ISSN:1606-9188

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۲۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی | برای معلمان، مدرسان و دانشجویان |
دورهٔ سی و پنجم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۶ | ۶۴ صفحه | ۱۴۵۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳
www.roshdmag.ir

- ریاضی‌دان پیشرو و برندهٔ مدال فیلدز
- حل چند مسئله در احتمال
- طراحی خلاقانهٔ مسائل ریاضی
- دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

چهار مجموعه از منشورهای سه وجهی که دو به دو با هم موازی هستند

اثر کارلو سکویین، دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، ۲۰۱۴

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

رشد آموزش ریاضی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای معلمان، مدرسان و دانشجویان
دورهٔ سی و پنجم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۶

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: پری حاجی‌خانی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری (نماینده گروه ریاضی دفتر تألیف)، اسمعیل بابلیان، مهدی رجبعلی‌پور، مانی رضائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد و محمدرضا فدائی
طراح گرافیک: مهدی کریم‌خانی

سخن سردبیر: کاهش ورودی‌ها به رشتهٔ ریاضی در دورهٔ متوسطهٔ دوم، هشداردهنده است!	۲	زهرا گویا
ریاضی‌دان پیشرو و برندهٔ مدال فیلدز	۴	کسرا رفیع
تلفیق روش‌های جبری و هندسی در ریاضیات مدرسه‌ای	۶	حمیدفضل‌اللهی
حل چند مسئله در احتمال	۱۴	سیدجمال بخشایش
مصاحبه با محمدرضا فاطمی دزفولی، در مورد تاریخ ریاضی خوزستان	۲۱	زهرا گویا
استاندارد ارتباط و اتصال برای پایه‌های ۹ تا ۱۲	۲۶	شورای ملی معلمان ریاضی، ترجمه: بهنام آیتی‌پور
استفاده از جئوجبرا برای بهبود آموزش توابع متناوب مثلثاتی	۲۹	افسانه عسگری، سمیه‌سادات میرمعینی
دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی	۳۵	محمدحسام قاسمی
شیرینی درس ریاضی در زمین فوتبال	۴۲	هادی دهقان
استفاده از دست‌سازه‌ها در آموزش حجم	۴۴	سمیه بحرینی
بازی‌های آموزشی و آموزش ریاضی	۴۶	مریم بهاءلو
طراحی خلاقانهٔ مسائل ریاضی	۵۰	تریفه معینی، داود کلهر، جمیله عوض‌سیگاری
نقد و بررسی ریاضی دهم (چاپ اول؛ تابستان ۱۳۹۵)	۵۳	اسفندملیح‌ملکی
به کجا چنین شتابان	۵۸	محمد راسخی کازرونی
مواجهه کلاس اولی ها با آموزش رسمی	۶۰	فاطمه فرجیان‌پور
گزارش همایش آسیب‌شناسی و برنامه‌ریزی در رابطه با کنفرانس‌های آموزشی ریاضی ایران	۶۱	نرگس عصارزادگان
معرفی کتاب	۶۲	زهرا گویا
نامه‌های رسیده	۶۳	

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸-۰۲۱ ● وبگاه: www.roshdmag.ir
● پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ ● roshdmag: ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۰۲۱ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳
● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن بازرگانی: ۸۸۸۶۷۳۰۸-۰۲۱ ● شمارگان: ۶۰۰۰

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

زهرا گویا

کاهش ورودی‌ها به رشتهٔ ریاضی در دورهٔ متوسطهٔ دوم هشداردهنده است!

وقتی در تابستان ۱۳۹۶، اسامی ۱۰ نفر اول هر کدام از سه رشتهٔ شاخهٔ نظری اعلام شد، حضور شهرستانی‌ها و به‌خصوص بعضی شهرهای کوچک مانند سیرجان و کامیاران که جزء مناطق محروم و عملاً غیربرخوردار محسوب می‌شوند، شادی‌آور، آگاهی‌بخش و هشداردهنده بود، اگر بخواهیم پند بگیریم! خداوند همیشه، برای انذار بندگانش، آیه‌ها و نشانه‌ها را آشکار می‌کند و هر کس به اندازهٔ وُسع و ظرفیتش، آن‌ها را درک می‌کند و در تصمیم‌گیری‌ها، راهنمای خویش قرار می‌دهد. در غیر این صورت و بدون توجه به آیات و نشانه‌ها، خسران از آنِ نسل‌های آینده است.

به‌طور مشخص، در میان ۳۰ نفر اول کنکور، ۱۷ دانش‌آموز از شهرهای مختلف بودند، شهرهایی که به جز اصفهان و یزد و تبریز، با مستندات موجود، از غوغای صنعت غول‌آسای آموزش در تهران و شهرهای بزرگ، تا حدی در امان مانده‌اند و هنوز، دانش‌آموزانشان خود را بیشتر باور دارند و اعتمادبه‌نفسی در آن‌ها باقی مانده که بدانند یادگیری، نیازمند درگیر کردن خود با کارهای عجیب و غریب و غیرطبیعی نیست. به احتمال زیاد، خانواده‌های ایشان نیز، بی‌دلیل خود را متخصص و صاحب اختیارِ معلمان و مدرسه‌ها نمی‌دانند! یعنی می‌توان تصور کرد که در آنجا، آموزش جریان متعادل‌تری را طی می‌کند (البته همهٔ این‌ها حدس و گمان است و اثبات هر یک، نیازمند پژوهش‌های جدی است.)

این خبر خوش، مسئلهٔ ترکیب جمعیتیِ ورودی‌ها به سه شاخهٔ ریاضی- فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی را دوباره، به گونه‌ای مورد توجه قرار داد. زیرا در کمتر از پنج سال، تعداد دانش‌آموزانِ ورودی به رشتهٔ ریاضی- فیزیک در دورهٔ متوسطهٔ دوم، با سرعت بدون توضیحی از حدود ۳۰٪، به کمتر از ۱۲٪ رسیده است. این روند از سال ۱۳۹۰، به طرز چشمگیری نامتعادل و نامتناسب، در حال دگرگون کردن آموزش متوسطه نظری در ایران است. برای نمونه، در خبری در سال ۱۳۹۴، با عنوان «دانش‌آموزان تهرانی بیشتر وارد رشته ریاضی می‌شوند[1]»، اعلام آمار کل ورودی‌ها به رشته‌های شاخهٔ نظری در ایران و تهران، حاکی نکات بسیار مهمی برای سیاست‌گذاران آموزشی است:

۳۰ درصد دانش‌آموزان در رشته علوم انسانی، ۴۶ درصد در رشته تجربی و ۲۲ درصد در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند و این آمار در شهر تهران در رشته علوم انسانی ۲۲ درصد، علوم تجربی ۳۱ درصد و رشته ریاضی ۴۷ درصد است.

البته طبیعی است که در ارائه آمار، بسته به مکان‌ها، زمان‌ها و موقعیت‌ها، از نمایش‌های مختلفی استفاده می‌شود و برش‌های متفاوتی از حقیقت بازگو می‌گردد که اگرچه همگی «درست» هستند، اما برداشت مخاطب، تأثیرهای متفاوتی می‌گذارند. به‌خصوص اگر به زمینه‌ای که آماری در آن ارائه می‌شود، به‌طور دقیق توجه نشود، می‌تواند بالقوه، جامعه را به اشتباه اندازد. به‌طور مشخص، وقتی سواد عددیِ شهروندان یک جامعه محدود است، یکی از ضایعات این کمبود این است که وقتی آماری ارائه می‌شود، بسیاری نمی‌دانند که مثلاً، معنی اعداد در توزیع‌های نرمال با غیرنرمال، فرق دارد. یعنی وقتی در تمام کشور، با کاهش عجیب متقاضیان ورود به رشته ریاضی- فیزیک مواجه هستیم و در کلان‌شهر تهران، این آمار ۴۷٪ است، ده‌ها سؤال قابل طرح و تأمل‌برانگیز، باید در ذهن‌ها شکل بگیرد. ولی آیا چنین است؟ مثلاً، تجزیه و تحلیل آمارِ مربوط به سال تحصیلی ۱۳۹۴، چگونه و توسط کدام متخصصان انجام شده و نتایج آن، چه تأثیری بر تصمیم‌گیری‌های آموزشی گذاشته است؟ سیاست‌گذاران از آن نتایجِ احتمالی، برای موضوع حساس هدایت تحصیلی، چه بهره‌ای برده‌اند تا روال قبلی آن را جرح و تعدیل کنند؟ وضعیت ورودی‌ها به رشتهٔ علوم انسانی در مناطق غیربرخوردار چگونه است؟ آیا داده‌های تهران، پرت محسوب می‌شوند یا می‌توان آن را به کل کشور یا مناطقی از آن تعمیم داد؟ با توجه به این که شرایط و قرائن نشان می‌دهند که توزیع جمعیت دانش‌آموزی در تهران و سایر نقاط ایران، با هم فرق دارند، آیا چنین آماری، می‌تواند به تبیین ملاحظات جدید در نظام آموزش رسمی، کمک کند؟

با این وجود و بدون اعتنا به انواع آمارهایِ منتشرشدهٔ مکتوب یا شفاهی و نگرانی‌های ابراز شده از طرف همهٔ کسانی که به خطرات عمیق این عدم تعادل برای جامعهٔ ایران می‌اندیشند، مجامع علمی به «تولید» چیزی که ظاهراً «علم» نامیده‌اند، مشغول هستند! انگار نه انگار که مسئله جدی است و بحرانی که در میان‌مدت ایجاد خواهد کرد، کمتر از بحران‌های زیست‌محیطی و نظایر آن نیست. این در حالی است که بسیاری از مقاله‌های چاپ شده در مجلات علمی- پژوهشی و بحث‌های طرح شده در اکثر همایش‌ها و کنفرانس‌های علمی و آموزشی، کمتر به مسائل و بحران‌های واقعی آموزشی و ارائه راه‌حل‌های عملی می‌پردازند.

در این وضعیت آشفته، میزان پرداختن به حاشیه‌های ریاضیات مدرسه‌ای، به شکل سرسام‌آوری در حال افزایش است. برای مثال، اگر فرزند مدرسه‌ای داشته یا معلم مدرسه باشید و تنها در چند سال اخیر، به کتاب‌فروشی‌ها یا نمایشگاه‌های سالانه کتاب رفته، تبلیغات شهری و بین‌شهری

توجه‌تان را جلب کرده و تبلیغات رسانه‌ها گوش‌هایتان را نواخته باشد، سخت است که مقاومت کنید و برای تهیه این اکسیرهای فریبنده، وسوسه نشوید!

ولی حق نداریم بپرسیم که اصلاً، این ریاضی چیست که چنین بی‌پروا و پرمدعا، می‌خواهد انحصار آموزش فرزندانمان را در اختیار خود بگیرد؟! که آخرش چه شود؟! چرا از تمام اطعمه‌ها و اشربه‌ها، پرندگان و چرندگان و دوزیستان، رنگ‌ها و احساس‌ها و عواطف، و از همه چیز و همه چیز استفاده می‌شود تا «دانش‌آموز، ریاضی یاد بگیرد»؟ همان درسی که علاوه بر کتاب رسمی و معلم کلاس درس، تبصره خرداد و شهریور هم دارد! با این وجود، به هر سو که بنگرید، ریاضی را می‌بینید، می‌شنوید و سایهٔ سنگینش را بر سرتان حس می‌کنید.

معلوم نیست که این همه توجه، چرا نتوانسته تعداد ورودی‌ها را افزایش دهد؟! چه خلاقیت دیگری قابل تصور بوده و رخ نداده است؟! یکی نقاط مشتق‌ناپذیر را به فرزندتان، با «آهنگ بندری» می‌آموزد، دیگری «مثلثات بادبادکی» ابداع می‌کند، آن یکی ادویه ریاضی را بیشتر می‌کند تا «طعم لذیذ» به خود بگیرد و خلاصه، هر چه بیشتر به «ریاضی» پرداخته می‌شود، خواهانش کمتر می‌شود! شاید تا به حال، شما هم مانند من، بارها و بارها از خود پرسیده باشید «چرا»؟ و در دل فریاد کرده باشید که «ما را چه شده است»؟ «کجای راه، بیراهه بوده است»؟ مگر می‌شود به یک‌باره، «ریاضی» که جذابیتش چنان بود که تعداد ورودی‌ها به رشته ریاضی-فیزیک متوسطه که در سال ۱۳۹۰ از مرز ۳۰٪ گذشته بود، چنین به فلاکت افتاده باشد که این همه دانش‌آموز، از آن گریزان شده باشند و معلمان بزرگوار، مستأصل و درمانده که چه کنند؟ آن هم وقتی که به مرور اما با شتاب زیاد، سرنوشت معلمان، با موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان در حال گره خوردن است!

به منظور پیدا کردن پاسخی مناسب برای این مسئله بغرنج، علاوه بر اعتنا کردن به نتایج پژوهش‌های آموزشی و آکادمیک، مشارکت همه جانبهٔ نخبگان حوزه‌های مختلف علوم انسانی از جمله جامعه‌شناسان، انسان‌شناسان، روان‌شناسان، متخصصان علوم رسانه و تبلیغات، و صاحبان ده‌ها نوع تخصص دیگر، الزامی است. در غیر این صورت، این بحران در ایران، تبدیل به فاجعه می‌شود. بنابراین، باید چاره‌ای اندیشید و شاید برای بهتر شناختن وضعیت کنونی، تدبر در دو اتفاق زیر، راهگشا باشد. دو اتفاق قابل انتظاری که از قبل هم پیش‌بینی شده بود، و به نظر می‌رسد که هنوز، به اندازهٔ کافی، باعث نگرانی نشده‌اند! انگار که تمام پیش‌بینی‌های هواشناسی، انسان را به تمهیداتی برای کاستن از خطرات احتمالیِ یک حادثه آگاه کند، ولی کاری نشود و خسارت‌ها، تنها به گردن قضا و قدرِ بی‌دفاع و بدشانسیِ غیرپاسخ‌گو انداخته شود!

اتفاقِ مهم اول، تغییر هرم جمعیتی در ایران و به تبع آن، تغییر ترکیب جمعیتی دانش‌آموزان در ایران است. این تغییر، از سال‌ها قبل از وقوع، باید مورد نظر قرار می‌گرفت و نگرفت! وقتی در سال ۱۳۷۹، جمعیت دانش‌آموزی در ایران به نقطهٔ اوج خود رسید و از مرز ۱۹ میلیون گذشت، و هنگامی که تقریباً، ۱/۳ جمعیت ایران را زیر ۱۵ ساله‌ها تشکیل می‌داد و یکی از جوان‌ترین جوامع جهان شدیم، باور نکردیم که مشابه این اتفاق، در اکثر جوامعی که دوران طولانی جنگ را سپری کرده‌اند، رخ داده و آن فوارهٔ بالا رفته، بعد از رسیدن به نقطهٔ اوج خود، حتماً به سمت پایین برگشته است. پس به موقع از تاریخ آموختن، خسارت تکرارهای بی‌دلیل را کاهش می‌دهد.

در حال حاضر، ترکیب جمعیتی ایران به شدت دگرگون شده است؛ نسبت تقریبی ۳۰٪ شهری به ۷۰٪ روستایی در اوائل انقلاب، در حال حاضر تقریباً تبدیل به ۷۰٪ جمعیت شهری، ۲۰٪ روستایی و جمعیت نوظهوری به نام «حاشیه‌نشین»ها شده است که حدود ۱۰٪ جمعیت حاشیه کلان‌شهرها را تشکیل می‌دهد. این در حالی است که تعداد دانش‌آموزانِ عشایر کوچ‌رو، کمتر شده و در عوض، تعداد کودکان کار که در حاشیه شهرها زندگی می‌کنند، در حال افزایش است و طبیعی است که هر دسته، نیازمند تدبیرهای آموزشی ویژه‌ای هستند.

اتفاق بعدی، تأثیر تکنولوژی و شبکه‌های اجتماعی در برهم زدن توازن و تعادل آموزشی در جهان و از جمله، ایران است. کودکان قبل از ورود به مدرسه، عینی یا مجازی، با تکنولوژی و ابزار آن، کم و بیش آشنا هستند و در جامعه، تکنولوژی همه جا حضور دارد. اما همین کودکان از شروع مدرسه تا پایان آن، در محیط‌هایی آموزش می‌بینند و با محتوا و روش‌هایی روبرو می‌شوند، که پاسخ‌گوی ذهن‌های کنجکاوشان نیست. دانش‌آموزان از طریق مسیر تازه‌ای که تکنولوژی ایجاد کرده، شتاب گرفته‌اند و از تکرار و تأنیِ ناخواسته، کسل می‌شوند. اتفاقاً در چنین زمانی است که استفاده از مظاهرِ به اصطلاح «واقعی» و مربوط به زندگی روزانه در برنامه‌ها و کتاب‌ها، برای اکثرشان جذبه‌ای ندارد. در حالی که اغلب دانش‌آموزان از شروع مدرسه، به آیندهٔ شغلی و شأنیت و رفاه اجتماعی خود می‌اندیشند. آنان نیک می‌دانند که هرچه امروز بکارند، فردا درو خواهند کرد. اتهام بی‌انگیزگی به این نسلِ دانش‌آموزی، ما را به بی‌راهه می‌کشاند و کار اصلاح آموزشی را دشوارتر می‌کند. البته طبیعی است که تغییرِ نسلی در دنیای نوین، به سرعت و در بازه‌های زمانی کوتاه‌تری رخ می‌دهد. پس لازم است که در هر تغییر کوچک و بزرگی، این متغیرها در تصمیم‌گیری‌ها به حساب آیند.

برای مثال، تکنولوژی در برابر دانش‌آموزان امروز، انتخاب‌های متعددی قرار داده و آن‌ها را برای یافتن آنچه که به دنبالش هستند، بی‌تاب‌تر، سخت‌کوش‌تر و در عوض، کم‌حوصله‌تر کرده است. آنان باید به حساب بیایند و ویژگی‌هایشان، در هر تصمیم و تولیدی، سرلوحهٔ اقدام‌ها قرار گیرد. این نسل، انتزاعِ مشهود را دوست دارد، نه انتزاعی که حسی در وی ایجاد نکند. به‌طور خاص در رابطه با ریاضی، تکنولوژی کمک کرده تا دانش‌آموزان، مفاهیم را جور دیگری درک کنند و این تغییر، ایجاب می‌کند که فضای جدید ذهنی کودکان، با عمق و وسعت زیاد، مورد مطالعه واقع شود. چگونه از کودکی که با «جئوجبرا» آشنا شده و از آن، برای یادگیری ریاضی استفاده می‌کند، انتظار داریم که با اثبات‌های صوریِ کلاسیک، در او شوق ایجاد آموختن ریاضی ایجاد شود و میل به دانستن را در آنان افزایش دهد؟ دانش‌آموزی که با کمک این نرم‌افزار، آنقدر میانه‌های مثلث‌های متنوع را می‌کشد تا مطمئن شود که هر سه میانه، در یک نقطه به هم می‌رسند، چرا نباید به این یافتهٔ خویش، اعتماد کند؟ چرا باید دغدغهٔ این را داشته باشد که «تانژانت مثلاً یک انسان»، گزاره است یا گزاره‌نما؟! با این درهم‌ریختگی‌ها، چرا خودش را معطل «ریاضیاتی» بکند که با تجربه و نیاز و شهودش سازگار نیست[۲]؟

ریاضی وقتی برای دانش‌آموزان جذبه دارد که قابل دسترسی، درک و استفاده باشد. اگر نه، ابتکارِ امسال هم که نام میوه‌های نوبرانه و فصلی برای کتاب‌های باز هم جدیدترِ کمک آموزشی ریاضی به یغما رفت و به سلامتی روانهٔ بازار نشر شدند، تأثیری بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان نخواهد گذاشت. امیدوارم که روزی برای همیشه، بپذیریم که تا دانش‌آموز، از یادگیری ریاضی احساس رضایت درونی نکند، سال آینده و سال‌های بعد، مجبوریم که شاهد افت بیشتر تعداد ورودی‌ها به رشته ریاضی-فیزیک باشیم. وقت تنگ است، عجله کنیم!

پی‌نوشت‌ها

۱. مصاحبه معاون آموزش متوسطه با خبرگزاری فارس در ۲۰ آذر ۱۳۹۴ با کد خبر ۴۷۱۷۱۳، تاریخ بازیابی: ۱۳۹۶/۷/۴

۲. حتماً خوانندگان محترم در نظر دارند که این بحث، مربوط به تمام دانش‌آموزان است، نه آن‌هایی که ویژه هستند یا سلیقه‌های خاصی دارند.

ریاضی‌دان پیشرو و برندهٔ مدال فیلدز

کسرا رفیع
دانشیار دانشگاه تورنتو
مترجم: مریم حاج‌عزیزی
کارشناس‌ارشد آموزش ریاضی، کرمان

مریم میرزاخانی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان نسل خود بود. او سهم قابل توجهی در مطالعه دینامیک و هندسهٔ اشیای ریاضی داشت که آن‌ها را سطوح ریمانی می‌نامند. توانایی وی برای اینکه با ارائه نقطه نظرات نو، یک حوزهٔ تحقیقی را به سمت جدیدی به پیش ببرد، درست مانند قضیه‌هایش، بسیار چشمگیر بود. استعداد ناب و خالص مریم، حتی در بین اکثر ریاضی‌دانان برجسته، کم نظیر بود. او به‌خاطرِ داشتن ذوق و علاقه نسبت به مسائل دشوار شناخته شده بود و بدون آنکه تمایلی داشته باشد، تبدیل به یک نماد شد. او اولین زن و اولین ایرانی بود که مدال فیلدز را که بالاترین افتخار در ریاضیات محسوب می‌شود، دریافت کرد. برای زنان، مریم الگویی بود که در عرصه‌ای که به مردانه بودن شهرت داشت، توانست به بالاترین جایگاه موفقیت برسد. او سنت خردگرایی کشور ایران را به نمایش کشید و برای دانشمندان جوان، یک نیروی آرام‌بخش بود که با وجود فشارهای محیط‌های آکادمیک، توانست پیشرفت نماید. او در سن ۴۰ سالگی به دلیل سرطان سینه درگذشت.

میرزاخانی در اردیبهشت سال ۱۳۵۶ در تهران متولد شد. در آنجا به مدرسه رفت و دو مدال طلا در المپیادهای بین‌المللی ریاضی، برای ایران به ارمغان آورد. اینکه او را به عنوان یک نابغه می‌شناختند و تشویق می‌کردند، باعث شد رشته ریاضی محض- که گزینه شغلی آسانی هم برای زنان در ایران نبود- را انتخاب کند.

میرزاخانی در سال ۱۳۷۸ مدرک کارشناسی ریاضی خود را از دانشگاه صنعتی شریف در تهران دریافت کرد. او ایران را به قصد انجام پژوهش در دورهٔ دکتری در آمریکا، ترک کرد و توانست در سال ۱۳۸۳ (۲۰۰۴ میلادی)، مدرک دکتری خود را از دانشگاه هاروارد در کمبریج، ایالت ماساچوست، تحت راهنمایی کورتیس مک‌مولان[1]، دریافت کند. مریم میرزاخانی بورس پژوهشی دانشگاه هاروارد را نپذیرفت، تا بتواند عضو پژوهشی مؤسسه ریاضی کِلِی[2] در دانشگاه پرینستون در ایالت نیوجرسی شود. سپس در سال ۱۳۸۷ (۲۰۰۸) با مرتبهٔ استاد تمامی، در دانشگاه استانفورد در ایالت کالیفرنیا، مشغول به کار شد که در آن زمان، وی در رأس حوزه‌های هندسه هذلولوی، توپولوژی و دینامیک قرار داشت. مریم تا زمان فوتش، در دانشگاه استانفورد بود.

رساله دکتری او مربوط به سطوح ریمانی بود؛ سطحی را تجسم کنید که چندین سوراخ در آن وجود دارد، مانند یک چوب‌شور سوراخ‌دار[3] یا دو دونات چسبیده به هم، و سپس تصور کنید که می‌خواهید یک کِش را دور این سطح طوری بپیچانید که خودش را قطع نکند و اشتراکی با خود نداشته باشد. مریم میرزاخانی می‌خواست بداند که برای یک کِش با طول داده شده، به چند روش مختلف می‌توان این کار را انجام داد.

مریم فهمید که می‌توانند روش را برعکس کند. یعنی به جای ثابت نگه داشتن یک سطح و شمارش تعداد منحنی‌ها، میانگین تمام اعدادی را به دست آوَرَد که هر یک، متناظر با نقاطی در فضای مدولیِ[4] سطوح ریمانی هستند؛ یک «فضا»، یا مجموعه از نقاط که هر کدام، نشان‌دهندهٔ یکی از اشکالی است که یک سطح می‌تواند بگیرد محاسبه چنین میانگینی، مستلزم

این اســـت که «حجم»، یا اندازه فضای سطوح ریمانی محاسبه شود، سطوحی که شامل یک منحنی با طول مشخص اســـت. یک فرمول بازگشتی هوشمندانه برای محاسبه حجم‌های فضاهای مدولی گوناگون، این مسئله را حـــل کرد. این راه‌حل، دارای نتایج خیره‌کننده‌ای در حوزه‌های به ظاهر دور از هم داشت. به‌عنوان مثال، کار جدید مریم، باعث شـــد تا اثباتی جدید برای یک قضیه مشهور توســـط ریاضی‌دان روسی- فرانسوی، ماکسیم کنتسویچ[5] ارائه شده بود، پیدا شود که اهمیت زیادی در نظریه میدان‌های کوانتومی داشت.

در کارهـــای بعـــدی، مریم میرزاخانـــی دینامیک توپ‌های بیلیارد یا جرم نقطه‌ای[6]، که در یک چندضلعی در حال حرکت هستند، مورد مطالعه قرار داد. یک توپ در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند تا زمانی که به لبه چندضلعی ضربه می‌زند، سپس در همان زاویه‌ای که به آن ضربه زده است، دوباره شروع به حرکت می‌کند. یک ریاضی‌دان می‌تواند در مورد چنین سیستمی، سؤال‌های متعددی بپرسد، به عنوان مثال، آیا امکان دارد که یک توپ، درون یک چندضلعیِ داده شده، به شکلی حرکت کند که مسیری که طی می‌کند، در نهایت تکرار شود؟ و اگر این اتفاق بیفتد، چند مسیر مانند آن وجود خواهد داشت و این مسیرها چه شکلی هستند. این مسئله که آیا یک مســـیرِ تکرار شونده، برای یک چندضلعیِ کلی وجود دارد یا خیر، هنوز حل نشده است.

در بعضی موارد، بهتر است که فضای میزهای بیلیاردِ معین را در فضایی بزرگ‌تر که در آن هر نقطه، یک سطح مسطح و یا مخروطی شکل است، قرار دهیم (بنشانیم). مریم میرزاخانی با همکاری الکس اسکین[7]، ریاضی‌دان دانشگاه شیکاکو در ایلینوی[8]، از این روش استفاده کرد تا برای چنین فضاهایی، شکل خاصی از یک قضیه درباره یک گروه از اشکال هندسی متقارن را که به «گروه‌های لی[9]» معروف بودند، اثبات کند. این قضیه توسط مارینا رانتـــر[10]، ریاضی‌دان پیشـــروی دیگـــری در این حوزه که او هم در ماه جولای ۲۰۱۷ و در ســـن ۷۸ ســـالگی درگذشت، مطرح شده بود. این اثبات حوزه‌های مختلفی چون هندسه، توپولوژی و سیستم‌های دینامیکی را به همدیگر مرتبط ساخت و خود باعث به‌وجود آمدن حوزهٔ جدیدی در ریاضی شـــد. به این دلیل، این قضیه به نام «عصا جادویی[11]» معروف گشت، زیرا باعث حل بسیاری از مسائل ریاضی سخت شد.

مریم میرزاخانی، با وجود شهرتی که داشت و توجه فراوانی که به او می‌شد، بسیار فروتن و بی‌تکلف (خاکی) بود، و همیشه از اینکه مرکز توجه باشد، دوری می‌کرد. او با هیجان به کارهای پژوهشی سایر ریاضی‌دانان گوش می‌داد و سؤال‌های آینده‌گرایانه و نوگرایانه‌ای می‌پرسید که به مســـیرهای جدیدِ قابل امکانی اشاره داشتند. در کنفرانس‌ها، او همان‌طور که بـــا برندگان مدال فیلدز وارد صحبت می‌شـــد، با دانشجویان و فارغ‌التحصیلان هم صحبت می‌کرد. مریم ســـخاوتمندانه ایده‌هایش را با جامعه ریاضی به اشتراک می‌گذاشت و به بقیه برای پیشبرد حرفه‌ایشان، کمک می‌کرد.

در دسامبر ۲۰۱۶ (۱۳۹۵) به دیدار مریم رفتم. ما از خانه او در پالو آلتو[12] کالیفرنیا تا دانشـــکده ریاضی دانشگاه استانفورد، برای شنیدن سخنرانیِ ریاضی‌دان روســـی- فرانســـوی، میخائیل گروموف[13] قدم زدیم. ســـرطان او در ســـال ۲۰۱۳ (۱۳۹۲) تشخیص داده شـــده و تحت درمان قرار گرفته بـــود، اما در طول این زمان، بیماری دوباره عود کرده و گســـترش یافته بود و درد زیادی را متحمل می‌شـــد. ما هر پنج دقیقه‌ای، پیاده‌روی را متوقف می‌کردیم تا او بتواند روی نیمکتی دراز کشـــیده و استراحت کند. مریم میرزاخانی به من گفت کـــه نمی‌خواهد به‌خاطر بیمـــاری‌اش مرخصی طولانی بگیرد و کارهای پژوهشـــی خود را رها کند. او گفت که دوســـت دارد مسئولیت‌های خود را به‌عنوان سردبیر «مجله انجمن ریاضی آمریکا[14]» ادامه دهد. من نمی‌توانســـتم جلوی خودم را بگیرم و در مورد مسائل ریاضی که به آن‌ها فکـــر می‌کردم، با او صحبت نکنم. با وجود تمام اتفاقاتی کـــه در زندگی‌اش رخ داده بود، خوشـــحال می‌شـــد که حرف‌های مرا گـــوش دهد و ایده‌های سودمندی را ارائه دهد.

جامعه ریاضی یکی از بزرگ‌ترین ذهن‌های خود را خیلی زود از دست داد و من نیز یک دوست را از دست دادم.

پی‌نوشت‌ها

1. Curtis McMullen 2. Clay Mathematics Institute
3. pretzel 4. Moduli space
5. Maxim Kontsevich 6. Point mass
7. Alex Eskin 8. Illinois
9. Lie groups 10. Marina Ratner
11. magic wand 12. Palo Alto
13. Mikhail Gromov 14. The Journal of the American Mathematical Society

منبع

Rafi, Kasra. (2017). Maryam Mirzakhani (1977–2017): Pioneering mathematician and winner of the Fields Medal. NATURE. VOL 549; 7 SEPTEMBER 2017. Comment (Obituary); P. 32.

تلفیق روش‌های جبری و هندسی در ریاضیات مدرسه‌ای

حمیدفضل‌اللهی
دبیر ریاضی شهرکرد و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

مقاله حاضر، گزارش بخشی از تحقیقی است که در آن، ضرورت توجه به طرح و بررسی مسائل هندسی را که حل آن‌ها، مستلزم به‌کارگیری و تلفیق انواع روش‌های متنوع جبری و گاهی روش‌های هندسی از سوی دانش‌آموزان است، مورد بررسی قرار می‌دهد. در حل این نوع مسائل هندسی، نقش جبر و نمادهای جبری و عملیات جبری، بسیار پررنگ است و متنوع‌بودن پاسخ‌ها، جذابیت درس هندسه را که در بین دانش‌آموزان طرفداران کمی دارد، در پی خواهد داشت.

داده‌های این تحقیق، از یک کلاس درس هندسه در پایه‌های هشتم و دهم در یک مدرسه دولتی در یکی از مناطق تهران جمع‌آوری شد. ابزار جمع‌آوری داده‌ها مسائل متنوع تلفیقی محقق ساخته و نیز چند مسئله ازکتاب «خلاقیت ریاضی جورج پولیا» بود. در پی این تحقیق، نتایجی شگفت‌انگیز از داده‌های دانش‌آموزی مشاهده گردیدکه توجه دقیق و موشکافانه به این پاسخ‌ها، می‌تواند در نگاه به درس هندسه و تدریس آن در مدارس، نگرشی تازه ایجادکند. همچنین پرسش‌نامه‌ای بعد از برگزاری کلاس بین دانش‌آموزان توزیع شد تا در تدریس هندسه، میزان علاقه دانش‌آموزان به این نوع مسائل و نوع استقبال آنان از روش‌های متنوع مورد بررسی قرار گیرد. در پایان نیز، از چند معلم هندسه مصاحبه به‌عمل آمد تا نگاه آنان نسبت به این روش، مورد مطالعه واقع شود و از تجربیات عملی آنان در این راستا استفاده گردد. نتایج این تحقیق نشان داد که تمایل دانش‌آموزان به این نوع مسائل در درس هندسه، بسیار زیاد بود و مورد استقبال بی‌نظیر آنان قرار گرفت و بروز تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزی را در پی داشت و باعث گردید دانش‌آموزان منفعل کلاس نیز، به انجام فعالیت و حل این مسئله‌ها، ترغیب شوند.

کلیدواژه‌ها: دوره متوسطه، هندسه، جبر، تلفیق جبر و هندسه

مقدمه

در دهۀ ۱۹۲۰ میلادی، با نام‌های مختلف دروس ترکیبی، دروس عمومی، یا دروس یک‌پارچه، حرکت به‌سوی ریاضی تلفیقی در سال‌های اولیه دبیرستان شدت گرفت. در اثر اصلاحات در دورۀ راهنمایی در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، مناسب بودن ریاضی تلفیقی برای یادگیرندگان نوجوان، طرفداران بیشتری پیدا کرد. رویکرد تلفیقی به ریاضی به دو مؤلفه در فلسفه آموزش دوره راهنمایی وابسته است که شامل «تدریس بین‌رشته‌ای و یادگیری مشارکتی» است زمانی که به تعریف برنامه‌درسی تلفیقی می‌پردازیم، لازم است به واژگان وابسته به آن مانند تدریس بین رشته‌ای، تدریس موضوعی، آموزش از طریق همیاری نیز، توجه‌کنیم. همچنین آگاهی از تعریف‌های مختلف از برنامه درسی تلفیقی، کمک می‌کند تا از زاویه‌های مختلف، به این موضوع نگریسته شود و جنبه‌های مختلف آن در نظر گرفته شود.

اورت معتقد است که « برنامه درسی تلفیقی، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را با هم ترکیب می‌کند و یک پروژۀ فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجۀ آن، چگونگی برخورد دانش‌آموزان با مسئله شکل می‌گیرد». نکته قابل توجه این است که تقریباً، در همۀ تعریف‌های ارائه شده برای برنامه درسی تلفیقی یا بین رشته‌ای، موارد زیر مشهود است:

- ترکیبی از موضوعات درسی
- تأکید بر انجام پروژه‌ها
- نیازمندی به استفاده از منابعی فراتر از کتاب‌های درسی
- ارتباط بین مفاهیم مختلف یک موضوع درسی.

تفکر جبری در هندسه دبیرستانی

به طریق هندسی و به کمک رابطه‌هایی که بین تصویرهای هندسی وجود دارد، می‌توان عددها و یا رابطه‌های عددی را، به شیوه‌های گوناگون بیان‌کرد. برای مثال، هندسه تحلیلی، وسیله‌ای است سامان یافته که شبیه یک واژه‌نامه دو زبانی، قادر است رابطه را به زبان شکل هندسی و برعکس، ترجمه کند. اندیشۀ هندسه تحلیلی، اساس همه نمودارها، نگاره‌ها، جدول‌ها و غیر آن را، تشکیل می‌دهد. جورج پولیا، در کتاب خلاقیت ریاضی، به معلمان توصیه می‌کند که اگر می‌خواهند به دانش‌آموزان خود واقعاً چیزی یاد دهند، آن‌هم به صورتی ساده و نه پرشتاب، از نکته‌های متفرقِ موجود در برنامه، بپرهیزند. البته وی یادآور می‌شود در ضمنی که نباید به هیچ‌کدام از جنبه‌ها و چشم‌اندازها، بی‌اعتنا بود، اما از تأکید پیش از موقع یا پافشاری بیش از اندازه بر جنبه اصل موضوعی هندسه، پرهیز نمود. پولیا هشدار می‌دهد که باید مراقب بود که دانشمندان و مهندسان آینده، نسبت به هندسه متنفر نشوند، زیرا ممکن است که آن‌ها بیشتر مفتون شکل‌های هندسی یا تجسم فضایی یا کشف‌های استنتاجی و طرح‌ها و نمودارها باشند و همین‌ها، موجب انگیزه‌ای برای تفکرشان شده باشد و پایه‌ای برای استدلال آن‌ها باشد. به عقیده جورج پولیا، استدلال را با شیوه‌های مختلفی می‌توان انجام‌داد، ولی قبل از همه، باید به این نکته توجه‌کرد که یک شیوۀ استدلال که برای سن مفروض یا سطح پیشرفت مفروض مناسب است، ممکن است برای سن یا سطح دیگری، زودرس یا ابتدایی باشد. او همچنین بر استفاده از نمادها و ابزار جبری تأکید می‌کند و بیان می‌دارد که «در استفاده از ابزار، هیچ مفهوم عملی و مشخصی در نظر گرفته نمی‌شود یا به آن توجهی نداریم. در استدلال‌های جبری که پولیا آن را بازی با نمادها نام می‌برد، بازی عبارتست از شرح درستیِ ساختمان دستور یا رابطه جدید (یعنی ترکیبی از نمادها که پاسخ‌گوی قانون به کار برده شده است). گام، وقتی درست برداشته‌شده است که بتوان دستور جدید را، با توجه به بعضی دستورهای اولیه (اصل موضوع‌ها)، یعنی دستورهایی که در گام‌های اولیه به‌دست آمده‌اند و تعریف‌هایی که در همان ابتدا تثبیت شده‌اند، با استفاده از قانون‌های نتیجه‌گیری، به طورکامل و با دقت شرح داد. در این شیوه جبری، «هم اثبات و هم گام‌های رسیدن به اثبات، باید کوتاه و عناصر و متغیرهای تشکیل‌دهنده، باید تا حد امکان کوچک باشند». موضوع مورد بحث در این بررسی، جنبه‌های مشترک بین جبر و هندسه است که در آن، استفاده از مثال‌های عددی هم در حین تدریس و هم در جهت ارزیابی دانش‌آموزان، بسیار حائز اهمیت است. هنگامی می‌توانیم از فهم یک قضیه هندسی یا یک مسئله اثباتی در هندسه اطمینان حاصل‌کنیم که با به‌کار بردن مسائل عینی و واقعی، بتوانیم قدرت دانش‌آموزان را در استفاده از قضایا، محک بزنیم و فهم آن‌ها را در استفاده و کاربست قضایا در مسائل واقعی، مورد ارزیابی قراردهیم.

اورت معتقد است که «برنامه درسی تلفیقی، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را با هم ترکیب می‌کند و یک پروژۀ فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجۀ آن، چگونگی برخورد دانش‌آموزان با مسئله شکل می‌گیرد»

روش تحقیق

در این بخش به اختصـــار، جزئیات مربوط به این تحقیق، توضیح داده می‌شود.

شرکت کنندگان در تحقیق

افراد شرکت کننده در این تحقیق، شامل دو گروه از معلمان و دانش‌آموزان هستند. گروه دانش‌آموزی، متشـــکل از ۸۰ دانش‌آموز پایه‌های هشـــتم، دهم و ســـوم ریاضی هستند. مدرسه مورد نظر، یک مدرسه دولتی در یکی از ناحیه‌های آموزشـــی تهران است و دانش‌آموزان از امکانـــات عادی برخوردارند. علاوه بر این، با ۲۰ نفر از معلمان ریاضی شـــاغل به تدریس در دبیرســـتان که رسمی بودند، مصاحبه شد. از این تعـــداد پنج نفر در هر دو دوره متوســـطه اول و دوم مشـــغول به کار بودند. میزان تحصیلات هفت نفر از آن‌ها، کارشناســـی ارشد و بقیه کارشناسی و اکثریت آنان، درس هندســـه را تدریس کرده بودند. مطالعات مقدماتـــی و مصاحبه‌هایی مقدماتی بـــا آن‌ها انجام گرفـــت تا در جریان کم وکیـــف کار قرار بگیرند و با موضوع پژوهش آشنا شـــوند. تلاش برای مصاحبه با معلمـــان به صورت حضوری، نشـــان داد که به دلیل گرفتـــاری آنان و تنگنـــای زمانی، ترجیـــح بر انجام مصاحبه‌های نیمه ســـاختار یافته بود. درنتیجه، این مصاحبه آماده شـــد و در یکی از روزهای نزدیک به تعطیلات عید نوروز، از معلمان داوطلب درخواســـت شد تا به آن‌ها پاسخ دهند.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها

در این تحقیق، ابزارهای متنوعی برای جمع‌آوری داده ها به‌کاربرده شده که شامل پرسشنامه، مصاحبه نیمه ساختار یافته و مشاهده از فرایند حل مسئله‌های تلفیقی هندسه و جبر در کلاس شد. گزارش مشاهدات کلاس درســـی، بیش از پیش مشـــخص‌کرد که ذهن دانش‌آمـــوزان را نمی‌توان تهی فرض نمود. راه‌حل‌های متنـــوع دانش‌آموزی در رســـیدن به جـــواب، یکی از زیباترین یافته‌های این پژوهش بود.

گزارش مشاهده کلاس درس

هـــدف از مشـــاهده کلاس درس، ثبـــت و ضبط فعالیت‌های فردی و گروهـــی دانش‌آموزان، برای حل مسئله‌های داده شده به آن‌ها بود. تجزیه و تحلیل این داده‌ها کمک کرد تا بتوان برای پرسش‌های زیر پاسخی نسبی به دست آورد.

- حل مسئله‌های تلفیقی در درس هندسه، به فعال شدن کلاس هندسه چه کمکی می‌کند؟
- فعالیت دانش‌آموزان در حل این نوع مسائل، در مقایسه با مسائل اثباتی چگونه است؟
- نحوه مشـــارکت دانش‌آموزان در کلاس هندسه یعنـــی تعامل آن‌ها در حین حل مســـئله‌های تلفیقی هندسه و جبر، چگونه است؟
- آیا راهبردهای مورد استفاده دانش‌آموزان در حل این نوع مسائل، از تنوع لازم برخوردار است؟
- تنوع استفاده از ابزارهای جبری در حل این نوع مسائل، چگونه است؟
- شهود و درک شهودی دانش‌آموزان، چه کمکی به آن‌ها می‌کند تا در مورد صحت جواب، اطمینان لازم را داشته باشند؟

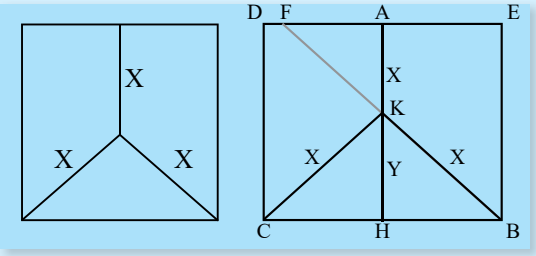
در راستای پاسخگویی به این سؤال‌ها، تلاش شد تا همه فعالیت‌های دانش‌آموزان در کلاس، در نظر گرفته شود تا بتوان به تحقق اهداف زیر، کمک نمود.

- مشاهده فعالیت دانش‌آموزان در حین حل‌مسئله و شنیدن پاسخ آن‌ها؛
- مشاهده استفاده از رویکردهای مختلف حل‌مسئله از سوی دانش‌آموزان؛
- آشنایی با نقاط قوت دانش‌آموزان در حل‌مسئله؛
- آگاهی از قدرت دانش‌آموزان در استفاده از روابط جبری در حل مسئله هندسی؛
- آگاهی از بدفهمی‌ها در جریان حل‌مسئله؛
- مقایســـه فعالیت دانش‌آموزان در کلاس درس هندسه از این نوع، با کلاسی که با روش تعریف، قضیه، مثال ویک‌طرفه، از جانب معلم اداره می‌شود؛
- آشنایی با انواع سلیقه‌های دانش‌آموزان در درس هندسه؛
- مشاهده انواع تکنیک‌های جبری و هندسی در حل‌مسئله و راهبردهای حل‌مسئله.

سؤال‌های مطرح شده در کلاس‌های هشتم و دهم به دانش‌آموزان داده شـــدند و برای آن‌که با روش‌های مطرح شده توسط دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر نیز آشنا شـــویم و تفاوت روش‌ها را در پایه‌های بالاتر مشاهده کنیم، درکلاس ســـوم ریاضی نیز، همین مسئله‌ها به دانش‌آموزان داده شد. یکی از مسئله‌های مطرح‌شده، به این صورت بود:

به عقیده جورج پولیا، استدلال را با شیوه‌های مختلفی می‌توان انجام‌داد، ولی قبل از همه، باید به این نکته توجه‌کرد که یک شیوهٔ استدلال که برای سن مفروض یا سطح پیشرفت مفروض مناسب است، ممکن است برای سن یا سطح دیگری، زودرس یا ابتدایی باشد

مسئله: بـــا توجه به شکل زیر، مقدار x را به‌دست آورید (ضلع مربع ۲ سانتی‌متراست)



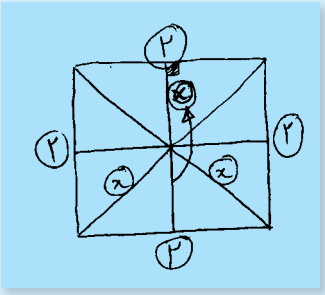
شکل ۱

دانش‌آمـــوزان بـــه گروه‌های کوچک (بـــا انتخاب خودشان)، تقسیم شدند و شروع به مشارکت برای حل این مسئله کردند.[1]

ســـامیار و پویا : نقطه برخورد (K)، در مرکز مربع قرارداره.

معلم: بچه‌ها! به نظرشـــما، نقطه K، در مرکز مربع قراردارد؟

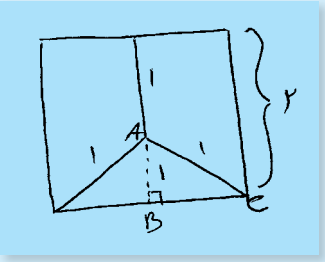
امیرمحمد: بارســـم شکل زیر، اگر این نقطه، وسط مربع باشـــه، در واقع با ادامـــه‌دادن آن‌ها، ما به دو قطر مربع، می‌رســـیم، یعنی این نقطه محل برخورد قطرها خواهدبود و نقطه K، هم از چهار رأس و هم از چهارضلع، به یک فاصله می‌شه که این، امکان‌پذیر نیست. زیرا در هریک از مثلث‌های قائم‌الزاویه، وتر با یکی از اضلاع برابر می‌شه که این، غیرممکنه!



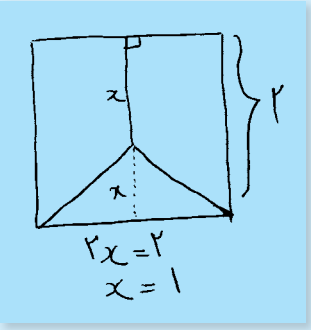
شکل ۲

حسین: x = ۱ (شکل ۲).

محمدحسین: x = ۱؟ نه! آقا غلط می‌شه! چون اگه به‌جای x، عدد یک قرار دهیم، اون قسمت پایین هم، برابر یک می‌شـــه، که مثلث‌پایینی، قائم‌الزاویه است، وترش و یک ضلعش برابر به‌دست می‌آید. (شکل ۳و۴).



شکل ۳



شکل ۴

ســـینا: اگر AK را امتداد بدیم، ضلع پایینی، نصف می‌شه.

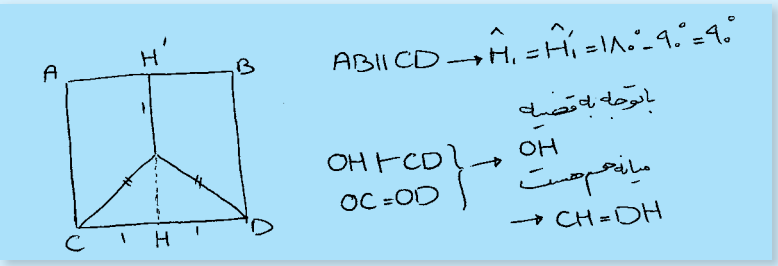
حسین: دلیلش متساوی‌الساقین بودن مثلثِ، ارتفاع و میانه در مثلث متساوی‌الساقین یکی‌اَند.

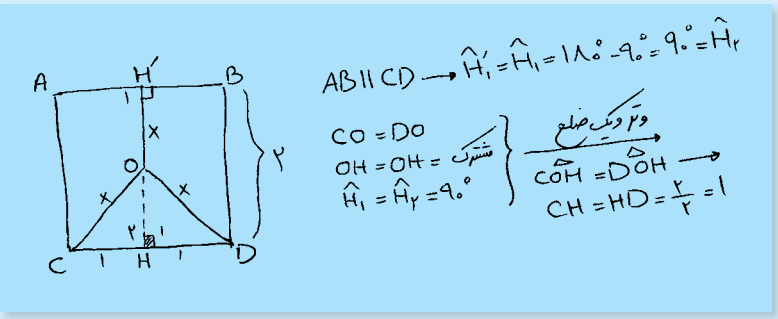
رضا: امتداد AK ، باید عمود برضلع پایینی مربع باشه.

محمد: مـــا باید ثابت‌کنیم که AK، بر ضلع بالایی عمود است و اون رو نصف می‌کنه.

حســـین: چون ضلع‌های مربع موازی‌اند، هرخط عمود بر یکی، بر دیگری نیز، عمود است. (شکل ۵ و ۶)

شکل ۵





شکل ۶

حســـن: با توجه به نامساوی مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم، بیشتره. پس: x > ۱ (شکل ۷)

علی: اگر K را به D وصل کنیم، پاره‌خط BD قطر خواهد بود.

معلم: مطمئن‌هستین که قُطره؟

علی: باید ثابت‌کنیم KB و KD هم‌خط هستند و این یعنی BD قطره، فکر می‌کنم غلط باشه، چون اگه در شکل بالا، KB را امتداد بدیم، از D نمی‌گذره (شکل ۱۰)

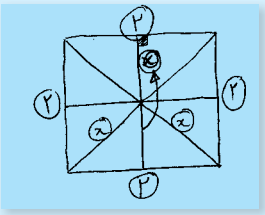
امیرمحمد: اگر نقطه، در مرکز قرار بگیره، به مشکل، برخورد می‌کنه. زیرا امکان نداره که یک نقطه، هم از رأس‌ها و هم از وسط ضلع، به یک فاصله باشه! چون اونوقت مثلث‌های قائمه با دو ضلع برابر داریم! (شکل ۸)

متین: به کمک رسم و اندازه‌گیری، می‌تونیم از وسط ضلع بالایی، خطی عمودکنیم و مقداری به پایین، حرکت‌کنیم و به دو رأس B و C وصل‌کنیم و اندازه‌گیری‌کنیم، تا سه پاره‌خط به‌دست آمده، برابر بشن.

معلم: به چه دلیل از وسط باید شروع‌کنیم؟

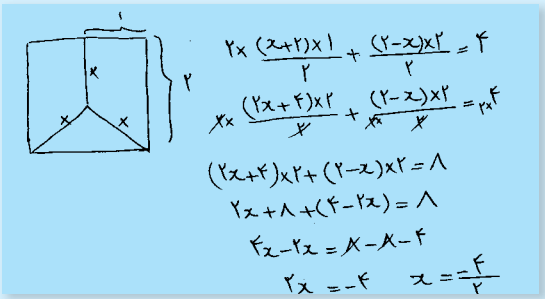
رضا: به همون دلیلی که، مثلث پایینی متساوی‌الساقینه.

حسین: به همون دلیل که ثابت‌کردیم دو قطعه روی ضلع پایینی برابر شدند! به همین دلیل، دو قطعه بالایی با هم برابرند .(شکل ۸)

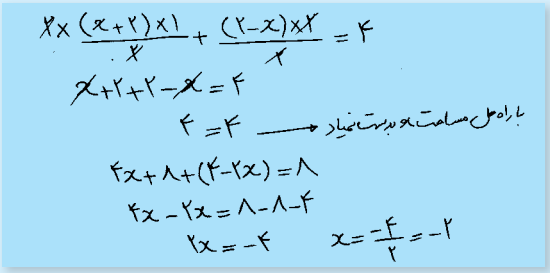


شکل ۸

سامیار: با به‌دست‌آوردن مساحت ذوزنقه‌ها و جمع‌کردنشان، اون‌ها رو برابر مساحت مربع بزرگ قرار می‌دیم. (شکل ۹)



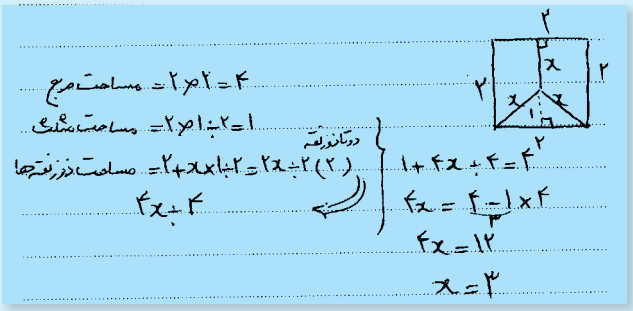
شکل ۹



شکل ۱۰

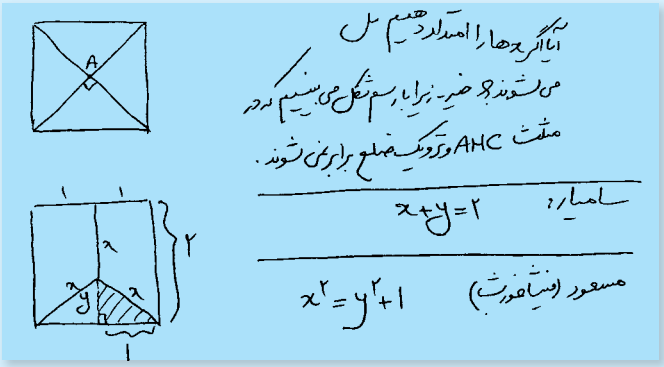
محمدحسین: x، منفی به‌دست‌آمد. بنابراین، در محاسبات اشتباه‌کردیم. (شکل ۱۰)

نوید: محاسبات من نشان می‌ده که x=۳ ! این هم با شکل ما جور در نمی‌آید. (شکل ۱۱)



شکل ۱۱

شکل ۱۲



محمدحسین: اصلاً با این روش، قابل‌حل نیست، چون xها از دو طرف ساده می‌شن. (شکل ۹)

این مشاهدات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، با چه علاقه‌ای درگیر حل مسئله شده و تلاش می‌کردند که با استدلال، همدیگر را قانع کنند.

در ادامـــه ایـــن بحث، بعضی دیگر از دانش‌آموزان KH را برابر y در نظرگرفته و رابطه فیثاغورس را نوشـــتند (شکل۱۲).

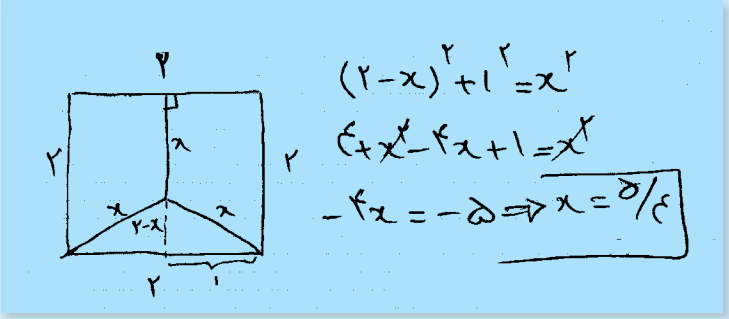
امیرمحمد: دردسر دوتا شد! y را هم باید حساب‌کنیم! در واقع دو تا مجهول داریم. سطر جدید تقریباً اکثریت دانش‌آموزان، در پیداکردن یک رابطه بین x و y، دچار سردرگمی بودند.

معلم: بچه‌ها! آیا رابطه‌ای بین x و y وجود داره؟ بچه‌ها به شکل دقت‌کنید!

محسن: جمع x و y، برابر دو می‌شه.

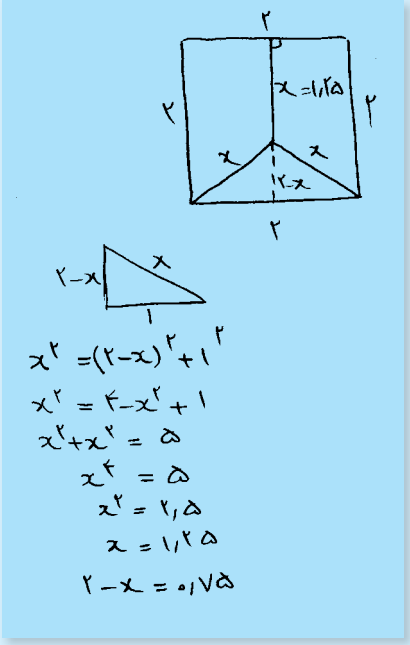
رضا: یعنی می‌شه، y را برحسب x به‌دست‌آورد و در رابطه‌فیثاغورس، قرار داد.

محسن: اتحاد باید بنویسیم! یک معادله به‌دست می‌آید که حل می‌کنیم.

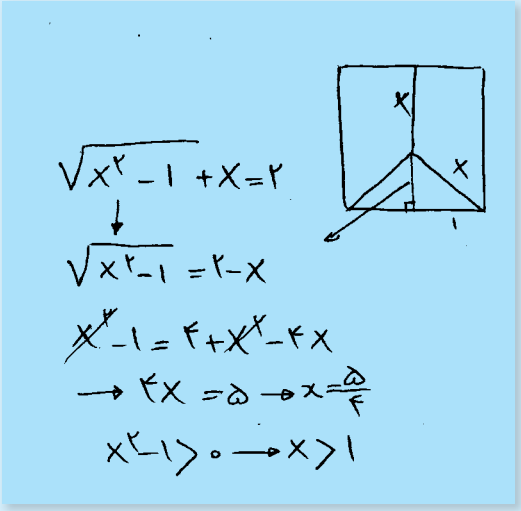


شکل ۱۳

علی: این پرانتز را باید با اتحادها به‌دست آوریم.



شکل ۱۴



شکل ۱۵

یکی از روش‌ها، با وجود این‌که اشتباه به‌کاربرده شد، اما جوابش با جواب اصلی، یکی بود. البته دانش‌آموز مدعی بود که آن روش ایرادی ندارد و راه‌حل وی درست است. با بحث فراوان، او قانع شد که مسئله را با داده‌های دیگری حل کند تا درســـتی یا نادرســـتی ادعایش را نشـــان دهد. برای این کار به او گفتیم که «مثلاً ضلع مربع را برابر ۴ سانتی‌متر در نظر بگیر! آیا باز هم جواب درست است؟». دانش‌آموز جواب داد که «مهم جواب نهایی است که درست شده و هیچ ایرادی ندارد! اگر گزینه بدهید، یعنی اگر سؤال تستی باشد، پاسخ درست است! شما اصلاً فکر کنید همه مراحل غلط‌اند، مهم جواب است». (شکل ۱۴).

پافشاری این دانش‌آموز بر «جواب آخر» یعنی همان چیزی که تست‌ها به آن‌ها منجر می‌شوند بسیار قابل تأمل بود.

در حین حل مسئله، هر مشـــاهده کلاس درس، در نوع خود جالب و نیازمند تجزیه و تحلیل بود. مثلاً بعضی از دانش‌آموزان در حال تفکر بر روی حل مسئله، مدت‌ها به ســـؤال چشم می‌دوختند. اما مجید یکی از کســـانی بود که حوصله وقت گذاشـــتن نداشت. به او گفتم «به کجا رسیدی؟» پاسخ داد که «آخرش، جواب مسئله چه عددیه؟ چرا یه جواب به مسئله نمی‌دین تا ما رو راحت کنین؟ از این همه بحث خسته شدم، از این بحث‌ها خســـته شدیم!». این حرف، او قصد به‌هم زدن نظم و فرار از بحث را داشت که متأسفانه طرفداری پیدا نکرد. و دوباره به تفکر ادامه داد.

موقع مطرح‌کردن این مسئله در کلاس سوم ریاضی نیز، تقریباً نتایج مشابهی به‌دست آمد، برای مثال، یکی از دانش‌آموزان،روش جالب زیر را ارائه داد.

«y میشه رادیکال $\sqrt{1-x^2}$ ، AK+KH برابر ضلع مربع می‌شـــه که ۲ اســـت. یک معادله می‌شه، معادله رادیکالـــی! رادیکال را یک طـــرف و بقیه رو اون طرف و به توان دو می‌رســـانیم، شرط جواب معادله اینه که زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مســـاوی صفر باشه. پس یک معادله به‌دست می‌آد که نتیجه می‌گیریم $x^2>1$ و این هم نتیجه می‌دهد که حتما $x>1$ ». (شکل ۱۵)

با بررسی و حل این سؤال در کلاس درس، بیش از پیش این نتیجه به‌دست‌آمد که، ذهن دانش‌آموزان را نمی‌توان پوچ و تهی در نظرگرفت و شهود دانش‌آموزان را به‌عنوان یک نکته مهم در هندسه، باید مورد اهمیت قرار داد.

علاوه بر این‌ها، استفاده دانش‌آموزان از روش‌های اندازه‌گیری بسیار دیدنی بود و در آن‌ها، تنوع روش‌های جبری به وضوح قابل مشـــاهده بود. کاربرد روش‌های متنوع جبری برای حل یک مســـئله هندسی و بحث پیرامـــون جـــواب معادله جبری و اشـــتباهاتی که در مســـیر حل آن بوجـــود می‌آمد، دائم دیده می‌شـــد و همه برای رسیدن به جواب، تلاش می‌کردند، تعدادی از دانش‌آموزان بدون داشـــتن دلیل هندسی، از شهود خود استفاده کرده و نتیجه می‌گرفتند مثلاً برای اینکه ثابت‌کنند نقطه H، نقطه وســـط است، بیان می‌کردند که «طبق شکل و چیزی که مشاهده می‌کنیم، نقطه، وسط است» و بعد، محاسبات جبری را شروع می‌کردند. امـــا تعدادی از آن‌ها تا دلیل درســـتی مطلبی را اثبات نمی‌کردند و برایشان مشخص نمی‌شد که چرا آن نقطه وسط است، به مرحله محاسبات وارد نمی‌شدند. در واقع، این دســـته از دانش‌آموزان دید اثباتی قوی داشتند. در حالی که بعضی دیگر، با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری، وارد حل مســـئله می‌شـــدند و دقتی در محاســـبات نمی‌کردند. البته با استفاده از روش اندازه‌گیری عده‌ای از آنان، تقریب خیلی‌خوبی از جواب مسئله دادند.

افزون بـــر این‌ها، بی‌دقتی در محاســـبات جبری و رسم، اشـــتباه اکثریت بود - چه اشتباهات سطحی و چـــه عمیق- در یک نـــگاه، دانش‌آموزان در حل این مسئله، با کاربرد عملی بسیاری از قضایای هندسی و نیز روش‌های جبری، آشنا شدند که از آن جمله، موارد زیر چشمگیر بودند.

- استفاده از قضیه حمار برای تعیین محدوده x؛
- خواص مثلث متساوی‌الســـاقین (منطبق بودن ارتفاع و میانه)؛
- حل معادلات رادیکالی و شرط جواب و نامعادله طلایی؛
- کاربرد اتحادها و روابط جبری؛
- شـــرط هم‌خط‌بودن دوپاره‌خـــط و به کاربردن برهان خلف؛
- حل معادله درجه اول؛
- کم‌کردن تعداد متغیرها؛
- استفاده از شهود در هندسه؛
- اســـتفاده از برابری مجموع مساحت ذوزنقه‌ها و مثلث، با مساحت مربع؛
- اندازه‌گیری فاصله نقطـــه K تا نقطهٔ A وتغییر دادن موضع نقطه K تا رســـیدن به فاصله‌های برابر تا نقاط B و C؛
- اســـتفاده از تشـــابه دو مثلث و حل معادله‌های کسری برای یافتن جواب.

جمع‌بندی

با توجه به مسئله‌های مطرح‌شده در کلاس درس و تجزیه و تحلیل مشاهدات، مهم‌ترین نتایجی که به‌دست آمد، از این قرار بود.

- تمرکز بیشتر دانش‌آموزان بر روی محدوده جواب، یعنی دامنه جواب، جای تأمل داشت.
- تعداد اندکی از دانش‌آموزان، بر استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری برای به‌دست آوردن جواب اشاره داشتند.
- بسیاری از دانش‌آموزان، به شرایط هندسی مستتر در مسئله که بیان نشده بود و لازم بود، توجه نموده و آن را در نظر گرفتند، البته تعدادی از دانش‌آموزان هم

هندسه، هنگامی به یک درس جذاب تبدیل می‌شود که حل مسئله در آن احیا شود و دانش‌آموزان با مسائلی جذاب روبرو شوند و بتوانند تکنیک‌های خاص خودشان را در مسئله پیاده کنند. لازمهٔ این کار، تأکید بر تنوع تکنیک‌ها از سوی معلم و برنامه و کتاب است

آن شـــرایط را بدون اثبات، مفروض در نظر گرفتند و تعدادی بدون اثبات، آن‌ها را نمی‌پذیرفتند و با این مورد مشکل داشتند.

- بر اثر مقایسه جواب به‌دست آمده با شکل مسئله، گاهی اوقات دانش‌آموزان جوابی را به‌دست می‌آوردند، اما به دلیل اینکه با شـــکل و شرایط مسئله سازگاری نداشـــت، آن را نمی‌پذیرفتنـــد. یعنی شـــهود و درک شهودی هندسی آن‌ها، کمک می‌کرد تا جوابی را بدون حس شهودی، قبول نکنند.

- استناد دانش‌آموزان به قضیه‌های هندسی مهم در جریان حل مســـئله‌ها، بسیار زیبا بود مانند خواص مثلث متساوی‌الساقین، قضیه فیثاغورس، خواص عمود منصف و نظایر آن، استفاده از ابزارهای جبری متفاوت و تنوع روش‌ها.

همه این نتایج نشان داد که لازم است برای تبدیل یک مســـئله هندســـی به یک مســـئله جبری، موارد بیشـــتری در نظر گرفته شود. مثلاً معرفی متغیرها در یک مســـئله هندسی و کشف رابطه بین آن متغیرها و بعد، تبدیل آن‌ها به یک معادله یا دســـتگاه جبری، از مهم‌ترین نکات حل مســـائل تلفیقی هندسی- جبری بود. تبدیل یک مســـئله هندسی به یک معادله جبری در واقع، تبحر در اســـتفاده از قضایای هندسی است و حل معادله یا دستگاه نیز یک کار جبری است. تجزیه و تحلیل مشـــاهدات حاکی از آن است که در قسمت هندســـی، تقریباً اکثر دانش‌آموزان، می‌دانستند که از کدام قضیه هندسی استفاده کنند، اما در قسمت جبری و حل معادلات و دســـتگاه‌ها، دچار سردرگمی بودند. رســـم شکل دقیق هندسی نیز، یکی از مواردی بود که دانش‌آموزان بر آن تأکید داشـــتند و معتقد بودند که، رسم نادرست شکل، می‌تواند آن‌ها را به اشتباه بیاندازد (مانند نقطه تقاطع در مســـئله، که به سبب نوع رسم شکل، بعضی از دانش‌آموزان آن را، نقطه وسط در نظر گرفتند.)

قســـمت اصلی و مهـــم این تحقیق، مشـــارکت حداکثری دانش‌آموزان در جریان حل‌مســـئله و ارائه راه‌حل‌های متنـــوع دانش‌آموزی از ســـوی آن‌ها بود. ایـــن یافته نشـــان داد که بهترین راه مشـــارکت همه دانش‌آموزان در کلاس و مشـــاهده و بروز خلاقیت در آن‌ها، به‌کاربردن روش‌های فعال در کلاس و در جریان تدریس و تأکید بر حل مسئله، به‌عنوان یک ابزار مهم در آموزش هندسه است.

سخن پایانی

آموزش هندســـه و ایجـــاد جذابیـــت و علاقه در دانش‌آموزان نســـبت بـــه ایـــن درس، از دغدغه‌های بیشتر معلمان ریاضی است. در این تحقیق، به اهمیت طرح ســـؤال‌های تلفیقی در دوشـــاخه جبر و هندسه اشاره شد. این تحقیق نشـــان داد که دانش‌آموزان، تا چه اندازه علاقه‌مند به بحث بر روی این نوع مســـائل و مشـــارکت کردن در جریان حل آن‌ها در یک کلاس فعال هستند. همچنین تنوع ابزارهایی که دانش‌آموزان برای پاســـخگویی به این نوع ســـؤال‌ها داشتند، بسیار زیاد و پرمحتوا بود. پی‌بردن دانش‌آموزان به اشتباهات ســـایر دوســـتان و مباحثه بین آن‌ها و مشخص‌شدن بعضی از بدفهمی‌ها در درس هندســـه، از مزیت طرح این مســـئله‌ها و بحث بر روی آن‌ها بود. کاربرد عینی بسیاری از قضیه‌های هندسی، برای دانش‌آموزان بهتر مشخص می‌شد. مهم‌ترین قسمت تحقیق، این بود که دانش‌آموزان احساس کردند که در ساختن دانش خود سهیم‌اند و معلم بیشتر نقش راهبری را بر عهده دارد. مصاحبه با معلمان نیز تأییدکننده این مطلب بود که هندســـه، هنگامی به یک درس جذاب تبدیل می‌شود که حل مسئله درآن احیا شود و دانش‌آموزان با مسائلی جذاب روبرو شوند و بتوانند تکنیک‌های خاص خودشان را در مســـئله پیاده کنند. لازمهٔ این کار،تأکید بر تنوع تکنیک‌ها از سوی معلم و برنامه و کتاب است.

پی‌نوشت

۱. نام‌ها مستعار هستند.

منابع

۱.ظهوری زنگنه، بیژن و گویا، زهـــرا. (۱۳۸۱). دیدگاه‌های نوین هندسه. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۶۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. رفیع‌پور، ابوالفضل و گویـــا، زهرا. (۱۳۸۶). چرایی و چگونگی آموزش هندسه. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۹۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. رفیع‌پـــور، ابوالفضل. (۱۳۹۴). برنامه درســـی جبر، **دانشنامه ایرانی برنامه درسی**.

۴.محمدی، ژالـــه و گویا، زهرا. (۱۳۸۸). بررســـی دانش معلمان ریاضی دوره راهنمایی. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره۹۵. دفتر انتشـــارات کمک آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۵.جورج پولیا، **خلاقیت ریاضی**، ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.

حل چند مسئله در احتمال

سرگروه آموزشی ریاضی استان چهارمحال‌وبختیاری

اشاره

بعد از تألیف جدید کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی و متوسطه اول، موضوعاتی مانند «احتمال» وارد کتاب‌های درسی شدند. احتمال از آن دست موضوعاتی است که بسیار گسترده بوده و می‌تواند از آن، سؤال‌هایی طرح شود که بحث‌برانگیز باشد. از آنجایی که تنها مقدمات اولیهٔ آن در کتاب‌های درسی ریاضی آمده است و برخی از عناوین و مسائل آن برای دبیران محترم ابهاماتی دارند، مانند ارتباط احتمال با مجموعه‌ها در فصل اول کتاب ریاضی پایه نهم، بر آن شدیم تا مبانی احتمال مورد نیاز کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی و متوسطه اول را با استفاده از شیوهٔ آموزش مبتنی بر حل مسئله، بررسی نماییم.

کلیدواژه‌ها: احتمال، آزمایش تصادفی، فضای نمونه، پیشامدها، حل مسئله

مسئله ۱

در پرتاب یک تاس، احتمال آن را به‌دست آورید که عدد رو شده، عددی مرکب[1] شود؟

حل مسئله ۱

در این مسئله؛ پرتاب یک تاس یک آزمایش تصادفی است که باید تمام حالت‌های ممکنِ رو آمدن یک تاس را مشخص نماییم.

تعریف ۱

آزمایش تصادفی: آزمایشی است که همه نتیجه‌های ممکن آن، قبل از انجام آزمایش مشخص است، اما قبل از انجام آزمایش، معلوم نیست کدام نتیجه رخ خواهد داد که بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات دلخواه انجام داد.

فضای نمونه: مجموعهٔ تمام حالت‌هایی را که ممکن است در یک آزمایش تصادفی رخ دهند، فضای نمونهٔ آن آزمایش می‌گویند و با S نمایش می‌دهند. (۱)

همهٔ حالت‌های ممکنِ عدد رو شده در پرتاب یک تاس $S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است، پس $n(S)=۶$.

برای به‌دست آوردن احتمال آن که عدد رو شدهٔ تاس، عددی مرکب باشد، باید پیشامدی را بدین منظور تشکیل دهیم.

پیشـــامد A را حالت‌هایـــی از عدد تـــاس در نظر می‌گیریم که عددی مرکب باشند. مجموعهٔ $A=\{۴,۶\}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، تعداد حالت‌های مطلوب $n(A)=۲$ است.

تعریف ۲

احتمال؛ شـــانس وقوع یک پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. اگر آزمایشـــی بتواند در $n(S)$ حالت برابر تصادفی نتیجه شود و اگر $n(A)$ مورد از این حالت‌ها برای پیشامد A مطلوب باشند، احتمال پیشامد A عبارت است از:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

پس احتمال پیشـــامد A به صورتِ زیر به‌دســـت می‌آید:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}$$

مسئله ۲

در پرتاب یک ســـکه و یک تـــاس، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) سکه رو و تاس عددی کوچک‌تر از ۳ شود.

ب) سکه پشت یا تاس عددی زوج شود.

حل مسئله ۲

حالت‌های ممکن پرتاب یک تاس، اعداد

$S_۱=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

خواهد بود و حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه نیز

$S_۲=\{$ر , پ$\}$

است. چون دو پرتاب داریم، برای رسیدن به حالت‌های ممکـــن، باید دو کار با هم انجام شـــوند، بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد کل حالت‌های ممکن، باید از اصل ضرب استفاده کرد.

تعریف ۳

اصل ضرب؛ اگر پیشامدی را بتوان به دو پیشامد پشـــت ســـر هم $A_۱$ و $A_۲$ تقســـیم کرد به‌طوری که پیشـــامد $A_۱$ به n طریق مختلف و پیشـــامد $A_۲$ به m طریق مختلف انجام گیرند، تعداد کل حالت‌های ممکن پیشامد اصلی به $n\times m$ طریق صورت می‌پذیرد. (۲)

پس تعداد کل حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس $n(S)=۲\times۶=۱۲$ است.

همه حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس در جدول ۱ به‌صورت زیر آمده است

جدول ۱. همه حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ر	۱-ر	۲-ر	۳-ر	۴-ر	۵-ر	۶-ر
پ	۱-پ	۲-پ	۳-پ	۴-پ	۵-پ	۶-پ

الف) پیشامد A را رو بودن سکه و عددی کوچک‌تر از ۳ شدن تاس، در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۱، آن حالت‌هایی را که سکه رو و عدد تاس کوچک‌تر از ۳ است را می‌شماریم.

جدول۲. حالت‌هایی که سکه رو و عدد تاس کوچکتر از ۳ است

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ر	۱-ر	۲-ر	۳-ر	۴-ر	۵-ر	۶-ر
پ	۱-پ	۲-پ	۳-پ	۴-پ	۵-پ	۶-پ

بنابراین، طبق جدول۲، تعداد حالت‌های مطلوب $n(A)=۲$ است. پس احتمال پیشامد A به صورت زیر به‌دست می‌آید:

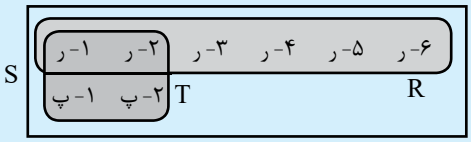
$$P(A)=\frac{۲}{۱۲}$$

اما آیا راه‌حل دیگری برای این مسئله وجود ندارد؟

در جـــواب می‌تـــوان گفت که می‌شـــود از طریق اشـــتراک دو مجموعه نیز این مسئله را حل نمود. اما چطور؟

پیشـــامد R را رو بودن ســـکه و ایـــن که تاس هر عدد دلخواه از ۱ تا ۶ شـــود و پیشامد T را تاس عددی کوچک‌تر از ۳ و ســـکه ر یا پ شود، در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ این دو پیشامد را در نمودار ۱ نمایش می‌دهیم.

نمودار ۱. نمودار ون دو مجموعهٔ R و T



حال اینکه هم ســـکه رو بیایـــد و هم تاس عددی کوچک‌تر از ۳ شود، در واقع اشتراک دو مجموعه $R\cap T$ هســـت که تعداد حالت‌های مطلـــوب $n(R\cap T)=۲$ می‌شود.

آزمایش تصادفی؛ آزمایشی است که همه‌نتیجه‌های ممکن آن، قبل از انجام آزمایش مشخص است، اما قبل از انجام آزمایش، معلوم نیست کدام نتیجه رخ خواهد داد که بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات دلخواه انجام داد

تعریف ۴

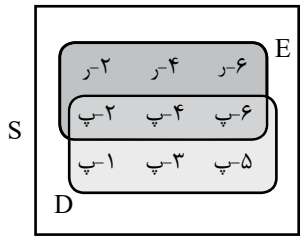
اشتراک دو مجموعه؛ اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. (۳)

پس احتمال پیشامد $R \cap T$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(R \cap T) = \frac{۲}{۱۲}$$

ب) برای به‌دست آوردن احتمال آنکه سکه پشت یا تاس عددی زوج شود، از مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. پیشامد D را برای پشت بودن سکه و اینکه تاس هر عددی از ۱ تا ۶ داشته باشد، در نظر گرفته و پیشامد E را برای آن که تاس عددی زوج و سکه ر یا پ شود فرض می‌کنیم. مجموعهٔ دو پیشامد را در نمودار ۲ نمایش می‌دهیم.

نمودار ۲. نمودار ون دو مجموعهٔ D و E



حال اینکه سکه پشت یا تاس عددی زوج شود، در واقع اجتماع دو مجموعه $D \cup E$ هست که تعداد حالت‌های مطلوب $n(D \cup E) = ۹$ می‌شود.

تعریف ۵

اجتماع دو مجموعه؛ اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. (۳)

پس احتمال پیشامد $D \cup E$، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(D \cup E) = \frac{۹}{۱۲}$$

مسئله ۳

در پرتاب دو تاس، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) مجموع اعداد رو شده عددی اول شود.

ب) مجموع اعداد رو شده، زوج و بزرگ‌تر از ۷ شود.

حل مسئله ۳

چون دو تاس را پرتاب می‌کنیم و عددهای رو شدهٔ دو تاس مدنظر ماست، پس تعداد کل حالت‌های ممکن برای پرتاب دو تاس $n(S)=۶\times۶=۳۶$ می‌شود. ۶ تعداد حالت‌های ممکن تاس اولی و ۶ تعداد حالت‌های ممکن تاس دومی است که در هم ضرب شده‌اند.

سپس چون جمع اعداد رو شده در مسئله خواسته شده است، جدول ۳ را برای مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس تشکیل می‌دهیم.

جدول ۳. همه حالت‌های ممکن مجموع اعداد رو شدهٔ پرتاب دو تاس

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

اعداد ردیف بالا مربوط به عددهای تاس اول و اعداد ستون سمت چپ مربوط به عددهای تاس دوم هستند.

نکته قابل توجه در پرتاب دو تاس این است که مثلاً برای اعداد ۱ و ۲ که ظاهر می‌شوند و مجموع آن‌ها عدد ۳ است، باید دو حالت متفاوت در نظر گرفته شود.

چون عدد ۱ از تاس اول همراه با عدد ۲ از تاس دوم یک حالت و عدد ۲ از تاس اول همراه با عدد ۱ از تاس دوم یک حالت دیگر است.

الف) پیشامد A را مجموع اعداد رو شدهٔ اول در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۳، آن مجموع‌هایی را که عددی اول شده است، می‌شماریم.

توجه باید کرد که خود دو عدد می‌توانند غیر اول باشند، زیرا مهم مجموع دو رو شده است.

جدول ۴. حالت‌های که مجموع اعداد رو شدهٔ اول باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

بنابراین طبق جدول۴، تعداد حالت‌های مطلوب n(A)=۱۵ است. پس احتمال پیشامد A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}$$

ب) پیشامد B را مجموع اعداد رو شدهٔ زوج و بزرگ‌تر از ۷ در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۳، آن مجموع‌هایی که هم عددی زوج و هم بزرگ‌تر از ۷ است را می‌شماریم.

جدول ۵. حالت‌های که مجموع اعداد رو شدهٔ زوج و بزرگ‌تر از ۷ باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

یعنی طبق جدول ۵، تعداد حالت‌های مطلوب n(B)=۹ است. پس احتمال پیشامد B به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(B)=\frac{۹}{۳۶}$$

مسئله ۴

تاسی را ۱۰۰ بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن را به‌دست آورید که عدد تاس پرتاب اولی، بزرگ‌تر از عدد تاس پرتاب آخری شود.

حل مسئله ۴

آزمایش تصادفی این مسئله، پرتاب ۱۰۰ بار یک تاس است. از آنجایی که پرتاب هر بار تاس مستقل از پرتاب بعدی است، یعنی فقط پرتاب‌های اول و آخر مهم می‌شوند.

پس مسئله به دو بار پرتاب تبدیل می‌شود که باید عدد پرتاب اولی، بزرگ‌تر از عدد پرتاب دومی شود.

تعریف ۶

دو پیشامد مستقل؛ دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای را مستقل از هم گویند، هرگاه وقوع یکی بر دیگری، بی‌تأثیر باشد. (۱)

چون دو بار تاس را پرتاب می‌کنیم و عددهای رو شدهٔ دو تاس مدنظر ماست، پس تعداد کل حالت‌های ممکن این آزمایش n(S)=۶×۶=۳۶ می‌شود.

پیشامد C را حالت‌هایی از کل حالت‌های ممکن در نظر می‌گیریم که در آن، عدد پرتاب اولی از عدد پرتاب دومی بزرگ‌تر باشد. با استفاده از جدول ۶، حالت‌های پیشامد C را می‌شماریم.

بنابراین طبق جدول ۶، تعداد حالت‌های مطلوب n(C)=۱۵ است. پس احتمال پیشامد C به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(C)=\frac{۱۵}{۳۶}$$

جدول ۶. حالت‌های که عدد پرتاب اولی از عدد پرتاب دومی بزرگ‌تر باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱,۱	۱,۲	۱,۳	۱,۴	۱,۵	۱,۶
۲	۲,۱	۲,۲	۲,۳	۲,۴	۲,۵	۲,۶
۳	۳,۱	۳,۲	۳,۳	۳,۴	۳,۵	۳,۶
۴	۴,۱	۴,۲	۴,۳	۴,۴	۴,۵	۴,۶
۵	۵,۱	۵,۲	۵,۳	۵,۴	۵,۵	۵,۶
۶	۶,۱	۶,۲	۶,۳	۶,۴	۶,۵	۶,۶

مسئله ۵

خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) اگر بدانیم دو فرزند اول خانواده پسر هستند، احتمال آن را به‌دست آورید که فرزند سوم خانواده دختر باشد.

ب) اگر بدانیم دو فرزند این خانواده پسر هستند، احتمال آن را به‌دست آورید که فرزند دیگر خانواده دختر باشد.

حل مسئله ۵

الف) در این خانوادهٔ سه فرزندی، اگر بدانیم دو فرزند اول پسر هستند، تنها جنسیت فرزند سوم خانواده مورد نظر واقع می‌شود که یا فرزند سوم پسر است که حالت آن «پسر- پسر- پسر» می‌شود، یا فرزند سوم دختر است که حالت آن «پسر- پسر- دختر» می‌شود. پس طبق جدول، همهٔ حالت‌های ممکن سه فرزند این خانواده ۲ حالت است.

جدول ۷. فرزند اول و دوم پسر و حالت‌های فرزند سوم

حالت	فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
۱	پسر	پسر	پسر
۲	دختر	پسر	پسر

حال پیشامد A را دختر بودن فرزند سوم خانواده در نظر می‌گیریم که طبق همهٔ حالت‌ها {پ پ د}=A است، پس n(A)=۱ می‌شـــود. بنابراین احتمال دختر بودن فرزند سوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}$$

ب) در این خانوادهٔ ســـه فرزندی، اگر بدانیم که دو فرزند آن‌ها پسر هست، اما ندانیم که فرزندهای چندم پسر هستند، همهٔ حالت‌های فرزندهای این خانواده به صورت زیر است:

۱. فرزند اول و دوم پسر:

جدول ۸. فرزند اول و دوم پسر و حالت‌های فرزند سوم

حالت	فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
۱	پسر	پسر	پسر
۲	دختر	پسر	پسر

۲. فرزند اول و سوم پسر:

جدول ۹. فرزند اول و سوم پسر و حالت‌های فرزند دوم

حالت	فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
۱	پسر	پسر	پسر
۲	پسر	دختر	پسر

۳. فرزند دوم و سوم پسر:

جدول ۱۰. فرزند دوم و سوم پسر و حالت‌های فرزند اول

حالت	فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
۱	پسر	پسر	پسر
۲	پسر	پسر	دختر

که طبق جدول‌هـــای ۸، ۹ و ۱۰ همهٔ حالت‌های ممکن سه فرزند این خانواده به‌صورت زیر است:

S = {د پ پ , پ د پ , پ پ د , پ پ پ}

که n(S)=۴ است.

حال پیشامد *B* را دختر بودن فرزند دیگر خانواده در نظر می‌گیریم که طبق همهٔ حالت‌ها؛

B = {د پ پ , پ د پ , پ پ د}

می‌شود. پس n(B)=۳ است. یعنی احتمال دختر بودن فرزند دیگر خانواده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(B)=\frac{۳}{۴}$$

مسئله ۶

در کیســـه‌ای ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید داریم، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) اگر بخواهیم یک مهره از کیسه بیرون بیاوریم، مهره سفید باشد.

ب) اگر بخواهیم دو مهره از کیسه بیرون بیاوریم، هر دو مهره همرنگ باشند.

حل مسئله ۶

الف) در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شـــدن هر یـــک از اعداد ۱ تا ۶ برابر $\frac{۱}{۶}$ اســـت، این گونه فضای نمونه‌ای را هم‌شانس گویند.

تعریف ۷

پیشامدهای هم‌شانس؛ فرض کنید فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی به‌صورت $S=\{s_۱, s_۲, s_۳, ..., s_n\}$ باشد که در آن، s_iها حالت‌های آزمایش مورد نظر باشند، اگر $P(s_۱)=P(s_۲)=...=P(s_n)=\frac{۱}{n}$، فضای مـــورد نظر را هم‌شانس گویند. اما اگر احتمال حالت‌ها برابر نباشد، فضا را غیرهم‌شانس گویند.

در هـــر صـــورت چه فضا هم‌شـــانس باشـــد چه غیرهم‌شانس خواهیم داشت:

$$P(s)=۱ \Rightarrow P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=۱$$

یعنی مجموع احتمال تمام حالت‌ها، ۱ است.

پس در این آزمایش تصادفی، احتمال بیرون آمدن اینکه، مهره‌ای سیاه یا سفید بیرون بیاید، غیرهم‌شانس اســـت. اما احتمال بیرون آمدن مهره‌ای سفید چقدر است؟

از آنجایی که نسبت تعداد مهره‌های سیاه به سفید ۳ به ۲ است، پس اگر احتمال بیرون آمدن مهرهٔ سیاه را با P(b) و احتمال بیرون آمدن مهرهٔ ســـفید را P(w) نمایش دهیم، داریم:

۳.P(w)=۲.P(b)

و از طرفـــی چون مجمـــوع دو احتمال باید ۱ شـــود، (P(w)+P(b)=۱) داریم:

$$P(w)+P(b)=$$

$$\frac{۲}{۳}P(b)+P(b)=\frac{۵}{۳}P(b)=۱ \Rightarrow$$

$$P(b)=\frac{۳}{۵} \Rightarrow P(w)=\frac{۲}{۵}$$

آیا می‌شـــود فضای نمونه‌ای این آزمایش را به یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس تبدیل کرد؟

در جواب این سؤال، می‌شود گفت که؛ اگر مهره‌ها را به‌صـــورت جـــدا از هـــم در نظر بگیریـــم و آن‌ها را شماره‌گذاری نماییم، یعنی؛

$S=\{b_1, b_2, b_3, w_1, w_2\}$

در این صورت، پنج مهره خواهیم داشـــت که احتمال بیرون آمدن هر کدام از آن مهره‌ها، با هم برابر است:

$P(b_1)=P(b_2)=P(b_3)=P(w_1)=P(w_2)=\frac{1}{5}$

حال پیشـــامد A را حالت‌هایی از فضای نمونهٔ S در نظر می‌گیریم که رنگ مهره‌ها سفید باشد. بنابراین $A=\{w_1, w_2\}$ است که تعداد آن $n(A)=2$ می‌شود. پس احتمال بیرون آمدن مهره‌ای ســـفید، چنین محاسبه می‌شود.

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

ب) برای انتخاب دو مهره، ابتدا باید فضای نمونه‌ای انتخاب دو مهره از میان پنج مهره را تشکیل دهیم. همهٔ حالت‌های انتخاب دو مهره از کیسه، به‌صورت زیر است:

$$S=\left\{\begin{matrix} b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3, b_1w_1, b_1w_2, \\ b_2w_1, b_2w_2, b_3w_1, b_3w_2, w_1w_2 \end{matrix}\right\}$$

پیشامد B را حالت‌هایی از بیرون آمدن دو مهره در نظر می‌گیریم که دو مهره همرنگ باشند. پس؛

$B=\{b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3, w_1w_2\}$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب $n(B)=4$ اســـت. احتمال این پیشامد، به این صورت به‌دست می‌آید:

$P(b)=\frac{4}{10}$

اما آیا راه‌حل دیگری برای این مسئله وجود ندارد؟

می‌توان فرض نمـــود که مهره‌هـــا را یکی‌یکی از کیسه بیرون می‌آوریم. بنابراین دو حالت برای مهرهٔ اول به‌دست می‌آید:

۱. یا مهرهٔ اول سیاه است.

اگر مهره اول ســـیاه باشد که احتمال آن $\frac{3}{5}$ است. برای بیرون آوردن مهرهٔ بعدی که همرنگ اولی باشـــد یعنی آن هم ســـیاه باشد، یکی از کل مهره‌ها کم شده $(n(S)=4)$ و همچنین یکی از مهره‌های سیاه $(n(b)=2)$. پس برای به‌دست آوردن احتمال هر دو مهره، احتمال سیاه بودن مهرهٔ اول را در احتمال سیاه بودن مهرهٔ دوم ضرب می‌کنیم؛

$$P(b)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

۲. یا مهرهٔ اول سفید است.

اگر مهره اول سفید باشد که احتمال آن $\frac{2}{5}$ است. برای بیرون آوردن مهرهٔ بعدی که همرنگ اولی باشـــد یعنی آن هم ســـفید باشـــد، یکـــی از کل مهره‌ها کم شـــده $(n(S)=4)$ و همچنین یکی از مهره‌های سفید $(n(w)=1)$ پس احتمال آن؛

$$P(w)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

پس برای رســـیدن به جواب که مهره‌ها هر دو سیاه یا هر دو سفید باشند، باید دو احتمال بالا را جمع نماییم؛

$$P(B)=P(b)+P(w)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$$

مسئله ۷

مجموعهٔ $B=\{1, 2, 3, ..., 100\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک زیر مجموعهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های آن انتخاب کنیم. احتمـــال آن که زیر مجموعه‌ای که انتخاب می‌شود مجموع عضوهایش عددی زوج شود، چقدر است؟

حل مسئله ۷

برای حل این مسئله، از راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر استفاده می‌کنیم و نتیجهٔ آن را برای این مسئله تعمیم می‌دهیم. بدین منظور، مسئلهٔ زیر را که طبق شرایط مســـئله هســـت، برای مجموعهٔ چهار عضوی A حل می‌کنیم.

مسئلهٔ جدید: مجموعـــهٔ $A=\{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیریـــد. می‌خواهیم یک زیر مجموعهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های آن انتخاب کنیم. احتمال آن که زیر مجموعه‌ای که انتخاب می‌شـــود، مجموع عضوهایش عددی زوج شود، چقدر است؟

مجموعهٔ A یک مجموعهٔ ۴ عضوی است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های آن، $2^4=16$ تا است. $(n(s)=15)$

پیشامد L را زیرمجموعه‌های غیرتهی که مجموع عضوهایشـــان عددی زوج شود در نظر می‌گیریم. برای این منظور حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

۱. زیرمجموعه‌هایی که اعداد زوج دارند:

$\{2\}, \{4\}, \{2, 4\}$

۲. زیرمجموعه‌هایی که دو عدد فرد دارند:

$\{1, 3\}$

۳. زیرمجموعه‌هایی کـــه دو عدد فرد و اعداد زوج دارند (ترکیبی از دو زیرمجموعهٔ بالا):

$\{1, 3, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 2, 4\}$

بنابراین

$n(L)=۳+۱+۳=۷$: تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع عضوهایشان عددی زوج است

پس احتمال پیشامد L به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(L)=\frac{۷}{۱۵}$$

نتیجه

حال زیرمجموعه‌های غیرتهی از مجموعهٔ A را بررسی کنیم که مجموع عضوهایشان، عددی فرد شود. برای مجموع فرد، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. زیرمجموعه‌هایی که یک عدد فرد دارند:

$\{۱\},\{۳\}$

۲. زیرمجموعه‌هایی که یک عدد فرد و اعداد زوج دارند:

$\{۱,۲\},\{۱,۴\},\{۳,۲\},\{۳,۴\},\{۱,۲,۴\},\{۳,۲,۴\}$

بنابراین

$۲+۶=۸$ = تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع عضوهایشان عددی فرد است

از این رابطه، می‌توان نتیجه گرفت که نصف زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ۴ عضوی مجموعهٔ A، مجموع عضوهایشان فرد و یکی کمتر از نصف زیرمجموعه‌های آن، مجموع عضوهایشان عددی زوج است.

از این نتیجه‌گیری می‌توان برای حل مسئلهٔ ۷ کمک گرفت.

طبق نتیجهٔ گرفته شده، می‌شود فهمید که یکی کمتر از نصف تعداد زیر مجموعه‌های آن، مجموع عضوهایشان عددی زوج خواهد شد. این مجموعه $۲^{۱۰۰}$ زیرمجموعه دارد که نصف زیرمجموعه‌هایش $۲^{۹۹}$ می‌شود، پس

$$P=\frac{۲^{۹۹}-۱}{۲^{۱۰۰}-۱}$$

پی‌نوشت

۱. اگر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عدد مورد نظر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، عدد مرکب می‌گویند. **ریاضی پایه هشتم**، چاپ ۱۳۹۶، ص ۲۱.

منابع

1. Ross, Sheldon. Introduction of Probability Models; (2010). 10th edition. Academic Press.

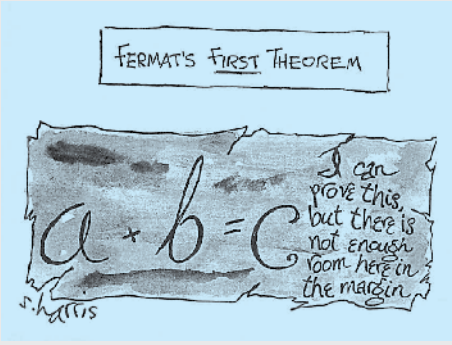
۲. آزرم‌سا، سیداحسان و موسوی، نگین‌السادات. (۱۳۹۲). **حل یک مسئله ترکیبیات شمارشی**. خوشخوان.

۳. ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه، دفتر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۹۵.

بارمسئولیت

من همیشه باعث یأس و نومیدی پدر و مادرم بودم. آن‌ها می‌خواستند که من، پزشک شوم.

حاشیه نوشته‌ام بیشتر از این جا ندارد، وگرنه می‌توانم ثابت کنم که a+b=c می‌شود!



زندگی برای یافتن جواب مجهولات است

پای صحبت محمدرضا فاطمی دزفولی، دربارهٔ تاریخ ریاضی خوزستان

اشاره

در اواخر سال ۱۳۹۵، فرصتی دست داد یکی از علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی، به گفت بنشینیم. آنچه در ادامه می‌آید، گزارش کوتاهی از یک گفت‌وگوی دوستانه با سیدمحمدرضا فاطمی دزفولی است که با وجود آنکه رشته تحصیلی و اشتغال ایشان، ارتباط مستقیم به رشته ریاضی نداشته است، ولی هم‌چنان، به مطالعات خود در رابطه با تاریخ ریاضی در خطه خوزستان ادامه می‌دهند. از بهنام آیتی‌پور، دبیر ریاضی دزفول نیز که ارتباط ما را با استاد فاطمی تسهیل نمودند، سپاسگزاریم. سردبیر

● **زهرا گویا: جناب آقای فاطمی، لطف کنید و اشاره کوتاهی به زندگی‌نامه خود و چرایی و چگونگی علاقه‌مندی‌تان به ریاضی و تاریخ ریاضی نمایید.**

○ **محمدرضا فاطمی:** من متولد فروردین ۱۳۱۶ در تهران هستم. اما دزفولی‌ام و نسب من، از یک طرف به ساداتِ گوشه و از طرف دیگر، به شیخ‌الاسلام عاملی می‌رسد، که مدعی بوده از اولاد شیخ بهایی بوده است. دوران ابتدایی را در دبستان کاشف دزفول و دوران متوسطه را در دبیرستانی که آن زمان، پهلوی نامیده می‌شد، گذراندم. سال آخر دبیرستان را هم در اهواز بودم. بعد از اتمام دوره دبیرستان، برای ورود به دانشگاه تهران امتحان دادم و در رشته‌های فیزیک، شیمی و کشاورزی قبول شدم.

● **کدام را انتخاب کردید؟**

○ رشته «آبادی و آبادانی» از گرایش‌های کشاورزی را انتخاب کردم. «آب» و تأمین منابع و حفاظت از آن‌ها، مسئله خوزستان بود. البته این رشته، با ریاضیات عجین بود و بخشی از علاقه مرا نسبت به ریاضی، تأمین می‌کرد. رشته من، دوره فوق‌لیسانس پیوسته بود و در سال ۱۳۳۹، از آن فارغ‌التحصیل شدم و به استخدام «بنگاه مستقل آبیاری» درآمدم. در سال ۱۳۷۶ بازنشسته شدم و احساس کردم که الان، بهترین موقعیتی است که دنبال کاری بروم که همیشه دوست داشتم و آن، تاریخ علم بود و این، شروع آشنایی‌ام با

عکاس: اعظم لاریجانی

آقـــای دکتر محمد باقری عضو محتـــرم دایرةالمعارف اسلامی و پژوهشگر تاریخ ریاضی در ایران بود.

لازم است بگویم که در دوران دبیرستان، مقداری عربی خوانده بودم. همچنین، برداشت نسبتاً خوبی هم از خوزستان و از ریاضیات داشتم. اما آنچه موجود بود نشان می‌داد که اگرچه انواع و اقسام عالِم در خوزستان بودند، ولی یک ریاضی‌دان بین آن‌ها نبود.

اولین مأموریت اداری من، کازرون بود. آنجا دریافتم که تمدن عیلامی، بدون ریاضیات ممکن نبوده است. هرچه می‌خواندم، بیشـــتر مطمئن می‌شدم که بدون وجـــود ریاضیاتی بســـیار قوی، آن تاریـــخ اصلاً وجود نمی‌داشـــت، مثلاً وقتی به چغازنبیل، تمدن شـــوش، بِیشـــابور، نهاوند و هرجا که می‌رفتم، کنجکاو بودم که چه کســـانی و چگونه، ریاضیات لازم بـــرای خلق آن عظمت‌ها را آفریده‌اند.

بعد شـــروع به خواندن تاریخ معاصـــر در رابطه با باستان‌شناسی و زمان رضاخان کردم. در این مطالعات، با کارهای بزرگانی چون بدرالزمان قریب که متخصص زبان‌های مرده اســـت، آشنا شـــدم. هرچه می‌خواندم و می‌گشـــتم، می‌دیدم که دیگران، حتی برای خودشان تاریـــخ تقلبی علم و ریاضی درســـت می‌کنند. ولی در ایران، چون زیاد داریم، قدرش را نمی‌دانیم. البته اخیراً، کتاب‌هایی در مورد ریاضیات بعد از اسلام نوشته شده، ولی در مورد تاریخ ریاضی قبل از اســـلام، خلأ بزرگی وجود دارد.

برای مثال، در دوره‌های هخامنشـــی، ساســـانی و اشکانی، حتی وابستگی پادشاهان به نجوم و ریاضیات، آن‌قـــدر بوده که علاوه بر حمایـــت از خلق آثار تمدنی بی‌نظیر، حتی زندگی خصوصی آنان نیز بدان وابســـته بوده اســـت و برای کارهای شخصی خود، با منجمان مشورت می‌کردند.

o دکتر زنگنه: مسئله مهم، مدون کردن تمام تاریخ قبل از اســـلام، در ایران اســـت، زیرا تاریخ ما را یونانی‌ها نوشـــتند. وقایع‌نگاران نیز با شـــاهان حرکت می‌کردند و مجبور بودند مطابق میل آنان بنویسند.

o چند نفری در ســـده‌های اخیـــر، فعالیت‌هایی کرده‌اند، ولی راه درازی در پیش است. مثلاً قراردادهای حفاری- باستان‌شناسی که ناصرالدین شاه با فرانسوی‌ها بســـت، عملاً باعث شـــد که بخش اعظم آثار به دست آمده، به موزه لوور برســـد که بـــرای نمونه، می‌توان به «مجسمه عیلامی بدون ســـر» اشاره کرد. البته جورج کامِرون، توانست تاریخ داریوش را به سه زبان عیلامی، فارسی هخامنشی و میخی بخواند و رمز آن‌ها را کشف کنـــد. کاری که وی کـــرد، **وقف زندگی برای یافتن جواب مجهولات بود.**

● برگردیم به علاقه شـــما به تاریخ ریاضی خوزستان

o کتاب ابوالحســـن اهوازی را کـــه به زبان عربی بـــود، آقای دکتر محمد باقری به مـــن معرفی کرد. با علاقه‌مندی، دنبال این کتاب رفتم. دو نســـخه از آن را

در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران پیدا کردم که یکی اهدایی مرحوم مشکات و دیگری، امام جمعه خوئی بود و خواندنش سخت بود؛ زیرا کتاب، خط و نقطه و شکل نداشت. بعد تلاش کردم و با مکاتبات متعدد با برلین و آستان قدس و هندوستان و لایدن هلند و هرجا که ممکن بود، هشت نسخه از آن را پیدا کردم.

بعداً، سراغ «شرح صدر مقاله دهم کتاب اقلیدس» رفتم که از اُمَّهات ریاضیات دنیاست. این کتاب شامل ۱۳ فصل است و در کتاب دهم، راجع به مقادیر گنگ (اصم) صحبت کرده که چگونه پیدا کردن قطر مربع ۱×۱، برای یونانی‌ها گیج‌کننده بوده است. وقتی این کتاب به دست ایرانیان مسلمان افتاد، گفتند همان کاری را که می‌توان روی اعداد صحیح نمود، با اعداد گنگ هم شدنی است که این مطالب، در یک نسخه روسی از این کتاب، درج شده است.

خلاصه، جست‌وجوهایم مرا با گاهنامه‌های سیدجلال‌الدین تهرانی که منجم بزرگی بود و بین سال‌های ۱۳۰۸ تا ۱۳۱۱ آن‌ها را منتشر می‌کرد، آشنا نمود که در این مورد، مطالب جالبی داشت. بعد هم به دو کتاب آلمانی که راجع به زُمِر از منجمان عرب بود و ترجمه عربی آن موجود بود، برخوردم. در هر حال، این کتاب را هم از عربی به فارسی ترجمه کردم و همگی آن‌ها در قالب کتابی درآمد که با مشکلات زیاد چاپ شد، لازم است این را هم بگویم که نقش خانواده نوبختی در ریاضیات و نجوم در دانشگاه جندی شاپور، قابل ملاحظه است.

● با تشکر از وقتی که به ما دادید و در ذهن ما، سؤال‌های بکری ایجاد کردید، با اجازه شما، به‌عنوان حسن ختام این گفت‌وگوی کوتاه ولی به غایت شیرین و آموزنده، ترجمه «محاسبه عدد π با دقتی شگفت‌انگیز» را در ادامه می‌آوریم.

■■■

محاسبه عدد π با دقتی شگفت‌انگیز ($\pi = \frac{۳۵۵}{۱۱۳}$)

نگاهی کوتاه به جنبه‌های تاریخی و فرهنگی آن (با توجه به سهم دانشمندان مشرق زمین)

در پیوند با اندازه‌گیری که در یک دایره انجام می‌شود. جالب‌ترین رقمی که می‌تواند به‌دست آید عدد π است. تاریخچه پیدایش، تحول تدریجی و مقادیر مختلفی که طی قرون و اعصار برای عدد π به دست آمده است، یکی از بخش‌های مشهور مبانی ریاضیات و شناخت پیشرفت بسیاری از مفاهیم ریاضی است.

عدد π نه تنها گنگ بلکه متعالی است، بنابراین مقدار واقعی آن نمی‌تواند برابر یک عدد گویا یا کسری باشد. در نتیجه همیشه به صورت تقریب می‌ماند.

زوچُنگ ژی[1] (که تسوچونگ چی[2] نیز نوشته می‌شود) (۴۲۹-۵۰۰ میلادی) از ریاضی‌دانان بزرگ چین بود. اگرچه کتاب معتبر او ژویی شو[3] (روش ترکیب ریاضی) است که در سال ۴۸۰ میلادی نوشته شده است در دست نیست، ولی خوشبختانه قسمت‌هایی از آثار او در کارهای دیگران نقل شده است. کتاب سوئی شو[4] (تاریخ رسمی سلسله سوئی[5]، ۵۸۱-۶۱۸ میلادی) که از او، به عنوان «شاهزاده ریاضی‌دانان» نام برده شده و اضافه کرده است که وی، روش‌های ظریفی جهت تربیع دایره ابداع نموده است.

طبق مندرجات کتاب مزبور، نسبت‌هایی دقیق و تقریبی که زو، بین محیط دایره C، و قطر دایره یعنی D پیدا کرده است به ترتیب ۳۵۵ به ۱۱۳ و ۲۲ به ۷ هستند. بنابراین او نه فقط نسبت تقریبی ارشمیدس یعنی

$$\pi = \frac{۲۲}{۷} \quad (۱)$$

بلکه مقدار بسیار دقیق و تازه

$$\pi = \frac{۳۵۵}{۱۱۳} \quad (۲)$$

را پیدا کرده است.

مهم‌تر آن که در کتاب سوئی شو، نقل شده است که زو مقدار دقیقی را که محیط دایره می‌تواند در آن قرار گیرد تعیین کرده است. این حدود (در شکل قدیمی آن) به مقادیر زیر می‌رسد:

$$۳/۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۷ \quad (۳)$$

جالب است که بر اساس بعضی نوشته‌ها، اندیشه‌های ژرف مندرج در کتاب ژویی شو در خود کشور چین، به درستی درک نگردید و به زودی رها و به بوته فراموشی سپرده شد. اما برعکس، ارزش آن را در ژاپن شناختند و زیر عنوان دیگری (تتسوجوتسو[6]) دنبال گردید و تأثیر بسیاری بر ریاضیات رسمی آن دیار گذاشت.

یکی از ریاضی‌دانان قدیم چین به نام لیو هویی[7] (قرن سوم میلادی)، با به‌کار بردن روش کثیرالاضلاع‌های محاطی، به مقدار تقریبی زیر برای عدد π رسید:

$$\pi = \frac{۱۵۷}{۵۰} \quad (۴)$$

چندی بعد هوچنگلیان[8] (۳۷۰- ۴۴۷ میلادی) یکی از روش‌های واسطه‌یابی موزون[9] را به‌کار برد. در حالت کلی، اگر دو کسر مثبت $\frac{a}{b}$ (کوچکتر) و $\frac{c}{d}$ (بزرگتر) در دست بوده و n، تعداد تکرار یا گام باشد،

مقادیر درون‌یابی میانی بسیاری می‌تواند از کسر موزون به‌دست آید:

$$\frac{a+nc}{b+nd} \qquad (۵)$$

ما این روش را برای (۱) و (۴) به‌کارمی‌بریم.

چون:

$$\frac{۱۵۷}{۵۰} < \pi < \frac{۲۲}{۷} \qquad (۶)$$

عبارت (۵) با فرض n=۹ به آســانی به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{۱۵۷+۹\times۲۲}{۵۰+۹\times۷} = \frac{۳۵۵}{۱۱۳} \qquad (۷)$$

که همان مقدار دقیقی است که زو به‌دست آورده بود و ما آن را در (۲) دیدیم.

برای رســیدن به چنین نتیجه‌ای، راه دیگری نیز می‌توانست پیشنهاد شــود. لیو در شرح خود به کتاب معروف جیو ژانگ ســوان شــو[۱۰] (نه فصل درباره هنر ریاضی) محاســبات مربوط به محیط دایره را «با اعداد بســیار خرد» انجام داد. او به صراحت اعلام نمود برای دایره‌ای به قطر ۱۳۵۰، محیط ۳۹۲۷ خواهد بود و به این ترتیب، رابطه زیر را نتیجه گرفت:

$$\pi = \frac{۳۹۲۷}{۱۲۵۰} \qquad (۸)$$

ولی در عمل، ترجیح می‌داد از نســبت ساده (۴) اســتفاده کند. با این همه، بعضی از دانشمندان اخیر چیــن (۸) آن را نه به عنوان یادگیری از لیو بلکه اثری از زو مورد توجه قرار می‌دهند زیرا بدون شک، با کار و روش شخص اخیر، آشنایی بیشتری دارند.

به هر حال زو، به خاطر این مقدار ســاده و دقیق مورد توجه قرار گرفت، کســر (۸)، با به‌کار بردن روش مشــهور و قدیمی اقلیدس می‌توانست به صورت کسر مسلسل زیر نوشته شود:

$$\frac{۳۹۲۷}{۱۳۵۰} = ۳ + \cfrac{۱}{۷ + \cfrac{۱}{۱۶ + \cfrac{۱}{۱۱}}} \qquad (۹)$$

از این کســر می‌توانیم به آسانی دریابیم که (۱) و (۲) دومین و ســومین پرش در کسر مسلسل هستند. در اینجا هنوز یک موضوع قابل توجه دیگر وجود دارد که با علائم جدید ریاضی، کســرهای مسلســل ساده (هنگامی که صورت‌ها واحد باشند- مانند (q)) می‌توانند به صورت [۱۱ و ۱۶ و ۷ : ۳] نوشته شوند. در ۱۷۶۱، ژ. هـ. لامبر[۱۱] نشان داد که مقدار حقیقی π عبارتست از:

$$[۳:۷, ۱۵, ۱, ۲۹۲, ۱, ۱, ..., \infty] \qquad (۱۰)$$

با چنین نشانه‌گذاری، نامعادله زو (با هر آنچه که با روش خود به‌دســت آورده بود) می‌تواند به این صورت بیان شود که

$$[۳:۷, ۱۵, ۱, ۲۴۳,...] < \pi < [۳: ۷, ۱۵, ۱, ۳۴۵,...] \qquad (۱۱)$$

در اینجا می‌بینیم چهار برش اول در هر دو طرف نامعادله، یکسانند. همچنین کسرهای با صورت واحد و مخرج‌های ۲۴۳ و ۳۵۴ بسیار کوچک بوده و نادیده انگاشتن آن‌ها، عملاً تغییری در نتایج حاصله نمی‌دهد. بنابراین از (۱۱) مقدار دقیق‌تر زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi = [۳ : ۷,۱۵,۱] = \frac{۳۵۵}{۱۱۳}$$

در هندوستان، دانشمند پیرو مکتب جینَ[۱۲] به نام ویراسنا[۱۳] (۸۱۶ میلادی) در شرحی که به داوالا[۱۴] دارد، بیتی نقل می‌کند که دستور زیر در آن است:

$$C = ۳D + \frac{۱۶D+۱۶}{۱۱۳} \qquad (۱۲)$$

او همچنین مدعی است که این مقدار «دقیق‌تر از دقیق» است.

ساختاز (۱۲) نشــان می دهد که افزودن عدد ۱۶ به معنی یک تعمق آگاهانه و برای دقت بیشتر C بوده که از دستور زیر به‌دســت می‌آید و به مقدار دقیق زو می‌رسد:

$$C = ۳D + \frac{۱۶D}{۱۱۳} \qquad (۱۳)$$

برای D=۲۰۰۰۰ (که به‌وسیله ریاضی‌دان معروف هندی آریابهاتابی اول[۱۵] پذیرفته شــده بود)، با فرمول (۱۳)، C=۶۲۸۳۱ به‌اضافه $\frac{۹۷}{۱۱۳}$ خواهد شد. در حالی‌که طبق (۱۳)، C=۶۲۸۳۲ می‌شود که همان مقداری است که آریابهاتا (متولد ۴۷۶ میلادی) در آریابهاتیا[۱۶] (۱۱ و ۱۰) داده و به مقدار قبلی نزدیک است.

آریابهاتا دانشــمندی مورد احترام (آکاریا[۱۷]) و در نتیجه بین هندیان صاحب نفوذ فراوان بود. او به‌عنوان تجسم خدای خورشید که به جانشینی این خدا برای اصلاح ســنجش زمان بر روی زمین فرستاده شده، از احترام بســیار برخوردار بود. بنابراین تصور می‌شد که دستور (۱۲) دقت بیشتری دارد. باید اشاره کرد که در دوران سلطنت سلسله‌های سویی و تانگ[۱۸] (۹۰۳-۶۱۸ میلادی)، مبادلات فرهنگی بین چین و هند از طریق مذهب بودا گسترش فراوان یافته بود.

نوشــته‌های ریاضی که در هندوستان یافت شده و بــدون تردید به دســتور (۲) می‌رســند، در آثاری چون تانتراســاموکایا[۱۹] (۱۴۲۸) از نارایا نامپوتیری[۲۰] و تانترا سنگسها[۲۱] تألیف نیل کنته سومایاجی[۲۲] (حدود ۱۵۰۰ میلادی) و گلسارا[۲۳] (از تألیفات همین شخص) و بعضی نویسندگان دیگر دیده می‌شود.

ظاهراً، در اروپا برای اولین بار، والنتین اوتو[۲۴] به‌کار بردن دستور (۲) را در ۱۵۷۳ پیشنهاد کرده بود.

او آن را از یافته‌های بطلمیوس یعنی $\frac{۳۷۷}{۱۲۰}$ ؛ ارشمیدس (دستور ۱) به قرار زیر به دست آورده

$$\frac{-۲۲}{-۷} = \frac{۳۵۵}{۱۱۳}$$

اگر در دستور (۵) n=-۱۰ فرض شود، مقد به‌دست می‌آید.

دوازده سال بعد، آدریان آنتونیز (=پیترمتیوس[۲۶]) هلندی با یک «اتفاق مساعد» شد همین نسبت را به قرار زیر، به دست آورد.

$$\frac{۳۷۷}{۱۲۰} < \pi < \frac{}{} \quad (۱۴)$$

برای این کار، دستور (۵) را در حالت n=۱ به‌ک و بعد، جمع صورت و مخرج دو کسر را به ۲ ساد، تا آنچه که متوسط گویا[۲۷] نامیده می‌شد، حاصل گ

اگر کسور دهدهی را به‌کار ببریم، از دستور (۲ شش رقم اعشار درست به‌دست می‌آید، ولی (۳) سس می‌دهد که زو، π را تا هشت رقم اعشار به‌طور صحیح پیدا کرده است. این رقم دقیق تا نه قرن بعد در دنیای علم جایی نداشت.

مادهوا[۲۸] (حدود ۱۴۰۰)، بنیانگذار مکتب آریابهاتای نوین، یک بند شعر سانسکریت دارد که π را با مقدار زیر بیان می‌کند:

$$\pi = \frac{۲۸۷,۴۳۳۳,۸۸۲۳,۳}{۹\times۱۰^{۱۱}} \quad (۱۵)$$

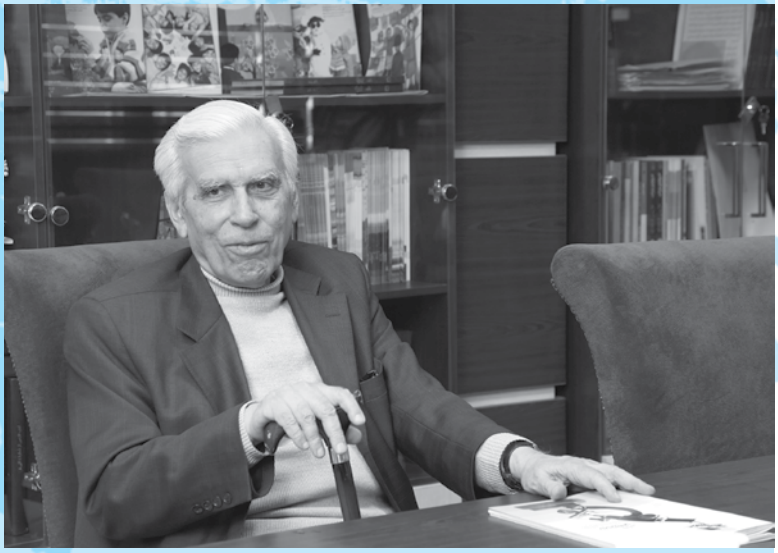
که پس از گرد کردن، مقدار عدد π را تا ۱۲ رقم اعشار به‌دست می‌دهد.

از این مهم‌تر، مادهوا یا سلسله‌های معروف به گرگوری[۲۹]، برای $\tan^{-1} x$ را می‌شناختند که دنباله‌های نامتناهی بسیاری برای π، از آن استخراج می‌شود.

در ۱۴۲۴ میلادی، جمشید کاشانی از ایران، رساله گرانقدر خود را با نام رساله محیطیه به زبان عربی نوشت. کاشانی در این رساله عدد π را تا ۱۶ رقم اعشار به درستی محاسبه نمود. این کار با روش کلاسیک و استفاده از کثیرالاضلاعی با ۳×۲^{۲۸} ضلع انجام گرفت.

در اروپا، ویتا[۳۰] عدد π را تا ۹ رقم اعشار (۱۵۷۹) و آدریان وان رومن[۳۱] تا ۱۵ رقم اعشار (۱۵۹۳) پیدا کردند. چندی بعد، ریاضی‌دان مشهور آلمانی لودلف وان کولن[۳۲] (در ۱۶۱۰) آن را تا ۳۵ رقم اعشار محاسبه نمود. کلیه این کارها با روش کلاسیک انجام گرفت.

برای آگاهی از ترسیم‌های هندسی نسبت به زو (۲)، به برگرن[۳۳] و دیگران (۲۰۰۴) مراجعه شود. این ترسیم‌ها به وسیله جاکوب دوگلدر[۳۴] (۱۸۴۹)، س. رامانجوان[۳۵] (۱۹۱۳) و ت. م. پ. هوگس[۳۶] (۱۹۱۴) ارائه شده‌اند.



1. Zuchong Zhi
2. TsuChung-Chi
3. Zhui Shu
4. Sui Shu
5. Sui
6. Tetsujutsu
7. Liu Hui
8. Ho Chenglian
9. Harmonized Averaging
10. Jiu Zhang Suan Shu
11. J. H. Lambert
12. Jaina
13. Virasana
14. Dhavala
15. Ariabhata I
16. Āryabhatiya
17. Ācaryā
18. Tang
19. Tantrasamuccaya
20. Nārāyana Nampūtiri
21. TantraSangsaha
22. Nilakantha Somāyāji
23. Golsarā
24. Valentin Otho (otto)
25. Adrian Anthoniszoon
26. Peter Metuis
27. mean rational
28. Mādhava
29. Gregory
30. Vieta
31. Adrian Van Roomen
32. Ludolph Van Ceulen
33. Berggren
34. Jacob de Gelder
35. S. Ramanjuan
36. T. M. P. Hughes

استاندارد ارتباط و اتصال
برای پایه‌های ۹ تا ۱۲

نویسنده: شورای ملی معلمان ریاضی
ترجمه: بهنام آیتی‌پور
دبیر ریاضی دزفول

اشاره
زمانی‌که دانش‌آموزان بتوانند ارتباطات بین حوزه‌های محتوایی متفاوت ریاضی را ببینند، به این دیدگاه اشراف پیدا می‌کنند که ریاضی، کلیتی یک‌پارچه (هماهنگ) است. وقتی آن‌ها بر پایه دانش پیشین خود از ریاضی، آموختن مفاهیم جدید را بنا می‌کنند، بیشتر و بیشـــتر از ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی آگاه می‌شوند. هم زمان، دانش ریاضی دانش‌آموزان، توانایی آن‌ها را در به‌کارگیری حوزهٔ وسیعی از بازنمایی‌های ریاضی و دسترســـی آن‌ها را به تکنولوژی‌های پیچیده و نرم‌افزارهای پیشرفته بیشتر می‌کند و ارتباط‌هایی با سایر حوزه‌های دانشی و دیسیپلین‌های آکادمیک به‌خصوص علوم پایه و علوم اجتماعی، برقرار می‌کنند.
کلیدواژه‌ها: ارتباط، اتصال، بازنمایی‌های ریاضی

منظور از ارتباط و اتصال در پایه‌های ۹ تا ۱۲ چیست؟

دانش‌آموزان در پایه‌های ۹ تا ۱۲، باید به سطحی برسند که بتوانند ظرفیت‌های بالقوه و فزاینده خود را به‌وســـیله ارتباط‌های عمیق‌تر بین ایده‌های ریاضی، برقرار کنند و آنان باید بدانند که چگونه راه‌حل‌های مختلف برای یک مسئله، می‌تواند در نهایت، به نتایج معادل منجر شوند.

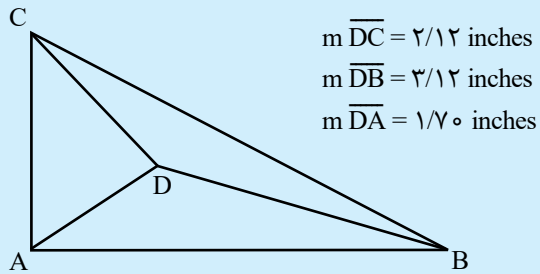
دانش‌آموزان می‌توانند از بینشی که از یک زمینه به دست آورده‌اند، برای اثبات یا رد یک حدسیه، استفاده کنند و با مرتبط کردن ایده‌های ریاضی می‌توانند درک قوی‌تری از مسئله‌ها پیدا کنند.

در مثال فرضی زیر، ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌ها و رویکردهایی که نسبت به یک مسئله ریاضی، به نظر بسیار متفاوت‌اند برجسته شده است.

وقتی که آقای رابینسون، معلم پایه دهم ریاضی، کلاس را با این داستان شروع کرد، دانش‌آموزان، حدس زدند که قرار است مسئله‌های جالبی حل کنند. مسئله این بود:

من دچار یک مخمصه شده‌ام. همان‌طور که احتمالاً می‌دانید، یک سگ باوفا دارم و حیاطی که شبیه یک مثلث قائم‌الزاویه است. وقتی می‌خواهم که فیدو [نام سگ] از حیاطم مراقبت کند و چون نمی‌خواهم گم شـــود، می‌خواهم برایش قلاده بزنم و قلاده را جائی نزدیک محوطه حیاط، ببندم. اما هر کجا که قلاده را ببندم، می‌خواهم مطمئن باشـــم که این سگ، می‌تواند به هر گوشهٔ حیاط برود. می‌خواهم از کوتاه‌ترین قلاده ممکن استفاده کنم.

بعد از این‌که آقای رابینسون، به پرسش‌ها و نظرات معمول پاسخ می‌دهد (مانند این که «واقعاً یک سگ دارید؟» آیا این که «فقط یک معلم ریاضی ممکن است که حیاطش مثلثی شکل باشد؟» یا «متوجه شود که حیاطش به شکل مثلث قائم‌الزاویه است» و «این سگ از چه نژادی است؟»



شکل ۱

او از دانش‌آموزان خواســـت که در گروه‌های سه نفری کار کنند. همه ابزارهای معمول شامل نقاله، گونیا، ماشین حساب و کامپیوتر را به همراه نرم‌افزارهای هندسی در دسترس‌شان بود. آن‌ها باید برای حل این مسئله، نقشه‌ای طراحی می‌کردند. جنیفر مستقیم وارد حل مسئله شد و گفت: « با استفاده از کامپیوتر، یک نمودار بکشیم. با موافقت هم‌گروهی‌هایش، شکل بالا را رسم کردند. (همانند شکل ۱)

آقای رابینســـون در کلاس می‌گشت، و با فرصت کافی، بر کار هر گروه و پیشرفتشان، نظارت می‌کرد. در این بازدیدها به نظر می‌رســـید که گروه جنیفر، بیشتر به‌طور تصادفی کار می‌کردند و تجربه می‌نمودند، مثلاً نقطه D را در مکان‌های مختلف می‌کشیدند، اما بار دومی که کار گروه را دید، معلوم بود که نظام‌وارتر کار می‌کنند.

معلم برای ارزیابی آنچه که اعضای گروه فهمیده‌اند، پرسید که آن‌ها چه‌کار می‌کنند.

آقای رابینسون: جو، می‌تونی به من بگی که برای حل این مسئله، چه کارهایی کردین؟

جو: ما سعی می‌کنیم بفهمیم که کجا باید نقطه را قرار بدیم.

جف: ما نمی‌خوایم که نقطه‌ها، زیادی به گوشه‌های مثلث نزدیک شوند.

جنیفر: فهمیدم! می‌خوایم که طول همه اضلاع مساوی باشد. این سه ضلع، همه مخالف یکدیگر کار می‌کنند (یعنی هر چقدر طول یک ضلع کوتاه‌تر شود، طول ضلع‌های دیگر بزرگ‌تر می‌شود.)

قبل از حرکت کردن به ســـمت کار با سایر گروه‌ها، آقای رابینسون با اعضای گروه جنیفر کار کرد تا ایده‌هایشان را شفاف کنند و برای این کار، از زبان ریاضی رسمی‌تری استفاده کرد و فرصت داد تا آن‌ها، با هم تبادل نظر کنند تا به یک درک مشترک برسند.

جنیفر ایده‌اش را شـــفاف کرد و گروه به این تصمیم رســـید که ایده جنیفر، منطقی به نظر می‌رسد. هدف بعدی آن‌ها، پیدا کردن موقعیت نقطه D به گونه‌ای بود که اندازه پاره خط‌های DC، DA، DB برابر باشند.

وقتی که آقای رابینسون از آن گروه بازگشت، آن‌ها نتیجه گرفته بودند که نقطه D، باید وسط وتر باشد. در غیر این صورت، فاصله نقطه D از B و C، نمی‌تواند برابر باشد. (آقای رابینسون برای خودش یادداشت کرد که نتیجه‌گیری گروه، به اندازه کافی توجیه‌کننده نیست، اما تصمیم گرفت که در این مرحله، مداخله نکند. کاری که بعداً انجام دادند، تولید اثباتی بود که آن‌ها را از درستی استدلال خود، مطمئن کند.)

آقای رابینسون: چه چیزی دیگری را باید بدانید.

جف: ما هنوز مطمئن نیستیم که نقطه D، باید از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد.

جنیفر: باید چنین باشـــد! حداقل من فکر می‌کنم که باید باشد. به نظر می‌رسد که نقطه D، مرکز یک دایره است.

گفتگو در گروه‌های کوچک ادامه داشت تا این‌که چندین گروه، مشاهدات و حدسیه‌های مشـــابهی با گروه جنیفر ارائه دادند. پس از آن، آقای رابینسون از دانش‌آموزان خواست که در جاهای خود بنشینند تا به صورت کلاس، همه با هم راجع به مسئله و نتایجی که آن‌ها به‌دست آورده بودند، بحث کنند. زمانی‌که همه دانش‌آموزان بر روی یک حدسیه به توافق رسیدند، آن را روی تابلو، نوشت:

حدسیه: نقطه وسط وتر هر مثلث قائم‌الزاویه، از سه رأس آن مثلث، به یک فاصله است.

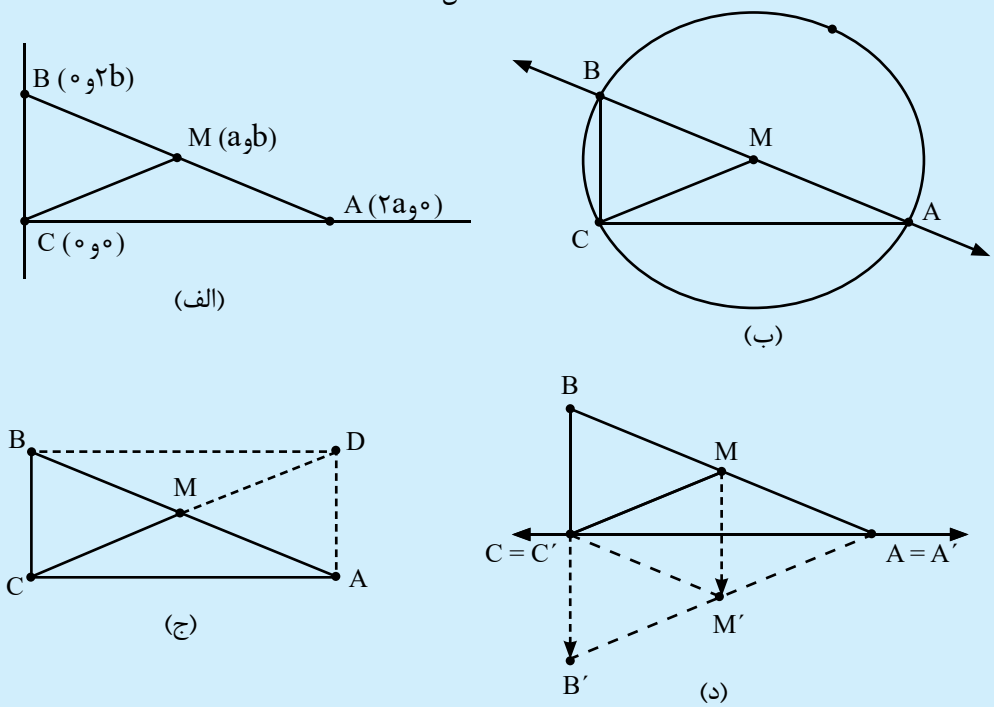
پس از این، از دانش‌آموزان خواست که به گروه‌هایشان برگردند و برای اثبات یا پیدا کردن یک مثال نقض، تلاش کنند. گروه‌ها کار بر روی مسئله را ادامه دادند و مسیر اثبات را برگزیدند. هر گروه، یک نفر را انتخاب کرد که اثبات خود را ارائه دهد. مثل همیشه، آقای رابینسون بر این حقیقت تأکید کرد که ممکن است راه‌های متفاوتی برای اثبات یک حدسیه، وجود داشته باشد.

با توجه به صحبت‌های آقای رابینسون در مورد به کارگیری دستگاه متخصات «برای ساده کردن کارها»، یکی از گروه‌ها مختصات را مطابق شکل (۲. الف) قرار دادند و نتیجه گرفتند که فاصله مشترک، $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

آلفونس، که این راه حل را شرح داد، با افتخار یادآور شد که این راه حل قضیهٔ فیثاغورس را برایش تداعی می‌کند. آقای رابینســـون بر اساس آن مشـــاهدات، به کلاس متذکر شد که اگر دانش‌آموزان، عمودی از M بر AC رســـم کنند، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود آمده، دارای قاعده‌هایی به طول‌های a و b هســـتند، در نتیجه، معلوم است که طول وترهای MC و MA، $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

گروه جنیفر، به نکته‌ای که پیش‌تر راجع به این که سه نقطهٔ A، B و C، روی یک دایره واقع هستند، برگشتند. پس از یک گفت‌وگوی طولانی بین اعضای گروه جنیفر وپرسیدن سؤال‌هایی ازآقای رابینسون، آن‌گروه اثبات دیگری را براساس زوایای داخلی مثلث ارائه داد! (شکل ۲. ب)

شکل ۲



استفاده از جئوجبرا

برای بهبود آموزش توابع متناوب مثلثاتی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دبیر ریاضی منطقه ۱۶ تهران
دبیر ریاضی منطقه ۱۵ تهران

چکیده

مقاله حاضر، به بررسی نتایج یک مورد درس‌پژوهی به کمک نرم‌افزار جئوجبرا برای بهبود یادگیری دانش‌آموزان می‌پردازد. در این مقاله ابتدا به بررسی ویژگی‌های درس‌پژوهی، که ایده متخصصان آموزشی ژاپنی برای توسعه حرفه‌ای معلمان است، پرداخته می‌شود و سپس نمونه‌ای از یک درس‌پژوهی ریاضی که توسط نویسندگان انجام پذیرفته است، ارائه می‌گردد. داده‌های کیفی با استفاده از مشاهده مشارکتی اعضای گروه در فرایند درس‌پژوهی، بررسی طرح درس‌ها و فعالیت‌ها، بازاندیشی‌های اعضای گروه و داده‌های کمی شامل مقایسه نتایج آزمون‌های دانش‌آموزان در کلاس درس است. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که درس‌پژوهی تأثیر زیادی بر بهبود و تقویت یادگیری دانش‌آموزان و توسعه حرفه‌ای معلمان دارد. همچنین، استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا و تهیه و به‌کارگیری محتوای الکترونیکی مناسب برای این موضوع درسی، جهت کمک به آموزش مؤثرتر و یادگیری پایدارتر دانش‌آموزان، بسیار مفید و تأثیرگذار است. البته استفاده از این فرایند با مشکلات و موانع اجرایی زیادی مواجه است.

کلید واژه‌ها: درس‌پژوهی، بهبود یادگیری، نرم‌افزار جئوجبرا، تقویت آموزشی، توسعهٔ حرفه‌ای معلمان

مقدمه

در آغاز قرن بیست‌ویکم بیش از گذشته، توجه همگان، به نظام‌های آموزشی معطوف شده است. هم‌چنین توجه و تمرکز نظام‌های آموزشی نیز به بهبود یادگیری مدرسه‌ای افزوده است. رویکردهای اخیر در نظام آموزش‌وپرورش که در راستای بهبود یادگیری دانش‌آموزان است، حاکی از یادگیری مشارکتی در کلاس درس است (خاکباز و همکاران، ۱۳۸۷). بدین سبب، آنان معتقدند که توسعهٔ حرفه‌ای معلمان به‌عنوان مهم‌ترین نیروی انسانی در نظام

تعلیم‌وتربیت، دارای اهمیت زیادی است. یک نمونه از فعالیت‌های مربوط به توسعهٔ حرفه‌ای معلمان، روشی است که ژاپنی‌ها در ابداع و به‌کارگیری آن، پیشتاز محسوب می‌شوند و امروزه در ایران، با نام «درس‌پژوهی» شناخته می‌شود. درس‌پژوهی یک الگوی ژاپنیِ پرورش حرفه‌ای معلمان در مدرسه است و در عمل، به گسترش فرهنگ یادگیری در مدرسه یاری نموده و محیطی را فراهم می‌سازد تا معلمان از یکدیگر بیاموزند و بیش از پیش، به نیازها و نحوهٔ تعامل با دانش‌آموزان، توجه کنند (سرکارآرانی، ۱۳۹۰).

برای اجرای مؤثر درس‌پژوهی، مشارکت فعال همه دست‌اندرکاران آموزش لازم است و تأکید بر آموزش نه معلم، احساس نیاز به یادگیری برای آموزش و بهبود آموزش مستمر، توانِ به چالش کشیدن گذشته برای نوآوری در آینده و اهمیت دادن به دانش حرفه‌ای و بومی، ضروری است (سرکارآرانی،۱۳۹۴).

تجربه کشورهای گوناگون از اجرای درس‌پژوهی در کلاس‌های ریاضی و علوم، نشان می‌دهد که معلمان در فرآیند درس‌پژوهی همراه دانش‌آموزان، فرصت‌های غنی برای سازماندهی تعامل اثربخش در کلاس درس، آموختن از یکدیگر و بهسازی آموزشی متناسب با شرایط حرفه‌ای خود، به‌ویژه از طریق بهبود تعامل بین دانش‌آموزان و معلم، به دست می‌آورند (سرکارآرانی و همکاران، ۲۰۰۹). گزارش پیزا[1] (برنامه بین‌المللی ارزشیابی دانش‌آموزان، ۲۰۱۲) و پژوهش‌های واتانابه (۲۰۱۳) نشان می‌دهند که ترویج درس‌پژوهی در مدارس ژاپن، یکی از عوامل مؤثر بر بهبود عملکرد دانش‌آموزان بوده است. بنابراین، می‌بایست معلمان به دنبال تغییر به موقع در کلاس‌های درس خود، برای تعامل بیشتر با دانش‌آموزان و همچنین تعمیق یادگیری آن‌ها باشند. استفاده از تکنولوژی‌های آموزشی به‌طور عام و فن‌آوری اطلاعات به‌طور خاص، یکی از این تغییراتی است که می‌توان در کلاس‌های درس ایجاد کرد. با توجه به پیشرفت سریع و رو به رشد فناوری‌های نوین در همهٔ عرصه‌ها، حوزهٔ آموزش نیز از این موضوع استثناء نبوده و ناگزیر کاربرد فن‌آوری در آموزش، امری اجتناب‌ناپذیر است. اما هدف نهایی در استفاده از فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات، افزایش اثر تدریس و بهبود یادگیری دانش‌آموزان است (هیگینز، ۲۰۰۳). در آموزش الکترونیکی بر خلاف آموزش سنتی، محوریت بر خود دانش‌آموز استوار است و در واقع، دانش‌آموز- محور است. روش تدریس مبتنی بر فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات، به معلم و دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در اتخاذ یک روش یادگیرنده- محور، فعالیت کنند (هادجرویت، ۲۰۱۰). پژوهش دیگری که توسط مایر (۲۰۰۲) انجام شده، نشان داده است که ادغام کلیپ‌های ویدئویی استاندارد طراحی شده توسط معلمان، پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد. این مطالعه که روی بیش از ۱۴۰۰ دانش‌آموز مدارس ابتدایی و متوسطه در ۳ ناحیه آموزشی ویرجینیا انجام شد، نشان داد یادگیری دانش‌آموزانی که به کمک کلیپ‌های ویدئویی، آموزش دیده بودند در مقایسه با دانش‌آموزانی که با روش سنتی به تنهایی آموزش دیده بودند، افزایشی در حد متوسط داشت. وی توصیه نمود که برای استفاده از فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش ریاضی، لازم است از نرم‌افزارهای متناسب با موضوع تدریس استفاده نموده و روش تدریس را با آن هماهنگ نمود.

درس‌پژوهی یک الگوی ژاپنیِ پرورش حرفه‌ای معلمان در مدرسه است و در عمل، به گسترش فرهنگ یادگیری در مدرسه یاری نموده و محیطی را فراهم می‌سازد تا معلمان از یکدیگر بیاموزند و بیش از پیش، به نیازها و نحوهٔ تعامل با دانش‌آموزان، توجه کنند

معرفی نرم‌افزار جئوجبرا

جئوجبرا یک نرم‌افزار ریاضیات پویا است که هندسه و جبر را به‌هم مرتبط می‌کند. این نرم‌افزار از یک‌سو، یک نظام ترسیمی تعاملی هندسه است. در این نرم‌افزار، به‌وسیلهٔ نقطه‌ها، بردارها، پاره‌خط‌ها، خط‌ها و مقاطع مخروطی، شکل‌های مختلفی را مثل توابعی که می‌توانند به‌صورت پویا تغییر کنند، می‌توان ترسیم نمود. جئوجبرا توانایی بررسی متغیرهای عددی، برداری و نقاط را دارد. این نرم‌افزار همچنین، مشتق و انتگرال توابع را محاسبه نموده و دستورهایی مانند جذر گرفتن یا قدر مطلق را اجرا می‌کند. در نرم‌افزار جئوجبرا، یک عبارت جبری را مانند یک شیء هندسی در نظر می‌گیرد و ورود راحت اطلاعات و تحلیل آسان رفتار توابع نسبت به تغییرات متغیر تعریف شده در دامنه‌های متفاوت، از ویژگی‌های این نرم‌افزار است. این قابلیت‌ها، می‌توانند به معلمان، در آموزش مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان کمک کنند.

گزارش درس‌پژوهی

گزارش حاضر، خلاصه‌ای از یک فعالیت درس‌پژوهی است که در یکی از دبیرستان‌های دوره دوم متوسطه ناحیه ۱۶ آموزش‌وپرورش شهر تهران در سال تحصیلی ۹۴ -۹۳ با عنوان **تقویت و بهبود آموزش و یادگیری درس دوره تناوب توابع**

مثلثاتی به کمک نرم افزار جئوجبرا، انجام گرفته است.

گروه درس‌پژوهی شامل سه نفر از دبیرانی بود که در این رشـــته تدریس می‌کردند. با توجه به تجربیات کاری همـــکاران گروه، به دلیل مشـــکلاتی که غالباً دانش‌آمـــوزان پایه دوم ریاضـــی در یادگیری مبحث درســـی «تعیین دوره تناوب توابـــع مثلثاتی» دارند، انتخاب این موضوع بـــرای درس‌پژوهی، مورد توافق همه همکاران قرار گرفت.

فعالیت درس‌پژوهی مورد نظر به‌منظور دستیابی به اهداف زیر، تهیه و تنظیم و اجرا شد:

۱. ارائه الگوی عملی جهت بهبود فرآیند تدریس تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی با به‌کارگیری نرم‌افزار جئوجبرا؛

۲. رفع اشکالات وکاستی‌های موجود در محتوای کتاب درســـی در زمینه‌های روش آموزش و آموزش موضـــوع مورد نظر و میـــزان فعالیت‌ها و تمرین‌های مربوطه؛

۳. نشان دادن چگونگی تأثیر استفاده از محتوای الکترونیکـــی و نرم‌افزارهـــا و به‌طورکلی اســـتفاده از تکنولوژی، در آموزش برخـــی مفاهیم غیرملموس و انتزاعی ریاضی و در صورت مثبت بودن، ایجاد انگیزه و ترغیب ســـایر همکاران به استفاده از این امکانات و شیوه‌های نوین آموزش در کنار شیوه‌های سنتی؛

۴. تبـــادل تجربه‌های آموزشـــی اعضـــای گروه درس‌پژوهی با هم؛

۵. بهبود کیفیت یادگیری دانش‌آموزان و تعمیق آموخته‌های آن‌ها در زمینه موضوع مورد نظر.

طرح درس اولیه بر اســـاس روش تدریس فعال و مشارکتی تنظیم شد. فعالیت‌های حین تدریس طوری طراحی شدند که فراگیران در پایان انجام هر بخش از فعالیت‌ها، به تأثیر انواع انتقال‌های **عمودی- افقی** را در دوره تناوب توابع انتقال یافته sinx و cosx، به‌طور شـــهودی درک کنند. پس از تنظیم طرح درس اولیه مبتنی بر استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا و ارائه مثال‌های متنوع در جریان تدریس و اجرای آن، این پرسش که آیا این میزان تغییرات، در آموزش بهتر موضوع درسی مورد نظـــر مؤثر خواهد بود یا نه، مورد بررســـی قرار گرفت. نتیجه حاصل از این فعالیت، مؤید این نکته بود کـــه وجود یک محتوای تکمیلی در قالب فعالیت‌های ارائه شده، برای تحقق اهداف زیر، استفاده از جئوجبرا توصیه می‌شود.

۱. ایجاد چالش ذهنی برای یادگیرندگان به منظور احساس نیاز به ارائه یک قاعده کلی برای تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی؛

۲. آموزش قدم به قدم برای کشـــف قواعد مورد نیاز؛

۳. تعمیـــق در یادگیری مفهـــوم دوره تناوب و سهولت در نحوه تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی.

لازم بـــه ذکر اســـت که جهت آمادگی نوشـــتن فرمول‌های لازم در محیط جئوجبرا، در جلســـه‌ای به مدت ۳۰ دقیقه، دانش‌آموزان با مطالب مورد نیاز در مورد نحوهٔ کار در محیط نرم‌افزار آشـــنا شدند. پس از اجرای اول، جلسه نقد و بررسی تدریس‌های ارائه شده برگزار شد و در آن، اعضای گروه به این نتیجه رسیدند کـــه تغییراتی در فعالیت‌ها و آزمون‌های تشـــخیصی انجام دهند. در جدول شـــماره ۱، فعالیت‌های تنظیم شده و تغییرات اعمال شده پس از جلسه هم‌اندیشی اول، بیان شده است.

با توجه به اجـــرای اول و نتایج حاصل از ارزیابی فعالیت‌ها و بازخـــورد دانش‌آموزان، معلوم شـــد که نرم‌افـــزار جئوجبـــرا، به دلیل جذابیـــت محیط آن و سهولت استفاده، ســـبب جذب دانش‌آموزان و ایجاد انگیزه در آنان گشـــته اســـت و به واسطهٔ ایجاد درک شهودی مناسب، به فهم بهتر و یادگیری عمیق‌تر درس تعیین دورهٔ تناوب، کمک شایان توجهی نموده است. در ضمن، صرفه‌جویی در وقت (به واســـطه سرعت در رســـم نمودارها)، فرصت بیشتری برای حل مثال‌های بیشـــتر برای دانش‌آموزان و دبیران فراهم نموده واین امکان، منجر به یادگیری بیشتر خواهد شد.

ســـپس اجرای دوم با تغییرات مـــورد نظر برگزار شـــد که نتایج حاصل از آن، حکایت از بهبود فرایند یادگیری دانش‌آموزان داشت.

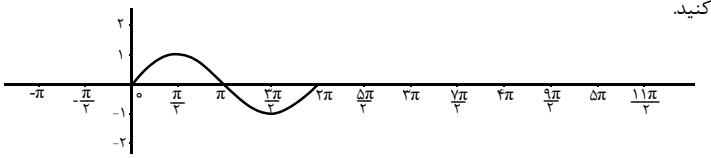
نمودارهای ارزشـــیابی‌های تشخیصی و پایانی در تدریـــس اول و دوم نیز، بیانگر بهبود فرایند یادگیری دانش‌آموزان بود.

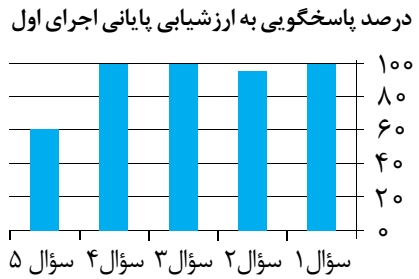
نتایج اجرای طرح درس‌پژوهی با موضوع دوره تناوب در مثلثات

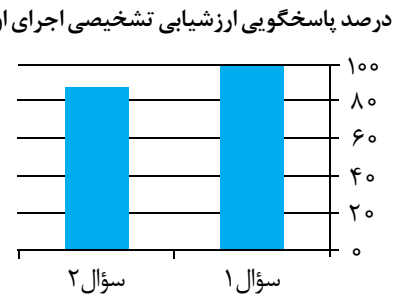
پس از اجـــرای ایـــن فعالیـــت درس‌پژوهی، به نتیجه‌گیری زیر رسیدیم:

۱. شیوه پاســـخ‌گویی دانش‌آموزان به سؤال‌های برگه فعالیت‌های ارائه شـــده در اجرای دوم، حکایت از این داشـــت که این فعالیت‌ها (با توجه به تغییرات

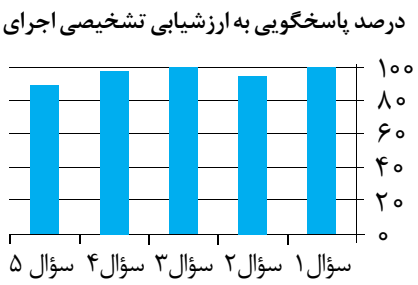
جدول ۱. فعالیت‌های اجرای اول تدریس و تغییرات فعالیت‌ها در اجرای دوم

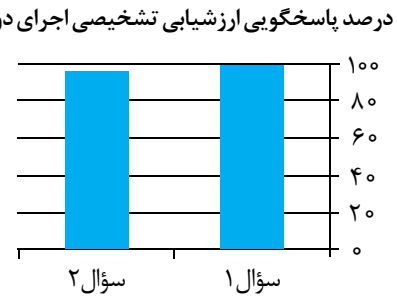
نوع فعالیت	محتوای فعالیت		تغییرات بعضی از فعالیت‌ها بعد از اجرای اول و دلایل آن
آماده‌سازی محیط نرم‌افزار	----------		بعد از اجرای اول، به منظور صرفه‌جویی در زمان و سهولت انجام فعالیت‌ها، تصمیم گرفته شد در تمام سیستم‌ها در محیط نرم‌افزار، تقسیم‌بندی محور xها بر حسب π (پی) تنظیم شود تا دانش‌آموزان هنگام اجرای فعالیت‌ها، نیاز به پرسش در این زمینه و تنظیم آن نداشته باشند و این مسئله، موجب اتلاف وقت آنان نگردد.
ارزشیابی تشخیصی	۱- نمودار تابع f(x)=sinx را در بازه [۰ و ۲π] رسم شده. نمودار تابع را در بازه [۲π و ۴π] در همین شکل رسم کنید.  ۲- آیا می‌توان با استفاده از نمودار تابع sinx در بازه [۰ و ۲π] نمودار آن را در بازه (-∞ و +∞) رسم کرد؟ چگونه؟		در اجرای دوم، در سؤال دوم ارزشیابی تشخیصی به‌منظور ایجاد فرصت لازم برای پاسخگویی، بازه مورد نظر به (-۴π و ۴π) تغییر یافت. همچنین برای پاسخ‌گویی به سؤال ۱، فضای مناسب‌تری در نظر گرفته شد.
فعالیت‌های طراحی شده در اجرای اول	۱. شکل تابع y=۲sin(x) را به کمک نرم افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۲. شکل تابع $y=\frac{۲}{۳}\sin(x)$ را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۳. شکل تابع y=-۳cos(x) را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۴. به‌نظر شما در تابع f(x)=a sin(x), a ∈ R، a≠۰، ضریب a چه تأثیری در دوره تناوب تابع sinx دارد؟ --- ۵. شکل تابع y=۲+sin(x) را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۶. شکل تابع $y=\frac{۲}{۳}+\sin(x)$ را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۷. شکل تابع y=-۳+۲cos(x) را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۸- به نظر شما در تابع f(x)=cos(x)± a, a∈R عدد a چه تأثیری در دورهٔ تناوب تابع cosx دارد؟ ۹- به نظر شما در تابع f(x)=acos(x)±b, a∈R, b ∈ R, b≠۰ اعداد a, b چه تأثیری در دورهٔ تناوب تابع y=cosx دارند؟ --- ۱۰- شکل تابع $y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید.	۱۱- شکل تابع y=cos(x-π) را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۱۲- شکل تابع $y=-۲\cos(\frac{۲\pi}{۳}-x)+۱$ را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۱۳- به نظر شما در تابع f(x)=cos(x±a) ,a∈R عدد a چه تأثیری در دوره تناوب تابع cosx دارد؟ دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. --- ۱۴- شکل تابع y=sin(۲x) را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۱۵- شکل تابع $y=\sin(\frac{۱}{۲}x)$ را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=sin(x) مقایسه کنید. ۱۶- شکل تابع y=cos(-۳x) را به کمک نرم‌افزار رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۱۷- شکل تابع y=cos(πx) را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دورهٔ تناوب این تابع را با دورهٔ تناوب تابع y=cos(x) مقایسه کنید. ۱۸- به نظر شما در تابع f(x)=cos(ax), a∈R عدد a چه تأثیری در دوره تناوب تابع cosx دارد؟ ۱۹- با توجه به فعالیت بالا، برای یافتن دورهٔ تناوب تابع y=cos(ax), a∈R بدون استفاده از شکل آن، چه فرمولی پیشنهاد کنید؟	۱. برای درک بهتر مفهوم سؤال مطرح شده و تأکید بیشتر بر نکته درسی آن، متن بعضی از سؤال‌ها برای اجرای دوم تغییر داده شد. به عنوان نمونه، سؤال ۱ به صورت زیر تغییر یافت: شکل تابع y=۲sin(x) را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. دوره تناوب این تابع چیست؟ آیا ضریب ۲ در تابع ۲sin(x) باعث می‌شود که دوره تناوب این تابع با دوره تناوب تابع sin(x) تفاوت داشته باشد؟ ۲. از آنجا که در آزمون پایانی فقط ۶۰ درصد دانش‌آموزان به سؤال ۵ که ضریب x درآن منفی بوده، پاسخ صحیح داده‌اند، به نظر رسید بهتر است در فعالیت‌ها سؤالی گنجانده شود که دانش‌آموزان را به نکته مورد نظر، این سؤال هدایت نماید. در نتیجه در سؤال ۱۶ ضریب به (-۲) تغییر یافت. ۳. در سؤال ۱۷، مربوط به فعالیت‌های اجرای اول، به دلیل سختی در تایپ، عدد π به عنوان ضریب x حذف شد و سؤالی با ضریب منفی جایگزین آن گردید تا این مفهوم که ضریب از نظر علامت، تأثیری بر دوره تناوب تابع ندارد، توسط دانش‌آموزان به هنگام اجرای فعالیت، کشف شود. در نتیجهٔ این تغییر، میزان پاسخ‌گویی صحیح به سؤال ۵ ارزشیابی پایانی نیز، افزایش یافت.





نمودار ۱.درصد پاسخگویی به آزمون تشخیصی و پایانی در تدریس اول





نمودار ۲. درصد پاسخگویی به آزمون تشخیصی و پایانی در تدریس دوم

اعمال شـــده و شکل اصلاح شـــده آن) تا حد زیادی می‌تواند مکملی مناســـب برای محتوای کتاب درسی باشد.

۲. در این شـــیوه تدریس، دانش‌آموزان با اجرای فعالیت‌ها می‌توانند پاسخ‌های خود را با دیگران مقایسه کنند و با یک فعالیت مناسب، به نتیجه مطلوب برسند و نکته مورد نظر درسی را کشف کنند.

۳. انجام کارگروهی بـــرای حل فعالیت‌های ارائه شـــده، علاوه بر اینکه حس مشارکت و همکاری بین دانش‌آموزان را تقویت می‌کند، تأثیر مثبتی بر درک بهتر درس خواهد داشـــت و جئوجبـــرا، فرصت‌های مناسبی برای کارهای گروهی فراهم می‌کند.

۴. در کتاب درســـی، به انـــدازهٔ کافی به موضوع تعییـــن دوره تناوب توابع سینوســـی وکسینوســـی پرداخته نشده و با توجه به ارتباط آن با درس ریاضی پایه بعد، ضرورت تجدید نظر در محتوای کتاب و ارائهٔ تعداد بیشـــتر مثال‌ها و فعالیت‌ها و وجود تمرین‌های فراوان در کتاب، کاملاً محسوس است.

۵. استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا و تهیه و به کارگیری محتوای الکترونیکی مناسب برای این موضوع درسی، جهت کمک به آموزش مؤثرتـــر و یادگیری پایدارتر دانش‌آموزان، مفید و تأثیرگذار خواهد بود.

۶. ایجاد تعامل در همکاران و به اشتراک گذاشتن تجربه‌های تدریـــس آنان با هم، بـــرای آموزش یک موضوع درســـی، در رفع مشکلات مربوط به تدریس و یادگیری بســـیار مؤثر بوده و نقد و بررسی تدریس توسط همکاران یک درس و ارزیابی کار از جنبه‌های مختلف، منجر به تهیهٔ الگویی مناسب، مفید و اثرگذار بـــرای تدریس یک مطلب درســـی، به منظور اجرایی مفید و آموزشی عمیق و پایدار در دانش‌آموزان خواهد شد.

– توصیه ها و پیشنهادها

پیشنهاد گروه به دبیران:

استفاده از خرد جمعی در تدریس، در واقع تقسیم سختی و سنگینی کار بوده و کمک‌گیری از تجربه‌های همکاران، در ایجاد یادگیری عمیق مؤثر است. اجرای طرح درس‌پژوهی، دبیران گرامی را در رسیدن به این مهم یاری می‌کند. لذا توصیه می‌شود که برای تدریس درس ریاضی که عمدتـــاً جنبه انتزاعی دارد، حتماً از

روش‌های آموزشـــی ضمـــن خدمت معلمـــان مانند درس‌پژوهی (جهت دستیابی به بهترین شیوهٔ تدریس و مؤثرتریـــن روش آموزش)، بهـــره ببرند. همچنین بـــرای آموزش ملموس‌تر و فهم بهتر مطالبی همچون دوره تناوب توابع سینوســـی و کسینوســـی، می‌توان از انواع نرم‌افزارها و محتواهای الکترونیکی مناســـب معلم ساخته و تولید شـــده توسط مؤسسات و مراکز آموزشی، استفاده بهینه نمایند، زیرا در آموزش مؤثرتر و عمیق‌تر مفاهیم درســـی ریاضی، ابزاری نیرومند و کارآمد هستند.

پیشنهاد گروه به مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی:

نتایـــج به‌دســـت آمـــده از اجـــرای طرح‌هـــای درس‌پژوهی دبیران، حاصل ســـال‌ها تجربهٔ تدریس عملی آن‌ها در کلاس‌های واقعی درس اســـت و صرفاً یک نظریه‌پردازی ذهنی نیســـت. لذا استفاده از نتایج طرح‌هـــای درس‌پژوهی، در کنار اعتباربخشـــی‌های مرســـوم، می‌تواند راه‌گشـــای بســـیاری از مشکلات همچون نحوهٔ ورود به یک موضوع، میزان و نوع مثال‌ها و فعالیت‌ها و تمرین‌ها و نیز تعیین اصول ساعت‌های هفتگی اختصاص یافته به هر درس برای آموزش هر کتاب درســـی جهت دستیابی به اهداف یادگیری آن کتاب باشد.

توصیه گروه به والدین:

اجرای کارگروهی، نیازمند تقویت روحیهٔ همکاری با دیگران و اعضای یک گروه است، چیزی که متأسفانه در نسل جدید و نوجوانان امروزی، کمبود آن مشهود است. لذا به اولیای گرامی دانش‌آموزان توصیه می‌شود شـــرایطی برای انجام کارگروهی در منزل و پرهیز از کار انفرادی صـــرف و تک‌روی فرزندان خود در انجام کارها فراهم آورند و از آنجا که زمان، عامل مؤثری در اجرای طرح درس‌پژوهی است، از والدین گرامی انتظار می‌رود با اجرای روش‌هایی ســـاده اما مفید، استفاده بهینه از زمان و انجام امور در زمان مقرر را به فرزندان خود بیاموزند.

سپاس

ســـپاس از پروردگار قادر مطلق که توفیق عنایت فرمود تا اندک تجربه‌ای از معلمی خود را در راه ارتقای کیفیت آموزشی، به جامعهٔ فرهیختهٔ فرهنگیان میهن عزیزمان ارائه دهیم.

همچنیـــن ســـپاس از مدیـــر محتـــرم و فرزانهٔ دبیرستان، سرکار خانم چمن‌سرا و کلیهٔ دانش‌آموزان عزیزی که با صبر و بردباری، ما را در اجرای این طرح یاری فرمودند.

پی‌نوشت

1. The Program for International Student Assessment (PISA)

منابع

۱. ســـادئی، علـــی، (۱۳۹۳). **درس‌پژوهی از طراحی تا اجرا**، تهران: انتشارات شلاک، چاپ اول.

۲. هرگنهـــان، بی. آر و الســـون، متیـــو اچ. (۱۳۷۹). **مقدمه‌ای بر نظریه‌های یادگیری** (ترجمه علی‌اکبر ســـیف). تهران: نشر دوران.

۳. شبیری، سیده فاطمه؛ عطاران، محمد، (۱۳۸۶). بهره‌گیری از نرم‌افزار کمک‌آموزشی فیزیک سوم دبیرستان و بررسی تأثیرآن در پیشرفت تحصیلی و تعامل دانش‌آموزان در کلاس، **فصلنامه تعلیم وتربیت**، ۸۹ ص ۶۹-۸۴ .

۴. کارشناســـی برنامه‌ریـــزی گروه‌های آموزشـــی، (۸۹-۸۸)، نگاهـــی بر روش‌های فعال یاددهی- یادگیری تفکر اســـتقرایی، **دفترآموزش‌وپرورش راهنمایی تحصیلی**.

۵. خاکبـــاز، عظیمه ســـادات؛ فدایی، محمدرضا؛ موســـی پور، نعمت‌الله (۱۳۸۷)، تأثیر درس‌پژوهی برتوسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، **فصلنامه تعلیم وتربیت**، ۹۴ ص ۱۴۶- ۱۲۳.

۶. سرکارآرانی، محمدرضا، (۱۳۷۸)، پژوهش مشارکتی معلمان در کلاس درس. **فصلنامه تعلیم و تربیت**، ۵۹ ص ۷۶- ۶۱.

۷. ســـلیمانپور، جواد؛ خلخالی، علـــی؛ رعایت‌کننده فلاح، لیلا. (۱۳۸۹)، تأثیـــر روش تدریـــس مبتنی برفنـــاوری اطلاعات و ارتباطات در ایجاد یادگیری پایدار درس علوم تجربی سال سوم راهنمایـــی. **فصلنامه فناوری اطلاعات و ارتباطات در علوم تربیتی**، ۲ ۹۴- ۷۸ .

۸. ســـرکارآرانی، محمدرضـــا، (۱۳۹۴)، **درس پژوهی**، تهران: انتشارات مرآت.

10. Barrow, L., Markman, L. & Rouse, C. E. (2009). Technology,scdgc: The educational benefits of computer-aided instruction. **American Economic Journal**: Economic Policy, 1(1), 52-74.

11. Lewis, c.,perry, R.& Hurd, J. (2004). **Educational leadership**. February2004, pp.18-22.

12. Tall, David. (2008). Published in The Scottish Mathematical Council Journal 38, 45-50.

13. Rock, T. C., & Wilson, C. (2005). Improving Teaching through Lesson Study. **Teachers Education Quarterly**, Winter 2005, pp. 77-92

14. Watanabe, R. (2013). Teachers Empowerment and Evaluation of Educational Achievement, **The nine symposium on PISA & Teachets Empowerment , International Forum** (Saturday, Dc.7,2013).

دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

اشاره

خلاقیت در ریاضی و بازی به‌عنوان زمینه‌ای برای یادگیری ریاضی دو مفهوم کلیدی از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» هستند که «درک هایلوک و فیونا تانگاتا» نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل و چهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی مهم) در برنامه درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه چندان پیچیده معرفی و تبیین نمایند.

کلیدواژه‌ها: جنسیت و ریاضی، تیزهوشی در ریاضی، جست‌وجوگری (تحقیق)، حل مسئله، خانه به‌عنوان زمینه‌ای برای سواد عددی، زمینهٔ معنادار، فعالیت هدف‌دار

خلاقیت در ریاضی[1]

تعریف

مفهوم «خلاقیت» در آموزش و پرورش دارای تعریف‌ها و مصداق‌های مختلفی است. یکی از این تعریف‌های مهم که از سوی کمیتهٔ مشاوران ملی در آموزش خلاقانه و فرهنگی[2] (NACCCE، ۱۹۹۹: ۳۰) ارائه شده است، این است که خلاقیت، «فعالیتی تخیلی[3] است که به گونه‌ای طراحی می‌شود که نتایجی که به بار می‌آورد هم اصیل و هم با ارزش باشد». از این تعریف می‌توان چهار اصل را برای خلاقیت استخراج کرد. خلاقیت باید شامل تفکر و رفتارهای تخیلی باشد، خلاقیت دارای نتیجه و هدف است، محصول آن باید اصیل، ارزشمند و متناسب با هدف موردنظر باشد؛ اما در مورد کودکان مدارس ابتدایی، مفهوم خلاقیت بیشتر برای مواردی به‌کار می‌رود که در آن‌ها، کودکان از راه‌های ابتکاری و نو برای حل چالش‌ها و مسائل غیرمعمول ریاضی استفاده می‌کنند.

توضیح و بحث

خلاقیت در ریاضی، یک مقولهٔ عالی و یک توانایی سطح بالاست و با آنچه که به‌عنوان مهارت در دانش و شناخت ریاضی می‌شناسیم، متفاوت است. سیاست‌های قبلی برنامهٔ درسی ملی انگلستان و آزمون‌های استاندارد ملی مرتبط با آن تا حد زیادی باعث کاهش یافتن و محدود شدن موقعیت‌های تفکر و تجربهٔ خلاقانهٔ کودکان در مدارس ابتدایی شده بود و به همین دلیل، دولت انگلستان در سال ۲۰۰۳ سندی حاوی سیاست‌هایی جدید برای مدارس ابتدایی تدوین کرد که با هدف افزایش نشاط و کیفیت در مدارس ابتدایی ابلاغ شد (DfES، ۲۰۰۳: ۴). «خلاقیت» یکی از موضوعات کلیدی در این سند بود که بر آن تأکید شده بود؛ اما با همهٔ این تفاسیر، هنوز موضوع خلاقیت جای اصلی خود را در مدارس ابتدایی باز نکرده است و کاربرد محدودی دارد و معمولاً معلمان به اشتباه به‌جای رویکرد مبتنی بر خلاقیت، «سوژه‌های خلاق[4]» را از آن برداشت می‌کنند. برای مثال این سند می‌گوید: «علاوه بر ابزارهای مهمی که برای یادگیری در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد، تجربه‌های اولیهٔ دانش‌آموزان از هر موضوعی باید همراه با لذت اکتشاف، حل‌مسئله، خلاقیت در نوشتن، هنر، موسیقی و... همراه باشد». هر چند در این سند به‌طور مستقیم به درس ریاضی اشاره نشده است اما واضح است که می‌توان ریاضی را به‌عنوان

یکی از زمینه‌های مناسب برای رشد تفکر خلاق در نظر گرفت. در ادامه، چهـــار ویژگی مهم خلاقیت را که در تعریف NACCCE به آن اشاره شده بود، به تفسیر مورد بحث قرار می‌دهیم.

فعالیت‌های تخیلی

قبل از آن‌که در رابطه با فعالیت‌های تخیلی بحث کنیم، می‌بایســـت خلاقیت در ریاضی دورهٔ ابتدایی را در زمینهٔ فرآیندهای شناختی مورد مطالعه قرار دهیم. به‌خصوص در مورد فرآیندهایی که در انجام محاسبات ریاضی توســـط کودکان از اهمیت خاصـــی برخوردار هستند. از جملهٔ این فرآیندهای شناختی، می‌توان به فکر کردن به شکل واگرا[5] اشاره کرد. منظور از واگرا فکر کردن آن اســـت که در بررسی احتمالات، انعطاف‌پذیر باشـــیم و در ذهن ما بسیاری از احتمالات امکانِ وجود داشته باشند یا حداقل همهٔ پدیده‌های محتمل را هنگام فکر کردن مد نظر داشـــته باشیم، اما در نقطهٔ مقابل، منظور از تفکر همگرا آن اســـت که همیشه فکر خود را به پدیده‌هایی مشـــخص، با احتمال بالا و قابل قبول محدود کنیم. در موضـــوع خاصِ ریاضی نیز منظور از انعطاف‌پذیر بودن و داشتن تفکر واگرا بیشتر به معنای شکستن باورها، ذهنیت و ساختارهای ذهنی موجود و ثابت مانده است. وقتی گفته می‌شود که در حل مسئله از خلاقیت استفاده شود به این معناست که دانش‌آموز در حل مسائل، آزادانه متمایل به، به‌کارگیری روش‌های مختلف باشـــد و بتواند بر یکه‌تازی اولین روشی که به ذهن او می‌رسد غلبه کند، از ثبات ذهنی خارج شده و ساختار برخی از روش‌های از قبل تنظیم شده در ذهن خود را شکسته و به ســـاختارهای جدید امکان ظهور و شکل‌گیری بدهد. معمولاً بسیاری از ذهنیت‌های از قبل ثبت شـــده، در اثر نوع یا محتوای مسائل و تأکید بیـــش از حد بر برخی از روش‌هـــا، در ذهن دانش‌آموز القا یا به‌وجود آمده‌اند. البته اســـتفاده از تفکر خلاق در مدارس، همواره با مقاومت همراه بوده است، آن هم از جانب کســـانی که الگوریتم‌ها و روش‌های کلیشه‌ای و مشـــخصی را یاد گرفته‌اند و آن‌ها را برای اکثر مسائل به‌کار می‌گیرند بدون آن‌که روی اطلاعات موجود در آن مسائل کنکاش فکری داشته باشند.

هدف‌داری[6]

در ریاضیـــات دورهٔ ابتدایی، فرصت‌هـــای زیادی برای توســـعهٔ تفکر خلاق وجود دارد. رشد و توسعهٔ این نوعِ عالـــی از تفکر در کودکان، باعث می‌شـــود تا آن‌ها در مواجه با سؤال‌های غیرمعمول و چالش‌برانگیز توانمند شـــوند و همواره بـــه دنبال روش‌های غیراســـتاندارد، غیرمرســـوم و در عین حال بهتری برای انجام کارهای ریاضی خود باشند. هم‌چنین تفکر خلاق باعث می‌شود کـــه دانش‌آموزان، خود موقعیت‌هایـــی را فراهم کرده و مســـائلی را به‌طور دلخواه طرح کنند و سپس آن‌ها را حل کننـــد. هم‌چنین این نوع تفکـــر آن‌ها را قادر می‌سازد که از عهدهٔ تحقیق‌ها و جست‌وجوهای ساده در ریاضیات برآیند و مهارت‌ها و دانش محاسباتی خود را برای حل مســـائل در سایر حوزه‌ها به جز ریاضی نیز به‌کار گیرند. همهٔ این موارد جزءِ هدف‌های خلاقیت در ریاضیات هستند و نشان می‌دهد که توسعهٔ تفکر خلاق در ریاضیات امری هدف‌دار است.

اصالت[7]

علاوه بر ویژگی‌هایی که قبلاً برای خلاقیت عنوان شـــد، گاهی ویژگی‌هایی چون انعطاف‌پذیری و آزادی عمل، پاسخ‌های ابتکاری و نو به سؤال‌ها و چالش‌های ریاضی را تحت عنوان اصالت نیز می‌شناســـند. در یک کلاس ریاضی دورهٔ ابتدایـــی، کمتر اتفاق می‌افتد که پاسخ دانش‌آموزان ابتکاری، نو و تازه باشد و به سختی می‌تـــوان مصادیق و حدود تفکر خلاق و پاســـخ‌های اصیل را مشـــخص کرد؛ اما یکی از معیارهای مشخص برای اصالت را می‌توان مقایسهٔ عملکرد یک دانش‌آموز و تفاوت‌هـــای روش به‌کار رفته توســـط او با عملکرد دیگر گروه هم‌سالان خود تعریف کرد. معلمان معمولاً پاســـخ‌های اصیل و ابتکاری را آن پاسخ‌هایی می‌دانند کـــه گاه و بی‌گاه و به‌صورت نادر توســـط یکی دو تا از دانش‌آموزان در کلاس ارائه می‌شود.

تناسب[8]

پاسخ‌های ابتکاری و خلاقانه که توسط دانش‌آموزان بیان می‌شوند باید متناسب با مفاهیم ریاضی و مقاصد محاسباتی مسئله‌ای باشـــند که در حال انجام است و در صورت متناسب بودن پاسخ‌ها با مسئله، پاسخ‌ها از ارزش برخوردارنـــد. مثلاً وقتی عدد ۷۸ را در جواب به ســـؤالِ «۷ ضرب‌در ۸ چند می‌شود؟» از دانش‌آموزی می‌شنویم، این جواب علاوه بر این که اشتباه است، فاقد ارزش نیز هست! روشی که هیچ ارزشی در رسیدن به جواب نداشته باشد و شرایط موجود در مسئله را نادیده بگیرد، یک روش ابتکاری و خلاقانه به حساب نمی‌آید؛

خلاقیت باید شامل تفکر و رفتارهای تخیلی باشد، خلاقیت دارای نتیجه و هدف است، محصول آن باید اصیل باشد و محصول آن باید ارزشمند و متناسب با هدف موردنظر باشد

اما اگر دانش‌آموزی به این سؤال، این‌گونه پاسخ دهد که «۷ ضرب در ۸، یعنی این‌که اول، ۷ را در ۱۰ ضرب کنیم که ۷۰ می‌شود و بعد، ۷ ضرب در ۲ که ۱۴ می‌شود را از آن کم کنیم»، این پاسخ با وجود آن‌که پیچیده و طولانی به نظر می‌رسد، اما پاسخی باارزش به حساب می‌آید.

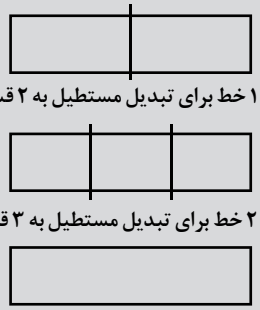
مثال‌های عملی

مثال‌هایی که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم می‌تواند توسط معلمان برای شناسایی و ارتقاءِ تفکر خلاق در ریاضی استفاده شوند.

غلبه بر مجموعهٔ از قبل تنظیم شدهٔ ذهنی (شکستن پیش ذهنیت‌ها)

در شکل ۱، تصویری به دانش‌آموزان ارائه شده است که نشان می‌دهد برای آن‌که یک مستطیل به ۲ قسمت تقسیم شود به ۱ خط و برای آن‌که به ۳ قسمت تقسیم شود به ۲ خط نیاز است. از دانش‌آموزان سؤال می‌شود که چند خط برای تقسیم یک مستطیل به ۴ قسمت، ۵ قسمت، ۶ قسمت و ۹ قسمت لازم است؟ پاسخ‌های غیرخلاق و معمول به ترتیب ۳، ۴، ۵ و ۸ می‌باشند؛ اما اگر دانش‌آموزی با غلبه بر تنظیمات ذهنیِ از قبل تثبیت شدهٔ خود که ممکن است به خاطر دو مورد اول از شکل ۱ در ذهن او القا شده باشد، این پاسخ خلاقانه را ارائه کند که «۲ خط برای ۴ قسمت شدن مستطیل، ۳ خط برای ۶ قسمت شدن مستطیل و ۴ خط هم برای ۹ قسمت شدن آن»، آن‌گاه آنچه که این دانش‌آموز بر آن غلبه کرده است تصور القا شده و تنظیم شده از شکل است که به‌طور فریبنده‌ای می‌گوید که خط‌ها باید موازی باشند، در حالی که لزوماً می‌تواند این‌گونه نباشد و با ۲ خط عمود بر هم نیز می‌توان یک مستطیل را به ۴ قسمت تقسیم کرد.

شکل۱: غلبه بر یک مجموعهٔ ذهنی از قبل تنظیم شده



تفکر واگرا

برای توضیح تفکر واگرا بر روی عبارت ۲۷×۹۲=۲۴۸۴ متمرکز می‌شویم. این عبارت را روی تخته می‌نویسیم و از دانش‌آموزان می‌خواهیم که هر چه در مورد این ضرب، خواه عملیات مربوط به آن یا واقعیت‌های نهفته در اعداد آن را می‌دانند بازگو کنند یا بنویسند. این سؤال یکی از چندین سؤال محاسباتی است که براساس مدل تفکر واگرای کلاسیک[9] در سال‌های اولیهٔ تحقیقات بر روی موضوع خلاقیت، توسط محققان آمریکایی از جمله تورنس[10] (۱۹۹۶) گردآوری شده‌اند. تورنس معتقد بود که یکی از راه‌های پرورش تفکر واگرا، انتخاب و طرح چنین سؤال‌هایی در کلاس است که فرصت کافی را برای انعطاف‌پذیری و ابتکار مهیا می‌سازد. برمی‌گردیم به سؤال مطرح شده، یک دانش‌آموز خلاق می‌تواند عملیات ۲۷÷۲۴۸۴=۹۲ و یا در سطح واگراتر عملیات ۱۳/۵×۹۲=۱۲۴۲ را به‌عنوان نتایج و حقایق وابسته به عملیات ارائه شده در سؤال معلم مطرح کند.

طراحی سؤال‌های ریاضی توسط خود دانش‌آموزان

دانش‌آموزان با طراحی سؤال‌های ریاضی در سطوح مختلف، از موقعیتِ خواست شده از جانب معلم، می‌توانند دست به ابتکار بزنند و مانند یک موضوع انشا که باعث بروز خلاقیت و هنر نویسندهٔ آن می‌شود، خلاقیت خود را در طرح سؤال‌های زیبا و مناسب نشان دهند. مثلاً می‌توان تعدادی ظروف و مقداری آب را در اختیار دانش‌آموزان قرار داد و از آن‌ها خواست تا در مورد ظرف‌ها و آن مقدار آب هر سؤالی که دوست دارند و البته قادر به پاسخ دادن به آن هستند مطرح کنند. یا می‌توان یک نسخهٔ روزنامه در اختیار دانش‌آموزان قرار داد و از آن‌ها خواست که چند نمونه سؤال ریاضی دلخواه، چه در مورد شمارهٔ صفحات و چه در مورد تعداد ورق‌ها و یا حتی پاراگراف‌ها مطرح کنند.

مسائل غیرمعمول[11]

معلمان می‌توانند در جریان تدریس خود علاوه بر مسائل عادی و مرسوم، مسائل غیرمعمولی که با همان پیش‌نیازها و مهارت‌های پایه‌ای ریاضی قابل حل هستند را در اختیار دانش‌آموزانشان قرار دهند و از آن‌ها بخواهند که از روش‌های معمولی، شناخته شده

منظور از واگرا فکر کردن آن است که در بررسی احتمالات، انعطاف‌پذیر باشیم و در ذهن ما بسیاری از احتمالات امکانِ وجود داشته باشند یا حداقل همهٔ پدیده‌های محتمل را هنگام فکر کردن مد نظر داشته باشیم

و استاندارد قبلی استفاده نکنند و خودشان سعی کنند راه‌حلی جدید را بـــرای حل آن‌ها پیدا کنند. در ادامه، به دو نوع از ســـؤال‌های غیرمعمول که برای حل آن‌ها اتفاقاً به محاسبات بسیار ساده نیازمندیم اشاره می‌کنیم. راه‌حل این سؤال‌ها شاید ســـاده باشند اما به مقداری تفکر خلاق دربارهٔ اعداد به‌کار رفته در آن‌ها نیاز است.

۱- دو دانش‌آمـــوز می‌خواهند یک عدد شـــکلات بخرند. هر دوی آن‌ها پولشان کم است، یکی ۲۵ پنی و دیگری ۲ پنی کم دارد. آن‌ها تصمیم می‌گیرند پولشان را روی هم بگذارند، اما هنوز هم پول کافی برای خریدن شکلات ندارند. آن‌ها چقدر پول کم دارند؟

۲- معلـــم یک عدد را به دانش‌آموز می‌گوید و از او می‌خواهد که ۳ را از آن کم کند و ســـپس حاصل را بر ۲ تقسیم کند. دانش‌آموز که خوب متوجه منظور معلم نشـــده بود، ۲ را با آن عدد جمع می‌کند و ســـپس بر ۳ تقسیم می‌کند، اما در عین ناباوری و خوش‌شانسی، پاسخ درست و موردنظر معلمش را به دست می‌آورد؟ عدد داده شده به دانش‌آموز چه بوده است؟

مطالعهٔ بیشتر

به معلمانِ کودکان کم ســـن و سال‌تر، مطالعهٔ کتاب کالتمـــن[۱۲] (۲۰۰۵) را توصیه می‌کنیم. در این کتاب خواندنـــی و جـــذاب، کالتمن مجموعـــه‌ای از بهترین استراتژی‌های مؤثر را برای توسعه و ارتقاءِ خلاقیت در کودکان ارائه کرده است که همگی آن‌ها با زمینهٔ بازی طراحی شده‌اند. این بازی‌های خلاقانه، همهٔ موضوعات برنامهٔ درســـی از جمله ریاضی را شـــامل می‌شـــود. هم‌چنین بـــرای آگاهی از نمونه‌هایی از تفکر خلاق در ریاضی دورهٔ ابتدایی و چگونگی تشویق و ترویج این نوع تفکر، می‌توانید به فصلی با عنوان «استدلال ریاضی» از هایـــلاک (۲۰۰۶: ۲۰-۳۱۸) مراجعه کنید. مواد و محتوای آماده شـــده توسط QCA با عنوان «خلاقیت: پیدایش کنید، ترویجش بدهید» (به وب‌سایت رسمی QCA بـــه آدرس www.ncaction.org.uk مراجعـــه فرمایید)، اطلاعـــات خوب و نمونه‌های موردی فراوانی موجود است که معلمان می‌توانند از آن‌ها برای توسعهٔ تفکر خلاق دانش‌آموزانشان استفاده کنند. هرچند در کلاس درس، زمان اختصاص یافته به مســـائل کتبی و نوشتاری معمولاً محدود است و این محدودیت زمان، شاید با روح خلاقیت متضاد باشد، اما با این وجود، اصول بسیار مفیدی دربارهٔ شناخت و ترویج خلاقیت به‌طور عمومی در این منبع آخر موجود است که می‌توان آن‌ها را در سطح دورهٔ ابتدایی به‌کار گرفت.

منظور از تفکر همگرا آن است که همیشه فکر خود را به پدیده‌هایی مشخص، با احتمال بالا و قابل قبول محدود کنیم. در موضوع خاصِ ریاضی نیز منظور از انعطاف‌پذیر بودن و داشتن تفکر واگرا بیشتر به معنای شکستن باورها، ذهنیت و ساختارهای ذهنی موجود و ثابت مانده است

بازی به‌عنوان زمینه‌ای برای یادگیری ریاضی[۱۳]

تعریف

بازی، یکی از مؤثرترین ابزارهای یادگیری ریاضی اســـت. به‌طور خاص، بازی در مورد کودکان خردسال، می‌توانـــد در انواع مختلف و در شـــرایط و حالت‌های گوناگون انجام شـــود و به شـــیوه‌ای آسان، یک مفهوم ریاضی را معرفی کند. بازی‌ها غالباً جذاب، هیجان‌انگیز و سرشـــار از تحرک و گاهی معماگونـــه و رمزآلودند و به‌طور نامحســـوس، باعث پرورش تفکـــر در کودکان می‌شوند. برخی از بازی‌ها می‌توانند توسط بزرگ‌ترها، در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرند و با مدیریت معلم و والدین انجام شوند، یا این‌که کاملاً با مدیریت خودشان باشد. از نظر مکان نیز، اجرای بازی به شرایط یا امکانات مورد نیاز در هر بازی بستگی دارد و می‌تواند در کلاس و اتاق و محیطی محدود یا در محیطی باز مانند حیاط، محوطهٔ مدرســـه و فضاهای ســـبز و در طبیعت انجام شـــود. کودکان می‌توانند یادگیری بسیاری از مفاهیم انتزاعی ریاضی را که قرار اســـت بعدها به‌طور رسمی آن‌ها را بیاموزند، به کمک بازی‌ها و رویکردی شهودی و لذت‌بخش، شروع کنند.

توضیح و بحث

کودکان خردســـال، می‌توانند حتـــی قبل از ورود رسمی به مدرسه، بسیاری از مفاهیم ریاضی را در قالب بازی بیاموزند. آن‌ها در خانهٔ خود، روزانه با موقعیت‌هایی سروکار دارند که دوست دارند آن را به یک بازی تبدیل کننـــد و از بازی کردن لذت ببرند. مثلاً خرید و فروش صوریِ اجناس و لوازم منزل، آشپزی و مواد لازم، چیدن میز غذاخوری، کاشتن گل‌ها و گیاهان و باغداری، بالا و پایین رفتن از پله‌ها و شـــمارش آن‌ها و مسابقه برای زودتر شـــمردن پله‌هـــا یا زودتر بـــالا و پایین رفتن از آن‌ها، پر کردن ظروف مختلف از آب هنگام آب‌بازی و استفاده از تلفن و شماره‌گیری و وانمود کردن به خریدِ اســـباب‌بازی و نظایر آن‌ها که وجود دارند. این‌ها تازه نمونه‌هایـــی از موقعیت‌های بازی با کمترین امکانات و هزینهٔ لازم بود، در حالی که بسیاری از بازی‌های موجود در فروشگاه‌ها، مثل بازی‌های کارتی و صفحه‌ای و انواع جورچین‌ها وجود دارند که والدین، معمولاً برای کودکان

خود تهیه می‌کنند. همهٔ این بازی‌ها موجب می‌شود که وقتی کودکان وارد مدرسه می‌شوند، تا حدی با پیش‌زمینه‌های لازم از ریاضی و مفاهیم ساده‌ای از آن که در قالب بازی‌ها آموخته‌اند، آشنایی داشته و کم و بیش در مورد بعضی از موضوع‌های ریاضی، تجربه‌هایی کسب کرده باشند. هم‌چنین، بازی‌ها می‌توانند رابطه‌ای معنادار بین مدرسه و خانه ایجاد کنند.

هنگام بازی کردن، کودکان می‌توانند آنچه را که یاد گرفته‌اند، بارها بازی کنند و این موجبِ تکرار و تقویت مفهوم‌های ریاضی نهفته در بازی می‌شود. آن‌ها با بازی کردن، درک و فهم خود را از دنیای پیرامون خویش افزایش می‌دهند، هم خود یاد می‌گیرند و هم به یادگیری همبازی‌هایشان کمک می‌کنند. مهارت دیگری که علاوه بر افزایش دانش از طریق بازی‌ها پرورش می‌یابد، توانایی برقراری ارتباطات اجتماعی کودکان با دیگران به‌خصوص با والدینشان است.

گریفیتس[۱۴] (۲۰۰۵)، چندین نمونه از مهارت‌های ریاضی را که می‌توانند به کمک بازی‌ها یاد گرفته شده و توسعه یابند، فهرست کرده است. بیشتر این بازی‌ها به شیوه‌ای طراحی شده‌اند که لذت‌بخش باشند و بیشترین کمک را به کودکان در توسعهٔ ارتباطات اجتماعی و کاربرد در زندگی واقعی داشته باشند. گریفیتس معتقد است که یک بازی خوب، باید دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- هدفمند و سرگرم‌کننده باشد،
- دارای زمینه‌ای معنادار باشد،
- بتواند به کودکان، مسئولیت‌پذیری و مدیریت و پاسخگویی در برابر عمل خود را یاد بدهد،
- زمان کافی برای تکرار و تمرین و حرفه‌ای شدن را در اختیار کودکان قرار بدهد،
- قبل از دوران مدرسه، بازی‌ها باید بیشتر عملی و همراه با تحرک باشند و نباید بر نتایج و خروجی‌های مکتوب تأکید نمود.

به گفتهٔ تاکر[۱۵] (۲۰۰۵: ۶)، برای پشتیبانی از توسعه و پیشرفت در مفاهیم ریاضیات به‌کار رفته در یک بازی، مداخله و نظارت بزرگ‌ترها و اطمینان آن‌ها از شیوهٔ درست و در مسیر درست قرار داشتن جریان بازی، امری لازم است. البته این میزان نظارت و کنترل و سطح مداخله بزرگترها، به نوع بازی نیز بستگی دارد. گاهی این دخالت، می‌تواند در حد اشاره کردن و راهنمایی‌های گاه و بی‌گاه برای تحریک بیشتر کودکان باشد، یا این‌که واقعاً بزرگ‌ترها به‌طور مستقیم، به بازی ورود پیدا کرده و ضمن آموزش مفاهیم بازی، خود مدیریت بازی را در اختیار بگیرند. یک بزرگ‌تر در طول بازی، می‌تواند جایی که قرار است یک اصطلاح ریاضی معرفی شود یا به توضیح بیشتر احتیاج است، یا به خاطر بهره بردن از موقعیت ایجاد شده در بازی و تشویق و هدایت کودکان برای آشنایی با چگونگی ریاضی و استدلال کردن یا ریاضی‌وار حرف زدن، بازی را به مدتی کوتاه قطع کند، رسالت خود را انجام دهد و دوباره از جریان بازی کودکان خارج شود. لویز[۱۶] (اشاره شده در پاوند[۱۷]، ۲۰۰۶: ۶۵)، معتقد است که یک بازی خوب و با کیفیت بالا، بازی است که بتواند فرصت‌هایی را برای تقویت برخی از مهارت‌های کلیدی مانند تصمیم‌گیری، تخیل، استدلال، پیش‌بینی، برنامه‌ریزی و داشتن طرح و نقشه، درس گرفتن از برد و باخت‌ها و کسب تجربه، و اندوختن ذخیره‌ای مفید از استراتژی‌های کارساز در آن بازی یا قابل‌انتقال به دیگر بازی‌ها و موقعیت‌های مشابه، در اختیار کودکان قرار دهد. همهٔ این مهارت‌ها که لویز به آن‌ها اشاره می‌کند، لازمه و پایهٔ ریاضی‌وار فکر کردن در آینده هستند.

در مهدهای کودک، دائماً پرستاران شاهد کسب تجربه‌های مفیدِ کودکان از بازی‌ها و یادگیری برخی از مهارت‌های خوب در حین بازی کردن هستند. به‌ویژه در نوع خاصی از بازی‌ها با عنوان بازیِ نقش[۱۸] که در آن، کودکان در نقشی خاص فرو رفته و وظایف خود را در بازی، تحت عنوان یک نقش، پیش می‌برند. کودکان در این نوع بازی‌ها، به‌طور خیالی وانمود می‌کنند که بعضی از فعالیت‌ها را انجام می‌دهند و این کار باعث ایجاد فرصت‌هایی برایشان می‌شود تا انتزاعی فکر کنند، مسئله حل کنند، به خیال کردن بپردازند، با افراد در نقش‌های دیگر مباحثه و تبادل نظر داشته باشند، خلاقانه فکر کنند و مهارت‌های اجتماعی و برقراری ارتباط خود را با دیگران بهبود ببخشند.

تقریباً همهٔ مراحل پایه‌ای (۳ تا ۵ ساله‌ها) و مرحلهٔ کلیدی ۱ در دورهٔ ابتدایی (۵ تا ۷ ساله‌ها)، بهترین زمان برای طراحی و اجرای سطح وسیعی از بازیِ نقش هستند. ایفای نقش‌ها را می‌توان با دو رویکرد دنیای واقعی و دنیای فانتزی ارائه کرد (تاکر، ۲۰۰۵). مثال‌های دنیای واقعی می‌تواند انواع خریدها (مانند سوپرمارکت‌ها، نانوایی، کفش‌فروشی، گل‌فروشی و ...)، فعالیت در یک کافی‌شاپ، پست کردن در دفتر خدمات پستی، پارک‌ها و بوستان‌ها، دفترهای خدمات مسافرتی و فروش بلیط، دارو و میزان و زمان مصرف

یک بازی خوب و با کیفیت بالا، بازی است که بتواند فرصت‌هایی را برای تقویت برخی از مهارت‌های کلیدی مانند تصمیم‌گیری، تخیل، استدلال، پیش‌بینی، برنامه‌ریزی و داشتن طرح و نقشه، درس گرفتن از برد و باخت‌ها و کسب تجربه، و اندوختن ذخیره‌ای مفید از استراتژی‌های کارساز در آن بازی یا قابل‌انتقال به دیگر بازی‌ها و موقعیت‌های مشابه، در اختیار کودکان قرار دهد

آن‌ها و موزه‌ها را شامل شـــود. دنیای فانتزی و خیالی نیز می‌تواند شامل کهکشـــان‌ها و ستارگان، موشک‌ها و کشتی‌های پرنده، کشتی دزدان دریایی، یک جنگل بزرگ و پر درخت، یا برخی از کتاب داستان‌های تخیلی مانند «جک و لوبیای ســـحرآمیز» باشـــد. همهٔ این‌ها، فرصت‌هایی غنی برای یادگیری ریاضی به‌ویژه در رابطه با بازی‌های خیالی فراهم می‌کند.

انتخاب منابع و محتوای بازی‌ها، کاری بسیار حساس اســـت. اگر منابع به دقت و متناســـب انتخاب شـــوند، می‌توانند به تقویت تفکـــر ریاضی کمک کنند و باعث پیشـــرفت کودکان در مهارت‌های ریاضی شوند. منابع بازی‌ها می‌توانند شامل برخی اشیاء و ابزار فیزیکی مانند ماشین‌حساب، تلفن، تقویم، دفتر خاطرات و یادداشت‌های روزانـــه، ابزارهای اندازه‌گیری (انواع خط‌کش، ترازو، متر نواری و ...)، دسته چک، اسکناس، صورت حساب مالی، برچســـب قیمت‌ها، ساعت‌ها، سکه‌ها و خیلی چیزهای دیگر باشد. برای مثال، معلم می‌تواند یک ایفای نقش با موضوع ادارهٔ پست و بسته‌بندی و وزن کردن بسته‌های مختلف در شکل‌ها و وزن‌های متفاوت را طراحی کند و از دو دانش‌آموز که از قبل ذهنیت خاصی در مورد این بازی ندارند، دعوت کند تا در این بازی مشارکت داشته باشند. آن دو از قبل نمی‌دانند که قرار است هنگام کار با بسته‌ها، چه اتفاقی بیفتد و آگاه نیســـتند که با این کارشان، تا حدودی به پـــرورش تفکر ریاضی خود کمک می‌کنند. در حین این بازی، نه تنها مهارت وزن کردن، کار با ترازو و مقایسهٔ وزن بســـته‌ها را یاد می‌گیرند، بلکه آن‌ها در موقعیت مدیریت و تصمیم‌گیری نیز قرار می‌گیرند. مثلاً تصمیم می‌گیرند که هزینهٔ پستی هر بسته چقدر باید باشد و به بسته‌های سنگین‌تر یا حجیم‌تر، برچسب‌های هزینهٔ بیشتر بچســـبانند. هم‌چنین، آن‌ها از یک دفتر صورت‌حساب برای یادداشت وزن و هزینهٔ پستی بسته‌ها استفاده‌می‌کنند.

بازی‌های خارج از محیطِ محدودِ کلاس و خانه که معمولاً در حیاط یا فضاهای بازِ انجام می‌شوند، نیز دارای اهمیت ویژه‌ای هســـتند. محیط‌هـــای باز، فرصت‌های بیشـــتری را برای انجام بازی‌های پرانرژی و پرتحرک ایجاد می‌کنند که به‌طور معمول، امکان انجام آن‌ها در کلاس درس یا محیط‌های محدود و بســـتهٔ آپارتمانی نیســـت. در محوطهٔ باز، به‌راحتی می‌توان از زمین زیر پای کودکان به‌عنوان زمینه‌ای مناسب برای طراحی یک بازی اســـتفاده کرد، یا از شن‌ها، سنگ‌ها، انواع توپ‌ها و دیگر اشـــیای بزرگ، با خیال راحت اســـتفاده کرد.

بازی‌های خارج از محیطِ محدود کلاسِ وَ خانه کهَ معمولاً در حیاط یا فضاهای باز انجام می‌شوند، نیز دارای اهمیت ویژه‌ای هستند. محیط‌های باز، فرصت‌های بیشتری را برای انجام بازی‌های پرانرژی و پرتحرک ایجاد می‌کنند که به‌طور معمول، امکان انجام آن‌ها در کلاس درس یا محیط‌های محدود و بستهٔ آپارتمانی نیست

هم‌چنین محیط‌هـــای باز، از نظر انجام بازی‌های آوایی همراه با ســـروصدا نیز، محدودیت کلاس و آپارتمان را ندارند. علاوه بر همهٔ این‌ها، حس و حال خود کودکان که خود را در محیطی طبیعی، آزاد و واقعی می‌بینند و احساس نمی‌کنند که اسیر و گرفتار اشیای مصنوعی با چیدمان دست و پا گیر حس هستند. بازی‌های از نوع ایفای نقش در فضای بیرون، راحت‌تر سازماندهی و اجرا می‌شوند. حتی می‌توان از فضاهای سبز، پارک‌ها، باغ‌ها و استخر نیز برای انجام برخی از انواع بازی‌ها، استفاده کرد. در محیط باز، می‌توان تعداد دانش‌آموزان بیشتری را در جریان بازی مشـــارکت داد و از این ظرفیت، برای استفاده از تعداد موضوع‌ها و مفاهیم پایه‌ای بیشتری در ریاضی، بدون محدودیت و فشـــار وارده ناشی از شرایط فیزیکی محیط، بهره گرفت.

مثال‌های عملی

در ادامـــه، به چهار مثال عملی اشـــاره می‌کنیم که چگونگی بهره‌گیری از رویکردهای مختلفِ استفاده از بازی را برای یادگیری مفاهیم پایه‌ای ریاضی، نشان می‌دهند.

بازی از نوع ایفای نقش

خیلی از کودکان دوست دارند در آینده پزشک شوند. می‌توان با طراحی یک بازی، یک مطب را در ابعاد کوچک، برای دانش‌آموزان فراهم ساخت. از اشیایی مانند دماسنج، ترازو، متر نواری، لباس و روپوش‌های پزشکی نیز استفاده کرد. از یکی از کودکان که علاقهٔ زیادی به نقش پزشک دارد، می‌خواهیم که عهده‌دار این نقش شود و دوستانش را به‌عنوان بیمارانِ مراجعه‌کننده به مطب، مورد معاینه قـــرار دهد و قد، وزن و دمای بـــدن آن‌ها را اندازه‌گیری کند. هم‌چنین می‌توان از عکس‌های رادیولوژی از قبل تهیه شده نیز، برای مشخص کردن میزان آسیب و مویه برداشتن اســـتخوان‌ها بهره برد. حتی بیماران می‌توانند به‌صورت غیرحضوری، در گوشـــه‌ای از مطبِ ساختگی با اســـتفاده از یک تلفن و شـــماره‌گیری مطب پزشک، به‌طور غیرحضوری از پزشک مشورت بگیرند. این کار با وجودی که باعث سرگرمی و لذت بردن کودکان می‌شود، تخیل و تفکر انتزاعی در آن‌ها را نیز پرورش می‌دهد. در ادامه، بیماران فرضی می‌توانند برای پرداخت حق ویزیت پزشک، چه به‌صورت نقدی و حضوری و چه با دستگاه کارت‌خوان یـــا کارت به کارت کردن مبلغ مورد نظر به شماره حساب پزشـــک، اقدام به پرداخت ویزیت کنند. در این بازی، مفاهیم ابتدایی ریاضی مانند اندازه‌گیری،

یادداشـــت کردنِ دنباله‌وار اتفاقـــات و علائم بروز کردهٔ بیماری برای جمع‌بندی و تشخیص نهایی نوع بیماری، زمان‌بندی و رعایت نوبت، شـــماره‌گیری تلفن و مهارت ارتباط انتزاعی، غیرحضـــوری و خیالی، مدیریت پول و صورت حساب مالی هزینه‌ها و درآمدها در فضایی شاد، جذاب، معنادار و هدف‌دار، یاد گرفته می‌شوند.

بازی‌هایی با ورود و مدیریت بزرگ‌ترها

معلـــم می‌تواند یک بازی خرید و فروش و هزینه کردن پول را برای دانش‌آمـــوزان پایهٔ اول طراحی و اجرا کند. مثلاً، او مقداری پول و یک فهرست از اجناسی که باید خریداری شـــوند را در اختیار یکی از دانش‌آموزان قرار می‌دهد و از او می‌خواهـــد که در نقش یک خریدار، به مغازهٔ او (معلم) بیاید و اجناس خود را ســـفارش دهد و پول لازم را پرداخت کند (معلم می‌تواند از ابتدای بازی، عمداً مقدار پولی را کـــه در اختیار دانش‌آموز قرار داده، بیشـــتر از مقدار پول مورد نیاز برای خرید اجناس قرار دهد). معلم می‌تواند به‌عنوان فروشنده، در مورد سکه‌ها و چگونگی اختصاص آن‌ها به اجناس با قیمت‌های مختلف، با دانش‌آموز بحث کند و گاهی نقش خود را با او عوض کند، یعنی دانش‌آموز نقش فروشنده و معلم نقش خریدار را بازی کند. در بازی دیگری، معلم می‌تواند سکه‌هایی را که در جیب خود دارد، به کف اتاق بریزد و از گروه‌های کوچک کلاسی بخواهد که سکه‌ها را جمع کنند و آن‌ها را به ترتیب ارزش سکه‌ها، مرتب کنند.

بازی‌های مستقل

کـــودکان معمولاً با بازی بینگو[19] آشـــنایی دارند و می‌دانند که چگونه امتیازات و عددها را در یک جدول قرار دهند. آن‌ها با انجام این بازی توســـط خودشـــان، شناخت عددی خود را توسعه می‌دهند و در طول بازی، به تدریج امتیازها بیشتر شـــده و اعداد بزرگ‌تری وارد بازی می‌شوند.

بازی در محیط‌های باز

برای کودکان خردســـال، می‌توان در یک محوطهٔ باز، نمونـــه‌ای کوچک از کار پســـتچی‌ها را به نمایش گذاشت. دانش‌آموزان به‌عنوان دریافت‌کنندگان نامه‌ها و بسته‌ها، با یک شـــماره (درج شده بر روی یک کاغذ که آن را به دست می‌گیرند)، به‌عنوان گیرندهٔ مرسوله با یک کدپستی مشخص می‌شـــوند. هم‌چنین در این محوطهٔ باز، مسیرهایی با گچ، به همراه تابلوهای سادهٔ راهنمایی مشـــخص می‌شوند که انتهای هر مسیر پس از چند پیچ و خم به یکی از دانش‌آموزان با یک شمارهٔ مشخص به‌عنوان گیرنده ختم می‌شود. یکی از کودکان که در راندن یک سه‌چرخه مهارت دارد، به‌عنوان مأمور پست مشخص شده و یک پوشش رنگی بر تن می‌کند تا نسبت به دیگران متمایز باشـــد. او آدرس‌های روی بســـته‌ها را خوانده (همراه با شـــمارهٔ گیرنده) و سعی می‌کند با انتخاب کوتاه‌ترین مســـیر در کمترین زمان، بسته را به صاحبش برساند. در این بازی، مفاهیمِ فضایی، عددشناســـی، متناظر کردن هر بسته با یک نفر یا یک شماره، شناخت جهت‌های چپ و راست در مسیرها و کسب مهارت در آن‌ها یاد گرفته شده و تمرین می‌شوند.

مطالعهٔ بیشتر

کتاب تاکر (۲۰۰۵)، یکی از منابع اصلی این بخش از کتاب اســـت کـــه در آن، به‌خوبـــی در مورد اهمیت بازی در یادگیری ریاضی بحث شـــده است و فعالیت‌ها و مثال‌های عملـــی زیادی در این زمینـــه وجود دارد. کتاب پاوند (۲۰۰۶)، برای پشتیبانی از مفاهیم ریاضی در قالب بازی برای دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌ترِ دورهٔ ابتدایی مفید است. مطالعهٔ فصلی از گریفیتس با عنوان «ریاضیـــات و بازی[20]» (فصل ۱۲ از مویلس[21]، ۲۰۰۵) نیز، بسیار ارزشمند است.

پی‌نوشت‌ها

1. Creativity in Mathematics
2. National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE)
3. Imaginative activity

توضیح: واژهٔ Imaginative، خود به معنای «خلاق» نیز به‌کار می‌رود.

4. Creative Subjects
5. Thinking divergently
6. Purposefulness
7. Originality
8. Appropriateness
9. Classic divergent thinking model
10. Torrance
11. Non-routine problems
12. Kaltman
13. Play as a context for learning mathematics
14. Griffiths
15. Tucker
16. Lewis
17. Pound
18. Role-Play
19. Bingo (یک نوع بازی ورق)
20. Mathematics and Play
21. Moyles

شیرینی درس ریاضی در زمین فوتبال

هادی دهقان
دبیر ریاضی کرمان، فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده‌است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

در ضمن، گاهی هم به‌جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.

رشد آموزش ریاضی

با ورود به دهمین سال تدریس خود در ریاضی دوره متوسطه، همواره شادی و نشاط دانش‌آموزان را در زنگ ورزش، با وضعیتی که در کلاس‌های ریاضی وجود دارد مقایسه می‌کردم و از همه دبیران ورزش می‌شنیدم که دانش‌آموزان، زنگ ورزش را بسیار دوست دارند در حالی‌که حتی با روش‌های مشارکتی و فعال تدریس ریاضی، نتوانستم چنین جذابیتی را در کلاس‌های ریاضی خود به وجود آورم.

انگار که صندلی‌های خشک کلاس درس و این تخته وایت‌برد یا گچی تکراری، دیگر هیچ جذابیتی برای دانش‌آموزان نداشتند! لذا تصمیم گرفتم ابتدا محیط کلاس درس را به کلی عوض کنم و بهترین جای مدرسه را که دانش‌آموزان همیشه آن را دوست دارند، یعنی زمین فوتبال را انتخاب کردم. با هماهنگی مدیریت محترم مدرسه، دانش‌آموزان پایه هفتم را به حیاط مدرسه بردم و بدون این‌که بگویم می‌خواهم اینجا ریاضیات تدریس کنم، با در دست داشتن توپ فوتبال به زمین ورزشی مدرسه وارد شدم. دانش‌آموزان با دیدن توپ فوتبال در دست من، خیلی خوشحال شدند و کاملاً مطمئن شده بودند که اینجا فقط می‌خواهیم فوتبال بازی کنیم! در حالی‌که من هدفم معرفی دستگاه مختصات و طول و عرض نقاط

مربـــوط به فصل هفتم کتاب ریاضـــی پایه هفتم بود. لذا در ابتدا از همهٔ دانش‌آموزان خواســـتم که به شکل علامت مثبت ایستاده تا زمین فوتبال مدرسه به چهار قسمت تقسیم شود و خودم در مرکز این علامت مثبت که همان مبدأ مختصات اســـت ایستاده و برای شروع تدریس مختصات، توپ فوتبال را از این مکان به آرامی شـــوت کردم تا در ربع دوم ایستاد بعد از دانش‌آموزان پرســـیدم که توپ در چه مکانی قـــرار دارد و چگونه می‌توانیم مکان توپ را در زمین فوتبال آدرس دهیم؟ در این هنگام که ذهن دانش‌آموزان آماده پاسخ‌گویی بود، چهار ربع دســـتگاه مختصات را در زمین فوتبال مدرســـه نشـــان داده و گفتم که توپ، اکنون در ربع دوم قرار دارد و اگر توپ را در جهت خلاف عقربه‌های ســـاعت جابه‌جا کنیم، به ترتیب به ربع‌های ســـوم و چهارم می‌رسد. سپس برای آدرس‌دهی دقیق‌ترِ مکان توپ فوتبال در زمین ورزشی، از آنان خواستم که مکان قرار گرفتن تـــوپ فوتبال را در ابتدای بازی که همان مرکز زمین فوتبال است، مبدأ گرفته و دانش‌آموزان را تشـــویق کردم با استفاده از گچ، زمین فوتبال مدرسه را که آســـفالت بود، به صورت شـــطرنجی خط‌کشی کنند. سپس با معرفی طول و عرض نقاط در دستگاه مختصات، از دانش‌آموزان خواستم که توپ فوتبال را به مکان‌های مختلف زمین فوتبال شـــوت کرده تا در محل ایستادن توپ، طول و عرض آن نقطه را به دست بیاورند. لذا قرارداد کردیم که جلوی من عرض مثبت و پشـــت من با عرض منفی و همچنین سمت راستم با طول مثبت و ســـمت چپم بـــا عرض منفی نمایش داده شـــود همان‌طور که در زندگی، برای حرکت‌های رو به جلو یا به ســـمت راست، علامت مثبت را در نظر می‌گیریم و برای حرکت‌های به ســـمت عقب (پشت ســـر) و حرکت‌های به سمت چپ، علامت منفی را در نظر می‌گیریم.

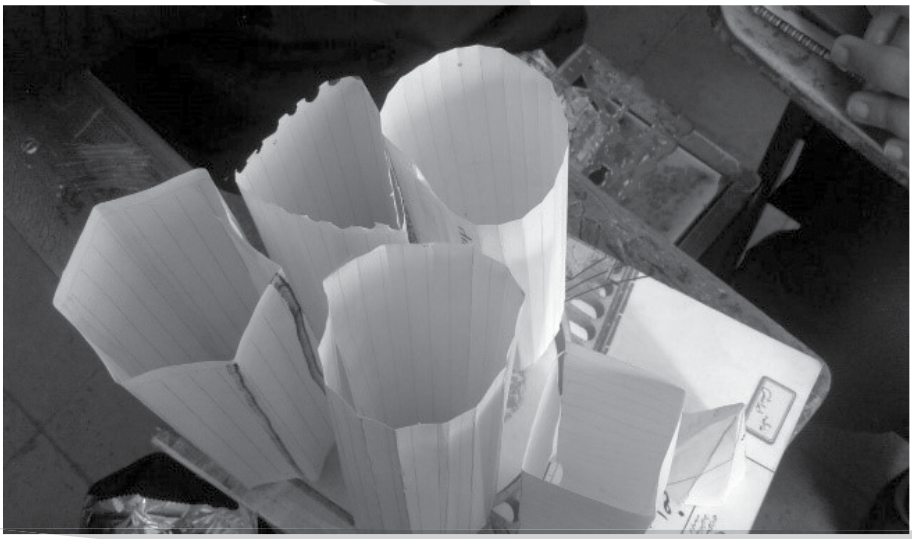
در پایـــان این فعالیت، دانش‌آمـــوزان را به کلاس درس برده و مدل ایســـتادن آن‌ها را در زمین فوتبال که به شـــکل علامت مثبت بود، روی تخته کشـــیدم و مبحث مختصات را به‌صـــورت دقیق‌تر و ریاضی‌وار نوشـــتم. آن‌ها از این نوع مدل‌ســـازی بین دســـتگاه مختصات و زمین فوتبال مدرسه بسیار خوشحال شده بودند، به‌طوری کـــه در زنگ ورزش خود نیز به تکرار این عمل می‌پرداختند و بسیار شاد بودند.

مدیریت محترم مدرسه نیز ضمن نهایت همکاری برای برگزاری کلاس در حیاط مدرســـه، از این شیوه تدریس بســـیار خشـــنود بودند و درخواســـت صدور تقدیرنامه برای بنده نمودند. به سایر دبیران ریاضی نیز پیشـــنهاد می‌کنم از حیاط مدرسه و فضاهای ورزشی موجود، استفاده‌های آموزشی مناسب داشته باشند تا شیرینی درس ریاضی بر دانش‌آموزان، آشکار گردد.

روایت معلمان

استفاده از دست‌سازه‌ها در آموزش حجم

سمیه بحرینی
دبیر ریاضی کرمان



این روایت، مربوط به تدریس حجم‌های هندسی پایه هفتم در یکی از مدارس دولتی در حاشیه شهر کرمان است.

من این درس را در سه کلاس پایه هفتم تدریس کردم. برای شروع درس و معرفی حجم ابتدا به سراغ فعالیت کتاب رفتم که سؤال کرده بود.

«به اطراف خود نگاه کنید. آیا چیزی پیدا می‌کنید که حجم نداشته باشد؟»

دانش‌آموزان، معمولاً با توجه به چیزهایی که اطرافشان است، مثال‌هایی را می‌زنند و فعالیت را پاسخ می‌دهند. بعد از آن، نوبت معرفی انواع حجم‌های هندسی و شناخت آن‌ها توسط دانش‌آموزان است.

در پایه هفتم، بر روی حجم‌های منشوری تأکید داریم. بنابراین لازم است به معرفی آن‌ها بپردازیم.

با استفاده از یک فیلم آموزشی که حجم‌ها را به‌صورت سه بعدی نشان می‌داد، سعی کردم که مطالب فعالیت صفحه ۷۱ را که مربوط به «قاعده، یال، وجه‌های جانبی و رأس» بود، به دانش‌آموزان آموزش دهم. اما با وجود نمایش آن فیلم، تعداد زیادی از آنان، قاعده و وجه‌های جانبی را درک نکردند و قاعده را نیز جزو وجه‌های جانبی حساب کردند.

پس سعی کردم که سطوح جانبی و یال‌ها را با استفاده از دیوارهای کلاس معرفی کنم تا برایشان قابل لمس باشد.

یک لحظه به ذهنم رسید که واقعاً تجسم فضای سه بعدی، برای بیشتر دانش‌آموزان کار ساده‌ای نیست، زیرا با وجود این همه توضیح، تعدادی هنوز در تشخیص ویژگی‌های یک منشور، مشکل داشتند. خوب این زنگ گذشت و ساعت بعد قرار بود همین مطلب را در یک کلاس هفتم دیگر تدریس می‌کردم.

با خودم گفتم که برای این کلاس، از فیلم استفاده نمی‌کنم و از فعالیت دیگری برای آموزش ویژگی‌های منشور استفاده کردم. در این کلاس، تصمیم گرفتم از دانش‌آموزان بخواهم که خودشان، شکل‌ها را بسازند تا بهتر بتوانند به ویژگی‌های آن‌ها، پی ببرند. با این فکر، یک ورق کاغذ مستطیل‌شکل به دست گرفتم و از دانش‌آموزان پرسیدم «آیا می‌توانید با این برگ کاغذ، یک منشور بسازید؟»

یکی از دانش‌آموزان، سریع کاغذ را گرفت و با استفاده از تا زدن، در کمترین زمان ممکن یک مکعب مستطیل ساخت. با دیدن این کار، ایدهٔ خوبی به‌دست آوردم و دوباره از آنان پرسیدم که «آیا شما هم می‌توانید منشور بسازید؟» بعد از چند لحظه، دانش‌آموزان با استفاده از یک ورق کاغذ و تا زدن و یک تکه چسب، منشورهای زیادی درست کردند و تمام ویژگی‌های منشوری را که خودشان ساخته بودند، نام بردند. در انجام کار در کلاس یعنی تعیین تعداد یال‌ها، رأس‌ها و

وجه‌های جانبی هم، مشکلی پیدا نکردند و قاعدهٔ منشور را به شکل یک چند ضلعی، در نظر گرفتند.

در سؤال ۳ کار در کلاس، پرسیده شده که «آیا استوانه هم یک حجم منشوری است؟»

برای جواب دادن به این سؤال، از دانش‌آموزان خواستم که تعداد تا زدن‌ها را تا جایی که می‌توانند، زیاد کنند و جواب دهند که در آن صورت، قاعده به چه شکلی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟

تعدادی از دانش‌آموزان پاسخ دادند که «اگر تعداد تا زدن‌ها بیشتر شود، قاعده منشور به شکل دایره شبیه‌تر است! پس استوانه نیز یک نوع حجم منشوری است.»

چون دانش‌آموزان در جریان تدریس، مشارکت فعال داشتند، به خوبی درس را یاد گرفتند و نیازی به تکرار مطالب نداشتند. از طرفی دانش‌آموزان، مرتب شکل‌های زیادی را درست کرده و از یادگیری لذت می‌بردند و همچنین برای یادگیری درس‌های بعدی یعنی محاسبه حجم و مساحت جانبی، به راحتی از دست‌سازه‌های خود استفاده کردند.

نتیجه‌گیری

همیشه استفاده از تکنولوژی، به تنهایی در جریان یادگیری مؤثر نبوده و آنچه توسط دانش‌آموزان ساخته می‌شود، به تولید دانش توسط خودشان کمک می‌کند. به‌خصوص آن‌که برای ساختن منشورها، فقط از چند برگه کاغذ و مقداری چسب استفاده شد که این وسایل، معمولاً همه‌جا در دسترس‌اند.

دیدگاه ساخت‌وسازگرایی نسبت به یادگیری این است که تا یادگیرنده خود را در تولید یا کشف دانش سهیم نداند، انگیزه کافی برای یادگیری و تداوم آن نخواهد داشت (رشد آموزش ریاضی، دوره ۳۴، پیامدهای کتاب درسی)

بازی‌های آموزشی و آموزش ریاضی

مریم بهاءلو، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و مدرس
خانه ریاضیات نجف‌آباد

چکیده

در این مقاله، ابتدا اشاره‌ای به نقش بازی‌های ریاضی در ارتقای یادگیری ریاضی دانش‌آموزان می‌شود. سپس چند نمونه از بازی‌های اجرا شده در خانه ریاضیات نجف‌آباد، معرفی می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: بازی ریاضی، فعالیت ریاضی، یادگیری ریاضی، خانه ریاضیات نجف‌آباد

این مقاله، به بیان یک تجربهٔ عملی که برای معلمان پایه‌های اول تا ششم ابتدایی، در خانه ریاضیات شهرستان نجف‌آباد به صورت کارگاهی اجرا شده، می‌پردازد. این کارگاه به منظور ارتقای کیفیت فرایند یاددهی-یادگیری ریاضی دانش‌آموزان این پایه‌ها و بر اساس اهداف زیر، طراحی شد:

۱. تدریس ریاضی از طریق بازی با هدف ارتقای یادگیری ریاضی دانش‌آموزان؛
۲. درک بهتر مفاهیم ریاضی به کمک اشیای عینی و ملموس؛
۳. ارتقای مهارت‌های کیفی مانند تجزیه و تحلیل، استدلال، تفکر انتقادی و نظایر آن؛
۴. ایجاد فرهنگ کار گروهی در یادگیری ریاضی.

این اهداف، به استناد مبانی نظری زیر، تبیین شدند.

نقش بازی در تدریس

در کتاب ریاضی بهتر[1] (۱۹۸۷) (نقل شده در غلام‌آزاد، ۱۳۷۹) در مورد یادگیری ریاضیات آمده است «یادگیری ریاضیات، فقط از طریق تجربه کردن، سؤال کردن، کشف کردن، رد کردن، توضیح دادن و بحث کردن صورت می‌گیرد. بنابراین، برای یادگیرنده، ریاضی باید نوعی از یادگیری باشد که به حداقل دانش پایه‌ای و مقدار زیادی تجربه در بررسی موقعیت‌ها، با استفاده از انواع خاصی از مهارت‌های فکری، احتیاج داشته باشد».

بازی‌های آموزشی می‌توانند به‌عنوان ابزاری مفید و کارآمد در سطوح رسمی و غیررسمی، مورد استفاده معلمان قرار گیرند، زیرا با وجودی که هدف نهایی بازی‌ها تنها پر کردن اوقات فراغت دانش‌آموزان نیست، ولی از طریق فراهم ساختن تجربه‌هایی نزدیک به تجربه‌های دست اول باعث ایجاد نشاط یادگیری در آن‌ها شده و یادگیری سریع‌تر و پایدارتر را سبب می‌شود

این در حالی است که سؤال‌های بسیاری در رابطه با ماهیت بازی و انواع آن، برای یادگیری مفاهیم ریاضی، مطرح هستند که نیازمند بررسی‌اند. آنچه که در ادامه می‌آید، سؤال‌هایی است که پاسخ نسبی به آن‌ها، برای طراحی بازی‌های مناسب برای آموزش مفاهیم خاص در ریاضی ضروری است.

۱. ویژگی‌های یک بازی ریاضی چیست؟

۲. ویژگی‌های یک فعالیت ریاضی چیست؟

۳. وجه تمایز بین «فعالیت ریاضی» و «بازی ریاضی» چیست؟

۴. چگونه و بر اساس چه ویژگی‌هایی، می‌توان برای تدریس یک مفهوم ریاضی بازی یا بازی‌هایی طراحی شود که باعث ارتقای یادگیری آن مفهوم شود؟

۵. چگونه می‌توان بازی‌ها را با تدریس ریاضی تلفیق نمود؟

۶. در واقعیت کلاس‌های درس، چه نوع بازی‌هایی برای تدریس ریاضی، بهتر می‌توانند به‌کار گرفته شوند؟

به گفتهٔ بابلیان و فلاحیان (۱۳۸۰)، یکی از چالش‌های بزرگ در آموزش هر موضوعی از جمله ریاضی، ایجاد انگیزه در یادگیرنده برای توجه به آن موضوع است. آنان معتقدند که بازی‌ها کمک می‌کنند تا یادگیرنده‌ها، انگیزهٔ بیشتری برای یادگیری مفاهیم ریاضی پیدا کنند زیرا بسیاری از بازی‌ها به نوعی با ریاضیات عجین شده‌اند.

پیاژه معتقد است روش‌های تدریس زبانی، برای تدریس ریاضی در دوره‌های اولیه یادگیری نمی‌توانند مؤثر باشند. بدین سبب بعضی از معلمان، سعی می‌کنند در تدریس خود، از انواع روش‌ها و امکانات حتی از نقاشی، استفاده کنند. پیاژه ابراز می‌دارد که برای اینکه کودک بتواند اعمال ذهنی خود را هماهنگ نموده و به هم مرتبط کند، نیاز دارد که با اشیای ملموس کار نموده و با آن‌ها، دست‌ورزی کند و وی باور دارد که مفاهیم ریاضی، بیش از مفاهیم دیگر، نیاز به آزمایش و تجربه دارند و کودک با کارکردن با اشیای واقعی و دست‌ورزی کردن با آن‌ها، می‌تواند اعمال ذهنی و ریاضی را انجام دهد تا به درک دقیق‌تر مفاهیم ریاضی نایل شود. در حقیقت، پیاژه بازی را یکی از اصلی‌ترین عوامل رشد شناختی کودکان می‌داند. (نقل شده در مبینی، ۱۳۷۷). کودکان در قالب بازی، با درک واقعیت‌ها و کنترل مهارت‌های شخصی، به تعادل مورد نظر پیاژه دست می‌یابند و در خلال بازی‌ها، مفاهیم ذهنی جدید و مهارت‌های مرتبه بالاتری را کسب می‌کنند (انگجی و عسگری، ۱۳۸۵، نقل شده در یارمحمدی واصل و همکاران، ۱۳۹۳). بسیاری از مربیان تربیتی از جمله مونته سوری، فروبل، دکرولی و پیاژه نیز، به نقش مهم بازی در یادگیری کودکان، اشاره کرده‌اند.

علاوه بر این‌ها، رزمی و شادکام (۱۳۹۵) دریافتند که اگر دانش‌آموزان از درس ریاضی لذت ببرند، تمایل بیشتری برای یادگیری ریاضی از خود نشان می‌دهند.

در همین راستا، جئو (۲۰۱۲، به نقل از فنگفنگ و باربارا[۲]، ۲۰۰۷) نشان داد که آموزش به شیوهٔ بازی در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان و بهبود نگرش ریاضی آنان، مؤثرتر از روش آموزش سنتی است. وی همچنین با اشاره به یافته‌های یلماز، آلتون و الکون (۲۰۱۰)، یادآور شد که آموزش ریاضی با توجه به زندگی واقعی و نمونه‌های غنی شده با زندگی بر نگرش دانش‌آموزان به ریاضی، مؤثر است و این یافته‌ها، توجیه قابل قبولی برای آموزش ریاضی از طریق بازی‌ها است. از طریق بازی‌های فردی یا گروهی دانش‌آموزان می‌توانند در ساختن دانش خود و درک مفاهیم ریاضی، شراکت داشته باشند.

رزمی و شادکام (۱۳۹۵) بر این باورند که بازی‌های آموزشی می‌توانند به‌عنوان ابزاری مفید و کارآمد در سطوح رسمی و غیررسمی، مورد استفاده معلمان قرار گیرند، زیرا با وجودی که هدف نهایی بازی‌ها تنها پر کردن اوقات فراغت دانش‌آموزان نیست، ولی از طریق فراهم ساختن تجربه‌هایی نزدیک به تجربه‌های دست اول باعث ایجاد نشاط یادگیری در آن‌ها شده و یادگیری

پیاژه ابراز می‌دارد که برای اینکه کودک بتواند اعمال ذهنی خود را هماهنگ نموده و به هم مرتبط کند، نیاز دارد که با اشیای ملموس کار نموده و با آن‌ها، دست‌ورزی کند و وی باور دارد که مفاهیم ریاضی، بیش از مفاهیم دیگر، نیاز به آزمایش و تجربه دارند و کودک با کارکردن با اشـــیای واقعی و دست‌ورزی کردن با آن‌ها، می‌تواند اعمال ذهنی و ریاضی را انجام دهد تا به درک دقیق‌تر مفاهیم ریاضی نایل شود

سریع‌تر و پایدارتر را سبب می‌شود. به‌خصوص آن‌که می‌توان با تغییر در ســاختار یا نحوه بازی‌ها، قابلیت اســتفاده از آن‌ها را برای یادگیری مفاهیم ریاضی در پایه‌های مختلف تحصیلی، فراهم نمود.

نگاهی متفاوت به بازی ریاضی

در هر بازی، هدف اصلی، «برنده شــدن»، تحت محدودیت‌هایی اســت کــه «قواعد بــازی» نامیده می‌شــوند. هر بازیکن باید بتواند در این محدودیت به هدف یعنی برنده شــدن برسد. این چارچوب شباهت زیادی به فرایند حل مســئله ریاضــی دارد. با چنین استدلالی، بازی می‌تواند مقدمه‌ای برای ریاضی‌ورزی باشد (رضائی، ۱۳۹۵).

بازی‌های ریاضی می‌توانند نقش دوگانه داشــته باشــند؛ یعنی هم ایجاد انگیــزه و علاقه کنند و هم مقدمه‌ای برای یک فعالیت آموزشی ریاضی محسوب شــوند. معلمان ریاضی با توجه به موضوعی که برای تدریس در کلاس خود مشــخص کرده‌اند، می‌توانند بازی مناســب را انتخاب یا طراحــی کنند تا نتیجه اثربخشی را به همراه داشته باشد.

طراحی یک فعالیت غنی ریاضی

غلام‌آزاد (۱۳۷۹) معتقد اســت که در طراحی یک فعالیت ریاضی، لازم است موارد زیر، در نظر گرفته شوند:

- در شروع برای همه قابل دسترس باشد؛
- دانش‌آموزان را درگیر مشاهده، حدسیه‌سازی، توضیح دادن، ثابت کردن، رد کردن و تفسیر بکند؛
- بحث‌ها، نیروی ابتکار و اختراع را ارتقاء بخشد؛
- به همکاری تشویق‌شان کند؛
- مبارزطلب باشد؛
- به‌طور شایسته از تکنولوژی استفاده شود؛
- به زندگی واقعی دانش‌آموزان مربوط باشد؛
- از مدل‌سازی ریاضی استفاده شود؛
- یک مؤلفهٔ فرهنگی، اجتماعی، تاریخی را در برگیرد. دانش‌آموزان را به تصمیم‌گیری دعوت کند.

لذت‌بخش باشد.

در ادامه، برخی از بازی‌هــا و فعالیت‌هایی که در خانــه ریاضیات نجف‌آباد در حال اجراســت و در یک دوره به صورت کاربردی و عملی اجرا شــدند، معرفی می‌شــوند. بعد از اتمام بازی‌ها، معلمان وجه تمایزی بین بازی و فعالیت قائل شدند و بیان کردند که بازی فراتر از فعالیت اســت و بیان کردند اگر بتوانند بازی و فعالیتــی در کلاس درس ریاضی خود اجرا کنند، گام مؤثری در جهت بهبود یادگیری ریاضی دانش‌آموزان برداشــته‌اند و در آن صــورت نیازی به اســتفاده از کتاب‌های کمک‌آموزشی ندارند.

بازی تاس و مهره (معلمان هر پایه، به گروه‌های ۴ نفره تقسیم شدند):

وسایل موردنیاز: ســه عدد تاس (تاس اول ۱،۲،۳،۴،۵،۶ و تاس دوم ۷،۸،۹،۱،۲،۳ و تاس ســوم ۴،۵،۶،۷،۸،۹. با این چیدمان، احتمال پیشامد اعداد، مســاوی اســت.) تعدادی مهره، جدول اعداد (اعداد ۱تا۱۰۰، به صورت پراکنده در جدول نوشته شده‌اند)

اجرا: یکی از گروه‌ها سه تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کند و از همه خواســته می‌شــود که با اســتفاده از +، ×، /، - (بــرای پایه‌های پایین‌تــر فقط + و -) با رقم‌های رو شده، عددی بسازند، در جدول پیدا کنند و مهره‌ای روی آن قرار دهند. گروهی که اولین «دوز» یا بیشــترین «دوز» را بسازد، برنده بازی است. منظور از «دوز» قرار گرفتن سه مهره متوالی به صورت اریب اســت. در این بازی، هر گروه به عددی که می‌ســازد و نحوهٔ قرار گرفتن عــدد در جدول، توجه می‌کند تا بتواند برنده بازی شود. نکته مهم این است که اعدادی انتخاب شوند که بتوانند مسیر حریف را مسدود کنند! افراد گروه در طول بازی، به طور غیرمســتقیم درگیر چهارعمل اصلی هســتند. در حین بــازی افراد گروه متوجه می‌شوند که احتمال پیشامد چه اعدادی بیشتر و پیشامد چه اعدادی کمتر است.

این بازی به گونه‌های مختلف، قابل تعمیم اســت که در اینجا، به دو مورد اشاره می‌شود.

• می‌توان از اعضای گروه خواست که خودشان جدولی طراحی کنند و چیدمـــان و انتخاب اعداد به دلخواه خودشان باشـــد. فقط توضیح دهند که دلیل انتخابشان چه بوده است؛

• می‌توان به جای اعداد طبیعی، از اعداد اعشاری یا اعداد کسری استفاده نمود.

بازی دو تاس و تاس علامت

وسایل مورد نیاز: دو تاس (۱، ۲، ۳، ۴، ۵،۶) و یک تاس علامت (+ و -)

اجرا: مربی تعـــدادی عدد صحیـــح روی تابلو می‌نویســـد، مانـــند ۳۲+ ، ۱- ، ۲۵+ ، ۰، ۹- ، ۱+ ، ۳۵+ ، ۱۲- و هم‌زمان، ســـه تـــاس را پرتاب می‌کند. تاسِ علامـــت به هر دو رقم مربوط می‌شـــود. در هر گروه، افراد با اســـتفاده از چهـــار عمل اصلی، اعدادی را که روی تابلو نوشـــته شـــده، باید بسازند. هر گروه که یک عدد را بســـازد، یک امتیاز می‌گیرد. این بازی برای تقویت محاسبه اعداد صحیح مناسب است. برای پایه‌های پایین‌تر، می‌توان بـــه جای اعداد صحیح، از اعداد طبیعی استفاده نمود.

برای تعمیم بازی، می‌توان از افراد خواســـت که خودشـــان چیدمانی از اعداد را انتخاب نموده و بازی را ادامه دهند.

- فعالیتی برای کسر

این فعالیت به طور کامل در مجله رشـــد آموزش ریاضی شماره ۱۲۵ بیان شده است.

- فعالیتی برای درک مساحت

وســـایل موردنیاز: اشـــکال هندسی مانند مربع، مثلث و مستطیل، اشـــکال شماره‌گذاری شده که با تلفیق چند شـــکل هندسی مانند مربع، مثلث، مستطیل رسم شده‌اند، صفحه شطرنجی.

اجرا: هدف این فعالیت، مفهوم‌ســـازی ســـطح، پایداری مســـاحت، محاسبه مســـاحت در شکل‌های ناآشـــنا و تبدیـــل آن‌ها به شـــکل‌های آشناســـت. دانش‌آموزان باید با استفاده از ابزاری که دارند، تعیین کنند که ســـطح شکل مورد نظر، با چند مربع صفحه شطرنجی می‌تواند پوشیده شود. ابزار و چیدمان اشکالِ شماره‌گذاری شده به گونه‌ای است که خودِ دانش‌آموز، را به ســـوی یافتن قاعده‌هایی برای یافتن مساحت‌ها، هدایت کند. به عنوان مثال، قطعه‌ای مربع شکل برابر با دوقطعه مثلث هم‌اندازه است که دانش‌آموز، با یافتن مساحت مربع، می‌تواند مساحت مثلث‌ها را نیز بیابد. برای پایه‌های پایین‌تر، به جای شـــکل چاپ شده، از دانش‌آموز خواسته می‌شـــود تا تعیین کند که سطح یک شکل هندسی مثل مثلث، با چند تا مربع صفحه شطرنجی پوشیده شده است.

برای تعمیم این فعالیت، می‌تـــوان از دانش‌آموز خواســـت تا با ابزاری که در اختیـــار دارد، یک مثلث مانند یکی از قطعه‌ها بســـازد. سپس تعیین کند که اضلاع مثلث جدید چه تغییری کرده است؟ مساحت مثلث جدید چه تغییری کرده است؟ چه ارتباطی بین اضلاع مثلث و مســـاحت آن وجود دارد؟ این تعمیم، علاوه بر مفهوم مساحت، مفهوم تشابه را نیز در بردارد.

پی‌نوشت‌ها

1. Better Mathematics
2. Fengfeng & Barbara

منابع

۱. رزمی، رقیه و شادکام، مینا. (۱۳۹۵). نقش بازی در فرایند یادگیری و معرفی یک بازی برای آموزش مفهوم کسر. مقاله چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز، ۱۳۹۵.

۲. رضائی، احسان. (۱۳۹۵). آموزش ریاضی در بستر بازی‌های آموزشی، چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران شیراز، ۱۳۹۵.

۳. رضائی، مانی. (۱۳۹۵). مدیرکانال تلگرامی آموزش ریاضی @MathEducation

۴. یار محمدی واصل، مسیب؛ رشید، خسرو و بهرامی، فرشته. (۱۳۹۳). آموزش از طریق بازی بر بهبود نگرش ریاضی دانش آموزان دختر مقطـــع ابتدایی. **مجله روان‌شناسی مدرسه**، (دانشگاه محقق اردبیلی) دورهٔ ۳، شمارهٔ ۳.

۵. بابلیان، اســـمعیل و حســـن‌زاده، حمید. (۱۳۸۰). نظریه بازی‌ها. **مجله رشـــد آموزش ریاضی**. شـــماره ۶۶، دفتر برنامه‌ریزی و انتشـــارات کمک آموزشـــی و تألیف کتاب‌های درســـی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشـــی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۶. غلام‌آزاد، ســـهیلا. (۱۳۷۹). ایجاد فرصت‌های یادگیری از طریق انجام فعالیت. **مجله رشـــد آموزش ریاضی**. شماره ۶۲، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درســـی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. محمدتقی، مبینی. (۱۳۷۷). **ریاضیات پیش از دبستان**.

8. GYO, Erika.¨ NGYO¨ SI WIERSUM(2012). Teaching and Learning Mathematics Through Games and Activitis. Vol. 12, No. 3, 2012, 23–26, DOI: 10.2478/v10198- 012- 0026- 2

طراحی خلاقانهٔ مسائل ریاضی

تریفه معینی، کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان مهاباد
داود کلهر، دانشجوی دکترا در هوش مصنوعی و روباتیک (حوزه اصلی تحقیق خلاقیت مصنوعی)
جمیله عوض سیگاری، آموزگار ابتدایی

چکیده

بررسی پیشینه پژوهشی نشان می‌دهد که یکی از عوامل تأثیرگذار در رشد خلاقیت دانش‌آموزان، قابلیت طرح مسئله توسط آن‌هاست. هدف این پژوهش، بحث درباره اهمیت بنیادی پرورش توانمندی خلاقیت طرح مسئله در حوزه ریاضی است، موضوع مهمی که تحقیقات زیادی را در ادبیات پژوهش به خود اختصاص داده است. در این مقاله به طور خلاصه، ماهیت طراحی مسئله، ارتباط آن با خلاقیت و معیارهای اندازه‌گیری تفکر واگرا (روانی، انعطاف‌پذیری و اصالت) و در راستای آن تفکر خلاقانه مورد بحث قرار می‌گیرد. جمع‌بندی این مطالعه بیانگر آن است که براساس یافته‌های بیشتر پژوهش‌ها، عملکرد طرح مسئلهٔ دانش‌آموزانِ ضعیف، مشابه مسائل کتاب درسی و عاری از خلاقیت است. البته ارتباط معنی‌دار بین خلاقیت و طرح مسئله، توسط برخی از این مطالعات تأیید شده است.

کلیدواژه‌ها: طراحی مسئله، خلاقیت، مسئله ریاضی

مقدمه

طراحی مسئله، توجه محققان زیادی را در زمینهٔ آموزش ریاضی به خود جلب کرده است، لونگ و سیلور[1] (۱۹۹۷) بر ضرورت طرح مسئله از جانب پولیا[2] (۱۹۴۵) و فرودنتال[3] (۱۹۷۳)، تأکید کرده‌اند که «طراحی مسئله برای تعدادی از رهبران شناخته شده در ریاضی و آموزش ریاضی به عنوان مهم‌ترین جنبهٔ آموزش ریاضی مشخص شده است (ص، ۱۹)». به گفته دیکمن (۲۰۱۴)، نقش طراحی مسئله را در توسعهٔ ریاضی، در سه مسئله کلاسیک یونان باستان یعنی: دو برابر کردن مکعب، تقسیم یک زاویهٔ دلخواه به سه قسمت مساوی و ترسیم یک مربع با مساحت یکسان با دایره‌ای که داده شده است، می‌توان یافت.

از دههٔ ۸۰ میلادی به بعد، اهمیت طرح مسئله توسط دانش‌آموزان مورد توجه بیشتری قرار گرفت تا جایی که بعضی ازکشورها در برنامهٔ درسی ریاضی خود، آن را لحاظ کردند. در حالی که در ایران، لزوم طراحی مسئله توسط دانش‌آموزان، هم در برنامهٔ درسی و هم در روش تدریس معلمان، مورد بی‌توجهی قرار گرفته است. شورای ملی معلمان ریاضی[4] (۱۹۸۹) (NCTM) تأکید کرده است که دانش‌آموزان پایه‌های ۹ تا ۱۲، باید تجربه تشخیص و صورت‌بندی مسائل خود را داشته باشند، فعالیتی که در قلب فعالیت‌های ریاضی قرار دارد (ص ۱۳۸). این انجمن در سند (۲۰۰۰) نیز مطرح می‌کند که طراحی مسئله، جزء مهمی از برنامه درسی ریاضی است.

با واژه‌های متفاوتی در ادبیات تحقیق، به طرح مسئله اشاره شده است که از آن جمله، می‌توان به یافتن مسئله، صورت‌بندی مسئله، کشف مسئله خلاق، مسئله سازی، خلق مسئله و پیش‌بینی مسئله (دیلون[5]، ۱۹۸۲، جی و پرکینس[6]، ۱۹۹۷) اشاره کرد.

در ادبیات تحقیق، طرح مسئله به صورتی مشابه تعریف شده است. برای ریاضی‌دانان، طراحی مسئله به فرایندی گفته می‌شود که در آن یک مسئله که تا قبل از آن به وسیله هیچ‌کس حل نشده است، صورت‌بندی شود. به هر حال در بیشتر مطالعات تجربی، طراحی

مسئله به معنای صورت‌بندی مسائل جدید با راه‌حلی است که حداقل برای طراح مسئله ناشناخته است (فن دن[7] و همکاران، ۱۹۹۵). استویانووا و الرتون (۱۹۹۶) طرح مسئله ریاضی را به‌عنوان فرایندی که بر اساس تجربه ریاضی دانش‌آموزان، تفسیرهای شخصی از موقعیت‌های عینی می‌سازند و از این موقعیت‌ها، مسائل ریاضی پرمعنی به‌وجود می‌آورند، تعریف می‌کنند. در عین حال گاهی در رشته‌های دیگر، طرح مسئله به‌عنوان صورت‌بندی مجدد یک مسئله موجود در نظر گرفته می‌شود، (کوهن و استور[8]، ۱۹۸۱).

همچنین سیلور (۱۹۹۵) طراحی مسئله را ایجاد یک مسئله جدید از یک موقعیت و تجربه یا دوباره صورت‌بندی کردن مسئله‌های داده شده در نظر می‌گیرد. وجه مشترک این تعریف‌ها، جدید بودن و ناشناخته بودن مسئله طرح شده است. این تعریف‌ها نشان می‌دهند که توانایی طرح مسئله و خلاقیت افراد، به هم مرتبط‌اند و طراحی مسئله، نیازمند تفکر خلاقانه است.

در حقیقت طراحی مسئله را به عنوان یک تکلیف واگرا که چندین جواب محتمل دارد می‌توان در نظر گرفت که در بعضی آزمون‌های تفکر، برای اندازه‌گیری روانی، انعطاف‌پذیری و اصالت تفکر[9] افراد به کار می‌رود؛ معیارهایی که کافمن و استنبرگ (۲۰۱۰)، آن‌ها را مؤلفه‌هایی از تفکر واگرا[10] برای اندازه‌گیری تفکر خلاقانه می‌دانند.

معرفی چند چارچوب حل مسئله

چارچوب‌های متفاوتی در ادبیات تحقیق، برای طرح مسئله ارائه گردیده است که برخی از آن‌ها به‌طور مختصر، در ذیل معرفی می‌شوند. سیلور (۱۹۹۴) بر این باور است که طرح مسئلهٔ جدید در سه مرحله قبل، در طول و بعد از حل یک مسئله صورت می‌گیرد. این در حالی است که انگلیش[11] (۱۹۹۷) سه عامل درک دانش آموزان از یک مسئله، شناسایی مسائل ارجحیت داده شده توسط دانش‌آموزان و توانایی دانش‌آموزان در درک موقعیت‌های ریاضی به شیوه‌های متفاوت را دارای اهمیت می‌داند. کریستو[12] و همکاران (۲۰۰۵)، فرایندهایی را در طرح مسئله در نظر گرفتند که آن‌ها را ویرایش اطلاعات کمی، انتخاب اطلاعات کمی، درک و سازمان‌دهی اطلاعات کمی و ترجمهٔ اطلاعات کمی نام‌گذاری نموده‌اند. براون[13] و همکاران (۲۰۰۵) یک طرح‌وارهٔ پنج سطحی برای طرح مسائل جدید با کمک یک مسئلهٔ داده شده ارائه کردند. دومین سطح این طرح‌واره به‌عنوان استراتژی «اگر نباشد، چه می‌شود؟» در تحقیقات متعددی استفاده گردیده است. از جمله کانتررس[14] (۲۰۰۷)، بر اساس این استراتژی، یک چارچوب برای طرح مسائل جدید از روی یک مسئلهٔ پایه معرفی کرده است. ویسترو-یو[15] (۲۰۰۹) نیز یک روش نوآورانه برای طرح مسئله با ایده گرفتن از «نوآوری در یک داستان»، ارائه داده است.

اگرچه استراتژی‌های متفاوتی برای طرح مسئله معرفی شده، اما یکی از پرکاربردترین چارچوب‌ها در تحقیقات مربوط به طرح مسئله ریاضی مدل استویانووا و الرتون (۱۹۹۶) است که طراحی مسئله را به سه دستهٔ طراحی مسئله آزادانه، نیمه ساختار یافته و ساختار یافته[16] دسته‌بندی کرده‌اند. در این قسمت، این مدل به دلیل کاربرد بیشتر آن در پژوهش‌ها با چند مثال توضیح داده می‌شود.

• مطابق با این چارچوب، موقعیت طرح مسئله زمانی آزاد است که از دانش‌آموزان خواسته شود تا یک مسئله را از یک موقعیت داده شده و طبیعی، طرح کنند. مانند:

۱. یک مسئله طرح کنید که از حلش لذت می‌برید. چرا به این مسئله علاقه‌مندید و چگونه آن را طرح کردید.

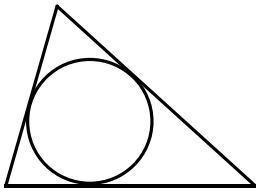
۲. یک مسئله طرح کنید که به نظرتان، حلش مشکل است و بگویید که چرا این مسئله سخت است.

۳. ده دختر و ده پسر در یک صف ایستاده‌اند. هر تعداد سؤال که می‌توانید با این اطلاعات بنویسید.

• در موقعیت طرح مسئلهٔ نیمه ساختار یافته، به دانش‌آموزان یک موقعیت باز داده می‌شود و دانش‌آموزان دعوت می‌شوند تا ساختار آن موقعیت را کشف کنند و آن را به‌وسیلهٔ به کار بردن دانش، مهارت‌ها، مفاهیم و رابطهٔ بین آن‌ها و بر اساس تجربه‌های ریاضی قبلی، کامل کنند مانند:

۱. هر تعداد مسئله می‌توانید مربوط به یک مثلث قائم الزاویه بنویسید.

۲. در شکل زیر، یک دایره در یک مثلث قرار گرفته است. هر تعداد سؤال که می‌توانید، با این اطلاعات بنویسید.



استویانووا و الرتون (۱۹۹۶) طرح مسئله ریاضی را به‌عنوان فرایندی که بر اساس تجربه ریاضی دانش‌آموزان، تفسیرهای شخصی از موقعیت‌های عینی می‌سازند و از این موقعیت‌ها، مسائل ریاضی پرمعنی به‌وجود می‌آورند، تعریف می‌کنند

• طرح مسئله زمانی ساختار یافته است که فعالیت‌های طرح شده، بر اساس یک مسئله مشخص باشد:

۱. شب گذشته، یک مهمانی در خانه خاله شما برپا بود و مهمان‌ها، در ده نوبت وارد خانه شدند. دفعهٔ اول وقتی زنگ خانه زده شد فقط یک مهمان وارد شد. هر دفعه زنگ در خانه زده شد، سه مهمان بیشتر از دفعهٔ قبل وارد شدند.

الف) وقتی برای دهمین بار زنگ در زده شد، چند مهمان وارد خانه شدند؟ توضیح دهید

ب) هر تعداد سؤال که مربوط به این مسئله می‌توانید،بنویسید.

جمع‌بندی

طرح مسئله، مرحله‌ای از حل مسئله است که در آن، طراح مسئله با شناخت عمیق مسئله و چگونگی حل آن، به طرح و صورت‌بندی‌های جدیدی از یک مسئله می‌رسد. در این کار، نوعی از خلاقیت وجود دارد که در مقاله‌های دیگر، بدان پرداخته شده یا می‌شود. این مقاله با معرفی طرح مسئله و چارچوب‌های آن، با چند مثال، چارچوب یا مدل استویانووا و الرتون (۱۳۹۶) را که بیشتر در ایران مورد استفاده قرار گرفته‌اند، توضیح داده است.

پی‌نوشت‌ها

1. Leung and Silver
2. Polya
3. Freudenthal
4. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
5. Dillon
6. Jay & Perkins
7. Van den
8. Cohen & Stover
9. Fluency, flexibility & originality
10. Divergent thinking
11. English
12. Christou
13. Brown
14. Contreras
15. Vistro-Yu
16. Free, semi-structured & structured

منابع

1. Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. London: Psychology Press.
2. Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. ZDM (International Reviews on Mathematical Education), 37(3), 149–158.
3. Cohen, S. A., & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth-grade students to modify format variables of math word problems. Reading Research Quarterly, 16(2), 175–200.
4. Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: Using a problem-posing framework with prospective mathematics teachers. Mathematics Educator, 17(2), 15–23.
5. Dickman, B. (2014). Problem posing with the multiplication table. Journal of Mathematics Education at Teachers College, 5(1)), 47-51.
6. Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving*. The journal of creative behavior, 16(2), 97–111.
7. English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. Educational Studies in Mathematics, 34(3), 183–217.
8. Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. The creativity research handbook, 1,257–293. Cresskill, NJ: Hampton Press.
9. Kaufman, J. C., & Sternberg, R. J. (2010). The cambridge handbook of creativity. Cambridge University Press.
10. Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal, 9(1), 5–24.
11. NCTM-National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA:NCTM.
12. NCTM-National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
13. Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. ZDM (International Reviews on Mathematical Education), 27(2), 67–72.
14. Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education, 518–525. Mathematics Education Research Group of Australasia. The University of Melbourne.
15. Van den Heuvel-Panhuizen, M., Middleton, J. A., & Streefland, L. (1995). Student-generated problems: Easy and difficult problems on percentage. For the Learning of Mathematics, 15(3), 21–27.
16. Vistro-Yu, C. P. (2009). Using innovation techniques to generate new problems. In B. Kaur, B. H. Yeap, & M. Kapur (Eds.), Mathematical problem solving: Yearbook 2009, association of mathematics educators (pp. 185–207). World Scientific.

مقاله

نقد و بررسی ریاضی دهم

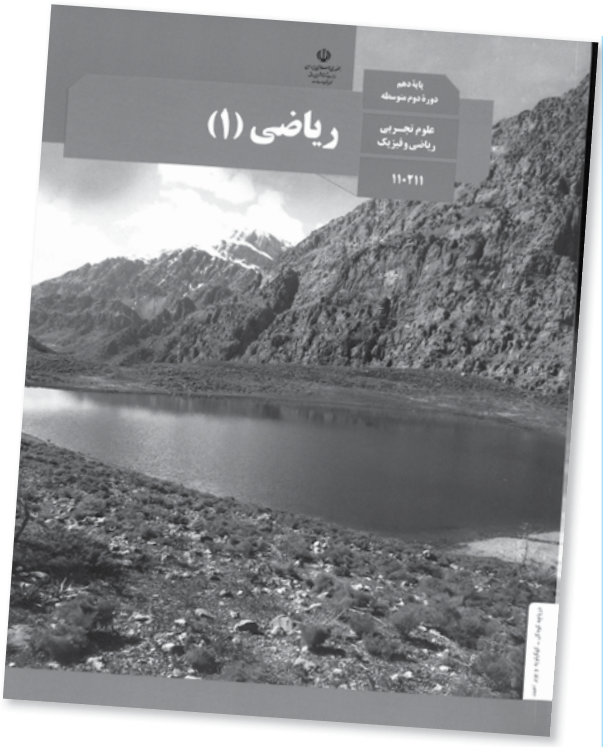
(چاپ اول؛ تابستان ۱۳۹۵)

اسفند ملیح ملکی، دبیر ریاضی شهرستان ملکان

چکیده

در این مقاله سعی کردیم کتاب تازه‌تألیف ریاضی دهم چاپ ۱۳۹۵ را از نظر کیفیت ارائه مفاهیم ریاضی و تحلیل محتوای کمّی، از دیدگاه ویلیام رومی مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قراردهیم. همچنین تغییرات صورت گرفتـــه در این کتاب را با کتاب‌های ریاضی نهم و ریاضیات ۱ و ۲ اول و دوم دبیرستان مقایسه نمودیم. این کتاب به خوبی ادامه کتاب‌های ریاضی دوره متوســـطه اول بوده و به شـــیوه حل مسئله و پرسش و پاسخ و کشف مفاهیم ازسوی خودِ دانش‌آموز با راهنمایی معلم تهیه و تنظیم گردیده است و نقایص کتاب‌های قبلی تا حدود زیادی مرتفع شده است و می‌تواند پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزِ پرسشگر امروزی، شود به شرطی که این شیوه، درسال‌های آتی نیز در کتب ریاضی یازدهم و دوازدهم دنبال شود و فرصت کافی و زمینه لازم برای تدریس با این شیوه، به همراه فرهنگ‌سازی تدریس باشیوه‌های نوین در مدارس کشور، فراهم گردد. البته کتاب خالی از اشکال نیست و در سال تحصیلی ۹۵-۹۶ که اولین سال تدریس این کتاب بود، طبیعی است که معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز در یاددهی و یادگیری محتوای کتاب با مشکلاتی روبه‌رو شوند. در قسمت بررسی انتقادی این مقاله، به این مشکلات اشاره شده است.

کلیدواژه‌ها: روش فعال، دانش‌آموز، یادگیری، آموزش، کتاب تازه‌تألیف ریاضی دهم، روش ویلیام رومی



مقدمه

بـــا توجه به ایجاد یـــک پایه جدید تحصیلی بـــه نام پایه ششم ابتدایی و حذف دوره پیش‌دانشگاهی و تغییر و تحول و پیشرفت‌های گسترده در عرصه علم در دنیای کنونی، کتاب‌های ریاضی دوره متوســـطه اول نیز دچار تغییر و تحول اساسی در شـــیوه نگارش و محتوای مطالب درسی گردید و با شیوه نوین و فعال تدریس تهیه و تنظیم گردید. امسال هم برای اولین بار کتـــاب ریاضی دهم به دنبال تغییر در کتاب‌های متوســـطه اول برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم تألیف و چاپ گردید. البته طبیعی اســـت که تدریس این کتاب توسطه همکاران عزیز برای بار اول و دانش‌آموزان پایه دهم مشـــکلاتی را به همراه دارد، اما آنچه که مسلم است، گروه مؤلفان این کتاب، زحمات زیادی را متحمل شده‌اند و یک کتاب درسی پرمحتوا و کم حجم، منطبق با روش‌های نوین تدریـــس و یک اثر هنری زیبا و تـــا حدودی بی‌نقص را به جامعه آموزش ریاضی کشور هدیه داده‌اند.

اهداف کتاب از دیدگاه مؤلفان

رویکرد کلی کتاب این است که دانش‌آموز در فرایند ساخت دانش، درگیر شود. هیچ فرمول آماده‌ای به طور مستقیم عرضه نشده است، بلکه فعالیت‌ها طوری طراحی شده‌اند که دانش‌آموزان عزیز با انجام آن‌ها خودشان به فرمول یا رابطه مورد نظر دست یابند. در تألیف کتاب سعی شده علاوه بر استانداردهای محتوایی، تا حد امکان استانداردهای فرایندی از جمله مسائل بازپاسخ - حل مسئله و طرح مسئله - ارتباط و اتصال موضوعی - بازنمایی‌های چندگانه - توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان - گفتمان ریاضی - اثبات و استدلال، در کانون توجه باشد[1].

ساختار کتاب از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین در کلاس تشکیل شده است. هدف از طراحی فعالیت‌ها آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم اصلی درس و سهیم نمودن خود دانش‌آموز در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه‌حل، مرتب کردن، قضاوت درباره یک راه‌حل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم صورت می‌گیرد و در صورت نیاز، راهنمایی از سوی معلم ارائه می‌شود. به‌طورخلاصه، فراهم کردن فرصت یادگیری و مجال دادن به دانش‌آموزکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند دغدغه مهم همکاران عزیز باشد. کار در کلاس‌ها با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و انتظارمی‌رود دانش‌آموزان، بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است، اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان درکلاس، ضروری است.

بررسی محتوای کیفی

کیفیت بالای ارائه مطالب از ویژگی‌های بارز کتاب ریاضی دهم است. در این کتاب از حجم مطالب کاسته شده و بر کیفیت و غنای آن افزوده شده است. مطالب زاید و کم اهمیت کتاب‌های قبلی دیگر در این کتاب، به چشم نمی‌خورد. ترتیب ارائه و انتخاب نوع موضوعات فصل‌های مختلف از اصول خاصی پیروی می‌کند. این کتاب به خوبی دنباله‌رو ریاضی پایه‌های قبلی است. بعضی از مطالب از اول دبیرستان و بعضی از مطالب از دوم دبیرستان به این کتاب منتقل شده‌اند. مثال‌های به‌روز و کاربردی بیشتری از ریاضیات در زندگی روزمره در این کتاب آورده شده است که از آن جمله، می‌توان به انتخاب اپراتور تلفن همراه برای دنباله حسابی- انتشار ویروس آنفلوانزا در دنباله هندسی- پژوهشگاه سلول‌های بنیادی رویان، در قسمت توان- ثبت هوشمند تخلفات جاده‌ای، پردازش تصویر از کاربردهای آمار در کامپیوتر- استفاده از دایره مثلثاتی در سیستم رادارها و اخترشناسی- بهینه‌سازی سهمی و کاهش هزینه‌ها در ساختن سدهای قوسی- استفاده از تصاویر بازیکنان تیم ملی، اشاره نمود. در رنگ‌بندی و صفحه‌آرایی دقت زیادی صورت گرفته است تعریف‌ها در داخل کادرهای آبی و فعالیت‌ها با رنگ سبز، کار در کلاس‌ها با رنگ نارنجی و تمرین‌ها با رنگ بنفش در سراسر کتاب به یک شکل مشخص گردیده‌اند. از حاشیه کتاب که قبلاً بدون استفاده بود، به نحو مناسبی با مطالب خواندنی و مکمل یا نمودار درختی و جمع‌بندی مفهوم مورد نظر، استفاده گردیده است. در شروع هر فصل، آیه‌ای از قرآن کریم مرتبط با موضوع فصل آورده شده که برای ایجاد علاقه و انگیزه در دانش‌آموز می‌تواند مفید باشد. روش‌های شهودی ارائه شده در سراسر کتاب، مفاهیم ریاضی را از حالت خشک و انتزاعی خارج کرده و به موضوعات جالب و مورد علاقه دانش‌آموز تبدیل نموده است. از جمله مفاهیمی مانند تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه یا ریشه‌های دوم (و سوم و ...) یک عدد و یا حل معادله درجه دوم با فرمول کلی، مفاهیمی هستند که واقعاً به نحو جالب آموزش داده شده‌اند. مسائل متنوع و ابتکاری زیادی در پایان هر درس از قبیل کامل کردنی، درست غلط، مثال زدنی وغیره وجود دارند که ارزیابی واقعی از یادگیری به عمل می‌آورند. در بعضی موارد از دانش‌آموز خواسته شده که خود، سؤالی طرح کند که جواب آن داده شده است در تمرین‌ها تکالیفی دیده می‌شود که جواب منحصربه‌فرد ندارند. ممکن است هر دانش‌آموز، راه‌حلی را ارائه کند که همه آن‌ها درست باشد. بسیاری از مفاهیم مانند تشخیص تابع ازدیدگاه‌های مختلف، آموزش داده شده و به بدفهمی‌های دانش‌آموزان توجه ویژه‌ای شده است. برای مثال، ارائه دو راه‌حل از سوی دو دانش‌آموز مختلف در کتاب برای یک مسئله و انتظار تشخیص راه‌حل درست از طرف دانش‌آموزان، در این راستاست. درکتاب به بحث و گفت‌وگوی بین دانش‌آموزان نیز تأکید زیادی صورت گرفته، چرا که هر چقدر بحث و صحبت در کلاس زیاد باشد و دانش‌آموزان نظر همدیگر را نقد کنند و از نظر خود دفاع نمایند، یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی تحقق یافته است.

در این کتاب، به اثبات‌های مجرد یا صوری توجهی نشده و بیشتر به اثبات‌های شهودی تأکید شده است و از آن مهم‌تر، هدف این است که دانش‌آموزان بیشتر ضرورت اثبات و استدلال را در یک حکم ریاضی درک نمایند.

تحلیل محتوای کمی از دیدگاه ویلیام رومی

این روش از نوع تجزیه و تحلیل کمی است که در آن، میزان یادگیری دانش‌آموزان در فرایند یادگیری ارزیابی می‌شود. هرچند این روش همه ابعاد مسئله را دربرنمی‌گیرد اما یکی از بهترین تکنیک‌های موجود برای تعیین میزان فعال‌سازی دانش‌آموزان است. در این روش، تعدادی از صفحه‌های کتاب به‌عنوان نمونه تصادفی انتخاب شده و از هر صفحه ۲۵ جمله انتخاب می‌شود، در این انتخاب، به هر یک از واحدهای درسی اعم از تصاویر، نمودارها، پرسش‌ها، خلاصه درس‌ها و فعالیت‌های درسی، یک حرف به صورت زیر اختصاص داده می شود:

a. بیان واقعیت‌ها؛
b. استنتاج و تعمیم؛
c. تعریف‌ها؛
d. پرسش‌هایی که بلافاصله پاسخ داده شده‌اند؛
e. جمله‌هایی که هیچ‌یک از موارد بالا نیست؛
f. سؤال‌هایی که دانش‌آموزان را به تجزیه و تحلیل وادار می‌کند؛
g. جمله‌هایی که فعالیت خاصی را از دانش‌آموز می‌خواهد؛
h. پرسش‌ها و تمرین‌هایی که پاسخ آن‌ها مستلزم آزمایش و تحقیق است؛
i. جملاتی که دانش‌آموزان را به نگاه کردن به تصویرها وادار می‌کند و دستور انجام کاری را می‌دهد؛
j. سؤال‌هایی که بلافاصله جواب را به همراه ندارد.

ضریب درگیری در این دیدگاه، $I = \sum \frac{fghij}{abcde}$ است که درآن، ارزش عددی هر حرف، ۱ در نظر گرفته می‌شود. تحلیل ضریب درگیری به صورت زیر است:

الف) اگر $I < ۰/۴$ آنگاه متن، دانش‌آموز را در زمان تدریس درگیر نمی‌کند، یعنی به شیوه غیرفعال نوشته شده است.

ب) اگر $I > ۱/۵$ آنگاه متن، دشوار بوده و برای استعدادهای درخشان قابل استفاده است.

ج) اگر $۰/۴ \leq I \leq ۱/۵$ آنگاه متن مورد مطالعه، استاندارد است و ارائه مطلب به صورت فعال است.

با به‌کارگیری این روش، ابتدا به طور تصادفی صفحات ۲۲ و ۲۶ و ۲۷ و ۶۰ و ۹۵ و ۹۶ و ۱۳۶ از کتاب حاضر انتخاب شدند و نتیجه به صورت زیر حاصل شد.

الف) صفحه ۲۲ دارای متن استاندارد

$$I = \sum \frac{fghij}{abcde} = \frac{۳+۸+۱+۲+۱}{۹+۱+۰+۰+۰} = \frac{۱۵}{۱۰} = ۱/۵$$

ب) صفحه‌های ۲۶ و ۲۷ کمی دشوار و بالاتر از استاندارد

$$I = \sum \frac{fghij}{abcde} = \frac{۰+۵+۸+۲+۱}{۰+۱+۲+۶+۰} = \frac{۱۶}{۹} = ۱/۷$$

ج) صفحه ۶۰ دارای متن استاندارد

$$I = \sum \frac{fghij}{abcde} = \frac{۱+۱۲+۰+۰+۲}{۰+۰+۱+۹+۰} = \frac{۱۵}{۱۰} = ۱/۵$$

د) صفحه‌های ۹۶ و ۹۵ دارای متن استاندارد

$$I = \sum \frac{fghij}{abcde} = \frac{۰+۹+۰+۲+۱}{۳+۰+۴+۶+۰} = \frac{۱۲}{۱۳} = ۰/۹$$

ه) صفحه ۱۳۶ کمی دشوار و بالاتر از استاندارد

$$I = \sum \frac{fghij}{abcde} = \frac{۱+۸+۰+۰+۷}{۰+۰+۰+۷+۲} = \frac{۱۶}{۹} = ۱/۷$$

میانگین ضریب درگیری عدد ۱/۴۶ است که نشان می‌دهد متن کتاب درسی حاضر، استاندارد و منطبق با روش فعال است. اما احتمالاً به دلیل وجود سؤال‌های زیاد و جواب‌های کم در متن درس، عدد به دست آمده نزدیک به ۱/۵ است که برای برخی دانش‌آموزان، کمی دشوار به نظر می‌رسد.

مقایسه کتاب با کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه اول

کتاب ریاضی نهم نیز بر مبنای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دوره اول متوسطه تألیف شده است. در کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی، تأکید بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در رویکرد جدید، ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. کتاب ریاضی نهم چاپ ۹۵ در ۸ فصل و در ۱۴۰ صفحه تهیه و تنظیم و در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته شده است با توجه به اضافه شدن یک پایه تحصیلی به دوره ابتدایی، محتوای کتاب‌های درسی دستخوش تغییر و تحول جدی قرار گرفت. موضوعاتی مانند مجموعه، توان

و ریشـــه‌گیری، عبارت‌های گویا، برخی از اتحادهای جبری، قـــدر مطلق، معادله خط و نامعادلـــه از کتاب ریاضیات اول دبیرستان، و موضوعاتی مانند، همنهشتی، تشابه و شکل‌های فضایی و استدلال از هندسه دوم دبیرستان به کتاب نهم، و بحث‌هایی از آمار و مدل‌سازی و احتمال سوم دبیرستان به کتاب ریاضی هفتم و هشتم منتقل شده است. کتاب ریاضی دهم به درستی ادامه کتاب ریاضی نهم است و انتظار می‌رود مشکلات ناشی از تغییر پایه، به کمترین مقدار خود برسد. چون در سیستم قبلی واقعاً شیوه نگارش کتاب‌های راهنمایی با کتاب‌های دبیرستان متفاوت بود و این خود، یکی از دلایل افت تحصیلی در دوره اول دبیرستان بود.

مقایسه با کتاب ریاضیات ۱ اول دبیرستان چاپ ۹۱

اولین تغییر، در عنوان کتاب است که از ریاضیات ۱ به ریاضی دهم تغییر یافته است. هر چند واژه ریاضیات کامل‌تر اســـت، اما احتمالاً به تقلید از متوسطه اول و برای سادگی، کلمه ریاضی جایگزین ریاضیات گردیده است. تعداد صفحات کتاب حاضر ۱۷۰ است که در مقایسه با کتاب ریاضیات ۱ چاپ ۹۱ که ۲۰۸ صفحه بود کاهش یافته است. هرچند از حجم مطالب کاسته شده، اما بر غنا وکیفیت آن اضافه شده است. در کتاب قبلی، شـــروع بیشتر فصل‌ها با یک نقاشی کودکانه شـــروع می‌شـــد اما در کتاب فعلـــی از عکس‌های واقعی مرتبط با موضوع در شـــروع هـــر فصل همراه با ذکر چند مورد از کاربردهای آن مفهوم ریاضی و همراه با عناوین زیربخش‌های آن فصل، استفاده شده است. در کتاب فعلی برعکس کتاب‌های قبلی، از جاهای خالی برای کامل کردن صورت مسئله و حل آن استفاده شده، به طوری که از کتاب به‌عنوان کتاب کار نیز می‌توان اســـتفاده کرد. مواردی مانند نوشـــتن به زبان ریاضی و با عبارت‌های فارسی و روش‌های آزمون و خطا و روش هندسی و روش خوارزمی درحل معادلهٔ درجه دوم که اهمیت کمتری داشـــتند، ازکتاب حذف شده است. تابلوی غلط $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ که در کنار مسائل پایانی هر درس به دفعات زیادی تکرار شـــده بود، در کتاب فعلی حذف شده است.

مقایسه با کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان چاپ ۸۸

موضوعاتی مانند تعیین علامت، بازه و فاصله، ترکیبیات و الگو و دنباله‌های حسابی و هندسی و قسمت‌هایی از مثلثات دوم دبیرستان به ریاضی نهم انتقال یافته است. در ساختار کتاب ریاضیات دوم دبیرستان، نقایص زیادی بود که موقع انتقال به دهم مرتفع گردیده است. شیوه بیان مطالب از جمله مثلثات و ترکیبیات و تعیین علامت دچار تحول جدی و مثبتی شـــده است و اســـم فصل از ترکیبیات به «شـــمارش، بدون شـــمارش» تغییر یافته اســـت. قســـمت‌هایی از مثلثات دوم مانند محاسبه مساحت مثلث و دایره مثلثاتی به کتاب دهم منتقل شده و این حجـــمِ کم، به خوبی با روش فعال آموزش داده شـــده است. در قسمت الگو و دنباله نیز، الگوی خطی که در کتاب دوم نبود برای اولین بار در کتاب دهم به خوبی آورده شده است چون زمینه‌ساز تدریس دنباله حسابی است و مفاهیمی مانند دنباله تقریبات اعشاری و نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد خاص، حذف شده اســـت. مثال‌های کتاب فعلی کاربردی‌تر شـــده‌اند و از تنوع زیادی برخوردارند و به مسائل به روز، قابل لمس و روزمره زندگی، اهمیت زیادی داده شده است.

نقد و بررسی انتقادی

بدیهی اســـت که تحقق اهداف مؤلفان کتاب، به سرعت قابل انجام نیست و تغییرات سریع در کتاب‌های درسی، موجب سردرگمی معلمان و دانش‌آموزان و اولیا می‌شود. یکی از موانع و مشکلات پیش‌رو، کمبود وقت و نداشـــتن فرصت کافی برای پیـــاده کردن روش‌های فعال، حل تمـــام فعالیت‌ها و تمرین‌هـــا در کلاس‌ها اســـت و یادگیری دارای زمان بهینه‌ای است که درآن، دانش‌آموز باید به تفکر و تعقل بپردازد و خود به کشف یک مفهوم نایل شـــود. صبر و حوصله عوامل اجرایی مدرسه و انعطاف و هنر معلمی و ایجاد فرهنگ تدریس با روش‌های جدید، عواملی است که دست به دست هم خواهند داد تا رویای مؤلفان محترم کتاب‌های ریاضی و تمام دســـت‌اندرکاران آموزش ریاضی کشـــور، جامه عمل بپوشـــد. تا زمانی‌که در دوره‌های ضمن خدمت، معلمان الگوهای عملی تدریس با شیوه فعال ارائه نشود و تا زمانی‌که بین مؤلفان محترم و دبیران زحمتکش، تعاملی نزدیک برقرار نشود، مقاومت در برابر تغییر باز هم ادامه خواهد داشت و در این مرحله گذر، بیشترین آسیب متوجه دانش‌آموزان عزیز خواهد شد.

ضریب درگیری بالا نشان می‌دهد که هر چند در روش ویلیام رومی، کتاب منطبق با روش فعال اســـت، اما متن کتاب درســـی برای یـــک دانش‌آموز معمولی کمی دشوار اســـت. به نظر می‌رسد با پرسش و پاسخ و مثال‌های بیشتر، می‌توان این دشواری را کاهش داد. تقریباً بیشـــتر محتوای تدریس با روش کشف توسط

دانش‌آموز ارائه شـــده و تعداد ســـؤال‌های بدون پاسخ کتاب، زیاد اســـت. هر چند این شیوه منطبق با روش فعال است، اما ضریب دشواری کتاب را بالا برده است. پس بهتر اســـت با ارائهٔ مثال‌هایی با توضیح کامل در پایان فصل، از این دشواری کاسته شود.

در نتایجـــی که از مطالعات تیمز به دســـت آمده، مشاهده می‌شود معلمان در انتخاب محتوای تدریس آزادی عمل دارند. همچنین بیشـــتر آن‌هـــا در پایان جلسات تدریس، یک جمع‌بندی و خلاصه از درس ارائه می‌دهند. در کتاب‌های ریاضی پایه‌های هفتم و هشتم دوره اول متوســـطه، در پایان هر فصل یک جمع‌بندی ارائه شـــده، ولی متأسفانه این کار خوب در پایه نهم و دهم تداوم نیافته است.

اشـــتباهات چاپی در این کتاب خیلی اندک است، امـــا ای کاش با تجدید نظر دوباره این اشـــکالات کم نیز رفـــع گردد. به‌عنوان نمونه در صفحه ۵۸ تمرین ۱ قســـمت الف و تمرین ۶ قسمت ب و در صفحه ۶۸ در سؤال ۵، اشـــکال چاپی دیده می‌شود و در صفحه ۹۳ تمرین ۵، تعداد ضربان قلب پس از x دقیقه با یک تابع درجه دوم نشان داده شده، هر چند بعضی از جواب‌ها قابل‌قبول نیست؛ اما تصور این‌که قلب یک شخص در یک بازه زمانی از کار بیفتد و ســـپس دوباره شروع به فعالیت نماید، مشکل است. در بخش تجزیه و اتحادهای مثلثاتی می‌توان مسائل فکری زیادی را مطرح کرد که تنها اشاره کوتاهی صورت گرفته است.

ریاضیات معـــادل واژه انگلیســـی mathematics اســـت. ریشه یونانی دارد که معنی آن در یونان باستان «دانستنی‌های عمومی» بوده است. به نظر بنده، کلمه ریاضیات که قبـــلاً نیز در کتاب‌های دوره متوســـطه استفاده می‌شده اســـت، کامل‌تر از کلمه ریاضی برای عنوان کتاب اســـت که احتمالاً مؤلفـــان محترم برای سادگی و تبعیت از متوسطه اول، چنین تغییری را در نام کتاب انجام داده‌اند.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

کتاب حاضر، در تداوم کتاب‌های دوره متوســـطه بوده و از کیفیت بالا و حجم مطالب کمتری نسبت به کتاب‌های مشابه قبلی برخوردار است. از دیدگاه تحلیل محتوای کمی ویلیام رومی، متن درس فعال و استاندارد است اما به‌دلیل تعدد ســـؤال‌های بدون پاسخ، ضریب درگیری بالایی دارد. برای کاســـتن از این دشـــواری، پیشـــنهاد می‌کنیم در پایان هر فصل به‌عنوان جمع‌بندی، مثال‌هایی با حل و توضیح کامل آورده شود.

در ســـال تحصیلی فعلی، به جهت تازه‌تألیف بودن این کتاب، مشکلاتی در یاددهی و یادگیری برای معلمان عزیز و دانش‌آموزان گرامی به‌وجود آمده است و در زمان اختصاص داده شـــده، تدریس این کتاب با دشواری‌هایی روبه‌رو بوده است. پیشنهاد می‌کنیم یا زمان تدریس در هفته افزایش یابد (که احتمالاً مخالـــف آیین‌نامه‌های مصوب آموزش‌وپرورش است و این پیشنهاد عملی نشود)، یا اینکه کلاس‌های فوق برنامه برای این درس از سوی مدیران محترم لحاظ شود، یا اینکه در چاپ بعدی قسمتی از محتوای درس کاهش یابد.

پیشنهاد می‌شـــود مؤلفان محترم یا به مناطق مختلف آموزش‌وپرورش مراجعه نموده و در کارگاه‌هایی تحت عنوان نشست صمیمانه با معلمان، به تبیین اهداف خود بپردازند و از مشکلات حین تدریس معلمان آگاه شوند یا ترتیبی اتخاذ شود که سرگروه‌های محترم درسی در همایش ملی و سالانه آمـــوزش ریاضی با حضور مؤلفان محترم کتاب‌ها، شـــرکت نمایند و تجربه‌های خود را به دبیران سایر مناطق آموزشی منتقل نمایند و در این جلسه‌ها مدرس، خود در نقش معلم ریاضی، تدریســـی عملی را با روش فعال و با حضور دبیران ریاضی، ارائه دهد.

کتاب راهنمای معلم که اهداف آموزشی و حل مسائل منتخب و همچنین نحوه تدریس موضوعات مختلف کتاب در آن گنجانده شـــده و در سایت دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتاب‌های درســـی وجود دارد، در شروع سال تحصیلی در اختیار دبیران قرار گیرد.

پی‌نوشت‌ها

۱. کتاب معلم ریاضی پایه دهم متوسطه- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

منابع

۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش‌وپرورش. راهنمای معلم ریاضی پایه دهم ۱۱۰۳۶۴. شرکت چاپ و نشرکتاب‌های درسی ایران.
۲. حمیدرضا امیری و همکاران. ریاضی پایه دهم دوره دوم متوســـطه چاپ ۱۳۹۵ کد۱۱۰۲۱۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۳. شهرناز بخشعلی‌زاده و همکاران. ریاضیات ۱ سال اول دبیرستان چاپ ۱۳۹۱ کد۲۱۱/۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۴. حمیدرضا امیری و همکاران. ریاضی نهم دوره اول متوســـطه چاپ ۱۳۹۴ کد ۱۳۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۵. حمیدرضا امیری و همکاران. ریاضی هشتم دوره اول متوسطه چاپ ۱۳۹۴ کد ۱۱۷. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۶. اسفند ملیح‌ملکی. حسابان با روش فعال. مجله رشدآموزش ریاضی دوره ۲۹شماره ۲ زمستان ۱۳۹۰ صفحه ۴۰.

به کجا چنین شتابان

محمد راسخی کازرونی
دبیر ریاضی مدارس نمونه و شاهد کازرون

اشاره

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیشترین تلاش اعضای هیئت تحریریهٔ مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیشتری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیشتری با مجلهٔ خودشان برقرار کرده‌اند و بیشتر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال کرده‌اند. به همین دلیل، آرزوی دیرینهٔ دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی و هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. در نتیجه، با نظر هیئت تحریریهٔ مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآمدتر کنند.

رشد آموزش ریاضی

به کجا چنین شتابان ...؟ نمی‌دانم که هنوز شاعر، در ادامه می‌گفت که«گون از نسیم پرسید...» یا در وصف حال امروز ما چیز دیگری را می‌سرود.

روی سخن با کسانی است که دغدغه تعلیم‌وتربیت دانش‌آموزان را دارند.

در یکی از کنفرانس‌های آموزش ریاضی، خانم دکتر گویا در سخنان خود اشاره کردند که کنکور، علم این مملکت را ویران می‌کند و مرحوم استاد شهریاری که سخنران بعدی بود گفت: من می‌گویم کنکور کل مملکت را ویران می‌کند.

این روزها دانش‌آموزان متوسطه دوم و متوسطه اول که هیچ، حتی دانش‌آموزان ابتدایی نیز در نگرانی و رویارویی با غولی شبیه غول کنکور هستند. نه به‌خاطر سختی سؤال‌های آن، بلکه به خاطر این‌که معلوم نیست این سؤال‌ها، از کجا می‌آیند.

بنده به‌عنوان معلم ریاضی با ۲۰ سال سابقه تدریس، درباره درس‌های دیگر نمی‌توانم نظری بدهم. آنچه اشاره می‌شود، در مورد سؤال‌های ریاضی آزمون‌های ورودی مدارس استعدادهای درخشان و نمونه دولتی و شاهد است.

اصلاً کاری با آزمون‌هایی که مؤسسات مختلف برگزار می‌کنند ندارم، که در بسیاری از آن‌ها از مطالبی سؤال مطرح می‌شود که نه تنها دانش‌آموز، بلکه معلم هم نمی‌داند این سؤال‌ها از کجا آمده‌اند. البته هدف این قبیل آزمون‌ها، مشخص است؛ ایجاد رقابتی ناسالم در بین دانش‌آموزان، ایجاد حس نیاز به کلاس‌های فوق‌العاده و ویژه با هزینه‌های بالا، یافتن مشتری برای فروش کتاب‌های کمک‌درسی و در یک کلام، کسب درآمد. اما به قیمت ایجاد فشارهای روحی و روانی به بچه‌هایی که سرمایه‌های این مملکت و آینده‌سازان آن هستند و ایجاد نگرانی در خانواده‌های آن‌ها و بی‌ارزش کردن زحمت‌های معلمان دلسوز مدارس، بی‌اهمیت شدن کتاب‌های

درسی و به حاشـــیه رفتن آن‌ها (کتابی که این همه برای آن زحمت کشیده شده و ما که با مؤلفان محترم در ارتبـــاط بودیم، گوشـــه‌ای از این تلاش‌ها را لمس کردیم. البته نمی‌خواهم بگویم کتاب‌های درسی بدون اشکال هســـتند، اما به‌عنوان منبع و مرجع اصلی ما، تلقی می‌شوند.)

مؤلفـــان و ناشـــران برخـــی از ایـــن کتاب‌های کمک‌درسی را چه می‌شـــود؟ وقتی در دوره آموزش بررســـی کتاب ریاضی نهم بـــا مؤلفان کتاب صحبت می‌کردیم که چرا فلان مطلب در کتاب نیامده است، جواب می‌دادند که در ســـال‌های بعد (متوسطه دوم) خواهد آمد.

مثـــلاً در بحث اتحاد و تجزیـــه در کتاب ریاضی پایه نهم، اتحادهای مربع دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای و مزدوج و جمله مشـــترک آمده اســـت و بقیه اتحادها برای سال‌های بعدی در نظر گرفته شده است. اما چرا در کتاب‌های کمک‌آموزشی، انواع اتحادها مثل مکعب دوجمله‌ای و مجموع و تفاضـــل مکعبات دو جمله و لاگرانژ و اویلر و نظایر آن که حتی دانش‌آموزان رشته ریاضی هم از آن بی‌خبرند، مطرح می‌شـــود؟ هدف و انگیزه چیست و پیامد آن چه خواهد بود؟ دانش‌آموز با دیدن این مطالب چه احساسی نسبت به کتاب و معلم و مدرســـه پیدا می‌کند؟ معلم هـــم نمی‌داند چه باید بکند؟ کتـــاب را درس بدهد یا مطالب خارج از کتاب را؟ و اصولاً چه چیزِ خارج از کتاب را آموزش دهد؟

بعضـــی از کتاب‌ها هم که در جلو سؤال‌هایشـــان نوشـــته‌اند: «ســـؤال کنکور»! نمی‌دانـــم دانش‌آموز متوسطه اول را چه به کنکور؟ حالا ما مطالب کنکوری را به دانش‌آمـــوزان آموزش دهیم یـــا مطالب کتاب درسی را؟

بگذرم. سال‌های گذشته، وقتی دانش‌آموزانی که خـــود را برای آزمون آماده می‌کردند از ما خواســـتار معرفی کتاب می‌شدند، بهترین گزینه بانک سؤال‌های آزمون‌های قبلی بود. اما اکنون دانش‌آموزان ما همان منبع را هم در اختیـــار ندارند و بعید می‌دانم اگر هم داشته باشند، به دردشان بخورد.

دانش‌آموزانی را ســـراغ دارم که آزمون‌های تمام استان‌ها را می‌خواندند و حل می‌کردند و با اطمینان به جلســـه امتحـــان می‌رفتند، اما با دیـــدن دفترچهٔ سؤال‌ها، شـــوکه می‌شدند، چون هیچ سؤالی برایشان آشنا نبود.

هدف این قبیل آزمون‌ها، مشخص است؛ ایجاد رقابتی ناسالم در بین دانش‌آموزان، ایجاد حس نیاز به کلاس‌های فوق‌العاده و ویژه با هزینه‌های بالا، یافتن مشتری برای فروش کتاب‌های کمک‌درسی و در یک کلام، کسب درآمد. اما به قیمت ایجاد فشارهای روحی و روانی به بچه‌هایی که سرمایه‌های این مملکت و آینده‌سازان آن هستند

در آن موقـــع، چـــه حالی به دانش‌آموز دســـت می‌دهـــد؟ چه تصوری از مدرســـه و معلم و کتاب در ذهن او نقش می‌بندد؟

روی سخن با سیاست‌گذاران و طراحان آزمون‌های مختلـــف آموزش‌وپـــرورش به‌خصـــوص آزمون‌های ورودی مدارس خاص اســـت. بدانید معلمان دلسوز و زحمت‌کـــش، همه تلاش خود را به‌کار می‌گیرند تا به نحو احســـن، مطالب کتاب درسی را به دانش‌آموزان آمـــوزش دهند. هر چه‌قدر هم که ســـؤال‌های شـــما سخت و پیچیده باشد، بهتر از این است که از خارج از کتاب و از مطالبی باشـــد که روح دانش‌آموز و معلم او هم از آن بی‌خبر است.

شاید طراحان سؤال‌ها در سال‌های قبل، در جلسه آزمون‌ها نبوده‌اند تا شاهد ســـردرگمی و حتی گریه دانش‌آموزان، هنگام دیدن این قبیل ســـؤال‌ها باشند. چرا بعضی‌ها ســـؤال‌ها را طوری طراحی می‌کنند که انگار می‌خواهند دمار از روزگار دانش‌آموزان در آورند و از آن‌ها و معلمشان انتقام بگیرند.

بـــاور کنید در کلاس‌های گوناگون، وقتی با قیافه معصوم دانش‌آموزان روبه‌رو می‌شـــوم، این اضطراب و ترس را در چهره آن‌ها مشاهده می‌کنم.

ان‌شـــاءالله با برگزاری آزمون‌هـــا و امتحان‌هایی استاندارد و در حد و حدود کتاب‌های درسی و اطلاعات دانش‌آموزان، زحمت‌هـــا و تلاش‌های دانش‌آموزان و خانواده‌ها و معلمان سرزمین‌مان را ارج بنهیم.

مواجهه کلاس اولی‌ها
با آموزش رسمی

فاطمه فرجیان‌پور، دبیر ریاضی

اینجانب به عنوان فارغ‌التحصیل رشتهٔ آموزش ریاضی، رسالت خود می‌دانم که به مسائل آموزشی اطرافم توجه داشتم باشم و به توصیهٔ استاد عزیزمان سعی در این داشتم که روایت‌های آموزشی‌ام را مکتوب کنم.

این روزها که به پایان سال تحصیلی نزدیک می‌شویم، بسیاری از خانواده‌هایی که کودکانی در دوره پیش‌دبستانی دارند، دغدغه دارند که در کدام مدرسه، کودک خود را ثبت‌نام کنند. آنان باورشان این است که کلاس اول، پایهٔ مهمی است و اگر دقت کافی در انتخاب مدرسه صورت نگیرد، منجر به تبعات جبران‌ناپذیر می‌شود و به این دلیل، شروع می‌کنند به پرس‌وجو که کدام مدرسه بهتر است؟ حال اینکه معیار آن‌ها برای انتخاب بهتر بودن چیست، خودش موضوع دیگری است. مدرسه معروف از این نظر که دیگرانی مهر تأیید را به آن می‌زنند به‌عنوان مدرسه بهتر انتخاب می‌شود و در شهرهای کوچک‌تر که جمعیت آن‌ها نسبت به شهرهای بزرگ کمتر است، تعداد مدرسه‌های معروفشان هم کمتر است به‌طوری که در شهر اینجانب، یک مدرسه معروف در دورهٔ ابتدایی است. در پایه اول دبستان ۸۰ نفر ثبت‌نام می‌کنند و مدیر مدرسه اعلام می‌کند که مدرسه، ظرفیت ۲۴دانش‌آموز پایه اولی را داراست. حالا در مرحلهٔ دوم باید از بین ۸۰ نفر دانش‌آموز، ۲۴نفر انتخاب شوند. در این شرایطِ به‌وجود آمده، تصمیمی باید اتخاذ شود و این تصمیم بر عهدهٔ مدیر آموزشی مدرسه است. روایت من، تصمیمی است که توسط مدیر محترم آموزشیِ مدرسه انجام شد.

از طرف مدرسه اعلام شد که یک آزمون تستی برگزار خواهد شد و دانش‌آموزان پیش‌دبستانی در این آزمون، هوششان به محک گذاشته خواهد شد. در نهایت افرادی صلاحیت ورود به این مدرسه را خواهند داشت که هوش بالایی نسبت به بقیه داشته باشند و در ادامه تأکید شد که «مادرها! لطفاً با بچه‌ها تست کار کنید!!»

این تصمیم آموزشی برای برون رفت از شرایط اتخاذ شده که قطعاً هدف اصلی‌اش، کودکان معصومی هستند که درکشان از مدرسه و آموزش در حال شکل‌گیری است، کودکان وارد رقابت آموزشی می‌شوند که نتایج‌اش در آینده، می‌تواند قابل تأمل باشد. با توجه به بررسی‌های انجام شده توسط اینجانب، در بسیاری از مدارس ابتدایی، هم‌اکنون آزمون‌هایی برگزار می‌شود تا به تعدادی دانش‌آموز مجوز حضور در یک مدرسه خاص داده شود. من به‌عنوان دانش‌آموزِ گذشته که بارها در دوران دبیرستان در این آزمون‌ها شرکت کردم و تجربه‌های ناخوشایندش، هنوز هم بر زندگی‌ام سایه انداخته، احساس خطر می‌کنم که این رقابت‌ها، به دوران ابتدایی هم کشیده شده است.

کودکانی ناخواسته وارد این مسیر آموزشی می‌شوند و لذتی که می‌تواند همراه با تعامل و همکاری با دیگر دوستانشان باشد، برایشان تبدیل به رقابت‌های خصمانه می‌شود. «وای به روزی که یک جامعهٔ آموزشی، خطا کند و حتی صادقانه، مسیرهای اشتباهی برای آموزش کودکان انتخاب نموده یا به هر علت، راه را گم کند»! (زهرا گویا، ۱۳۹۵).

گزارش همایش

آسیب‌شناسی و برنامه‌ریزی در رابطه با کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران

انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی سراسر کشور، تعامل سرگروه‌های ریاضی استان‌ها با دبیرخانه راهبری ریاضی

۲۰ و ۲۱ آبان ۱۳۹۵

نرگس عصارزادگان
دبیر ریاضی اصفهان

دبیرخانهٔ کشوری راهبری درس ریاضی با همکاری ادارهٔ آموزش‌وپرورش و خانهٔ ریاضیات اصفهان، همایش سرگروه‌های ریاضی استان‌ها را در تاریخ ۲۰ و ۲۱ آبان‌ماه ۱۳۹۵ با هدف هم‌اندیشی در راستای تعیین چشم‌انداز و خطوط کلیِ اهداف دبیرخانه، آسیب‌شناسی و برنامه‌ریزی در رابطه با کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران، همکاری انجمن‌های علمی و گروه‌های آموزشی و بررسی وضعیت کلی آموزش ریاضی در دبیرستان‌ها برگزار کرد.

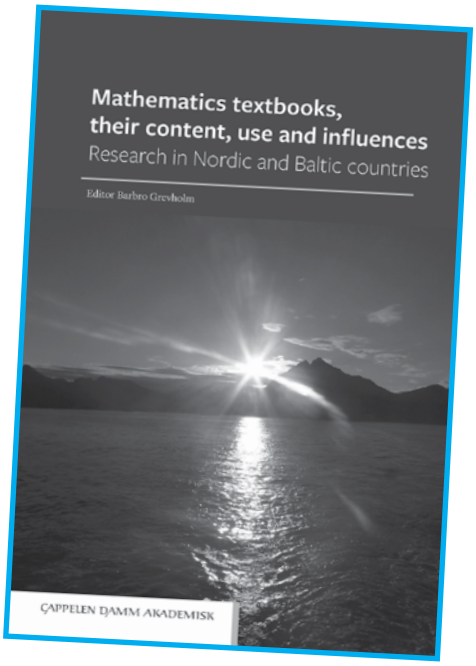
برنامه‌های همایش صبح روز پنج‌شنبه در محل تالار میرزاخانی خانه ریاضیات اصفهان آغاز شد. برنامه با برگزاری جلسات موازی ادامه یافت. جلسهٔ «بحث پیرامون اتحادیهٔ انجمن‌ها و فعالیت‌های آن‌ها» مخصوص اعضای انجمن و جلسهٔ «ارائه اهداف دبیرخانه با رویکرد برنامه عملیاتی و استماع نظر سرگروه‌های ریاضی کشور» مخصوص سرگروه‌ها با حضور آقای شیرزادی کارشناس مسئول دفتر نظری وزارت آموزش‌وپرورش برگزار شد. سرگروه‌های استان‌ها در گروه‌های چهار نفره روی تدوین برنامهٔ عملیاتی دبیرخانه به بحث و تبادل نظر پرداختند و سپس نماینده‌ای از هر گروه نظرات و پیشنهادهای گروه را ارائه دادند.

جلسات بعد از ظهر انجمن‌ها با حضور شورای علمی خانه ریاضیات آقایان دکتر رجالی، دکتر خردپژوه، دکتر رفیع‌پور و خانم‌ها دکتر گویا و دکتر غلام‌آزاد با موضوع «بررسی مسائل و مشکلات کنفرانس‌ها و ارائه راه‌حل» ادامه یافت.

حاصل این گفت‌وگوها، تدوین آیین‌نامه‌ای برای چگونگی برگزاری کنفرانس‌های سالانه آموزش ریاضی شد که قرار است با لحاظ کردن نظرات، نهایی شود.

در این همایش، چند برنامه دیگر از جمله شرکت سرگروه‌ها در کارگاه «تصحیح اوراق»، کارگروهی، تاریخ ریاضیات و حل مسئله نیز به طور موازی، برگزار شدند.

کتاب‌های درسی: محتوا، استفاده و تأثیرگذاری آن‌ها: پژوهش انجام شده در کشورهای اسکاندیناوی و بالتیک



مشخصات اثر:

نام کتاب: کتاب‌های درسی: محتوا، استفاده و تأثیرگذاری آن‌ها: پژوهش انجام شده در کشورهای اسکاندیناوی و بالتیک

شماره ISBN: ۹۷۸۸۲۰۲۵۶۶۲۹۶
ناشر: Cappelen Damm Academic
چاپ اول: ۳۱ آگوست ۲۰۱۷
نشانی وبگاه: www.cda.no

در کشورهای اسکاندیناوی و بالتیک، بیشتر از سایر جاها، استفاده از کتاب‌های درسی توسط معلمان و دانش‌آموزان، متداول است. در نتیجه، انجام پژوهش دربارهٔ کتاب‌های درسی ریاضی، به منظور پیدا کردن راه‌هایی برای بهبود آن‌ها، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. شبکهٔ پژوهش در مورد کتاب‌های درسی ریاضی در کشورهای اسکاندیناوی و بالتیک، چندین مطالعه در این حوزه انجام داده است که گزارش تعدادی از آن‌ها، در این کتاب آمده است. نتیجه‌گیری این پژوهش‌ها برای معلمان، سیاست‌گذاران، تولیدکنندگان برنامه‌های درسی، آموزشگران معلمان، دانشجو- معلمان و برای بهبود یادگیری ریاضی در تمام سطوح آموزشی، ارزشمند است.

مؤلفان این کتاب، همگی محققان و استادان برجسته‌ای هستند و به خوبی، با تدریس ریاضی در مدرسه، آشنایی دارند. این کتاب و گزارش‌های آن، هم مبتنی بر مطالعات علمی/ نظری و هم تجربی است. آنچه که این پژوهشگران ارائه کرده‌اند، به وضوح نشان می‌دهد که امکان بالقوهٔ عظیمی برای بهبود کتاب‌های درسی ریاضی وجود دارد که می‌توان از این طریق، یادگیری ریاضی را برای دانش‌آموزان، تسهیل کرد.

در زیر، مشخصات کتاب و چگونگی تهیه آن، آمده است:

آیا این کتاب، منبع جدیدی برای ادبیات حوزهٔ برنامهٔ درسی محسوب می‌شود؟ در صورت تمایل، می‌توان از طریق نشانی پیام‌نگار زیر، یک نسخه برای ارزیابی، دریافت کنید:

kjersti.bjerkas@cappelendamm.no

در شماره ۱۲۷ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در صفحه‌های ۷۴ و ۷۵ شجره‌نامهٔ علمی خانم مریم میرزاخانی چاپ شده که متأسفانه در مدت زمان کوتاه آماده‌سازی مجله موفق نشدیم که نویسنده این مطلب را پیدا کنیم و نام ایشان را ذکر کنیم. خوشحال هستیم که اکنون می‌توانیم جناب آقای دکتر سید احمد موسوی تهیه‌کننده این مطلب را معرفی کنیم.

نامه‌های رسیده

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان مهر ۱۳۹۶، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- سمیه عاشوری، از املش؛
- رضا حسینی، از املش؛
- ربابه عبادی، از خراسان جنوبی؛
- حدیثه داوری فریمانی، از خراسان جنوبی؛
- امین کشاورز، از شیراز؛
- اسرافیل احدپور، از تهران؛
- وحید عالمیان، از تهران؛
- بهنام آیتی‌پور، از دزفول؛
- نرگس عصارزادگان، از اصفهان؛
- لیلا صالحی، از کرج؛
- سید نبی‌الله قاسم‌تبار، از آذربایجان شرقی؛
- زهره صفار، از گرگان؛
- مصطفی توکلی، از اراک؛
- سارا اسلامی، از گنبد؛
- آزیتا احمدی، از آمل؛
- محمد علی‌پور فتحکوهی، از فومن؛
- فاطمه قومنجانی، از کاشمر.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماه‌نامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد نوآموز برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

به‌صورت ماه‌نامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد برهان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد جوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم
- رشد برهان متوسطه دوم برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی
◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

◆ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی
◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی
◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا
◆ رشد آموزش زبان‌های خارجی ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک
◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد مدیریت مدرسه
◆ رشد آموزش فنی‌وحرفه‌ای و کاردانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و...، تهیه و منتشر می‌شود.

◆ **نشانی:** تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش‌وپرورش، پلاک ۲۶۶.
◆ **تلفن و نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸ ـ ۰۲۱
◆ **وبگاه:** www.roshdmag.ir

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

128 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.35 no.2 2017 ISSN:1606-9188

2. Editors' Note by: Z. Gooya

4. Maryam Mirzakhani (1077-2017): Pioneering Mathematician and Winner of the Fields Medal by: K. Rafi, Trans by F. Hajazizi

6.Integrating Geometric & Algebraic Methods in High School Mathematics by: H. R. Fazlollahi

14. Solving Few Probability Problems by S. J. Bakhshayesh

20. Mathematics History of Khuzestan (Iran) Interview with Mohammadreza Fatemi

26. Connection Standard of NCTM for Grades 9 - 12 Trans by B. Aayatipour

29. Using Geogebra to Improve Teaching of Trigonometric Periodic Functions by A. Asgari & S. S. Mirmoieni

35. Two Key Concepts of Elementary Mathematics Trans. by:M. H. Ghasemi

42.Sweetness of Mathematics Lesson in Soccer Field by H. Dehghan

44. Using Hand- made Manipulative to Teach Volume by S. Bahreini

46. Educational Games & Mathematics Education by M. Bahaloo

50.Designing Mathematics Problem Creatively by T. Moieni; D. Kalhor & J. Avaz Sigari

53. Reviewing New Grade 10 Math Textbook; 1st Edition: 1395/2016 by Esfand Maleeh Maleki

58. Heading where so Fast! by M. Rasekhi Kazerooni

60. When 1st Graders' Encounter Formal Education by F. Farajianpour

61. Report of Meeting for further Planning of IMEC's by N. Asarzadegan

62. Book Review **by Z. Gooya**

63. Letters

Managing Editor: Mohammad Naseri
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Pari Hajikhani
Editorial Board:
Sayyed Hasan Alamolhodaei, Hamidreza Amiri, Esmaiel Babolian, Mohammad Reza Fadaie, Soheila Gholamazad, Mehdi Radjabalipour, Mani Rezaie, Shiva Zamani, Bijan Zangeneh.
Graphic Designer: Mehdi Karimkhani
www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

اقتصاد مقاومتی؛ تولید و اشتغال

رشد برای رشد

نحوهٔ اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: **www.roshdmag.ir** و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛

۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

◆ عنوان مجلات درخواستی:

.....

◆ نام و نام خانوادگی: .....

◆ تاریخ تولد: ..... ◆ میزان تحصیلات: .....

◆ تلفن: .....

◆ نشانی کامل پستی: .....

استان: ..... شهرستان: .....

خیابان: .....

پلاک: ..... شمارهٔ پستی: .....

شمارهٔ فیش بانکی: .....

مبلغ پرداختی: .....

◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:

.....

امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵
● تلفن بازرگانی: ۸۸۸۶۷۳۰۸-۰۲۱
● Email: Eshterak@roshdmag.ir

◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

In Memory of Professor Maryam Mirzakhani

A memorial service will be held at 3:00 pm, Saturday, October 21st at CEMEX Auditorium on the Stanford campus. In lieu of flowers, donations may be sent to the Maryam Mirzakhani Memorial Fund at Stanford University. More information will be forthcoming.

Seating is **very** limited. The memorial will be available on a live webcam feed via

https://youtu.be/IUfB2HadIBw

Hosted by: Stanford Mathematics Department and the Mathematics Research Center

استاد هنرشناس، «زیبایی ریاضی» را دید

بخش‌هایی از متن منتشرشده برای اعلام مراسم سوگواری اولین زن برندهٔ جایزهٔ فیلدز[1]

انجمن فارغ‌التحصیلان دانشگاه استانفورد

در عالم انتزاع، نبوغ استاد دانشگاه استانفورد پروفسور مریم میرزاخانی، برای کسانی که خارج از آن عالم هستند، قابل تشخیص نیست و تنها یک کُد است.

به زبان ساده‌تری که «نیویورکر» بیان کرده، او «یک نابغه در هندسه و دینامیکِ سطوح پیچیده» بود. افزون بر این، وی یک قهرمان بود: تنها زن - و تنها ایرانی - که برندهٔ مدال برجستهٔ ریاضیِ فیلدز شد.

در تابستان امسال، مرگ او بر اثر سرطان در سن چهل سالگی، جهان را اندوهگین نمود. رئیس دانشگاه استانفورد مارک تِسین لَوین، در رثای وی گفت که «مریم خیلی زود رفت، اما تأثیر وی بر هزاران زنی که مشوقشان بود تا وارد حوزه‌های ریاضی و علوم بشوند، ادامه خواهد داشت».

کسی که دیر وارد دنیای ریاضی شد و در رویایش، خود را نویسنده می‌دید، خود را با ریاضی محشور نمود و از همان موقع، به وضوح روشن بود که آیندهٔ سرافرازی خواهد داشت.

این سرافرازی، به زودی خود را نشان داد و از رسالهٔ دکتری وی در سال ۲۰۰۴ در دانشگاه هاروارد، به عنوان یک شاهکار، تقدیر شد، زیرا توانسته بود که برای دو مسئله که مدت‌های طولانی حل نشده بودند، راه حل پیدا کند. نتیجهٔ رسالهٔ مریم، در سه مجله سرآمد ریاضی، چاپ شد، اتفاقی که به گفتهٔ یکی از ریاضی‌دان‌های دانشگاه شیکاگو به نام بِنسون فارب، «اکثر ریاضی‌دان‌ها، هرگز چیزی به این خوبی، چاپ نمی‌کنند.»

در سال‌های اخیر، او روی پدیده‌ای کار می‌کرد که برای مدت‌های طولانی، فیزیک‌دان‌ها سعی کرده بودند از آن، رمزگشایی کنند: مسئله خط سیر یک توپ بیلیارد حول یک میز چندضلعی. نتیجهٔ آن تحقیق به ظاهر ساده، یک مقالهٔ ۲۰۰ صفحه‌ای شد که تحسین‌برانگیز است و از آن، به عنوان «یک کار تایتانیک» یاد می‌شود.

میرزاخانی ریاضی‌دان «کُند»، روی ورق‌های بزرگ کاغذ، خط خطی می‌کرد و می‌کشید و دور و بر چیزهایی که می‌کشید، فرمول‌هایی می‌نوشت، فرایندی که دختر کوچکش آن را «نقاشی» کردن می‌نامید.

یک بار، میرزاخانی گفته بود که برای دیدن زیباییِ ریاضی، باید مقداری تلاش کنید و انرژی بگذارید.»

مراسم بزرگداشت مریم میرزاخانی، روز ۲۱ اکتبر ۲۰۱۷ (۳۱ مهر ۱۳۹۶)، در دانشگاه استانفورد برگزار می‌شود و به دلیل ازدحام جمعیت پیش‌بینی شده، شرکت در این مراسم، با دعوت است و در همین حال هم، علاوه بر یک سالن ششصد نفری، سه سالن با تلویزیون مداربسته نیز برای این مراسم، در نظر گرفته شده است.

به شهادت آنچه که تا به حال، در مورد خدمات مریم میرزاخانی گفته شده است، نقش وی در پیش‌برد ریاضی، ماندگار است و بخش مهمی از تاریخ ریاضی را به خود اختصاص خواهد داد. وظیفهٔ ما هم این است که نگذاریم خاطرهٔ این انسان بی‌بدیل، فراموش شود. در عوض، کمک کنیم که این پدیدهٔ کمتر تکرارشدنی در سطح جهانی، تا همیشه، منبعِ الهام ریاضی‌دان‌های جوان باقی بماند و با ارائه تحلیل‌های دقیق از زندگی و پژوهش و معلمی‌اش، به نسل‌های آینده فرصت دهیم تا با چهرهٔ انسانیِ ریاضی، آشنا شوند و از آن، بیاموزند. دانشگاه استانفورد برای تداوم کار مریم میرزاخانی، صندوقی به نام وی تأسیس کرده و از شرکت‌کنندگان در این مراسم یا کسانی که امکان حضور نیافته‌اند، خواسته است که به جای گُل، مبلغ آن را به این صندوق، اهدا کنند.

میزبان این مراسم، گروه ریاضی دانشگاه استانفورد و مرکز پژوهش ریاضی آن دانشگاه است.

پی‌نوشت

۱. چاپ شده در مجلهٔ انجمن فارغ‌التحصیلان دانشگاه استانفورد، سپتامبر ۲۰۱۷

پنجم دی روز ملی ایمنی در برابر زلزله و کاهش اثرات بلایای طبیعی

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)