین لوئیس کوشی** در کتاب خود با عنوان دورهٔ آنالیز (۱۸۲۱) [۲]، 0^{0} را در جدولی از صورت‌های تعریف نشده آورده است.

بدیهی است که استدلال لیبری قانع‌کننده نبود. بنابراین آگوست موبیوس به دفاع از خود برآمد. موبیوس سعی کرد به‌وسیلهٔ اثبات فرضی از $0^{0}=1$، از خود دفاع کند. (در اصل اثباتی از اینکه $\lim_{x\to 0^{+}} x^{x}$)

پس از این مجادله‌ها، این سؤال برای سایر ریاضیدانان پیش آمد که «آیا زمانی که کارهای جمع‌آوری شدهٔ موبیوس منتشر شود، این سابقهٔ تاریخی به آرامی حذف خواهد شد؟». نوث در جواب می نویسد: «نه، نه، ده هزار بار نه!» و بیان می‌کند که «بحث با این نتیجه پایان می‌یابد که 0^{0}، باید تعریف نشده باشد.»

شاید اگر کوشی مفهوم 0^{0} را به‌عنوان یک صورت حدّیِ تعریف نشده توسعه می‌داد، آن‌گاه مقدار حد $[(f(x)]^{g(x)}$ مبهم است، هرگاه f(x) و g(x) هر کدام جداگانه به صفر نزدیک شوند. نوث در مقالهٔ خود با عنوان «مقدار 0^{0} به مرتب راحت‌تر از $0+0$ است»، ما را به یاد قضیهٔ دو جمله‌ای می‌اندازد:

$$(x+y)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$$

اگر این قضیه برای هر دو عدد صحیح، که حداقل یکی از آن دو نامنفی است برقرار باشد، آن‌گاه ریاضیدان‌ها باید باور داشته باشند که $0^{0}=1$، می‌توان $x=0$ و $y=1$ را در رابطهٔ فوق قرار داد. سمت چپ به ۱ و سمت راست به 0^{0} می‌رسیم.

مثال‌ها: در سال ۱۹۷۰، **هربرت واون** [۱۰] برای به رسمیت شناختن $0^{0}=1$ به استدلال پرداخت. برای این منظور او سه مثال زیر را تهیه کرد:

مثال ۱: در تصاعد هندسی نامتناهی زیر:

برای هر x که $|x|<1$، $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

اگر $x=0$ آن‌گاه $|x|=|0|<1$ که نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}0^{n-1}=\frac{1}{1-0}=1$$

مجموع نامتناهی به‌صورت $1=...+0^{2}+0^{1}+0^{0}$ باز می‌شود. به گفتهٔ واون، اگر 0^{0} تعریف شده نیست، این مجموع بی‌معناست. علاوه بر آن اگر $0^{0}\neq 1$ آن‌گاه این مجموع غلط است.

مثال ۲: این مثال از مجموع نامتناهی e^{x} ناشی می‌شود که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

برای هر x، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=e^{x}$

هر کس قبول دارد که ۱=!۰ ، اگر قرار دهیم x=۰ مجموع بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{n-1}}{(n-1)!}=e^{0}$$

مجموع می‌تواند به صورت زیر باز شود:

$$\frac{0^{0}}{0!}+\frac{0^{1}}{1!}+\frac{0^{2}}{2!}+\ldots=\frac{0^{0}}{1}+0+0+\ldots=0^{0}$$

طرف راست مجموع e^{0} است که مساوی ۱ است. پس $0^{0}=1$.

مثال ۳: سومین مثال واون برگرفته از عدد اصلی یک مجموعه از نگاشت‌هاست. به‌توان رساندنِ یک عدد اصلی در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌صورت زیر تعریف شده است:

a^{b}، عدد اصلی مجموعهٔ نگاشت‌هایی از یک مجموعهٔ b عضوی به یک مجموعهٔ a عضوی است. برای مثال $2^{3}=8$. زیرا هشت نگاشت از مجموعهٔ $\{x, y, z\}$ به مجموعهٔ $\{a, b\}$ وجود دارد، به‌منظور محاسبهٔ 0^{0} تعداد نگاشت‌ها از مجموعهٔ تهی به خودش را تعیین می‌کنیم. دقیقاً یک چنین نگاشتی وجود دارد که مجموعهٔ تک عضوی تهی است. واون نوشته است «بنابراین تا آنجا که به اعداد اصلی مربوط است، $0^{0}=1$».

چه وقت یک ریاضیدان ممکن است بخواهد صفر به توان صفر چیزی شود که مبهم نباشد؟ اگر برای مثال، تابع $f(x,y)=x^{y}$ را مطرح کنیم، مبدأ مختصات یک نقطهٔ ناپیوستگی تابع است، صرف نظر از اینکه چه مقداری را به 0^{0} نسبت دهیم. تابع x^{y} نمی‌تواند در x=y=۰ پیوسته باشد، چون حد x^{y} در امتداد خط x=۰ برابر ۰ است. اما حد x^{y} در امتداد خط y=۰ برابر ۱ است، نه صفر. برای سازگاری و سودمندی، یک انتخاب طبیعی باید به صورت تعریف $0^{0}=1$ باشد.

نتیجه‌گیری

ما به این روش تدریس (پداگوژی) ارج می‌نهیم که «ابتدا به دانش‌آموزان بگوییم چه می‌خواهیم بگوییم. بعد آن را بگوییم، بالاخره به آن‌ها بگوییم چه گفتیم» و با اشاره به این روش، مبحث خود را جمع‌بندی می‌کنیم.

اگر شما با حد کار می‌کنید، آن‌گاه 0^{0} یک صورت مبهم است. اما اگر با جبر معمولی سر و کار دارید، آن‌گاه $0^{0}=1$.

مراجع

1. George Baron, "A short Disquisition, concerning the Definition, of the word Power, in Arithmetic and Algebra," The Mathematical Correspondent (1804), pages 59 – 66.

2. Augustin-Louis Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821). In his Oeuvres Complètes, series 2, volume 3.

3. William Emerson, A treatise of algebra, in two books, 2nd edition, J. Nourse, London, 1780. Title page and pages 208-213, including the problem "To explain the several properties of (0) nothing, and infinity,"

4. Leonhard Euler, Elements of Algebra, translated by Rev. John Hewlett, Springer-Verlag, New York, 1984, pages 50 – 51.

5. Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, translated by John D. Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988, pages 75 – 76.

6. E. Keenan, A. X. Gantert, and I. Dressler, Mathematics B, Amsco School Publications, Inc., New York, 2002.

7. Donald Knuth, "Two Notes on Notation," The American Mathematical Monthly, Volume 99, Number 5, May 1992, pages 403 - 422. This is available in JSTOR.

8. Guillaume Libri, "Mèmoire sur les functions discontinues," Journal für die reine und angewandte Mathematik, 10 (1833), pages 303 - 316.

9. Jared Mansfield, Essays, mathematical and physical: containing new theories and illustrations of some very important and difficult subjects of the sciences, W. W. Morse, New Haven, 1802. Title page and pages 12-17, including first five pages of the essay "Of Nothing and Infinity,".

10. Herbert E. Vaughan, "The Expression of 00," The Mathematics Teacher, Volume 63, February 1970, page 111.

Michael Huber and V. Frederick Rickey, "What is 0^0? - Conclusion and Bibliography," Loci (July 2012) - See more at: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/what-is-00-conclusion-and-bibliography#sthash.Cylge1Ba.dpuf

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات