



رشد آموزش

ریاضی ۱۳۰

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی | برای معلمان، مدرسان و دانشجویان
دوره سی و ششم شماره ۱ پاییز ۱۳۹۷ ۶۴ صفحه | ۱۹۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۸۹۹۵۰۳
www.roshdmag.ir

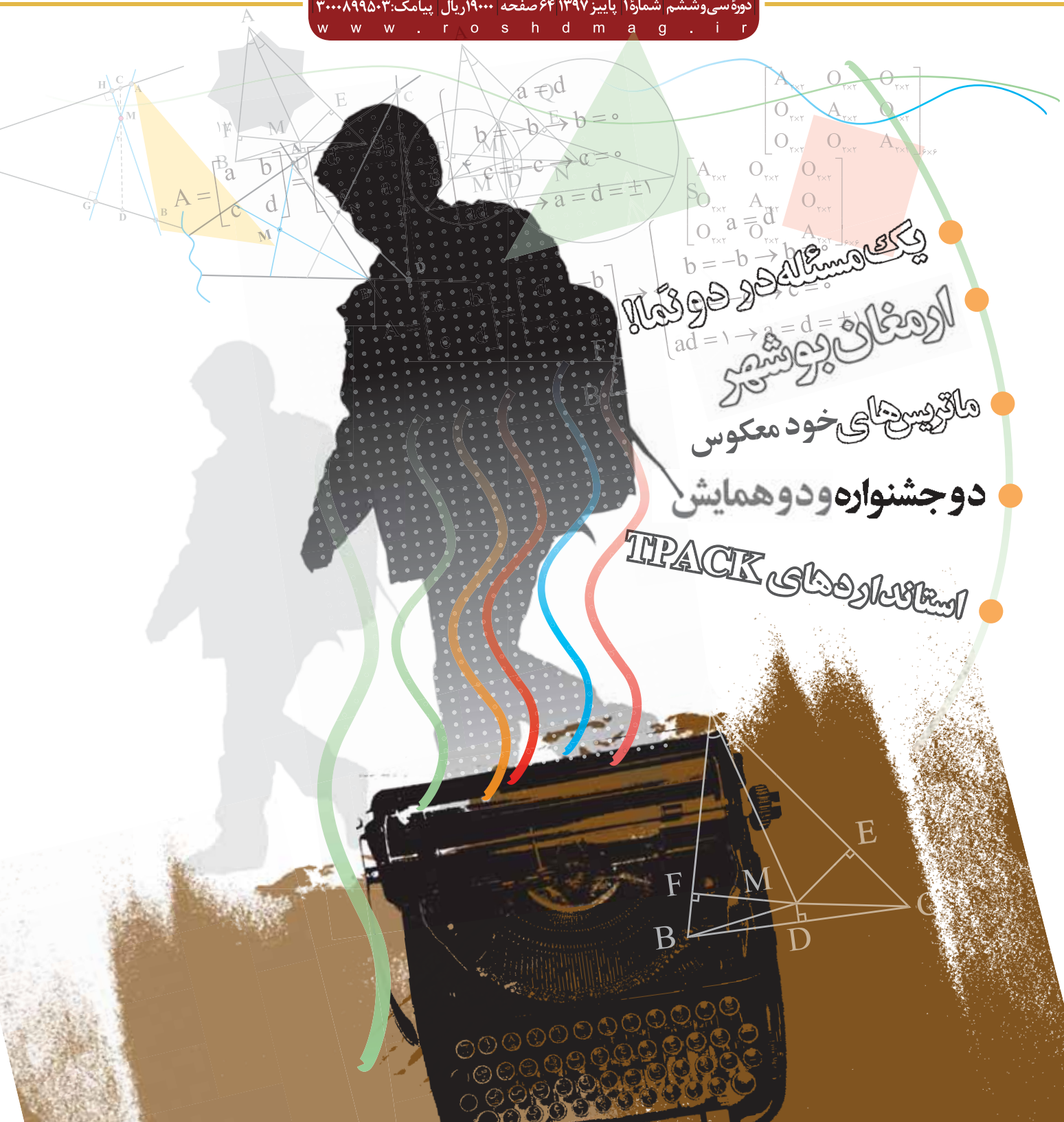
یک مسئله در دو نما!

ارمغان پرورش

ماتریس‌های خود معکوس

دو جشنواره و دو همایش

استانداردهای TPACK



میراث ریاضی مریم میرزاخانی



به مناسبت بزرگداشت اولین سالگرد عروج ناگهانی مریم میرزاخانی، دانشگاه استنفورد، در روزهای ۱۸ تا ۲۰ ماه می ۲۰۱۸، میزبان کنفرانسی بود تا سهم و میراث قابل توجه و چشمگیر میرزاخانی را به ریاضی و جامعه ریاضی، ارج نهد. امیدواریم که این کنفرانس، هم یادآور دستاوردهایی باشد که مریم برایمان به جای گذاشت، و هم نگاهی اجمالی بر چگونگی ادامه کارهایش در آینده باشد.

۱۴ ریاضی‌دان در این کنفرانس سخنرانی کردند که در بین آن‌ها، ایمی ویلکینسون (استاد ریاضی، که مقاله وی را با عنوان «با برف‌دانه و تک‌شاخ‌ها، مارینا راتنر و مریم میرزاخانی جهان در حال حرکت را کشف کردند!» در همین شماره از مجله می‌بینید)، آکس اسکین (همکار تحقیقی مریم)، کورتیس مک‌مولان (استاد راهنمای مریم)، امیر محمدی (همکار مریم) و کسرا رفیع، ریاضی‌دان ایرانی که در شماره ۱۲۹ مجله رشد آموزش ریاضی، ترجمه نوشته‌اش در مورد مریم به چاپ رسید، بودند. قابل توجه است که مقاله مشترک مرحوم میرزاخانی و آکس اسکین که بیش از ۲۰۰ صفحه است، پس از اینکه داوری آن سه سال طول کشید، امسال منتشر شد. برای اطلاعات بیشتر راجع به این کنفرانس می‌توانید به آدرس زیر مراجعه کنید:

<http://www.abc.net.au/news/science/201807-01/-maryam-mirzakhani-a-brilliant-mathematician-remembered/9240684>

رشد آموزش

ریاضی

۱۳۰

مدیر مسئول: محمد ناصری

سر دبیر: زهرا گویا

هیئت تحریریه: طاهره اسدی، حمیدرضا امیری (نماینده گروه ریاضی دفتر تألیف)، اسمعیل بابلیان، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و محمدرضا فدائی

مدیر داخلی: پری حاجی خانی

طراح گرافیک: مهدی کریم خانی

| فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی |
| برای معلمان، مدرسان و دانشجویان |
| دوره سی و ششم | شماره ۱ | پاییز ۱۳۹۷ |

زهرا گویا	۲	سخن سر دبیر: فراز و فرود اقبال دانش آموزان به ریاضی: یک مسئله در دو نما!
ترجمه: فاطمه حاج عزیز، زهرا گویا	۴	استانداردهای TPACK آموزش معلمان و مدل توسعه
مهدی رجبعلی پور	۱۳	ارمغان بوشهر
جابر مختاری دهقادی	۱۶	ماتریس های خود معکوس
سید جمال بخشایش، رضا منصوری، مسعود جوانبخش	۱۸	رسم نیمساز یک زاویه بدون گوشه
ایمی ویلکینسون، ترجمه: فاطمه حاج عزیز، زهرا گویا	۲۲	با برف دانه ها و تک شاخ ها، مارینا راتنر و مریم میرزخانی، جهان در حال حرکت را کشف کردند!
علی رجالی	۲۵	یادگیری مستمر معلمان
مصاحبه کننده: بهنام آیتی پور	۲۸	ریاضی بسیط یا مکتب ریاضی
مریم بهاء لوی	۳۴	ماجرای بازرسی
کاظم عبدالله پور	۳۶	خلاقیت زهرا، طلوع دوباره امید
سید محمد غلامزاده محمودی	۳۸	اشتباهات، مغالطه ها و سفسطه های ریاضی
اسماعیل جزایری	۴۲	از متروی شهری تا مدل سازی ریاضی
علی روزدار	۴۳	نگرشی بر کمیت و کیفیت آموزش معلمان
محمد مهدی درّی	۴۷	فکر کن توی این موقعیت هستی! ببین جواب درسته؟!۱
مریم مؤمن زاده، فرنیاشراقی، الهام شیخان، منصوره عباد	۵۰	حل چند تمرین از فصل ۴ هندسه پایه دهم به کمک نرم افزار جئوجبرا
رقیه رزمی، مینا شاد کام	۵۶	تدریس مفهوم کسر و کسرها ی مساوی با ابزار آموزشی
مانی رضائی	۵۸	دو جشنواره و دو همایش در دانشگاه فرهنگیان
مصطفی سپهرابلو	۶۰	طراحی و رسم توابع ریاضی و اشکال هندسی به کمک نرم افزار
	۶۳	نامه های رسیده

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۱۶۱-۸۸۳۱ (داخلی ۳۷۵) ● ویرانه: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir
● پیام نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ ● تلفن پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیر مسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴
● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۲۳۳۱ ● تلفن امور مشترکین: ۸۸۶۷۳۰۸-۰۲۱ ● چاپ و توزیع: شرکت افست ● شمارگان: ۵۰۰۰

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه مقاله را به مترجم دیگری بدهد. در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود. ● بی نوشتها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد. ● چکیده ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. همچنین: ● مجله در پذیرش، رد و ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبنی نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.



فراز و فرود اقبال دانش آموزان به ریاضی:

یک مسئله در دو نما!

با این مقدمه طولانی، اجازه می‌خواهم که به ساختار زیربنایی دو مسئله‌ای که عنوان کردم، بپردازم. طی ۳۵ سال گذشته - یعنی از زمان تولد مجله رشد آموزش ریاضی - جامعه ما شاهد دو مسئله در رابطه با «فراز» و سپس «فرود» اقبال دانش آموزان به رشته ریاضی - فیزیک در دبیرستان و به تبع آن، در آموزش عالی بوده است که با وجود ساختار مشابهی که دارند، از نظر ماهیتی و زیرساختی، با هم فرق می‌کنند. منظورم از ساختار مشابه این است که اگر «موقعیت» و «زمینه» را در این دو مسئله نادیده بگیریم و آن‌ها را از محیط اجتماعی خود «منتزع» کنیم، هر دو به یک مسئله فروکاسته می‌شوند و در نتیجه، ممکن است تصور شود که راه‌حل قبلی، یعنی مسیری که برای تشویق دانش آموزان به رشته ریاضی - فیزیک طی شد، باز هم جواب می‌دهد. ولی همان‌طور که بروسو طی سال‌ها نشان داده است، اگر مسئله واقعی باشد و تحت تأثیر مداخله‌های انسانی به وجود آمده باشد، حل آن هم وابسته به متغیرهای متنوعی است که زائیده زمان و مکان و به تعبیر بروسو، موقعیت است. وقتی از ابتدای دهه ۱۳۶۰، نظام آموزشی و جامعه ریاضی از طریق انجام مطالعات کمی، متوجه شدند که سرعت ورود دانش آموزان به این رشته، به طرز فاحشی کند است و نرخ ورود به آن، با نیازهای کوتاه‌مدت و بلندمدت جامعه سازگاری ندارد، اعلام بحران کردند و آن را پدیده «افت ریاضی» نامیدند. با این کار، توجه همه متخصصان حوزه ریاضی

«برگرداندن مسئله به حالت قبل»، راه‌حل‌های مشابه پیدا کند! ولی در واقعیت، مسئله با پوشاندن رخت و لباس «عینی» و «لمسوس» و به کارگیری «زبان» و «تصویر» و نظایر آن‌ها، تبدیل به «مسئله دنیای واقعی» نمی‌شود. بلکه «زمینه^۲»، «موقعیت»، فرهنگ، جامعه و ده‌ها و ده‌ها مؤلفه دیگر هستند که مسئله را در دنیای واقعی، صورت‌بندی می‌کنند. بدین سبب، دیگر راهبردهایی چون «برگرداندن مسئله به حالت قبل»، به امید رسیدن بی‌دردسر به شرایط قبلی و سپس، استفاده از راه‌حل‌های پیشین، چیزی جز طنزی تلخ، نخواهد بود. گای بروسو^۳ در «نظریه موقعیت‌های آموزشی (پداگوژیک) در ریاضی»^۴ خود که در سال ۱۹۹۷ به زبان انگلیسی به چاپ رسید، یادگیری ریاضی را موقعیتی توصیف می‌کند که در آن، معلم - دانش آموز - محیط اجتماعی^۵ را به عنوان سه بازیگر کلیدی در تدریس و یادگیری ریاضی معرفی کرده که دو بازیگر اول، همیشه در حال بستن قراردادی برای فرایند یاددهی - یادگیری هستند که متکی و متأثر از موقعیت‌هاست. در این فرایند، معلم تلاش می‌کند که محیطی ایجاد کند تا دانش آموز، مسئله را از آن خودش کند و در آن صورت، موقعیت ویژه‌ای برای یادگیری ایجاد می‌شود که در آن، دانش آموز و معلم، در تعامل دائم با یکدیگر هستند تا یادگیری اتفاق بیفتد. به گفته بروسو، این موقعیت‌های آموزشی، همگی «منحصر به فرد»^۶ هستند و به این دلیل، محیط اجتماعی، بخشی از فرایند یادگیری ریاضی است.

در میان عادت‌های بسیار خوب و مثال‌زدنی‌ای که داریم، یک عادت ناپسند هم داریم! گاهی برای پیش‌بینی آینده، بدیهی‌ترین شواهد گذشته و حال را نمی‌بینیم و از آنان نمی‌آموزیم، و زمانی هم که به مصیبتی دچار می‌شویم، می‌خواهیم مسئله را به حالت اول برگردانیم و آن را حل کنیم! در ضمن، برای حل چنین مسئله‌های جدی، معمولاً به تفاوت زمان و مکان و زمینه پیدایش یا وجود مسئله‌ها، کمتر توجه می‌کنیم؛ مسئله‌هایی که با وجود شباهت ظاهری‌شان، به دلیل تفاوت «موقعیت»^۱ اکنون و حالا، از اساس با قبلی‌ها متفاوت‌اند. این نوع نگاه به حل مسئله ریاضی، از طریق طنزهای زیادی به نقد کشیده شده است. یکی از این طنزها، برای نشان دادن نگاه افراطی ریاضی‌دان‌ها به استفاده از این راهبرد برای حل مسئله، بدون در نظر گرفتن زمینه وقوع آن است که احتمالاً، همه شنیده‌اید. ولی به عنوان «تذکار» و تنبّه خودمان، بد نیست دوباره این طنز را در قالب سؤال و جواب بین یک فرد عادی و یک ریاضی‌دان برج عاجی غیر واقعی، با هم بشنویم! فرد عادی: اگه بخوای چای درست کنی، چکار می‌کنی؟

ریاضی‌دان: کتری رو از رو زمین برمی‌دارم، توش آب می‌ریزم، روی اجاق می‌ذارم. هر وقت آب جوش آمد، چای رو دم می‌کنم. فرد عادی: خوب اگر کتری توش آب بود و روی اجاق هم بود، اونوقت چه می‌کنی؟

ریاضی‌دان: اول کتری رو روی زمین می‌ذارم، مسئله به حالت اول برمی‌گرده! حالا می‌تونم مثل مسئله قبلی حلش کنم، کتری را از روی زمین بر می‌دارم ...!

این داستان به ظاهر طنز، بیان‌کننده هزاران قصه پر غصه است! رویکرد «حل مسئله» در ریاضی، بسته به زاویه دیدی که انتخاب کنید، می‌تواند دو مسئله‌ای را که در عنوان این یادداشت به آن اشاره شد، یکسان ببیند و در عالم انتزاع، برایشان با استفاده از راهبرد

را جلب نمودند و بالاخره، طی نیمه اول دهه ۱۳۶۰، چند اتفاق مهم رخ داد که چون خوب فکرشده و با برنامه و ابتکاری بود، در «تشویق» دانش‌آموزان به رشته ریاضی، بسیار مؤثر واقع شد. نخست آنکه از طریق همین مجله، آموزش ضمن خدمت معلمان ریاضی، در اولویت جدی قرار گرفت و به موازات برگزاری دوره‌های حضوری بازآموزی معلمان، مرتب برای تقویت موضوعی / آموزشی آنان، محتوا تولید می‌شد. قدم دیگری که در همین راستا برداشته شد، اجرای مسابقات ریاضی و تصمیم به شرکت ایران در «المپیاد بین‌المللی ریاضی» بود که این کار، فکر ایجاد مدارسی که بتوانند استعداد‌های برتر را در ریاضی شناسایی نموده و پرورش دهند، و مرکزی که این مسئولیت را به عهده بگیرد، ایجاد و عملی شد. همه این فعالیت‌های همسو، باعث پرورش و تولید میوه‌های شیرینی شد. بعد از آن، تعداد ورودی‌ها به رشته ریاضی-فیزیک، پیوسته و بدون توقف، سیر صعودی متوازی پیدا کرد تا آنکه در اواخر دهه ۱۳۸۰، درصد ورودی‌ها به رشته ریاضی-فیزیک در شاخه نظری، به حدود ۳۰٪ رسید و همین، باعث ایجاد تعادل در بدنه آموزش عالی هم شد. مسئله اما از جایی که راه‌حل پیدا کرده بود، مسئله‌ساز شد! ده‌ها و ده‌ها عامل بیرونی، بر کاهش انگیزه دانش‌آموزان، تأثیرگذار شدند و حالا، جامعه آموزشی، با مسئله جدیدی روبه‌رو شده است که اگرچه ظاهراًش با مسئله اوائل دهه ۶۰ نزدیک است، ولی با کمک گرفتن از نظریه موقعیت‌های آموزشی/پداگوژیکی ریاضی گای بروسو، می‌توان درک کرد که این مسئله با قبلی، از اساس ماهیتش متفاوت است.

برای نمونه، از جمله عوامل اثرگذار بر پایین بودن درصد ورودی‌ها به رشته ریاضی در مدرسه تا قبل از دهه ۱۳۶۰، می‌توان به تعداد اندک معلمان زبده ریاضی به‌خصوص معلمان زن، محدود بودن تعداد داوطلبان ورود به دانشگاه‌ها، نشناختن قابلیت‌ها و ظرفیت‌های بالقوه ریاضی و نقش آن در ارتقای مهارت‌های شهروندی، اشتغال و رضایت درونی آنان

اشاره کرد. در اغلب شهرهای ایران تا ۴۰ سال قبل، به سختی حتی یک دبیرستان با رشته ریاضی در سیکل دوم متوسطه، وجود داشت. خلاصه، عوامل اندک بودن اقبال دانش‌آموزان به رشته ریاضی آنقدر زیاد بود که وقتی در اواخر دهه هشتاد شمسی، به رقم ۳۰٪ ورودی به رشته ریاضی رسیدیم، یک پیروزی بزرگ در متعادل کردن آموزش متوسطه در ایران محسوب می‌شد و البته که در دنیا هم مثال‌زدنی بود.

با این وجود، به ناگهان ورق برگشت! (مگر می‌شود؟! و این بار، تعداد ورودی‌ها به رشته ریاضی، با سرعتی باورنکردنی و در کمتر از نیم دهه، چنان رو به افول نهاد که مسئولان آموزش رسمی، شروع به اعمال سازوکارهای موقتی و سلیقه‌ای و از همه مهم‌تر، استفاده از روش‌های گذشته در ترغیب دانش‌آموزان به رشته ریاضی کردند، ولی روند کاهشی با آنچنان سرعتی ادامه یافت تا آنکه برای سال تحصیلی ۱۳۹۷، مژده رسید که تعداد داوطلبان در گروه ریاضی و فنی در کنکور سراسری، به «۱۴۴ هزار و ۴۳۷ نفر» در مقابل «۶۴۲ هزار و ۲۲۸ نفر» در گروه علوم تجربی» و «تعداد ۲۰۴ هزار و ۹۳۶ نفر» در گروه علوم انسانی رسید. طبیعی است که وقتی این مسئله جدید را با حجم بی‌سابقه تبلیغات برای درس‌های ریاضی که دائم از همه جا شنیده و دیده می‌شود، کنار هم بگذاریم، بیشتر متعجب می‌شویم. به جای آنکه تشنگی را برای ریاضی بیشتر کنیم، آنقدر آب را زیاد کردیم تا همه چیز را شست و برد و حالا برایش مرثیه‌خوانی می‌کنیم. حل این مسئله که ظاهری شبیه به مسئله قبلی دارد، به سادگی امکان‌پذیر نیست. این اتفاق در ایران، آنچنان عظیم و در دنیا بی‌مثال است که نیازمند انجام مطالعات جدی با حضور زبده‌ترین‌های جامعه ریاضی و علوم انسانی است. سؤال اصلی این است که چگونه ممکن است بدون دستکاری‌های به اصطلاح ژنتیکی، ناگهان مسیر توسعه رشته‌ای را که نقش استراتژیک در هر کشوری دارد، تغییر داد؟ چه اتفاقی افتاده است؟ چرا بین هر

دو نیمه فوتبال جام جهانی، تبلیغات کتاب‌های کمکی و صد البته «طبق آخرین تغییرات کتاب‌های درسی» برای ریاضی و سایر درس‌ها، به گوش فلک هم رسید تا سال دیگر، شاهد یک افت دیگر و ناگهان، از ریشه‌کن شدن ریاضی در ایران شویم و بعد به عزایش بنشینیم؟ چرا باور نمی‌کنیم که بخش مهمی از این اتفاق، قابل پیش‌بینی بود و نکردیم کاری که باید می‌کردیم.

حالا می‌توانیم از تاریخ بیاموزیم و باور کنیم که مسئله‌ای جدی در رابطه با وضعیت ریاضی مدرسه‌ای و دانشگاهی در ایران داریم. ادامه این وضع، به بحرانی شدید منجر خواهد شد. بیائیم به جای مقصر قلمداد کردن «پزشکی» به‌عنوان متهم شماره یک این وضعیت اسفبار و ناعادلانه‌ای که برای ریاضی ایران پیش آمده، فراق‌کنی را کنار گذاشته و به ریشه‌یابی عمیق عوامل اثرگذار بر این وضعیت، بپردازیم. وقت زیادی باقی نمانده است. وقت آنقدر تنگ است که فردا دیر است و راه‌حل‌های سلیقه‌ای، تاریخ مصرف گذشته، بی‌اعتنا به واقعیت‌ها و موقعیت‌های امروزی، مسئله آموزش معلمان ریاضی، ولع شدید برای مقایسه و رتبه‌بندی و اول شدن و «مخ» شدن از طریق دریافت کمک‌های ویژه و ده‌ها روش تصنعی و البته بسیار سودآور، جواب نمی‌دهد. انجمن ریاضی ایران، فرهنگستان علوم، وزارت آموزش و پرورش، وزارت علوم، پژوهشگاه‌های علوم انسانی، علوم اقتصادی و علوم سیاسی و ده‌ها نهاد مرتبط دیگر، باید و باید که با هم، مسئله را جدی ببینند و برای حل آن، در گروه‌های تخصصی خوب انتخاب شده حقیقی- نه فقط حقوقی-هم‌اندیشی کنند و چاره‌ای بیندیشند. از دنیا بیاموزیم، از تاریخ خود یاد بگیریم و در یک کلام، نگذاریم این عزیز، از دست برود و بعد، برایش عزای با شکوه بگیریم! وقت زیادی باقی نمانده است.

پی‌نوشت‌ها

1. Situation

2. Context

در علوم تربیتی، از معادل «یافت» بیشتر استفاده می‌شود. ولی در آموزش ریاضی، همیشه از «زمینه» استفاده شده است.

3. Guy Brousseau

4. Theory of Didactical Situations in Mathematics

این کتاب، حاصل ۲۰ سال تلاش گای بروسو- از ۱۹۷۰ تا ۱۹۹۰- برای نظریه‌پردازی در مورد موقعیت‌های آموزشی در ریاضی است که به همت یک تیم مترجم قوی، به انگلیسی ترجمه شد و برای فهم و درک بهتر آن، پانویس‌های متعددی بنا به سنت «تحشیه‌نویسی» به آن اضافه شد و در سال ۱۹۹۷، توسط انتشارات کلور چاپ شد (در قرن جدید، این شرکت انتشاراتی، توسط اشپری‌نگر خریداری شد).

5. Milieu

6. Unique

۷. در مجله رشد آموزش ریاضی، بارها این مسئله و این بخش از تاریخ ریاضی مدرسه‌ای، با جزئیات به بحث گذاشته شده است.

استانداردهای TPACK



آموزش معلمان ومدل توسعه^۱

ترجمه: فاطمه حاج عزیز، کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهره گویا، استاد آموزش ریاضی

در سال ۱۹۸۶، لی شولمن با استفاده از یک سازه که آن را «دانش محتوایی پداگوژیکی»^{۱۲} نامید، مسیر جدیدی را درباره دانش مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی، آغاز کرد. این مسیر جدید، از اشتراک دانش محتوایی (دانشی که پیش تر، دانش اولیه برای معلمان در نظر گرفته می شد) و دانش پداگوژیکی (دانش مربوط به یاددهی و یادگیری) ایجاد شده است. اشتراک این دو حوزه دانش یا همان دانش محتوایی پداگوژیکی، به عنوان روشی برای بازنمایی و صورت بندی دانش موضوعی- دانشی که موضوع را برای یادگیرندگان ملموس و قابل درک می سازد- توصیف شده است (شولمن، ۱۹۸۶، ۱۹۸۷؛ ویلسون، شولمن و ریچرت، ۱۹۸۷). شولمن (۱۹۸۶) به طور مشخص تر، «دانش محتوایی پداگوژیکی» یک معلم را به عنوان دانش مباحثی که در یک زمینه موضوعی، بارها و مستمر تدریس شده اند، سودمندترین صورت بازنمایی آن ایده ها، و قدرتمندترین استدلال ها، تمثیل ها، تصویرها، مثال ها، توضیح ها، اثبات ها و نظایر آن، شامل دانش و توانایی معلمان نسبت به هر چیزی است که می توانند یادگیری مفاهیم خاص را، دشوار یا آسان سازند. این دانش، به توصیف مفاهیم و پیش فرض هایی می پردازد که یادگیری دانش آموزان را در سنین و پیش زمینه های مختلف، ممکن می سازد.

طی بحث های اولیه پیرامون چگونگی توسعه دانش تدریسی معلمان، برنامه های آماده سازی معلمان به چالش کشیده شدند. بعضی از این برنامه ها، به منظور توسعه شش حوزه اصلی دانش طراحی شده بودند که به نظر می رسید برای آموزش مؤثر معلمان، ضروری هستند. این دانش ها عبارت بودند از دانش موضوعی، دانش پداگوژیکی، دانش مربوط به مدرسه، دانش یادگیرندگان، دانش برنامه درسی و بالاخره، «دانش محتوایی پداگوژیکی» که ماهیت آن به نوعی، فصل مشترک پنج حوزه دانشی نام برده شده بود (نیس، ۲۰۰۱). این ارتباط، به عنوان یک ساختار پیچیده و یکپارچه در نظر گرفته می شد که در آن، هیچ

مارگارت نیس^۲، دانشگاه ایالتی اورگان؛
رابرت رونا^۳، دانشگاه لویی ویل؛
کاترین شافر^۴، دانشگاه ایالتی بال؛
شانون دریسکل^۵، دانشگاه دیتون؛
سوزان هارپر^۶، دانشگاه میامی؛
کریستوفر جانستون^۷، دانشگاه جورج میسون؛
کریستین برونینگ^۸، دانشگاه میشیگان غربی؛
آسلی اوزگان^۹، دانشگاه ایالتی وین؛
گلادیس کرسینت^{۱۰}، دانشگاه فلوریدا جنوبی

چکیده

برای آموزش ریاضی از طریق تکنولوژی های دیجیتال، چه دانشی مورد نیاز است؟ سازه جامعی که به آن تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی^{۱۱} گفته می شود، به عنوان اشتراک سه حوزه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی مطرح شده است. استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، در حقیقت راه کارهایی برای چگونگی تفکر راجع به این سازه ارائه می دهند. مدل توسعه حرفه ای معلمان ریاضی، به توصیف و توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی پرداخته و در راستای این استانداردها، تبیین شده است. این استانداردها و مدل تبیین شده مبتنی بر آن ها، به منظور کمک رسانی و پیشبرد کار گروه های مختلف، جزئیات ساختار یافته ای را در قالب پروپزال هایی فراهم کرده اند تا بتوانند معلمان، پژوهشگران، آموزشگران معلمان، مشاوران توسعه حرفه ای معلمان و مدیران مدارس را در توسعه و ارزیابی فعالیت های توسعه حرفه ای، برنامه های آموزشی ریاضی و فعالیت های ریاضی مدارس، راهنمایی کنند.

کلیدواژه ها: آموزش ریاضی، تکنولوژی های دیجیتال، استانداردهای تکنولوژی- پداگوژی و دانش محتوایی، مدل توسعه حرفه ای معلمان ریاضی

حوزه‌های به‌طور کاملاً متمایز یا مجزا از سایر حوزه‌ها، شمرده نمی‌شد و بیشتر، شامل مقداری همپوشانی و تعامل بین حوزه‌هایی بود که به‌طور مداوم، در حال تغییر بودند و به دانشجو-معلمان کمک می‌کرد که عوامل چندگانه تأثیرگذار را بر یادگیری دانش آموز، درک نموده و اولویت‌بندی کنند.

طی پژوهش‌های متعددی که در این حوزه و توسط پژوهشگران آموزش ریاضی انجام شد، دانش محتوایی پداگوژیکی که محتوای تلفیقی داشت، باعث ایجاد بینشی جدید برای آماده‌سازی توسعه دانش محتوایی پداگوژیکی دانشجو-معلمان ریاضی شد (بال، ۱۹۸۸؛ سیویل، ۱۹۹۲؛ گروسمن ۱۹۹۱؛ سایمن و برویک، ۱۹۹۳؛ سایمن و مازا ۱۹۹۳؛ ویلکاکس، ۱۹۹۰). برای نمونه، نتیجه پژوهش گراسمن (۱۹۸۹، ۱۹۹۰)، شناسایی و معرفی چهار مؤلفه اساسی دانش محتوایی پداگوژیکی بود که تمرکز آن‌ها، بر توصیف دانش‌هایی بود که لازم است در برنامه‌های پیش از خدمت معلم، لحاظ شوند. این چهار مؤلفه از این قرار بودند:

(الف) مفهوم جامعی از تدریس یک موضوع خاص
(ب) دانش بازنمایی‌ها و استراتژی‌های آموزشی برای تدریس مباحث یک موضوع خاص
(ج) دانش مربوط به درک و فهم فرایند تفکر و یادگیری دانش آموزان در آن حوزه موضوعی خاص
(د) دانش مربوط به برنامه درسی و چگونگی یادگیری محتوا (بورکوو پرتنام، ۱۹۹۶).

همچنان که این درک نسبت به دانش محتوایی پداگوژیکی به تدریج توسعه پیدا می‌کرد، تکنولوژی‌های دیجیتال مدرن نیز به عنوان ابزاری سودمند در فرایند یاددهی و یادگیری، تولید شده و شناخته شدند. در اواخر دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی، توجه حوزه آموزش ریاضی، بر شناسایی زمان و محل مناسب برای استفاده از تکنولوژی دیجیتال در تدریس ریاضی، معطوف شد. در همین راستا، طیف وسیعی از برنامه‌های نرم‌افزاری، تکرار و تمرین در محیط‌های مختلفی را فراهم نمود که بسیار سرگرم‌کننده‌تر از کاربرگ‌های مداد-کاغذی سنتی به منظور ارائه تمرین‌هایی برای مهارت‌های محاسباتی بود. ماشین‌حساب‌های گرافیکی، قابلیت‌های جدیدی را برای ایجاد و ارتقای توانایی‌های دیداری (بصری) دانش آموزان از طریق بهره‌گیری از انواع نمودارها، برای نشان دادن ایده‌های ریاضی مانند شیب، عرض از مبدأ برای توابع خطی و نقاط اشتراک توابع چندگانه، به‌وجود آورد. در ابتدا، هدف از به کارگیری تکنولوژی‌های دیجیتال برای تدریس مفاهیم ریاضی، نمایش و بررسی درستی ایده‌هایی بود که قبلاً در کلاس درس، معرفی شده و بعد، توسعه و بسط داده شده بودند. با چنین دیدگاهی

نسبت به تکنولوژی، استفاده از انواع ماشین‌حساب‌ها-از ماشین‌حساب‌های ساده شامل چهار عمل اصلی گرفته تا ماشین‌حساب‌های علمی-مبتنی بر این باور بود که این ابزارها، بیشتر در جهت بی‌اهمیت شدن ریاضی هستند تا اینکه به یادگیری ریاضی دانش آموزان کمک کنند. در واقع، عدم وجود یکپارچگی عمیق در این تکنولوژی‌ها، تأسف کاپوت (۱۹۹۲) را برانگیخت که «به نظر می‌رسد در دهه‌های پیش رو، محدودیت‌های اصلی در استفاده از کامپیوتر، به جای محدودیت‌های تکنولوژیکی، بیشتر نتیجه تخیلات انسانی محدود و محدودیت‌های ناشی از ساختارهای اجتماعی و عادت‌های قدیمی باشد».

همچنین، در اواخر دهه ۸۰ و اوایل دهه ۹۰ میلادی، بررسی دانش محتوایی پداگوژیکی معلمان ریاضی، مفهوم جامعی را آشکار کرد که نشان می‌داد باور معلمان در مورد چگونگی تدریس ریاضی، عموماً با نحوه‌ای که خودشان ریاضی را یاد گرفته‌اند، مطابقت دارد. در نتیجه طبیعی بود که تنها تعداد کمی از معلمان، استفاده از ماشین‌حساب‌های گرافیکی، صفحات گسترده و نرم‌افزارهایی مانند لوگو و «جئومتریک ساپوزر^{۱۳}» را در تدریس ریاضی، پذیرفتند. در صورتیکه اکثریت آنان، این تکنولوژی‌ها را قبول نداشتند. بدین سبب دانش ناکافی معلمان ریاضی از بازنمایی‌ها و راهبردهای آموزشی برای تدریس موضوع‌های ریاضی خاص، کاربرد چنین تکنولوژی‌های دیجیتالی را محدود به نشان دادن، بررسی درستی و تکرار و تمرین یک موضوع نمود. در حالی که تا آن زمان و پیش از توصیه به استفاده از تکنولوژی‌های دیجیتالی مدرن، دانش معلمان درباره درک و فهم فرایند تفکر و یادگیری دانش آموزان در ریاضی، به تبحر آنان در مهارت‌های قلم و کاغذی خلاصه می‌شد (کاستبرگ و لیتام، ۲۰۰۵؛ وال، ویلیامز و گارنر، ۲۰۰۳؛ یودر، ۲۰۰۰).

به‌علاوه، تنها دسترسی به تکنولوژی، بدون داشتن دانش لازم درباره موضوع‌های درسی مرتبط با آن، برای ترغیب معلمان به استفاده از آن در کلاس‌های درس خود، کافی نیست (کاستبرگ و لیتام، ۲۰۰۵). همچنان که فرینسی-ماندی و براو (۲۰۰۸) نیز تأکید کردند، «بدون طراحی آموزش‌های حرفه‌ای که به معلمان، چگونگی تلفیق تکنولوژی را با موضوع ریاضی مورد تدریس آنان بیاموزد، نمی‌توان انتظار داشت که معلمان، بخواهند یا بتوانند در طراحی فعالیت‌های ریاضی برای تدریس خود، از تکنولوژی به طور معنادار، استفاده کنند».

اگر به سال‌های قبل از ۲۰۰۸ برگردیم، مشاهده می‌کنیم که «دانش محتوایی پداگوژیکی» بسیاری از معلمان، فاقد یکپارچگی، استحکام و پایداری لازم برای استفاده از تکنولوژی‌های دیجیتالی مدرن در آموزش و

برنامه درسی ریاضی بوده است. وجود تکنولوژی‌هایی مانند ابزارهای هندسه پویا یا ماشین حساب‌های گرافیکی پیشرفته با «سیستم‌های جبر کامپیوتری»^{۱۴} (CAS)، عمدتاً برای مدل‌سازی و ارائه مثال‌ها در کلاس درس ریاضی بود. بعد از آن، دانش‌آموزان اعمال انجام شده را تقلید نموده و از آن تکنولوژی‌ها، برای نمایش، بررسی درستی و تکرار و تمرین، استفاده می‌کردند. در حقیقت، با اینکه بعدها تکنولوژی‌های دیجیتالی توسعه پیدا کردند، ولی استراتژی‌های لازم، برای ادغام مؤثر آن تکنولوژی‌ها با یادگیری ریاضی، به همان سرعت توسعه نیافتند.

تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ریاضی: مجموعه‌ای کامل برای تدریس ریاضی

با گذشت زمان و دسترسی بیشتر به تکنولوژی دیجیتالی و آمیخته شدن آن با کار و تفریح شهروندان، «انجمن بین‌المللی تکنولوژی و آموزش»^{۱۵} (ISTE)، معلمان را برای تفکر در مورد دانش و مهارت‌های تکنولوژیکی که دانش‌آموزان در یک جامعه هوشمند تکنولوژیکی به آن احتیاج دارند، به چالش کشید. با شروع قرن ۲۱م، «استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای دانش‌آموزان»^{۱۶} (۲۰۰۰) با هدف حمایت از پیشبرد استفاده مؤثر از تکنولوژی‌های مناسب در محیط مدرسه و کلاس درس، منتشر شد.

انجمن بین‌المللی تکنولوژی و آموزش، تشخیص داد که معلمان برای به کارگیری این استانداردها، به دانش متفاوتی نیاز دارند. بدین سبب این انجمن طی دو سال مطالعه، ویژگی‌های این دانش جدید را، با عنوان «استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای معلمان»^{۱۷} (۲۰۰۲)، منتشر کرد و با وجودی که این استانداردها، در متن جامعه دیجیتالی که به سرعت در حال تغییر بود، قرار گرفتند، اما تغییرات پیش‌بینی شده، به سختی در محیط آموزشی واقعی، یعنی کلاس درس، راه باز کرد بنابراین، انجمن بین‌المللی تکنولوژی و آموزش، تمرکز استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای معلمان را به جای دانش و مهارت‌های پایه‌ای مورد نیاز، بر آموزش چگونگی استفاده مؤثر آنان از تکنولوژی، تغییر داد و به دنبال آن، استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای دانش‌آموزان، در سال ۲۰۰۷ به روز شدند. پس از آن، به منظور کمک به معلمان در محیط‌های یادگیری که بر پایه تکنولوژی‌های متعدد بنا شده بودند، در سال ۲۰۰۸، اصلاحیه‌ای نسبت به استانداردهای سال ۲۰۰۲ منتشر کرد. در این اصلاحیه، توجه از تکنولوژی‌های دیجیتالی، به برنامه درسی و کاربردهای آموزشی منابع و ابزارهای دیجیتالی، معطوف گردید.

ایرل (۲۰۰۲)، این تغییر را به روشنی بیان کرده است:

تلفیق تکنولوژی، در مورد تکنولوژی نیست- بلکه عمدتاً راجع به محتوا و کاربردهای آموزشی مؤثر آن است. تکنولوژی، ابزارهایی را در بر دارد که به واسطه آن‌ها، می‌توانیم به تعیین محتوا و اجرای کاربردها به شیوه‌های مناسب‌تری، بپردازیم. باید تمرکز تکنولوژی، بر روی برنامه درسی و یادگیری باشد. این تلفیق نباید با میزان یا نوع تکنولوژی مورد استفاده، تعریف شود. بلکه تکنولوژی، بر حسب چگونگی و چرایی استفاده از آن، مشخص می‌گردد.

پژوهشگران متعددی بر تلفیق تکنولوژی، محتوا و پداگوژی، مشابه همان روشی که شولمن، «دانش محتوایی پداگوژیکی» را توصیف نمود، متمرکز شدند تا بتوانند شناخت وسیع‌تری نسبت به دانشی که معلمان برای تدریس به وسیله تکنولوژی نیاز دارند، به دست آورند. به این دلیل، آنان «دانش محتوایی پداگوژیکی تکنولوژیکی»^{۱۸} را به عنوان یکی از دانش‌های مورد نیاز معلمان، برای تدریس به وسیله تکنولوژی در حوزه‌های موضوعی و سطوح آموزشی تعیین شده‌شان، تعریف نمودند. «دانش محتوایی پداگوژیکی تکنولوژیکی»، به عنوان فصل مشترک محتوا، پداگوژی (یاددهی و یادگیری دانش‌آموزان) و تکنولوژی است که توسط پژوهشگران متعددی از جمله مارگروم-لیز و مارکس (۲۰۰۲)، میشر و کوهر (۲۰۰۶)، نیس (۲۰۰۵) و پیرسون (۲۰۰۱)، معرفی شده است. ایده «دانش محتوایی- پداگوژیکی- تکنولوژیکی» تا جایی توسعه یافت که «انجمن آمریکایی مراکز تربیت معلم»^{۱۹}، زمینه همکاری نویسندگان دانش محتوایی پداگوژیکی تکنولوژیکی متعددی را در تولید «دانشنامه دانش محتوایی پداگوژیکی تکنولوژیکی برای آموزشگران»^{۲۰} فراهم آورد و از آنان حمایت کرد (کمیته انجمن آمریکایی مراکز تربیت معلم در رابطه با تکنولوژی و نوآوری^{۲۱}، ۲۰۰۸).

دانش «محتوایی- پداگوژیکی- تکنولوژیکی»، به عنوان اشتراک دقیق بین سه ساختار دانشی مجزای تکنولوژی، پداگوژی و محتوای تدریس، مطرح شد، ولی فراتر از این اشتراک رفته و همپوشانی ساختارهای دانش محتوایی- تکنولوژیکی^{۲۲}، دانش پداگوژیکی- تکنولوژیکی^{۲۳}، و دانش محتوایی- پداگوژیکی را شامل شده است (کوهر و میشر، ۲۰۰۸). همچنین، به واسطه اهمیت تعامل بین این ساختارها، دانش «محتوایی- پداگوژیکی- تکنولوژیکی»، به مرور زمان، به عنوان تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی، از نو طراحی شده و به صورت بسته کاملی درآمده است که برای تلفیق تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی در طراحی تدریس،

و به منظور ارتقای تفکر و یادگیری ریاضی به وسیلهٔ تکنولوژی‌های دیجیتال، مورد نیاز است (نیس، ۲۰۰۸؛ تامپسون و میشر، ۲۰۰۷). در نتیجه، تبیین چارچوبی پویا که با ورود تکنولوژی‌های دیجیتال به کلاس‌های درس، بتواند معلمان را در رویارویی با دانش‌آموزان و فضای جدید کلاس درس کمک کند، یک ضرورت است. چنین چارچوبی، مبتنی بر دانشی تلفیقی است که هم‌زمان بتواند تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی را در هم آمیخته و به معلمان، در طراحی برنامهٔ درسی و تدریس با تمرکز بر این تکنولوژی‌ها، کمک کند.

استانداردهای تکنولوژی - پداگوژی - دانش محتوایی معلمان ریاضی

«شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM) در سال ۲۰۰۲، با ارائه «اصل تکنولوژی» به عنوان یکی از استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی در قرن جدید، از دانش «تکنولوژی - پداگوژی - دانش محتوایی»، با بیان اینکه «تکنولوژی در یاددهی و یادگیری ریاضی ضروری است؛ بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود، تأثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا می‌بخشد»، حمایت کرد (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰). این شورا، کسب انواع تجربه‌هایی را که معلمان، برای آمادگی و مواجهه موفق با «اصل تکنولوژی» به عنوان یک استاندارد لازم دارند، به رسمیت شناخت و مورد حمایت قرار داد. به گفتهٔ این شورا، «اگر معلمان بخواهند یاد بگیرند، چگونه فضای مثبتی بسازند که در آن، حل مسئلهٔ گروهی ارتقا یابد، تکنولوژی به‌طور معنادار در آن حضور داشته باشد، در دانش‌آموزان نیاز به تفکر و کشف و خلق را ایجاد کند، قبل از همه، خودشان باید یادگیری را در چنین محیطی، تجربه کنند» (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۷). به‌طور مشابه، «اتحادیهٔ آموزشگران معلمان ریاضی»^{۲۴}، «بیانیهٔ اعلام مواضع نسبت به تکنولوژی»^{۲۵} را در حمایت از ضرورت ارتقای دانش تکنولوژیکی دانشجو-معلمان ریاضی، منتشر نمود. در این بیانیه آمده است که «در طراحی برنامه‌های آموزش‌های قبل از خدمت معلمان ریاضی، باید اطمینان حاصل نمود که برای همهٔ دانشجو-معلمان ریاضی و داوطلبان اخذ گواهی معلمی، فرصتی ایجاد شود تا بتوانند دانش و تجربهٔ لازم را که برای تلفیق تکنولوژی با فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی مورد نیاز است، کسب کنند» (اتحادیهٔ آموزشگران معلمان ریاضی، ۲۰۰۶). البته پرسش اصلی به قوت خود باقی بود که «معنای این توصیه‌ها در بهبود برنامه‌های قبل از خدمت دانشجو-معلمان ریاضی، چیست؟»

برای پاسخ به این پرسش، در «اتحادیهٔ آموزشگران معلمان ریاضی»، «کمیتهٔ تکنولوژی» تشکیل شد که

وظیفهٔ آن، بررسی راه‌های ارتقای پژوهش، تعامل و ارزیابی کاربردهای تکنولوژی در آموزش معلمان ریاضی از یک سو، و معرفی سیاست‌های مرتبط با مسائل تکنولوژی در رابطه با ارتقای برنامه‌های آموزش معلمان ریاضی از سوی دیگر بود. این کمیته، کار خود را با شناسایی مسیرها و استانداردهای تدریس ریاضی برای ارتقای توسعهٔ آموزش معلمان در قرن ۲۱م، از طریق کار بر روی یک سری از استانداردهای خاص ریاضی مربوط به تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی، شروع کرد و بررسی عمیق آن‌ها را در دستور کار خود قرار داد.

از شروع سال ۲۰۰۷، این کمیته بر طراحی مجموعه‌ای از استانداردهای معلمان ریاضی به منظور ارتقای ورود تکنولوژی در جریان یاددهی و یادگیری ریاضی در تمام پایه‌های تحصیلی (پیش‌دستانی تا پایهٔ دوازدهم)، به گونه‌ای که در استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای معلمان تصور شده بود، متمرکز شد. اگرچه استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای معلمان و استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای دانش‌آموزان، دوباره مورد بازبینی قرار گرفتند و به‌روز رسانی شدند، اما هیچ یک از این دو مجموعه استانداردها، ایده‌های محتوایی خاصی را ارائه ندادند که به معلمان و دانش‌آموزان، در موقع استفاده از تکنولوژی در یادگیری ریاضی، کمک کند. به این دلیل، در تبیین استانداردهای جدید برای معلمان ریاضی، تلاش شد تا چارچوبی برای هدایت یک برنامهٔ آموزش حرفه‌ای و به منظور بهبود فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی، ارائه شود. موضوع این استانداردها، پیرامون ایده‌های «تکنولوژی - پداگوژی - دانش محتوایی» شکل گرفت که نیس (۲۰۰۵)، آن‌ها را از چهار مؤلفهٔ دانش محتوایی - پداگوژیکی گراسمن اقتباس کرده بود. این چهار موضوع، دانش معلمان را از تلفیق تکنولوژی در تدریس ریاضی، به عنوان دانش و باورهای معلمان ریاضی در موارد زیر، در نظر گرفت:

- مفهوم کلی دربارهٔ اهداف تلفیق تکنولوژی در تدریس ریاضی؛
 - آگاهی از چگونگی درک و فهم و نوع تفکر و یادگیری ریاضی دانش‌آموزان به وسیلهٔ تکنولوژی؛
 - آگاهی از برنامهٔ درسی و محتوای آموزشی که تلفیق تکنولوژی را در فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی، تسهیل می‌کند؛
 - آگاهی از بازنمایی‌ها و استراتژی‌های آموزشی در یاددهی و یادگیری ریاضی به وسیلهٔ تکنولوژی.
- در دوازدهمین کنفرانس سالانهٔ اتحادیهٔ آموزشگران معلمان ریاضی که در ژانویه ۲۰۰۸ برگزار شد، پیش‌نویسی از این استانداردها توسط این کمیته، در یک گروه پژوهشی ارائه شد. سپس با بازتاب بر پیشنهادهایی

بدون طراحی
آموزش‌های
حرفه‌ای که
به معلمان،
چگونگی تلفیق
تکنولوژی را با
موضوع ریاضی
مورد تدریس
آنان بیاموزد،
نمی‌توان انتظار
داشت که معلمان،
بخواهند یا
بتوانند در طراحی
فعالیت‌های
ریاضی برای
تدریس خود، از
تکنولوژی به طور
معنادار، استفاده
کنند

باید تمرکز
تکنولوژی، بر روی
برنامه درسی و
یادگیری باشد.
این تلفیق نباید
با میزان یا نوع
تکنولوژی مورد
استفاده، تعریف
شود. بلکه
تکنولوژی، بر
حسب چگونگی
و چرایی استفاده
از آن، مشخص
می گردد

که در این گروه مطرح شد، تغییراتی در این استانداردها اعمال شد. آن گاه پیش نویس به روز شده استانداردها، در نوزدهمین کنفرانس «انجمن فناوری اطلاعات و آموزش معلمان»^{۲۶}، عرضه گردید. در این کنفرانس هم بازخوردهای شرکت کنندگان، جمع آوری شدند و در تکمیل این روند، کمیته تکنولوژی اتحادیه آموزشگران معلمان ریاضی، با نظر گرفتن تمام نظرات و بازخوردها، در استانداردهای پیشنهادی تجدید نظر نمود و آن ها را به شرکت کنندگان در این گروه پژوهشی و میزگرد «انجمن فناوری اطلاعات و آموزش معلمان»، ارائه داده و از همه، درخواست نمود تا بازخوردهای خود را به کمیته بدهند. سپس در کمیته تکنولوژی اتحادیه آموزشگران معلمان ریاضی، زیرکمیته هایی برای بازبینی اسناد پشتیبان استانداردهای پیشنهادی از جمله نسخه های جدید «استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای معلمان» و «استانداردهای ملی تکنولوژی آموزشی برای دانش آموزان»، برای اصلاح نسخه های پیش نویس استانداردها و نهایی کردن آن ها، تشکیل شدند. آخرین نسخه پیش نویس مربوط به شاخص ها و استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، در پیوست (الف)، قابل مشاهده است.

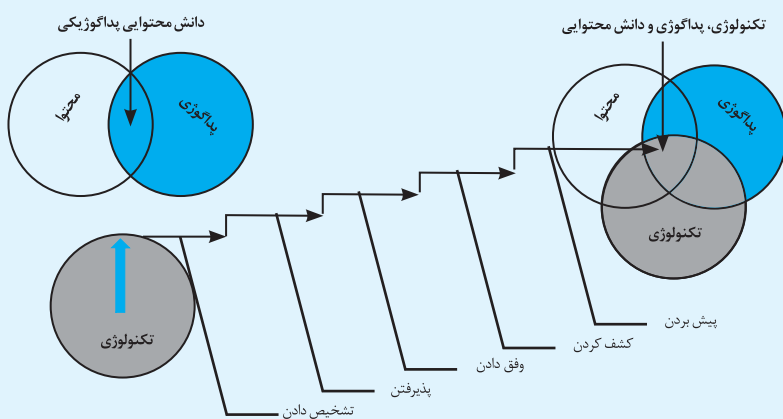
توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی

در بررسی نسخه پیش نویس شاخص ها و استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، یکی از نویسندگان، با یک دانش آموخته سابق آموزش ریاضی به نام ماری مصاحبه کرد. ماری در محیطی تحصیل کرده بود که در آن، از تکنولوژی در یاددهی و یادگیری ریاضی، بهره برده شده بود. به طور مشخص، در درس ریاضیات گسسته از ماشین حساب های گرافیکی و در درس هندسه، از نرم افزار «جئومترز اسکچ پد»^{۲۷}، به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته بودند. وی بعد از فارغ التحصیلی، در یک دبیرستان بزرگ در حومه شهر، به تدریس جبر ۱ مشغول شد و در پایان سومین سال تدریسش، این مصاحبه انجام شد. او خاطر نشان کرد که نرم افزار «جئومترز اسکچ پد»، ابزار تکنولوژیکی مهمی برای یاددهی و یادگیری او بوده و در یادگیری هندسه ناقلیدسی، به او کمک کرده است. این نرم افزار، در مدرسه ای هم که تدریس می کرد، قابل دسترسی بود و توسط معلم دیگری در این مدرسه نیز، استفاده می شد. با این حال، ماری از این نرم افزار در کلاس جبر ۱ استفاده نکرده بود، زیرا فکر می کرد که فقط برای استفاده در کلاس درس هندسه، مناسب است.

ماری در ادامه مصاحبه، بیان کرد که در تجربه تحصیلی و تدریسی او، ماشین حساب های گرافیکی،

ابزاری برای محاسبه هستند، نه ابزاری برای کشف کردن. وی در سه سال اول تدریسش، فقط یک بار از تکنولوژی، برای تدریس مفاهیم ریاضی استفاده کرد. در این درسی که ماری توصیف کرد، دانش آموزان به ترسیم نمودار سیستم های معادلات خطی و پیدا کردن محل تقاطع خطوط، به عنوان کاربرد مناسبی از ماشین حساب های گرافیکی، می پرداختند. تدریس ماری، شواهدی برای بعضی از شاخص های مطرح شده در استاندارد یک و استاندارد دو در رابطه با «تکنولوژی- پداگوژی- دانش محتوایی» بود. به طور مشخص، او یک فعالیت دانش آموز- محور و مبتنی بر تکنولوژی طراحی کرده بود که دانش آموزان را در رسیدن به «سطوح بالای تفکر»^{۲۸}، کمک می کرد. اما این فعالیت در یک دوره زمانی سه ساله، فقط یک بار رخ داد. مثال ماری، سطوح مختلفی از دانش تلفیقی تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی را ارائه نمود. اگرچه شاخص ها و استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، اهدافی را برای تلفیق تکنولوژی در نظر دارند، این استانداردها راجع به اینکه معلمانی مانند ماری، چگونه می توانند این دانش تلفیقی را برای تدریس مؤثر ریاضی و با بهره گیری از تکنولوژی مناسب به دست آورند، اطلاعاتی فراهم نکردند. این موضوع، پرسش های مهمی را مطرح می کند، مانند اینکه دانش تکنولوژی- پداگوژی- دانش محتوایی، چگونه توسعه پیدا می کند؟ آیا روندی وجود دارد که در آن، معلمان بتوانند دانش تکنولوژی- پداگوژی- محتوایی ریاضی را به دست آورند؟ آیا معلمان، این دانش را در عمل حرفه ای خود، ناگهان بروز می دهند؟ آنچه به آن نیاز داریم، مدلی است که در زمانی که معلمان به تلفیق تکنولوژی با فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی می پردازند، توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ریاضی را دربرگیرد.

نیس، سدری و لی (۲۰۰۷)، یک مدل تکاملی از استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ارائه داده اند که از مدل «فرایند تصمیم گیری- نوآوری»^{۲۹} (اولین بار در سال ۱۹۶۲ در باب ترویج اجتماعی نوآوری ها معرفی گردید) و رورت راجرز نشئت می گرفت. راجرز یک فرایند پنج مرحله ای متوالی را توصیف کرد که در آن، فرد تصمیم می گیرد یک نوآوری را به کار گیرد یا آن را رد کند. نیس و همکاران، این فرایند را از دیدگاه یادگیری معلمان ریاضی در تلفیق یک تکنولوژی که تاکنون با یاددهی و یادگیری ریاضی ادغام نکرده اند، بازسازی کردند. طی یک دوره چهار ساله، آن ها معلمان بسیاری را مشاهده کردند که در مورد صفحات گسترده و چگونگی وارد کردن آن به عنوان یک ابزار آموزشی در کلاس درس ریاضی، می آموختند. تجزیه و تحلیل این مشاهدات، نشان داد که معلمان، زمانی که در حال یادگیری تلفیق یک تکنولوژی



شکل ۱. شرح تصویری سطوح دانشی معلمان ریاضی، هنگامی که ادراک و تفکر آن‌ها، به سمت تلفیق تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی، شکل می‌گیرد.

پذیرش و تلفیق آن با فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی و همچنین، نیازمند دوباره‌نگری در محتوا و پداگوژی خواهد بود. در واقع، این مراحل یا سطوح، برای نمایش چیزی فراتر از یک فرایند تکراری در توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی، مطرح می‌شوند. برخی از جنبه‌های آنچه که برای تدریس یک موضوع خاص به وسیله یک تکنولوژی آموخته می‌شود، ممکن است جایگاهی برای پذیرش یک تکنولوژی دیگر را فراهم کند. البته باید توجه داشت که بسیاری از معلمان، با روش‌های تلفیقی متفاوت با آنچه که خودشان تجربه کرده‌اند و از آن طریق، مفاهیم خاص ریاضی را یاد گرفته‌اند، مشکل دارند.

مدل توسعه دانش تکنولوژی - پداگوژی - محتوایی معلمان ریاضی

استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، دریچه‌ای را گشود تا بتوان از طریق آن، به بررسی فعالیت‌های تدریسی معلمان پرداخت که دارای دانش تلفیقی تکنولوژی - پداگوژی - محتوایی هستند. با وجود این، تعیین سطوح/مراحل درک و تفکر دانش‌آموزانی که در معرض چنین فعالیت‌هایی قرار می‌گیرند، نیازمند شفاف‌سازی است. در این راستا، میسرا و کوهر (۲۰۰۶) چارچوب اولیه «تکنولوژی - پداگوژی - دانش محتوایی» را به اجزای دانشی آن یعنی دانش محتوایی، دانش پداگوژیکی، و دانش «محتوایی - پداگوژیکی» تقسیم نمودند. به باور آنان، وقتی که «دانش تکنولوژی» با این سه نوع دانش تلفیق می‌شود، «دانش محتوایی تکنولوژیکی» و «دانش پداگوژیکی تکنولوژیکی» نیز به عنوان اشتراک بین دانش محتوایی، دانش پداگوژیکی و دانش تکنولوژیکی، به دانش محتوایی پداگوژیکی اضافه می‌شوند. از نظر آن‌ها، «دانش محتوایی تکنولوژیکی» به این دلیل اهمیت پیدا می‌کند که «معلمان نه تنها نیاز دارند

خاص، در یاددهی و یادگیری ریاضی بودند، از طریق پنج مرحله تکاملی زیر، پیشرفت بسیار زیادی کردند:

۱. تشخیص دادن (دانش)؛^{۳۰} معلمان قادرند از تکنولوژی استفاده کنند و تشخیص می‌دهند که در کجا، تکنولوژی را با محتوای ریاضی، در کنار هم قرار دهند. اما هنوز تکنولوژی را با فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی، نمی‌توانند تلفیق کنند؛

۲. پذیرفتن (ترغیب)؛^{۳۱} در معلمان، نگرشی مطلوب یا نامطلوب نسبت به یاددهی و یادگیری ریاضی از طریق یک تکنولوژی مناسب، شکل می‌گیرد؛

۳. وفق دادن (تصمیم)؛^{۳۲} معلمان در فعالیت‌هایی شرکت می‌کنند که آن‌ها را به سوی انتخاب بین پذیرفتن یا رد کردن استفاده از یک تکنولوژی مناسب در فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی، سوق می‌دهد؛

۴. کشف کردن (اجرا)؛^{۳۳} معلمان به طور فعال، یک تکنولوژی مناسب را با جریان یاددهی و یادگیری ریاضی، تلفیق می‌کنند؛

۵. پیش‌بردن (تأیید)؛^{۳۴} معلمان نتایج حاصل از تلفیق یاددهی و یادگیری ریاضی را با یک تکنولوژی مناسب، مورد ارزیابی قرار می‌دهند.

کمیته تکنولوژی اتحادیه آموزشگران معلمان ریاضی، با توجه به این پنج مرحله یا پنج سطح که مبتنی بر چگونگی تلفیق تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی با فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی است، یک مدل تصویری، تبیین نمود (شکل ۱). این مدل، سطوح دانشی معلمان ریاضی را هنگامی که ادراک و تفکر آن‌ها، به سمت تلفیق تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی شکل می‌گیرد، به تصویر می‌کشد. در سمت چپ شکل ۱، دانش محتوایی - پداگوژی، به عنوان اشتراک محتوا و پداگوژی، نشان داده شده است. سپس با گسترش دانش تکنولوژی، و ایجاد اشتراک آن با دانش پداگوژیکی و محتوایی، دانشی را در معلمان ایجاد می‌کند که دانش «تکنولوژی - پداگوژی - محتوایی» نامیده می‌شود. این دانش به معلمان کمک می‌کند تا بتوانند به‌طور فعال، هدایت یادگیری ریاضی دانش‌آموزان را به وسیله یک تکنولوژی مناسب، بر عهده بگیرند.

در به کارگیری این مدل، لازم است هوشیارانه عمل کنیم و هنگام تفکر در مورد این سطوح، توجه داشته باشیم که مسیر حرکت به سمت استفاده مناسب از یک تکنولوژی و به کمک دانش تکنولوژی - پداگوژی - محتوایی معلم، خطی نیست و رفتن از یک مرحله به مرحله دیگر، الزاماً از یک الگوی منظم و سلسله مراتبی، تبعیت نمی‌کند. این وضعیت، در مدل «فرایند تصمیم‌گیری - نوآوری» راجرز نیز وجود دارد که ظهور یک تکنولوژی جدید، باعث بازنگری در مورد چگونگی

تا موضوعی را که تدریس می‌کنند بدانند، بلکه نیازمند دانستن روش‌هایی هستند که بتوانند به کمک تکنولوژی، در موضوع مورد تدریس، تغییرات مناسبی ایجاد کنند. در حقیقت، «دانش پداگوژیکی-تکنولوژیکی»، به معلمان این قدرت را می‌دهد تا با شناختن تکنولوژی‌های مختلف و قابلیت‌ها و محدودیت‌های هر یک، قادر باشند که متناسب با موقعیت‌های یاددهی و یادگیری، تکنولوژی مناسب را انتخاب کنند و همچنین، بتوانند نحوه تدریس و سازماندهی محتوا یا موضوع مورد تدریس را به شکلی مطلوب، تغییر دهند.

البته باید توجه داشت که هر نوع تلفیقی از این دانش‌ها، به فصل مشترک‌های جدیدی می‌انجامد که می‌توان به هر کدام، عنوان یک دانش جدید را داد. اما به دلیل ماهیت موضوع مورد بحث در این نوشته، تنها به دانش‌های تلفیقی که مرتبط به توسعه دانش «تکنولوژی-پداگوژی-محتوایی» ریاضی‌اند، پرداخته شد. هم‌زمان با این تحولات، کمیته تکنولوژی وابسته به «اتحادیه آموزشگران معلمان ریاضی»، سطوح فعالیت معلمان را مطابق با استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ریاضی آنان، تشریح نمود. چهار موضوع اصلی «ارزشیابی و برنامه درسی»، «یادگیری»، «یاددهی»، و «دسترسی»، در این سطوح آمده است. کمیته تکنولوژی تصمیم گرفت به جای اینکه ارزشیابی و برنامه درسی را به صورت جداگانه در نظر بگیرد، به منظور برجسته کردن ارتباط بین فرایند تصمیم‌گیری ارزشیابی و برنامه درسی، آن‌ها را در یک گروه قرار دهد. به این منظور، کمیته تکنولوژی، توصیف‌گرهایی را برای هر کدام از این چهار موضوع تهیه نمود که در جدول (۱)، آمده است.

موضوع	توضیحات
ارزشیابی و برنامه درسی	<ul style="list-style-type: none"> ● بررسی مواد تدریس ● ارزشیابی درک دانش‌آموزان
یادگیری	<ul style="list-style-type: none"> ● تمرکز بر مواد تدریس (برای نمونه، یادگیری مباحث ریاضی) ● نمایش مفاهیمی درباره چگونگی یادگیری دانش‌آموزان (مانند توسعه مهارت‌های تفکر)
یاددهی	<ul style="list-style-type: none"> ● تمرکز بر مواد تدریس (به عنوان مثال، یادگیری مباحث ریاضی) ● رویکردهای آموزشی ● محیط کلاس درس ● توسعه حرفه‌ای معلمان
دسترسی	<ul style="list-style-type: none"> ● میزان استفاده (آیا دانش‌آموزان اجازه دارند از تکنولوژی استفاده نمایند یا خیر) ● محدودیت‌ها (چگونه معلمان، در ایجاد محدودیت در تلفیق تکنولوژی با تدریس، نقش دارند) ● میزان دسترسی (چگونه تکنولوژی، می‌تواند به ارتقای تفکر مرتبه بالاتر ریاضی در دانش‌آموزان، نقش داشته باشد و دسترسی تمام دانش‌آموزان را به ریاضی، بیشتر کند؟)

جدول ۱: توصیف‌گرهایی در مورد موضوعات اصلی در مدل توسعه دانش تکنولوژی-پداگوژی-محتوایی معلمان ریاضی

گام بعدی این بود که با بهره‌مندی از توصیف‌های دقیق‌تری که توسط نیس (۲۰۰۷) انجام شد، این توصیف‌گرها را برای سطوح تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی نیز، گسترش دهند و مثال‌های خاصی برای هر کدام، عرضه کنند. پیوست (ب)، شکل توسعه یافته‌تر مدل تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی است تا کسانی که باور دارند تکنولوژی، یادگیری ریاضی دانش‌آموزان را ارتقا می‌دهد و تمایل دارند که تکنولوژی را با روش تدریس خود تلفیق کنند، راهکارهای عملی‌تر و قابل‌اجراتری برای این کار، در دست داشته باشند. راهکارهایی که به معلمان کمک کند تا این تلفیق، به شکل معنادارتری اتفاق بیفتد و دانش‌آموزان، امکان تجربه کردن و درگیر شدن معنادارتری را با تکنولوژی و موضوع ریاضی مورد تدریس، پیدا کنند. برای درک بهتر این پنج مرحله، به مثال تدریس «جذر» توجه کنید.

۱. تشخیص دادن (دانش): به عنوان مثالی از اینکه چگونه دانش مربوط به ارزشیابی و برنامه درسی، می‌تواند باعث ایجاد تغییراتی در موضوع‌های درسی ریاضی شود، معلمان را در نظر بگیرید که در ابتدا، تشخیص می‌دهند که تکنولوژی می‌تواند برای پشتیبانی از فرایندهای ریاضی مانند جذر، مورد استفاده قرار گیرد. فرایند تفکر معلمان به سمت پذیرش تکنولوژی به عنوان جایگزینی برای روش الگوریتمی یافتن جذر اعداد، پیش می‌رود. اگرچه آن‌ها همچنان نگران از دست دادن مهارت‌های الگوریتمی دانش‌آموزان در رابطه با جذر اعدادند.

۲. پذیرفتن (ترغیب): بعضی از معلمان ریاضی، با اینکه تکنولوژی را به عنوان یک ابزار مفید آموزشی برای کلاس‌های درس ریاضی‌شان پذیرفته‌اند، ولی نگران مداخله بی‌جای تکنولوژی در درک و فهم یک موضوع ریاضی هستند و بدین سبب، به استفاده از تکنولوژی در کلاس درس خود، ترغیب نمی‌شوند و آن را تنها به عنوان یک فعالیت آموزشی غیررسمی، مجاز می‌دانند. البته در این سطح، شاید بعضی معلمان فکر کنند که ممکن است نگرش‌ها و باورهایشان نسبت به تدریس ریاضی، تحت تأثیر تکنولوژی واقع شود، و نگران‌اند که در آن صورت، دانش‌آموزان نتوانند مهارت‌های تفکر ریاضی مناسب را توسعه دهند. با چنین تصویری، ابتدا تدریس خود را به روش سنتی-بدون به کارگیری تکنولوژی- و به اصطلاح، «مداد و کاغذ»^{۳۴}ی انجام می‌دهند و بعد، از تکنولوژی برای بررسی محاسبات و نظیر آن، استفاده می‌کنند.

۳. وفق دادن (تصمیم): در سطح وفق دادن، الگوی مورد استفاده معلمان در انجام بعضی از فعالیت‌های تدریسی، عموماً برگرفته شده از تجربه‌های کسب شده آنان در برنامه‌های توسعه حرفه‌ای قبل از خدمت خودشان است. برای مثال، طبیعی است که معلمان در تدریس

جذرگیری، ابتدا بر تخمین زدن جذر اعداد متمرکز شوند و بعد، تصمیم بگیرند که از دانش آموزان بخواهند تا تخمین‌های خود را با نتایجی که از طریق ماشین حساب به دست می‌آورند، مقایسه کنند. یا آنکه گاهی معلمان، از زاویه دیگری به موضوع مورد تدریس خود می‌نگرند و به جای تدریس عملیات جذرگیری، تأکید را بر کاربرد مفهوم جذر قرار داده و بر ماشین حساب متمرکز می‌شوند. چنین تغییر دیدگاهی، توجه به تدریس را متفاوت می‌کند و واسطه این کار، تصمیم به انتخاب تکنولوژی مناسب است. طی چنین فرایندی، معلمان در موقعیت‌های پیشرفته‌تری واقع می‌شوند که علاوه بر کسب مهارت برای استفاده از تکنولوژی/ ماشین حساب‌ها برای موضوع خاصی مانند جذر، خود را در معرض چالش تلفیق تکنولوژی با تدریس خویش، برای سایر موضوع‌های ریاضی می‌کنند. معلماتی که چالش‌پذیر و علاقه‌مندتر به تلفیق تکنولوژی با تدریس خود هستند، به تدریج برای جرح و تعدیل در برنامه درسی/ تدریس خویش، جسارت تصمیم‌گیری یافته و دست به اضافه، حذف، ادغام، چینش مجدد، تغییر نقطه تمرکز یا تأکید موضوع‌های مورد تدریس و نظایر آن را پیدا می‌کنند. بدین ترتیب است که برای نمونه، ممکن است در تدریس جذر، به جای تمرکز بر الگوریتم جذرگیری، با استفاده از قابلیت‌های تکنولوژی، جهت تدریس را عوض نموده و از ماشین حساب‌ها، برای درک عمیق‌تر مفهوم جذر واقعی اعداد، و تفاوت بین پاسخ‌های تقریبی و پاسخ‌های دقیق، بهره بگیرند. در این سطح، معلمان بررسی‌های خود را برای پذیرش یا عدم پذیرش تکنولوژی انجام می‌دهند، و ممکن است به مفید بودن آن نیز در تدریس ریاضی پی ببرند، اما هنوز سؤال‌های بی‌پاسخی پیرامون مهارت‌های تفکر ریاضی مناسب، داشته باشند. در چنین حالتی، اگر چه معلمان و دانش آموزان از تکنولوژی، برای یادگیری- یاددهی بیشتر موضوع‌های درسی استفاده می‌کنند، ولی اکثر آزمون‌ها، بدون حضور تکنولوژی انجام می‌شود.

۴. کشف کردن (اجرا): معلماتی که تصمیم به پذیرش و به کارگیری تکنولوژی در کلاس‌های درس خود نموده‌اند، راه‌های جدیدی برای تلفیق یاددهی و یادگیری ریاضی با تکنولوژی‌های مناسب، کشف می‌کنند. آنان برای اجرایی کردن راه‌هایی که کشف کرده‌اند، برنامه‌ریزی می‌کنند و برنامه‌ها را به اجرا درمی‌آورند. بعد هم به منظور هدایت دانش آموزان به سمت درک عمیق‌تر ریاضی، از تکنولوژی به عنوان ابزاری برای یادگیری استفاده نموده و بازتاب خود را بر فرایند یاددهی و یادگیری، به همکاران خود ارائه می‌دهند.

۵. پیش‌بردن (تأیید): در آخرین سطح یعنی پیش‌بردن، معلمان به ارزیابی نتایج حاصل از تصمیم خود برای تلفیق تکنولوژی با جریان یاددهی و یادگیری ریاضی

می‌پردازند تا بر آن‌ها، مهر تأیید بزنند. در این مرحله است که برای معلمان، تلفیق تکنولوژی با موضوع مورد تدریس، برای توسعه ریاضیاتی که لازم است دانش آموزان یاد بگیرند، ضروری می‌شود.

مراحل بعدی تلفیق تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ریاضی

این توصیف از سازه جامع «تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی»، ساختارهای قابل شناسایی و خاصی را از دانش مرتبط با تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان، به همراه یک مدل یا چارچوب که زمینه را برای این ساختارها مهیا می‌سازد، ارائه می‌دهد. موضوع‌ها، سطوح و توصیف‌گرها، جزئیات یک ساختار هستند و به گروه‌های مختلف اجازه می‌دهد که بتوانند به طور مستقل، از این مدل استفاده کنند. پنج سطح (تشخیص دادن، پذیرفتن، وفق دادن، کشف کردن و پیش‌بردن)، از طریق چهار موضوع ارزشیابی، برنامه درسی، یادگیری، یاددهی و دسترسی؛ توسعه می‌یابند. توصیف‌گرهای ارائه شده برای هر سطح و مثال‌های ریاضی برای هر کدام، شفافیت بیشتری برای درک این مدل، ایجاد می‌کند. این ساختار می‌تواند برای معلمان، پژوهشگران، آموزشگران معلمان، مشاوران توسعه حرفه‌ای معلمان و مدیران مدارس، در راستای اجرای فعالیت‌های توسعه و ارزیابی توسعه حرفه‌ای، برنامه‌های آموزش ریاضی و برنامه‌های ریاضی مدرسه‌ای، مفید واقع شود.

معلمان می‌توانند با استفاده از مثال‌های ملموس و توصیف‌گرها، از این مدل برای ارزیابی تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی ریاضی استفاده نمایند و سپس، به طراحی توسعه حرفه‌ای فردی خود در «تکنولوژی آموزشی ریاضی»^{۳۷} بپردازند. مدیران و مشاوران توسعه حرفه‌ای نیز قادر به طراحی و توسعه حرفه‌ای هدایت شده و آگاهانه‌تری برای گروه معلمان خواهند بود و می‌توانند اثربخشی فعالیت‌هایشان را ارزیابی نمایند. آموزشگران معلمان نیز می‌توانند از سطوح تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی، جهت ارزیابی و طراحی برنامه‌های قبل از خدمت دانشجو- معلمان و آموزش ضمن خدمت معلمان با هدف به کارگیری تکنولوژی، استفاده نمایند. مدل توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، سازه‌ها و زبان مشترکی ایجاد می‌کنند تا به پژوهشگران حوزه آموزش‌های حرفه‌ای معلمان ریاضی کمک کند که کارهای پژوهشی خود را با کارهای دیگران و در زمینه‌های وسیع‌تری، مرتبط سازند.

با این توصیف‌ها و توضیح‌ها، هنوز سؤال‌های بسیاری در مورد چگونگی استفاده از این مدل، باقی مانده است. به عنوان مثال، یک معلم ریاضی ممکن است در سطح‌های

اگر معلمان
بخواهند یاد
بگیرند که چگونه
فضای مثبتی
بسازند که در
آن، حل مسئله
گروهی ارتقا
یابد، تکنولوژی
به‌طور معنادار
در آن حضور
داشته باشد، در
دانش آموزان نیاز
به تفکر و کشف
و خلق را ایجاد
کند، قبل از همه،
خودشان باید
یادگیری را در
چنین محیطی،
تجربه کنند

4. Kathryn G. Shafer * kgshafer@bsu.edu
5. Shannon O. Driskell * Shannon.Driskell@notes.udayton.edu
6. Suzanne R. Harper * harpersr@muohio.edu
7. Christopher Johnston * cjohnst2@gmu.edu
8. Christine Browning * christine.browning@wmich.edu
9. S. Asli Özgün-Koca * aokoca@wayne.edu
10. Gladis Kersaint * kersaint@coedu.usf.edu
11. Technology, Pedagogy, And Content Knowledge (TPACK)
12. Pedagogical Content Knowledge (PCK)
در ایران این نوع دانش را با همین نام PCK یا «دانش تربیتی محتوا» استفاده می‌کنند.
13. Geometric Supposer
ترجمه این برنامه‌ها، تا به حال مرسوم نبوده و به عنوان اسم خاص، از آن‌ها نام برده می‌شود.
14. Computer Algebra Systems: CAS
15. International Society for Technology and Education: ISTE
16. National Educational Technology Standards for Students: NETS-S
17. National Educational Technology Standards for Teachers: NETS-T
18. Technological Pedagogical Content Knowledge: TPACK
19. American Association of Colleges of Teacher Education
20. The Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge for Educators
21. AACTE Committee on Technology and Innovation
22. Technological Content Knowledge: TCK
23. Technological Pedagogical Knowledge: TPK
24. Association for Mathematics Teacher Educators (AMTE)
25. Technology Position Statement
26. Society for Information Technology and Teacher Education: SITE
27. Geometer's Sketchpad
28. Higher Order Thinking
29. Innovation-decision Process
30. Recognizing (Knowledge)
31. Accepting (Persuasion)
32. Adapting (Decision)
33. Exploring (Implementation)
34. Advancing (Confirmation)
۳۵. نکته قابل توجه در این مدل، این است که «یاددهی- یادگیری» که معمولاً در یک مقوله قرار دارند، از هم جدا شده‌اند و این، یکی دیگر از ویژگی‌های این مدل است.
36. Paper & Pencil
37. Mathematics Instructional Technology

پیوست (الف) و (ب) که در متن به آن‌ها اشاره شده و منابع این مقاله را می‌توانید در وبگاه مجلات رشد ببینید.

مختلفی از چهار موضوع بحث شده و توصیف‌گرهای متفاوت، قرار داشته باشد (پیوست ب). به عبارت دیگر، وی ممکن است در موضوع برنامه درسی و ارزشیابی، با نشان دادن علاقه‌مندی خویش به توسعه ایده‌های شخصی فردی‌اش برای به کارگیری تکنولوژی در آموزش، در سطح کشف کردن باشد. در حالی که با اجازه دادن به دانش‌آموزان برای استفاده از تکنولوژی‌های مختلف در حین ارزشیابی‌ها، در سطح تشخیص دادن قرار بگیرد. به دلیل وجود سؤال‌هایی که برای استفاده کارآمد این مدل نیازمند پاسخ هستند، ادامه بررسی این طرح، ضروری است. علاوه بر این، حرکت از یک سطح به سطح دیگر ممکن است نیازمند مجموعه‌های متفاوتی از تجربه‌ها، برای سطوح مختلف و معلمان متفاوت باشد. برای نمونه، سؤال‌هایی مانند اینکه «ماهیت این تجربه‌ها چیست؟»، «آیا وجود این تجربه‌ها، می‌توانند توجیه‌گر حرکت‌های پیش‌رونده یا پس‌رونده معلمان، بین این سطوح باشند؟»، «آیا معلمان می‌توانند ناخودآگاه، از این سطوح عبور کنند؟» و سؤال‌های دیگری که می‌توان از طریق انجام پژوهش‌های جدی، به آن‌ها پاسخ داد.

همچنین این مدل، سؤال‌های جدیدی را برای آموزشگران ریاضی ایجاد می‌کند. با این حال، این پرسش‌ها نسبت به آن دسته سؤال‌هایی که به طور معمول و بدون این مدل هم قابل طرح هستند، بسیار متمرکزتر و خاص‌تر هستند و پاسخ به آن‌ها، نیاز به چارچوب‌های آماده و برای زمینه‌های مختلف ریاضی خواهد داشت. با پاسخ به این سؤال‌ها، حوزه آموزش معلمان ریاضی، به سوی درک واقع‌بینانه‌تر تأثیر تکنولوژی بر یادگیری ریاضی، پیش خواهد رفت.

استانداردهای تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی و مدل توسعه تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی متناظر با آن، در حال توسعه و تکامل هستند. شاید هنگام معرفی تکنولوژی‌های جدید در کلاس‌های درس ریاضی، و یافته‌های جدیدی که از طریق پژوهش‌های مبتنی بر کلاس درس، به دست می‌آیند و هدفشان، بررسی و توصیف دقیق یاددهی و یادگیری ریاضی است، این استانداردها نیز تغییر یابند. مهم این است که این تمرکز هدفمند برای درک تکنولوژی، پداگوژی و دانش محتوایی معلمان ریاضی، ادامه دارد تا استفاده از تکنولوژی را که چیزی فراتر از تصور کنونی ماست، در کلاس‌های درس ریاضی، متداول کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model
2. Margaret L. Niess * niessm@onid.orst.edu
3. Robert N. Ronau * bob@louisville.edu



ارمغان بوشهر

مهدی رجبعلی پور

فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران
و مؤسسه آموزش عالی عرفان، کرمان

چکیده

در این مقاله، با بحثی پیرامون متغیرهای مستقل و تابع در تابع‌های مثلثاتی، فرض رادیان بودن متغیر مستقل برخی از این تابع‌ها را توجیه می‌کنیم.
کلیدواژه‌ها: متغیرهای مستقل، تابع، تابع‌های مثلثاتی، رادیان

مقدمه

در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در بوشهر، سؤالی مطرح شد که چرا معمولاً متغیر مستقل تابع‌های مثلثاتی را بر حسب رادیان می‌نویسند و اگر مثلاً درجه به جای آن بگذارند، چه اشتباهی ممکن است رخ دهد. بحث مزبور، انگیزه‌ای برای نوشتن مقاله حاضر شد. با تابع سینوس آغاز می‌کنیم و موارد مشابه را به خواننده علاقمند، وا می‌گذاریم.

هر تابع $y = f(x)$ را می‌توان جدولی دو ستونی انگاشت که در یک ستون، مقدارهای متغیر مستقل و در ستون دیگر، مقدارهای متغیر تابع را نظیر به نظیر نوشته باشند. بدیهی است که اگر دامنه تابع، یک مجموعه بی‌نهایت عضو باشد، نوشتن همه مقدارها غیرممکن است و در محاسبه‌های رایانه‌ای، به نوشتن تعدادی متناهی بسنده می‌کنند. مثلاً در جدول سینوس‌ها، زاویه‌های 0° تا 90° درجه را به ترتیب، زیر هم، در یک ستون می‌نویسند و مقابل هر زاویه مقدار سینوس آن را در ستونی دیگر ثبت می‌کنند. در زمان‌های گذشته که رایانه نبود و یا اگر بود، استفاده از آن‌ها رایج نبود، سینوس هر زاویه دیگر را با تقریب و درون‌یابی حساب می‌کردند. در جدول سینوس‌های صفحه بعد، یک ستون هم برای مقدارهای زاویه (متغیر مستقل) بر حسب رادیان اضافه کرده‌ایم. بستگی به این که کدام یک از دو ستون «رادیان» یا «درجه» را به

کار بگیریم یک تابع مثلثاتی خاص به دست می‌آوریم که از نظر هندسی هیچ فرقی با هم ندارند، ولی از نظر حسابان با هم متفاوتند.

تابع سینوسی

در جدول سینوس‌ها، از کنار هم گذاشتن ستون سمت چپ (رادیان) و ستون سمت راست (سینوس)، تابعی به دست می‌آید که آن را با دستور $y = \sin_r(x)$ نمایش می‌دهیم. همچنین با کنار هم گذاشتن ستون وسط (درجه) و ستون سمت راست (سینوس)، تابع دیگری به دست می‌آید که به صورت $y = \sin_d(x)$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که گفتیم اگر متغیر مستقل را زاویه هندسی بگیریم و از اندازه (عددی) زاویه چشم‌پوشیم، تابعی با دامنه هندسی به دست می‌آید که آن را با نماد ساده $y = \sin x$ نمایش می‌دهیم.

در تابع مثلثاتی هندسی نباید از مقدار زاویه سخن گفت بلکه باید به شکل آن اشاره کرد؛ مثلاً می‌گوییم سینوس زاویه قائمه برابر با ۱ می‌باشد، سینوس نصف قائمه برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، سینوس هر زاویه در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و غیره. اما وقتی که متغیر مستقل در مجموعه عددهای حقیقی قرار می‌گیرد دو تابع $y = \sin_r(x)$ و $y = \sin_d(x)$

جدول سینوس زاویه‌های ۰ تا ۹۰ درجه

رادیان	درجه	سینوس
۰/۰۰۰	۰	۰/۰۰۰
۰/۰۱۷	۱	۰/۰۱۷
۰/۰۳۵	۲	۰/۰۳۵
۰/۰۵۲	۳	۰/۰۵۲
۰/۰۷۰	۴	۰/۰۷۰
۰/۰۸۷	۵	۰/۰۸۷
۰/۱۰۵	۶	۰/۱۰۵
۰/۱۲۲	۷	۰/۱۲۲
۰/۱۴۰	۸	۰/۱۳۹
۰/۱۵۷	۹	۰/۱۵۶
۰/۱۷۵	۱۰	۰/۱۷۴
۰/۱۹۲	۱۱	۰/۱۹۱
۰/۲۰۹	۱۲	۰/۲۰۸
۰/۲۲۷	۱۳	۰/۲۲۵
۰/۲۴۴	۱۴	۰/۲۴۲
۰/۲۶۲	۱۵	۰/۲۵۹
۰/۲۷۹	۱۶	۰/۲۷۶
۰/۲۹۷	۱۷	۰/۲۹۲
۰/۳۱۴	۱۸	۰/۳۰۹
۰/۳۳۲	۱۹	۰/۳۲۶
۰/۳۴۹	۲۰	۰/۳۴۲
۰/۳۶۴	۲۱	۰/۳۵۸
۰/۳۸۴	۲۲	۰/۳۷۵
۰/۴۰۱	۲۳	۰/۳۹۱
۰/۴۱۹	۲۴	۰/۴۰۷
۰/۴۳۶	۲۵	۰/۴۲۳
۰/۴۵۴	۲۶	۰/۴۳۸
۰/۴۷۱	۲۷	۰/۴۵۴
۰/۴۸۹	۲۸	۰/۴۶۹
۰/۵۰۶	۲۹	۰/۴۸۵
۰/۵۲۴	۳۰	۰/۵۰۰
۰/۵۴۱	۳۱	۰/۵۱۵
۰/۵۵۹	۳۲	۰/۵۳۰
۰/۵۷۶	۳۳	۰/۵۴۵
۰/۵۹۳	۳۴	۰/۵۵۹
۰/۶۱۱	۳۵	۰/۵۷۴
۰/۶۲۸	۳۶	۰/۵۸۸
۰/۶۴۶	۳۷	۰/۶۰۲
۰/۶۶۳	۳۸	۰/۶۱۶
۰/۶۸۱	۳۹	۰/۶۲۹
۰/۶۹۸	۴۰	۰/۶۴۳
۰/۷۱۶	۴۱	۰/۶۵۶
۰/۷۳۳	۴۲	۰/۶۶۹
۰/۷۵۰	۴۳	۰/۶۸۲
۰/۷۶۸	۴۴	۰/۶۹۵
۰/۷۸۵	۴۵	۰/۷۰۷

رادیان	درجه	سینوس
۰/۸۰۳	۴۶	۰/۷۱۹
۰/۸۲۰	۴۷	۰/۷۳۱
۰/۸۳۸	۴۸	۰/۷۴۳
۰/۸۵۵	۴۹	۰/۷۵۵
۰/۸۷۳	۵۰	۰/۷۶۶
۰/۸۹۰	۵۱	۰/۷۷۷
۰/۹۰۸	۵۲	۰/۷۸۸
۰/۹۲۵	۵۳	۰/۷۹۹
۰/۹۴۲	۵۴	۰/۸۰۹
۰/۹۶۰	۵۵	۰/۸۱۹
۰/۹۷۷	۵۶	۰/۸۲۹
۰/۹۹۵	۵۷	۰/۸۳۹
۱/۰۱۲	۵۸	۰/۸۴۸
۱/۰۳۰	۵۹	۰/۸۵۷
۱/۰۴۷	۶۰	۰/۸۶۶
۱/۰۶۵	۶۱	۰/۸۷۵
۱/۰۸۲	۶۲	۰/۸۸۳
۱/۱۰۰	۶۳	۰/۸۹۱
۱/۱۱۷	۶۴	۰/۸۹۹
۱/۱۳۴	۶۵	۰/۹۰۶
۱/۱۵۲	۶۶	۰/۹۱۴
۱/۱۶۹	۶۷	۰/۹۲۱
۱/۱۸۷	۶۸	۰/۹۲۷
۱/۲۰۴	۶۹	۰/۹۳۴
۱/۲۲۲	۷۰	۰/۹۴۰
۱/۲۳۹	۷۱	۰/۹۴۶
۱/۲۵۷	۷۲	۰/۹۵۱
۱/۲۷۴	۷۳	۰/۹۵۶
۱/۲۹۲	۷۴	۰/۹۶۱
۱/۳۰۹	۷۵	۰/۹۶۶
۱/۳۲۶	۷۶	۰/۹۷۰
۱/۳۴۴	۷۷	۰/۹۷۴
۱/۳۶۱	۷۸	۰/۹۷۸
۱/۳۷۹	۷۹	۰/۹۸۲
۱/۳۹۶	۸۰	۰/۹۸۵
۱/۴۱۴	۸۱	۰/۹۸۸
۱/۴۳۱	۸۲	۰/۹۹۰
۱/۴۴۹	۸۳	۰/۹۹۳
۱/۴۶۶	۸۴	۰/۹۹۵
۱/۴۸۴	۸۵	۰/۹۹۶
۱/۵۰۱	۸۶	۰/۹۹۸
۱/۵۱۸	۸۷	۰/۹۹۹
۱/۵۳۶	۸۸	۰/۹۹۹
۱/۵۵۳	۸۹	۱/۰۰۰
۱/۵۷۱	۹۰	۱/۰۰۰

متفاوت هستند؛ برخی از مقدارهای این دو تابع را در زیر نوشته‌ایم تا تفاوت‌ها را مشاهده کنید:

$$\sin_d(0) = \sin_r(0) = 0$$

$$\sin_d(1/5) = 0/026; \sin_r(1/5) = 0/998$$

$$\sin_d(90) = 1; \sin_r(90) = 0/8940$$

گرچه سینوس‌های «رادیانی» و «درج‌ای» دو

تابع متفاوت تعریف می‌کنند ولی یک رابطه خطی ساده آن‌ها را به هم پیوند می‌زند؛ یعنی

$$\sin_r(x) = \sin_d\left(\frac{180}{\pi}x\right), \sin_d(x) = \sin_r\left(\frac{\pi}{180}x\right) \quad (*)$$

توجه کنید که بسیاری از معادلات یا اتحادهای مثلثاتی بیش از آنکه جبری باشند، هندسی هستند و لذا به اندازه زاویه‌ها وابسته نیستند. مثلاً معادله زیر با اتحاد بعد از آن ربطی به واحد اندازه‌گیری زاویه‌ها ندارند:

$$\sin x = 0/5;$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

مشکل اساسی ما با تابع‌هایی از نوع زیر است:

$$y = 2x - \ln x + 3 \sin x, \quad (**)$$

که در آن عبارت $2x$ برای هر دو نوع کمیت عددی و هندسی قابل تعریف است و همانند همه چندجمله‌ای‌ها حساسیتی نسبت به واحد اندازه‌گیری نشان نمی‌دهد. لگاریتم گرچه برای شکل‌های هندسی بی‌معنی است ولی مانند چندجمله‌ای‌ها نسبت به واحد اندازه‌گیری بی‌تفاوت است. عبارت سینوس، نه تنها در حسابان بلکه در هندسه هم معنادار است؛ البته نسبت به انتخاب واحد اندازه‌گیری حساسیت نشان می‌دهد. اینجا است که باید تکلیفمان را با واحد اندازه‌گیری روشن کنیم.

از این پس ما هیچ نیازی به مطالعه تابع سینوس هندسی نداریم و لذا نماد آن را به تابع سینوس رادیانی اختصاص می‌دهیم؛ یعنی از این پس به ازای همه مقادیر حقیقی x ، قرار می‌گذاریم $\sin_r x = \sin x$. حال ببینیم اگر سینوس رادیانی به سینوس درجه‌ای تبدیل گردد، معادله $(**)$ چه تغییری می‌کند. توجه کنید که اگر

$$y = 2x - \ln x + 3 \sin x,$$

$$\text{آنگاه، با فرض } (\sin x)' = \cos x$$

$$y' = 2 - \frac{1}{x} + 3 \cos x$$

اما اگر سینوس را با سینوس درجه‌ای عوض کنیم،

آنگاه بنا بر $(**)$ ،

سخن پایانی

معلم‌ان و استادان ریاضی ستم‌دیده‌ترین قشر جامعه ما هستند. زیرا علاوه بر کار سخت و دستمزد کم، باید جور تصمیمات برنامه‌ریزی را بکشند که قوانین را در جهت منافع اقلیت‌های خاصی وضع می‌کنند. در تدوین کتاب‌های درسی، به آنان فرصت اظهار مشکلات نمی‌دهند و تا آن‌ها به گوش شنوایی برسند، موسم کنکورهای رسمی و غیررسمی که زندگی مدرسان و اولیاء و دانش‌آموزان را مختل کرده‌اند فرا می‌رسد و باید چیزی را که عقل سلیمشان نپذیرفته، شتاب‌زده به دانش‌آموزانشان تدریس کنند. علاوه بر غائله رادیان که در بخش‌های قبل به آن پرداختیم، مسئله‌های دیگری هم در میان معلمان شرکت‌کننده در همایش بوشهر زمزمه می‌شد. مثلاً شیر پاک خورده‌ای، میدان را از اغیار خالی دیده با تعویض تعریف استاندارد پیوستگی در کتاب‌های درسی، و قرار دادن شرایط کافی پیوستگی از چپ و راست به جای آن، تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را از نعمت پیوستگی در مبدأ محروم کرده است؛ استادان ریاضی با چشمان خیره و دهان باز متحیر بودند که چرا با تولید این همه کارشناس ریاضی بیکار در مملکت، نوگشایی و بسط دانشگاه‌های فرهنگیان در اهم دستور کار دولت قرار گرفته است؟ چرا در این بلوای کسر بودجه برای دانشگاه‌های مادر و چشم و چراغ کشور، گرفتن دانشجویهای حضوری را به برنامه‌های تعریف شده پیام نور اضافه کرده‌اند و حتی مجوز دوره‌های تحصیلات تکمیلی را به آن‌ها داده‌اند، ...

متولی ریاضیات کشور، قبل از هر کس، انجمن ریاضی ایران است که حدود نیم قرن پیش، بار سنگین آن را بر دوش گرفت و یک کول کشاند تا شورای مرکزی انجمن‌های دبیران ریاضی استان‌ها، شورای مرکزی خانه‌های ریاضیات و شاخه ریاضی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، به کمکش شتافتند. هر نوع تصمیم‌گیری در مورد ریاضیات کشور بدون توافق با انجمن مزبور، خیانت به علم و جوانان آینده کشور است.

$$y = 2x - \ln x + 3 \sin_d x = 2x - \ln x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{180} x\right),$$

و در نتیجه مشتق تابع به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$y' = 2 - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{60} \cos\left(\frac{\pi}{180} x\right) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{60} \cos_d(x)$$

همچنین دوره تناوب آن که بازه تقریبی 0 تا $6/28$ بود اینک بازه 0 تا 360 می‌باشد.

اثرگذاری رادیان

در این بخش از مقاله، دقت می‌کنیم که چگونه واحد اندازه‌گیری زاویه، خود را در محاسبه حد و مشتق نمایان می‌سازد. تأثیر آن در شکل تابع سینوسی واضح است؛ کافی است که فقط طول هر نقطه از منحنی سینوس رادیانی را به اندازه $\frac{180}{\pi} \approx 57.3$ کشش دهیم تا منحنی نمایش تابع درجه‌ای حاصل شود. لذا با دانستن مشتق تابع سینوس رادیانی، مشتق تابع سینوس درجه‌ای به آسانی به دست می‌آید. می‌ماند ثابت کنیم که مشتق تابع سینوس رادیانی برابر با تابع کسینوس رادیانی است:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin \frac{h}{x} \right) \left(\frac{\sin \frac{h}{x}}{\frac{h}{x}} \right) = \cos x \end{aligned}$$

که البته از دستور معروف $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ بهره گرفته‌ایم. پس باید دید که چگونه واحد اندازه‌گیری زاویه در برهان این دستور اخیر خودنمایی می‌کند. در صفحه xOy ، نقطه‌های $A=(1,0)$ ، $O=(0,0)$ و $B=(\cos t, \sin t)$ را در نظر بگیرید و ملاحظه کنید که

$$\frac{1}{x} \sin t = (\text{مساحت مثلث } OAB) < (\text{مساحت مثلث } OAC) = \frac{1}{x} \tan t$$

توجه شود که این نامساوی‌ها وقتی برقرارند که زاویه مرکزی t بر حسب رادیان باشد. (اگر t بر حسب درجه باشد، $\frac{1}{x} \sin t = \frac{\pi}{360} t$ (مساحت مثلث OAB) در نتیجه، حد مطلوب از حدگیری دو طرف نامساوی‌های زیر به دست می‌آید:

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}$$

ماتریس‌های خود معکوس

جابر مختاری دهقادی
مدرس ریاضی

ضمن تشکر از نویسنده محترم جناب آقای جابر مختاری دهقادی، لازم است قدردان زحمت جناب آقای دکتر بابلیان برای بازسازی این مقاله باشم.

سردبیر

اشاره

در این مقاله، یک روش جالب و ارزشمند مطرح می‌کنیم که بتوان از آن، ماتریس‌هایی پیدا کرد که معکوس خودشان باشند. ما این ماتریس‌ها را «خود معکوس» می‌نامیم. این مقاله در سطح معلومات دبیرستان است و می‌تواند برای همکاران فرهنگی رشته ریاضی، جالب و مفید باشد.

کلیدواژه‌ها: ماتریس، ریاضی دوره دبیرستان، ماتریس خود معکوس

مقدمه:

ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن با هم برابر باشند را ماتریس مربعی گویند. می‌دانیم ماتریس‌های مربعی که دترمینان غیر صفر دارند معکوس پذیر هستند. اگر معکوس A با خودش برابر باشد داریم:

$$A = A^{-1} \rightarrow A \times A = A \times A^{-1} \rightarrow A^2 = I$$

$$\rightarrow \det A^2 = \det I = 1 \rightarrow \det A = \pm 1$$

بنابراین اولین شرط این است که دترمینان ماتریس 1 یا -1 باشد.

ماتریس 2×2:

می‌دانیم که در ماتریس‌های خود معکوس مانند A ، دترمینان 1± است، یعنی دترمینان در این نوع ماتریس‌ها، دو حالت دارد. حالت اول: اگر دترمینان 1+ باشد داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -b \rightarrow b = 0 \\ c = -c \rightarrow c = 0 \\ ad = 1 \rightarrow a = d = \pm 1 \end{cases} \quad (1)$$

لذا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ تنها ماتریس‌های خود معکوس با دترمینان یک هستند.

حالت دوم: در صورتی که دترمینان -1 باشد، با حل دستگاهی شبیه به (1)

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^T + 1}{b} & -a \end{bmatrix}$ که $b \neq 0$ حاصل می‌شود که خود معکوس است.

مثلاً اگر $a=2$ و $b=3$ آن‌گاه

ماتریس خود معکوس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. لذا بی‌نهایت از این ماتریس‌های 2×2 ، می‌توان به‌دست آورد.

برای ماتریس 3×3

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ \frac{-a^T + 1}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b \neq 0$ و دلخواه a دلخواه ماتریسی خود معکوس است. بنابراین، بی‌نهایت ماتریس خود معکوس از مرتبه 3×3 داریم.

برای ماتریس 4×4 :

ماتریس را به بلوک‌های 2×2 افراز می‌کنیم. فرض کنید ماتریس $A_{2 \times 2}$ خود معکوس و $O_{2 \times 2}$ ماتریس صفر باشد. در این صورت ماتریس‌هایی به شکل زیر معکوس‌پذیر هستند

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

لذا ماتریس‌های مرتبه زوج را می‌توان به‌صورت 2×2 افراز کرده و مانند فوق، ماتریس «خود معکوس» معرفی کرد.

ماتریس 5×5

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & 0 \\ O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

ماتریس 6×6 خود معکوسی که می‌توان معرفی کرد، به‌صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

و به همین صورت از هر مرتبه‌ای، می‌توان ماتریس خود معکوس نوشت.

این مقاله کاری کاملاً تحقیقی بوده و از هیچ منبعی استفاده نشده است. البته ممکن است ماتریس‌های $n \times n$ با $n \geq 3$ ، یافت به گونه‌ای که درایه صفر نداشته باشند.

بدون گوشه

رسم نیمساز یک زاویه

چکیده

در یک کارگاه آموزشی، مسئله‌هایی مطرح می‌شوند که نمی‌توان به راحتی از کنارشان عبور کرد. راه‌حل‌های متفاوتی بیان می‌شوند، بحث‌ها و استدلال‌های زیادی صورت می‌گیرد و در آخر، مجموعه‌ای از راه‌حل‌های جالب بر جای می‌ماند. مسئله‌ای که در این مقاله به بحث گذاشته شده، مربوط به زاویه‌ای است که گوشه یا همان رأس زاویه موجود نیست و سعی شده است که با استفاده از وسایل ترسیم و استدلال، نیمساز آن به‌دست آید. در این مقاله، چهار روش برای به‌دست آوردن نیمساز آن مطرح شده است.

کلیدواژه‌ها: کارگاه آموزشی، وسایل ترسیم زاویه، استدلال، نیمساز زاویه

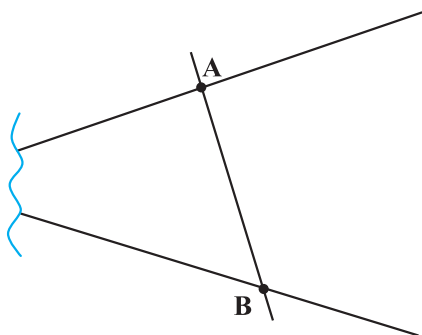
سید جمال بخشایش، رضا منصوری، مسعود جوانبخش
سرگروه‌های آموزشی ریاضی دوره متوسطه اول
استان چهارمحال و بختیاری

از راه‌های دیگری به نیمساز زاویه بدون گوشه برسیم، چه باید بکنیم یا چه می‌توانیم بکنیم؟

روش اول:

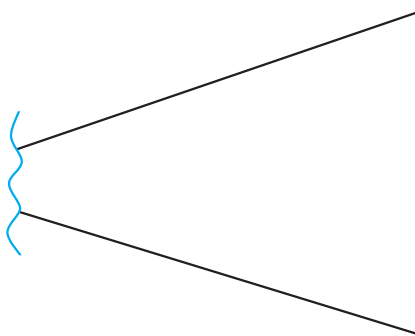
برای پیدا کردن نیمساز زاویه‌ای که گوشه آن را نداریم، می‌توانیم از هم‌مرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث استفاده کنیم. بنابراین، باید با این زاویه یک مثلث درست کنیم. برای این کار، ابتدا یک خط متقاطع دلخواه چنان رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در دو نقطه A و B قطع کند.

شکل ۲



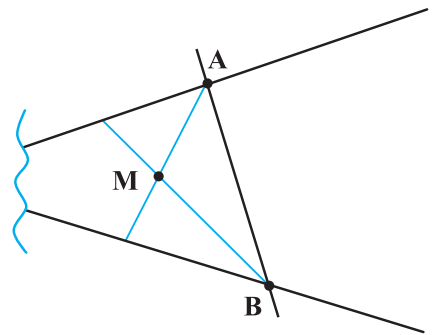
سپس نیمسازهای دو زاویه A و B را رسم کرده و نقطه هم‌رسی آن‌ها را M می‌نامیم.

مسئله: زاویه بدون گوشه‌ای موجود است، نیمساز آن را چگونه می‌توان رسم نمود؟
شکل ۱



حل مسئله

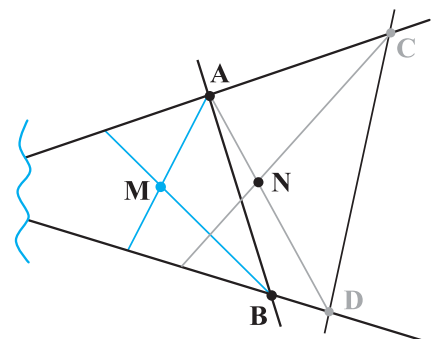
می‌توانیم اضلاع زاویه را امتداد دهیم و محل برخورد را به‌دست آوریم، سپس نیمساز زاویه به‌دست آمده را رسم کنیم. اما سؤال اینجاست که اگر بخواهیم



شکل ۳

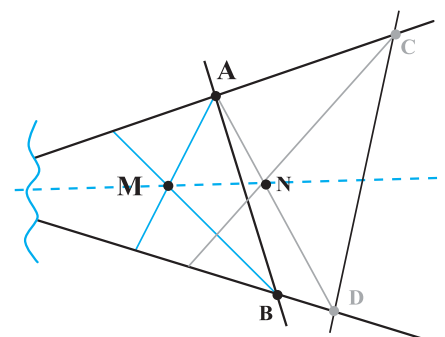
ولی با یک نقطه نمی‌توان نیمساز زاویه بی‌گوشه را پیدا کرد. از آنجایی که همه مثلث‌های ایجاد شده مشابه مثلث بالا که زاویه بدون گوشه در آن‌ها ثابت است، نقطه هم‌رسی نیمسازهایشان روی نیمساز زاویه بدون گوشه قرار خواهد گرفت، پس کافی است که مثلث دیگری با رسم یک خط متقاطع دیگر مانند DC ایجاد کنیم. آن‌گاه نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی آن را به‌دست آورده و آن را N می‌نامیم.

شکل ۴



با وصل کردن دو نقطه M و N، نیمساز زاویه بدون گوشه به‌دست می‌آید.

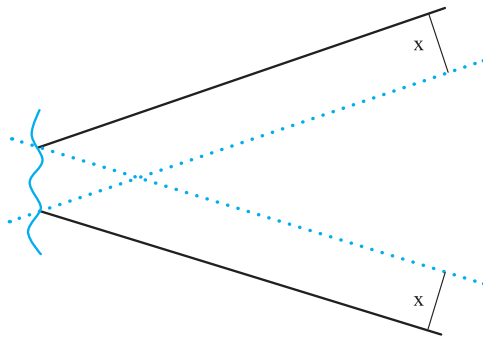
شکل ۵



روش دوم:

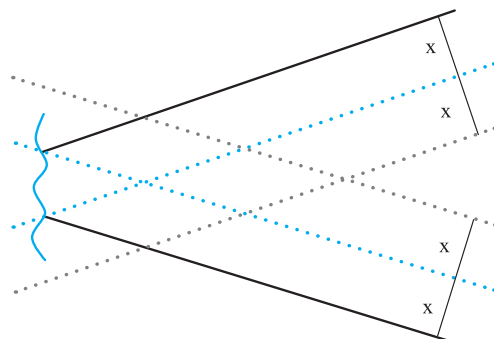
از دو ضلع زاویه بدون گوشه، به یک اندازه مثلاً x ، به درون زاویه رفته و دو خط موازی آن اضلاع، رسم می‌کنیم.

شکل ۶



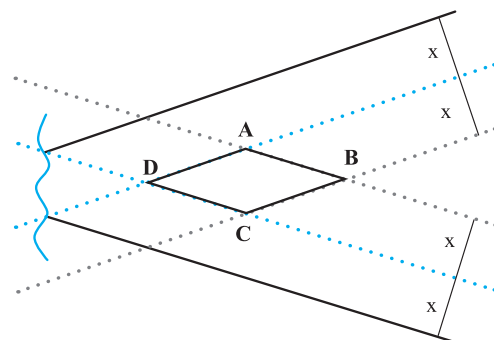
سپس دو خط موازی دیگر نیز به همان فاصله و موازی دو خط رسم شده، رسم می‌کنیم.

شکل ۷



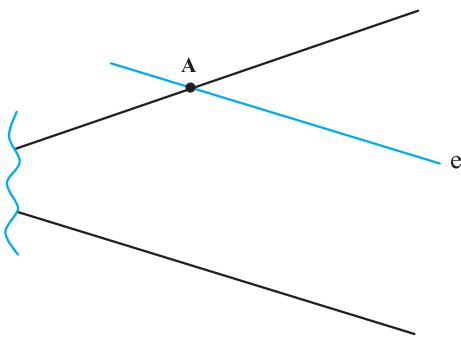
چهارضلعی ایجاد شده از تقاطع این چهار خط موازی را ABCD می‌نامیم.

شکل ۸



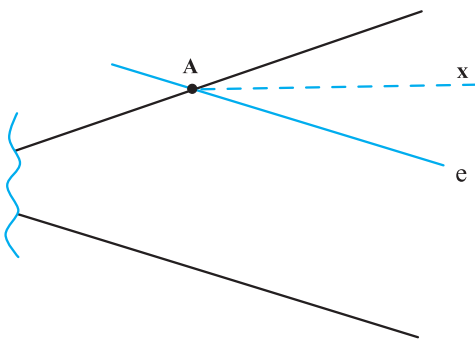
چون چهارضلعی ABCD حاصل تقاطع خطوط موازی است، بنابراین متوازی‌الاضلاع است. ابتدا ثابت

شکل ۱۱



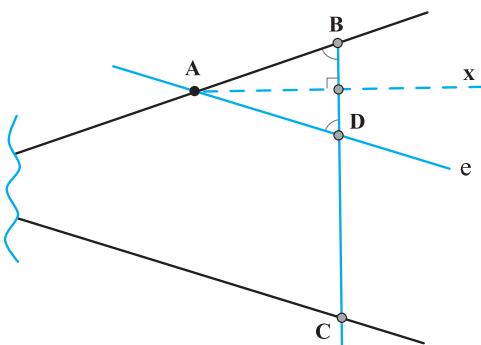
سپس نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم.

شکل ۱۲



نقطه B را روی ضلع بالایی زاویه بدون گوشه فرض کرده و بر نیمساز Ax، عمود BC را وارد می‌کنیم.

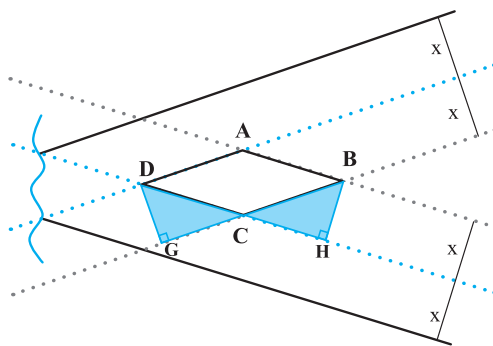
شکل ۱۳



در مثلث ABD، چون Ax نیمساز و عمود وارد بر ضلع BD است، بنابراین مثلث ABD متساوی الساقین است. از آنجایی که دو زاویه C و D طبق خطوط موازی و خط مورب مساوی هستند، دو زاویه B و C نیز باهم برابرند. پس مثلث ایجاد شده بین پاره خط BC و دو ضلع زاویه بدون گوشه، متساوی الساقین می‌باشد.

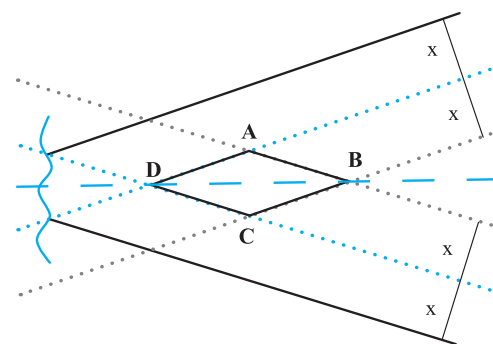
می‌کنیم این چهارضلعی لوزی است. از دو رأس B و D بر خطوط موازی عمود کرده تا دو مثلث قائم‌الزاویه BCH و DCG به دست آید. این دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین (ض‌ز) همنهشت هستند (طول عمودها برابر است $DG=BH$ ، زاویه قائمه $\hat{G} = \hat{H}$ و متمم زاویه‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع $\hat{GDC} = \hat{HBC}$. در نتیجه $DC=BC$ است، پس چهارضلعی ABCD لوزی است.

شکل ۹



اگر نیمساز زاویه‌های B و D را رسم کنیم، نیمساز زاویه بدون گوشه خواهد بود. در واقع زاویه D، همان انتقال یافته زاویه بدون گوشه روی نیمساز آن است.

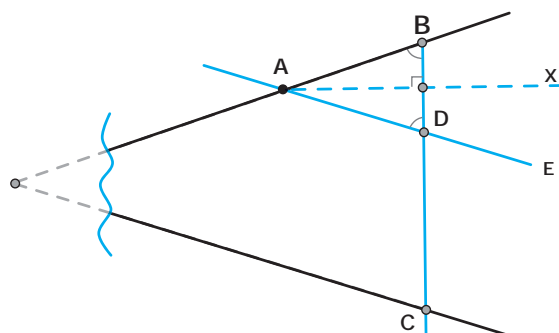
شکل ۱۰



روش سوم:

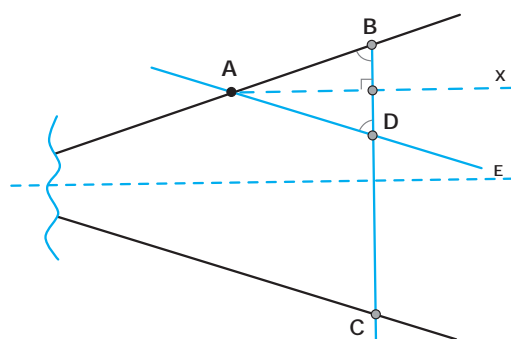
خط e را موازی با یکی از خطوط زاویه چنان رسم می‌کنیم تا خط دیگر را در نقطه A قطع کند. زاویه تشکیل شده طبق خطوط موازی و خط مورب، با زاویه بدون گوشه شده برابر است.

شکل ۱۴



حال اگر عمود منصف پاره خط BC را رسم کنیم، همان نیمساز زاویه بدون گوشه خواهد بود.

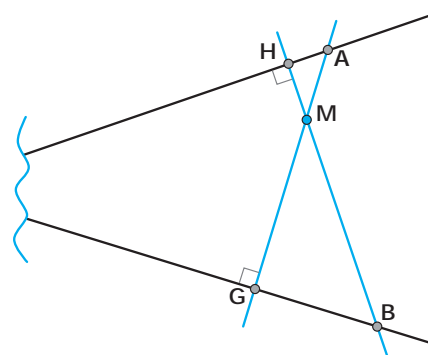
شکل ۱۵



روش چهارم:

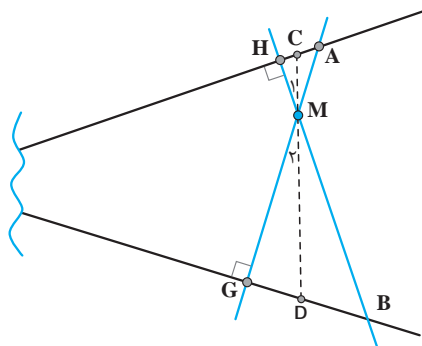
از یک نقطه دلخواه مانند M، دو خط عمود بر اضلاع زاویه رسم می کنیم.

شکل ۱۶



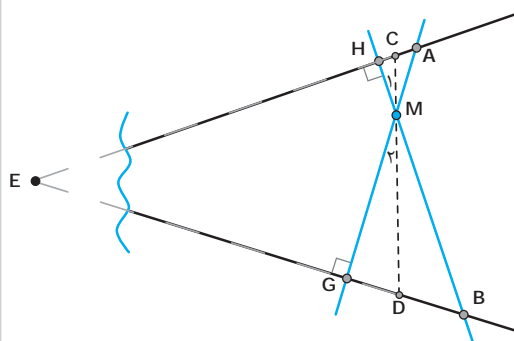
نیمساز زاویه \widehat{HMA} را رسم می کنیم.

شکل ۱۷



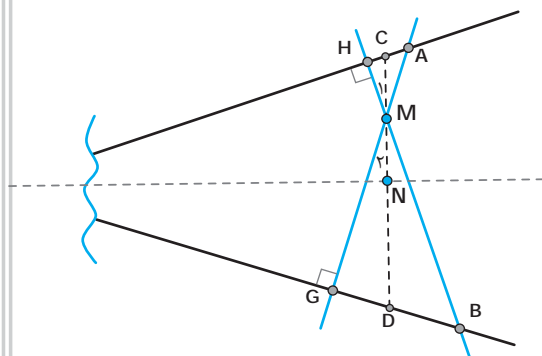
دو مثلث MHC و MGD بنابر برابری زاویه های $\widehat{H} = \widehat{G}$ و $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ می توان نتیجه گرفت دو زاویه C و D با هم برابرند. بنابراین، مثلث ایجاد شده از پاره خط CD و دو ضلع زاویه بدون گوشه (CED)، متساوی الساقین است.

شکل ۱۸



یعنی برای رسم نیمساز زاویه بدون گوشه، کافی است عمود منصف پاره خط CD را رسم کنیم.

شکل ۱۹



با برف دانه‌ها^۱ و تک‌شاخ‌ها^۲، مارینا راتنر و مریم میرزاخانی، جهان در حال حرکت را کشف کردند!

ایمی ویلکینسون^۳، استاد ریاضی دانشگاه شیکاگو
ترجمه: فاطمه حاج‌عزیزی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم دوره ابتدایی، کرمان
زهر اگویا، دانشگاه شهید بهشتی



مارینا راتنر، مسکو، ۱۹۹۱

خود، فرمول جدیدی را برای توصیف منحنی‌ها روی سطوح انتزاعی خاص، اثبات کرده است. دیدگاهی که پیامدهای شگرفی به دنبال داشت و به عنوان مثال، اثبات جدیدی برای حدس مشهوری در فیزیک در مورد گرانش کوانتومی، ارائه می‌داد. لازم به توضیح است که دکتر میرزاخانی، ابرستاره جوان ایرانی، استاد دانشگاه استنفورد اولین زنی بود که توانست مدال معتبر فیلدز را دریافت نماید^۴ و تنها ۴۰ سال داشت که در اثر ابتلا به سرطان، در ماه جولای ۲۰۱۷ درگذشت.

هر دو زن، با حمله‌های صبورانه به مسائل عمیقاً دشوار، الهام‌بخش من بودند. کار این دو نفر، ارتباط نزدیکی به هم دارد و با بعضی از کهن‌ترین سؤال‌های ریاضی، مرتبط است.

یونانیان باستان، مجذوب اجسام افلاطونی بودند- یک شکل سه بعدی که از چسباندن قطعه‌های مسطح یک‌سان به یکدیگر به طرز یکنواخت، ساخته می‌شود. این قطعه‌ها، باید چندضلعی‌های منتظم با ضلع‌ها و زاویه‌های برابر باشند. به عنوان مثال، مکعب یک جسم افلاطونی است که از شش مربع مساوی ساخته شده است.

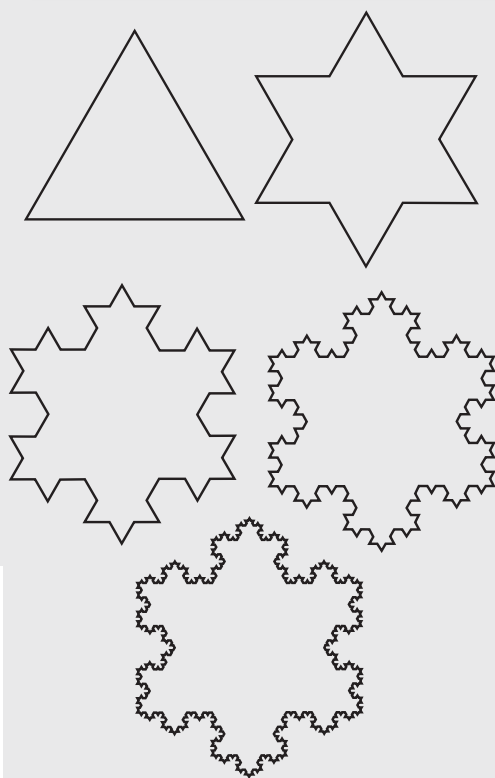
فیلسوفان قدیم، در شگفت بودند که تعداد اجسام افلاطونی چند تاست. به نظر می‌رسید که با تعریفی که برای اجسام افلاطونی ارائه شد، بی‌نهایت امکان وجود داشته باشد. در حالی که به طور غیرمنتظره‌ای، تنها پنج جسم افلاطونی با این تعریف، وجود دارد؛ حقیقتی که

دستاوردها و موفقیت‌های دو ریاضیدان برجسته، برای دهه‌ها پژوهشگران را خیره و مجذوب خواهد کرد. بخش ریاضی آکادمی ملی علوم^۵، ۱۰۴ ریاضی‌دان را در فهرست اعضای خود دارد که فقط چهار نفر آن‌ها، زن هستند. به تازگی در ماه جون، این تعداد به شش نفر رسید. مارینا راتنر^۶ و مریم میرزاخانی^۷ از لحاظ شخصیتی و پیشینه با هم، بسیار تفاوت داشتند. دکتر راتنر یک یهودی متولد اتحاد جماهیر شوروی سابق بود که از طریق اسرائیل، به دانشگاه کالیفرنیا در برکلی رفت. وی در اوایل جولای ۲۰۱۷، در سن ۷۸ سالگی در خانه خود، بر اثر حمله قلبی درگذشت^۸.

مارینا در طول زندگی حرفه‌ای خود، نسبتاً دیر یعنی در دوران پنجاه سالگی‌اش، به موفقیت رسید، وقتی که معروف‌ترین نتایج مشهور خودش را به نام قضیه‌های راتنر^۹، تولید نمود. بعدها معلوم شد که این قضیه‌ها، به طرز شگفت‌انگیز و گسترده‌ای، قابل کاربرت هستند و دارای بسیاری استفاده‌های ظریف‌اند.

در اوایل دهه ۱۹۹۰ که من، دانشجوی تحصیلات تکمیلی در برکلی بودم، یکی از استادان سعی کرد تا دکتر راتنر را متقاعد کند که استاد پایان‌نامه‌ام شود. او نمی‌خواست این تقاضا را قبول کند: حرفش هم این بود که سال‌ها پیش، اولین و تنها دانشجوی دکتری خود را به سرانجام نرساند و دیگر، دانشجوی دیگری نمی‌خواهد. از طرف دیگر اولین بار که نام دکتر میرزاخانی را شنیدم، وقتی بود که فهمیدم ایشان در دوره دکتری

امیدوارم که، توانسته باشم برای تمام کم‌گویی‌ها و سکوت دکتر میرزاخانی درباره شهرتش، نقشی ایفا کرده باشم، و بگویم که او، الهام‌بخش تمام زنان نسل جوان تر است



برفدانه کُخ در حالت‌های مختلف

دکتر راتنر و دکتر
میرزاخانی، شکل‌هایی
را مطالعه کردند که
تحت انواع پیچیده‌تر
حرکت‌ها و در
فضاهای با ابعاد بالاتر،
شکل‌هایشان حفظ
می‌شوند و تغییر
نمی‌یابند

روشن شدن خواص دنباله‌های عددی و توضیح اجزای
اساسی در ساختار هندسهٔ جبری، از آن جمله‌اند.
کار دکتر میرزاخانی و دکتر اسکین، به طور مشابه،
به دلیل استفاده‌های بسیار زیادی که دارد، «قضیهٔ عصای
سحرآمیز»^{۱۶} نامیده شده است که از آن میان، می‌توان به
کاربردش در «مدل درخت باد»^{۱۷} اشاره نمود.
بیش از یک قرن پیش، فیزیک‌دان‌ها تلاش کردند تا
فرایند انتشار را از طریق تصور کردن یک جنگل نامتناهی
با درخت‌های مستطیلی شکل که با فاصله‌های منظم و
هم‌سان قرار گرفته‌اند، شرح دهند. اما وقتی که با بازتاب
نور از یک آینه، باد در این جنگل عجیب و غریب، وزیدن
گرفت، درخت‌ها را تدریجاً نکه داشت.

افتخار اثبات آن، به ریاضی‌دان یونان باستان تیائیتوس^{۱۰}،
نسبت داده می‌شود. این کوتاه‌سازیِ نظیر کردن چیزی
به ظاهر نامتناهی به یک عدد متناهی، موردی است که
ریاضی‌دانان، به آن صُلبیت^{۱۱} می‌گویند.

چیزی که صُلب باشد، نمی‌تواند تغییر شکل پیدا کند
یا خم شود، مگر این که ماهیت اصلی آن از بین برود.
اشیای صلب هم مانند اجسام افلاطونی، به‌طور معمول
نادر هستند و گاهی اوقات، اشیای نظری، مانند تک
شاخ‌های ریاضی^{۱۲}، می‌توانند آن قدر صلب باشند که اصلاً
وجود نداشته باشند.

در کاربرد معمول، صلبیت معمولاً به عنوان صفتی
منفی، دلالت بر انعطاف ناپذیری دارد. هرچند که قدرت
الماس، مدیون استحکام و صلبیت ساختار مولکولی‌اش
است. صلبیت کنترل شده^{۱۳} - یعنی، دارا بودن قابلیت
انعطاف فقط در جهت‌های مشخص - اجازه می‌دهد که
پل‌های معلق، در برابر بادهای شدید مقاوم باشند.

دکتر راتنر و دکتر میرزاخانی، در مورد شناخت این
وجه نافذ از صلبیت، خبره بودند. کار آن‌ها، شناخت
ویژگی‌های اجسامی بود که شکلشان تحت حرکت‌های
فضا، حفظ می‌شود.

یک مثال، مدلی ریاضی است که «برفدانه کُخ»
نامیده می‌شود. این مدل، الگویی از مثلث رانشان می‌دهد
که روی اضلاعش، تکرار می‌شود. لبهٔ این برفدانه با هر
مقیاسی که مشاهده شود، یکسان دیده می‌شود.

اساساً، برفدانه با هر تغییر مقیاسی، بدون تغییر
باقی می‌ماند؛ اشیای ریاضی دیگری تحت انواع مختلف
حرکت‌ها، یکسان باقی می‌مانند. به‌عنوان مثال، وقتی
یک توپ می‌چرخد، شکل آن تغییر نمی‌کند.

دکتر راتنر و دکتر میرزاخانی، شکل‌هایی را مطالعه
کردند که تحت انواع پیچیده‌تر حرکت‌ها و در فضاهای با
ابعاد بالاتر، شکل‌هایشان حفظ می‌شوند و تغییر نمی‌یابند.
در مورد دکتر راتنر، آن حرکت از نوع «برش‌دادن»^{۱۴}
بود، شبیه بادی قوی که در بالای جو، می‌وزد. دکتر
میرزاخانی با یکی از همکارانم «آلکس اسکین»^{۱۵}، بر
برش‌دادن، کشیدن و فشرده‌سازی متمرکز شدند.

این ریاضی‌دان‌ها ثابت کردند که بر خلاف برفدانه،
تنها شکل‌هایی که ممکن است با حرکت حفظ شوند،
شکل‌های بسیار منظم و صاف (هموار)، مانند سطح یک
توپ هستند.

پیامدهای این یافته، [هنوز خیلی] دور از دسترس‌اند.
یکی از نتایج دکتر راتنر، ابزاری است که پژوهشگران، آن
را تبدیل به استفاده‌های گوناگون وسیعی کرده‌اند، که



مارینا راتنر، برکلی، ۲۰۱۱

کار دکتر میرزاخانی و دکتر اسکین، به طور مشابه، به دلیل استفاده‌های بسیار زیادی که دارد، «قضیه عصای سحر آمیز» نامیده شده است که از آن میان، می‌توان به کاربردش در «مدل درخت باد» اشاره نمود

دکتر میرزاخانی و دکتر اسکین، خودشان مدل درخت باد را کشف نکردند، ولی سایر ریاضی‌دان‌ها با استفاده از قضیه عصای سحر آمیز، ثابت کردند که جامعیت وسیعی در این جنگل‌ها وجود دارد: وقتی که تعداد ضلع‌ها (کناره‌ها)ی هر درخت ثابت باشد، باد با همان سرعت بنیادی، و بدون در نظر گرفتن شکل واقعی درخت، جنگل را کشف خواهد کرد.

زنان با استعداد دیگری، سؤال‌های بنیادین مانند این را بررسی کردند، اما چرا تعداد زنان، بیشتر نیست؟ در سال ۲۰۱۵ میلادی در آمریکا، تنها ۱۴ درصد از زنان با مدرک دکترای ریاضی در گروه‌های ریاضی دانشگاهی، وضعیت استخدامی رسمی - قطعی داشتند. البته این عدد، نسبت به ۹ درصد در دو دهه گذشته، افزایش داشته است.

قضیه‌های دکتر راتنر، از جمله مهم‌ترین‌ها در نیم قرن گذشته هستند، اما هرگز، چنان‌که سزاوارش بود، به رسمیت شناخته نشد. بخشی از این، مربوط به این است که بهترین کارهایش، در اواخر زندگی حرفه‌ای‌اش به ثمر رسید، و بخشی دیگر، نوع تحقیق کردنش بود - او همیشه به تنهایی کار می‌کرد، با هیچ محقق یا دانشجوی تحصیلات تکمیلی دیگری، مشارکت نمی‌کرد تا شهرتش منتشر شود. حتی دانشگاه برکلی، خبر فوتش را اعلام نکرد.

درست بر عکس وی، دو دهه بعد، کارهای دکتر میرزاخانی، بلافاصله شناخته شد و تحسین‌ها را برانگیخت. خبر درگذشت او، به سرعت منتشر شد - این خبر، در صفحه اول روزنامه‌های ایران منتشر شد. شاید این نشانه‌ای از پیشرفت (در رابطه با زنان و ریاضی) باشد.

برای اولین بار، دکتر میرزاخانی را در سال ۲۰۰۴ ملاقات کردم. او دکترای خود را در هاروارد تمام کرده بود. من استاد دانشگاه نورت‌وسترن بودم و فرزند دومم را باردار بودم.

باشهرتی که داشت، انتظار داشتم که با یک جنگنده بی‌پروا با ذهنیتی متمرکز و تک‌بعدی، ملاقات کنم. ولی کاملاً خلع سلاح شدم وقتی که مکالمه ما، تبدیل به این شد که هر دو، هم ریاضی‌دان و هم مادر بودیم.

مریم از من پرسید که «چطور می‌توانید هر دو کار را با هم انجام دهید؟». فکر می‌کنم ذهنی که درگیر چنین سؤالی است، ممکن است نشان دهنده موانعی باشد که بر سر راه صعود زنان به پایه‌های بالای ریاضی است.

در حال حاضر در دانشگاه هاروارد، تعداد زنان ریاضی‌دان محقق که رسمی - قطعی هستند، صفر است. در دانشگاه خودم یعنی دانشگاه شیکاگو، تا سال ۲۰۱۱، تنها یک زن چنین موقعیتی داشت.

ما زنان، به تدریج در حال پیوستن به این صف هستیم، چیزی که ممکن است مدل «قطره‌ای» نامیده شود.

اغلب دانشجویان به من می‌گویند که حضورم در دانشکده، آن‌ها را متقاعد کرده که زنان متعلق به ریاضی هستند. اگرچه ممکن است خاموششان کنند. من به طور مشابه، از دکتر راتنر الهام گرفتم.

امیدوارم که توانسته باشم برای تمام کم‌گویی‌ها و سکوت دکتر میرزاخانی درباره شهرتش، نقشی ایفا کرده باشم، و بگویم که او، الهام‌بخش تمام زنان نسل جوان تر است.

فشارهای اجتماعی شگفت‌آور بسیاری، مانع ریاضی‌دان شدن هستند. وقتی شما به عنوان زن در اقلیت‌اید، برای مقاومت کردن، باید قدرت و تاب تحمل سختی بیشتری را هم داشته باشید. همان‌طور که دکتر راتنر و دکتر میرزاخانی، هر دو ویژگی ریاضی‌دان بودن و زن بودن را داشتند.

برای الهام‌بخشی‌ای که هر دو فراهم نمودند، اما بالاتر از همه، برای زیبایی ریاضی که تولید کردند، زندگی آن‌ها را گرامی می‌داریم.

۷ آگوست ۲۰۱۷ - نیویورک تایمز

پی‌نوشت‌ها

1. Snowflakes
2. Unicorns
3. Amie Wilkinson
4. National Academy of Sciences
5. Marina Ratner
6. Maryam Mirzakhani
7. SEE <https://www.nytimes.com/2017/07/25/science/marina-ratner-dead-mathematician.html>
8. Ratner's Theorems
9. SEE <https://www.nytimes.com/2017/07/16/us/maryam-mirzakhani-dead.html> AND <https://www.nytimes.com/2017/07/16/us/maryam-mirzakhani-dead.html>
10. Theaetetus
11. Rigidity
12. Mathematical Unicorns
13. Controlled Rigidity
14. Shearing Type
15. Alex Eskin
16. Magic Wand Theorem
17. Wind-tree Model

یادگیری

مستمر معلمان

علی رجالی

معلم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان و خانه ریاضیات اصفهان

چکیده

«تجربه چندین ساله نویسنده از همکاری با معلمان ریاضی و مطالعات او در زمینه توسعه آموزش، به دو نتیجه مهم رسیده است، یکی لزوم توجه خاص به آموزش ابتدایی که از طریق ارتقای جایگاه اجتماعی اقتصادی و سپس آماده سازی آموزگاران محترم قبل و در حین خدمت میسر می شود و دیگری فراهم آوردن بستر لازم برای تبادل تجربه و یادگیری مستمر در معلمان. مرکز تحقیقات معلمان و انجمن های علمی آموزشی معلمان، دو محیطی هستند که در آن امکان آموزش مستمر معلمان فراهم می آید. نویسنده خوشحال است که در ایجاد این دو محیط در ایران نقش اساسی داشته است و در این گزارش، نمونه هایی از این تجارب مفید را عرضه می نماید.»

کلید واژه ها: آموزش ابتدایی، ارتقای جایگاه آموزگاران، یادگیری مستمر معلمان، مرکز تحقیقات معلمان، انجمن های علمی آموزش معلمان ریاضی

جلساتی را برگزار می کردند و به مطالعات و اصطلاحاً رفع اشکالات روزمره خود می پرداختند. نویسنده پس از فراغت از تحصیل از دانشگاه استنفورد آمریکا و بازگشت به ایران، به مشکلی در حین تدریس در دانشگاه شیراز برخورد کرد که مسیر زندگی علمی او را تغییر داد. او دید که ۹ سال قبل از آن یعنی در سال ۱۳۴۸ در حالی که عمیقاً مفاهیم ریاضی جدید را او و هم دوره ای هایش قبل از ورود به دانشگاه نمی دانستند، به راحتی توانسته بودند کتاب های ریاضی سخت و دشوار را حتی به

قبل از اتمام تحصیلات دانشگاهی نویسنده، در سال های ۱۳۵۰ برنامه درسی ریاضی ایران تغییر کرد و ریاضیات جدید با مفاهیم جدید وارد برنامه های درسی شد. معلمان ریاضی اصفهان که برای آماده سازی خود در دوره ها و کارگاه هایی که در تهران، شیراز و یا شهرهای دیگر دانشگاهی برای آموزش مفاهیم جدید به آنان شرکت نموده بودند، هنوز هم نیاز به تبادل اطلاعات و مطالعه مشترک را احساس می کردند، به دلیل علاقه و انگیزه ای که به امر تدریس داشتند، در منازل خود

زبان انگلیسی بخوانند و بفهمند. اما در سال ۱۳۵۷، دانشجویانی که تازه از دبیرستان فارغ‌التحصیل شده بودند، اگرچه با اصطلاحات ریاضیات جدید آشنا بودند، ولی مفاهیم آن را درک نکرده بودند. او که به معلمی و ریاضیات عشق می‌ورزید، یک چرای بزرگ در دنیای حرفه‌ای خود مطرح کرد. این چراء او را به مدارس و جامعه معلمان کشاند و آنقدر پیشرفت کرده است که خوشبختانه، الان بیشتر توجه‌اش به آموزش ابتدایی معطوف است.

به هر حال با انتقال به اصفهان (چون در آن زمان جوان کم سن و سالی بود و احساس کرده بود که در بین معلمان شیراز نمی‌تواند نفوذی داشته باشد، خود را به اصفهان منتقل کرد)، در دانشگاه صنعتی اصفهان مرکز بررسی ریاضیات دبیرستان را با کمک آقای یحیی تابش و با همکاری اساتیدی چون دکتر میامی، دکتر بیژن ظهوری زنگنه و سایر دوستان، راهاندازی کرد و به جمع معلمان ریاضی اصفهان آمد. تجربه قبلی معلمان ریاضی اصفهان کمک کرد تا برنامه‌های بعد از ظهر دوشنبه‌های معلمان، رسماً راهاندازی شود و کمک و حمایت استادان به نامی که از معلمان خوش‌نام و علاقه‌مند بودند، زمینه‌های اولیه را برای مطالعات مستمر در اصفهان، به وجود آورد.

پس از مدتی، مرحوم تیمور غیائی‌نژاد، آن تجربه را به صورت طرحی به نام «مرکز معلم» ارائه دادند و نویسنده و سایر دوستان ریاضی اصفهان، تلاش کردند این طرح را در اصفهان پیاده کنند. طرح به تصویب معاونت پژوهشی وقت وزارت آموزش و پرورش (مرحوم شهید موسوی) رسید، ولی با تغییر مدیران در اصفهان، پیاده‌سازی آن متوقف شد. تا آنکه جلساتی در دانشگاه اصفهان با همت آقای دکتر دانایی و با حضور معلمان ریاضی، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و زمین‌شناسی و اساتیدی از دانشگاه‌های اصفهان و صنعتی اصفهان در این رشته‌ها، برگزار شد و با پی‌گیری آنان و تلاش نویسنده (که سفرهای زیادی به تهران برای پی‌گیری راهاندازی این مرکز داشت)، «مرکز تحقیقات معلمان» در اصفهان شکل گرفت. از سوی دیگر، همان تجربه دوشنبه‌ها، طرح ایجاد انجمن‌های علمی آموزشی معلمان را که گویا در رشته‌های دیگر و نیز استان‌های دیگر نمونه‌هایی از آن‌ها هم قبل از انقلاب وجود داشته است، تهیه و در زمان وزارت آقای محمدعلی نجفی این طرح هم به تصویب رسید و مجوز تشکیل این انجمن‌ها

در وزارت آموزش و پرورش، توسط شورای عالی انقلاب فرهنگی صادر شد [۱].

در جلسات بعد از ظهرهای دوشنبه، معلمان ریاضی اصفهان که به ترتیب در مدارس بهشت‌آئین، ادب و مرکز تحقیقات معلمان و مجدداً دبیرستان ادب و سپس در خانه‌های ریاضیات تشکیل می‌شد و هنوز هم ادامه دارد، نه تنها مطالب جدید ریاضی توسط معلمان و اساتید دانشگاه‌ها ارائه می‌شوند و اشکالات روزمره معلمان در بحث با سایرین رفع می‌گردند، بلکه تجارب معلمی و اشکالات و مسائل آموزش ریاضی هم بین شرکت‌کنندگان، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

برگزاری نخستین مسابقه دانش‌آموزی ریاضی اصفهان در سال ۱۳۶۲ که در نهایت به المپیادهای علمی منجر شد [۲] و حاصل آن، پیداشدن دانشمندان و ریاضی‌دانان بزرگی همچون زنده یاد دکتر مریم میرزاخانی، اولین زن برنده جایزه فیلدز است، بررسی مسائل افت ریاضی که توسط نویسنده در انجمن ریاضی ایران و سپس حوزه معاونت پژوهشی وزارت آموزش و پرورش مطرح گردیدند و ارائه راه‌حل‌های آن [۳]، برگزاری نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران [۴]، که در حقیقت نخستین کنفرانس آموزش ریاضی در ایران بود، ارائه روش‌های جدید و نوین تدریس مفاهیم ریاضی [۵]، همکاری با آموزگاران برای رفع مشکلات آموزش ریاضی دوره ابتدایی [۶]، مشکل آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و تأثیر مخرب آن‌ها بر آموزش ریاضی کشور که منجر به برگزاری سمیناری تحت عنوان «سمینار بررسی روش‌ها و مسائل آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها» در سال ۱۳۸۱ در اصفهان شد [۷] و به دنبال آن، ارائه طرح جدید سنجش و پذیرش دانشجو به مجلس شورای اسلامی (که متأسفانه در لحظات آخر به طرح غیرقابل اجرای حذف کنکور منجر شد) و حتی ریشه‌هایی از تشکیل «کمسیون پیشبرد ریاضیات» فرهنگستان علوم و بحث‌های اساسی «سمینار علوم ریاضی و چالش‌ها» [۸] و بسیاری دیگر از این دستاوردها، حاصل این جلسات هستند.

در این نوع فعالیت‌ها، هدف نوشتن مقاله نبود، بلکه یادگیری مستمر و عمق‌نگری به مسائل آموزشی بود که بسیاری از آن‌ها، خوشبختانه جواب دادند و اگر این مسیر برای تمام رشته‌ها و در تمام استان‌ها، با توجه به وجود انجمن‌های علمی آموزشی معلمان در

آموزش و پرورش گسترش یابد، اهداف کرسی یونسکو به عنوان «معلمان به مثابه یادگیرندگان مادام‌العمر»، می‌تواند تحقق یابد. [۹]

اما آنچه که دانشگاه فرهنگیان علی‌رغم بدون برنامه بودن از ابتدا و نبود امکانات آموزشی در پردیس‌های مختلف آن در این راستا باید انجام دهد، شاید استفاده از این تجربه‌ها برای ایجاد انگیزه در دانشجویان این دانشگاه، برای عشق ورزیدن به رشته‌ای که انتخاب کرده‌اند، ایجاد ارتباط بین دانشجویان و پردیس‌های دانشگاه فرهنگیان با معلمان باسابقه (استفاده از تجارب و دستاوردهای آنان)، همکاری تنگاتنگ با دانشگاه‌های اصلی که در رشته‌های مرتبط با دانشجویان این دانشگاه دارای سابقه ممتد هستند و ارتباط با انجمن‌های علمی آموزشی معلمان و خانه‌هایی مانند خانه ریاضیات اصفهان [۱۰] است که سال‌ها تجربه آماده‌سازی معلمان را دارند.

از سوی دیگر وزارت آموزش و پرورش هم باید از تجربه دانشگاه‌ها و مدارس کشورهای دیگر استفاده نماید و محیط‌هایی را در هر مدرسه، برای امکان تبادل نظر معلمان یک رشته خاص در آن مدرسه ایجاد نماید و تسهیلاتی را فراهم کند که معلمان بتوانند با یکدیگر، تبادل اطلاعات و تجربه داشته باشند و هم با معلمان رشته‌های دیگر در مقاطع دیگر تحصیلی، ارتباط مستمر علمی پیدا کنند.

تجربه نویسندگان در کانادا و استرالیا نشان از این دارد که معلمان پس از استخدام در آموزش و پرورش، به دانشگاه‌ها معرفی می‌شوند و دانشگاه‌ها در محیط‌های علمی خود آنان را پرورش می‌دهند، تا مبدا معلمانی تک بُعدی تربیت شوند. معلم باید دید باز داشته باشد و از دنیای اطراف خود چنان باخبر باشد که دانش آموزان را برای زندگی آماده سازد. انتشار مقالات یا ترجمه مقالات و شرکت صوری در دوره‌های آموزشی ضمن خدمت یا کنفرانس‌ها، تنها وسیله ارتقاء حرفه‌ای معلمان نیست، بلکه تأثیرگذاری معلم در دانش آموزان و آگاهی او از دنیای اطرافش، می‌تواند بهترین راهکار برای ارتقاء او باشد. این مهم فقط به وسیله آموزش مستمر و از طریق مطالعه، مباحثه، شرکت در کارگاه‌های فعال و انتقال تجارب از طریق همکاران و بررسی مشکلات به طور مشترک و استفاده از امکانی چون دانشگاه‌های بزرگ مادر، شرکت در سخنرانی‌ها و کارگاه‌های علمی، بازدید از موزه‌ها، حضور در مراکز تحقیقات معلمان و

پژوهشگاه‌های معلم، خانه‌های ریاضیات و جلسات انجمن‌های علمی آموزشی معلمان، امکان‌پذیر خواهد شد.

از سوی دیگر، وظیفه دانشگاه فرهنگیان و آموزش و پرورش، تولید محتوای الکترونیکی برای استفاده معلمان، دانش آموزان و فراهم آوردن امکان ارتباط معلمان با خارج کشور و مراجع علمی ملی و بین‌المللی است و این‌ها به عنوان ملاک‌های ارتقاء به جای کپی کردن مقاله‌ها یا ترجمه تحت‌اللفظی آن‌ها، بهتر است در دستور کار قرار گیرد.

منابع:

- [۱]. رجالی، علی. (۱۳۷۷). انجمن‌های معلمان ریاضی در ایران. *خبرنامه انجمن ریاضی ایران*، شماره ۷۸، صص. ۷۸ و ۷۹.
- [۲]. Rejali, A. (1991). Impact of Iran's participation in Mathematics Olympiads on Mathematical Education and National Competitions: "A New Proposal". Paper presented at the first WFNC Conference (1990). *Mathematics Competitions* Vol. 4, No. 2. Mathematics Competitions; pp. 84-90. Waterloo, Canada.
- [3]. Rejali, A. (1988). Lack of interest of students for studying Mathematics. *Unesco Document Series No. 35: Reports and papers presented in the fifth day special programme on "Mathematics, Education and Society"*; the 6th International Congress on Mathematical Education; pp. 146-147. Budapest, Hungary.
- [۴]. رجالی، علی. (۱۳۸۰). دستاوردهای نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. *مجموعه مقالات دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (کرمانشاه، ۱۳۷۶)*، صص. ۱۲۹ تا ۱۳۷.
- [۵]. رجالی، علی. (۱۳۶۷). روشی ساده برای تدریس ریاضی در دبیرستان. *مجله رشد آموزش ریاضی*، شماره ۱۷، صص. ۱۴ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- [6]. Rejali, A. (2007). Report on Research Activities of Isfahan Mathematics House (IMH) for Promotion of Mathematics Teachers in Primary Schools. *Joint Report by Unesco and IMH, 2007* <http://www.mathhouse.org/files/filebox/File/UNesco/unesco%20last%20version.doc>
- [۷]. رجالی، علی. (زمستان ۱۳۸۱ و بهار ۱۳۸۲). *مجله فروند، شماره ۱۱*.
- [۸]. پروانه، سیده آزاده و رجالی، علی. (۱۳۹۵). دلایل وجود افت ریاضی و برگزاری سمینار علوم ریاضی و چالش‌ها؛ گزارش و مجموعه مقالات سمینار علوم ریاضی و چالش‌ها؛ صص. ۱۵ تا ۴۰. فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران و دانشگاه تربیت مدرس.
- [9]. <http://cfu.ac.ir/en/62522>
- [10]. <http://www.mathhouse.org>

ریاضی بسیط یا

مکتب ریاضی

بهنام آیتی پور

اشاره

در حاشیه چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی در شیراز، با یکی از آموزشگران به نام آلن تارپ^۱ آشنا شدم و با ایشان مصاحبه‌ای انجام دادم که برایم بسیار جالب بود. ایشان از کشور دانمارک آمده بودند. در زیر، این مصاحبه آمده است. از برادر عزیزم جناب آقای مجتبی خالقی هم که زحمت ترجمه متن مصاحبه را کشیده‌اند تشکر می‌کنم.



آلن تارپ

• آیتی پور: آقای تارپ، انگیزه شما از آمدن به این کنفرانس چه بوده است؟

○ آلن تارپ: من به این همایش آمدم تا به ایده‌های جدید گوش بدهم. من فکر می‌کنم این کار، بسیار خوب است که کنفرانس‌هایی مانند این، برگزار می‌شوند. من اینجا آمدم، چون بسیار به آموزش ریاضی علاقمندم. خصوصاً دوست دارم بدانم مشکلاتی که شما در حوزه آموزش ریاضی با آن‌ها روبه‌رو هستید کدامند و چگونه می‌توان این مشکلات را حل کرد. این چیزی است که همیشه من را برای شرکت در کنفرانس‌های خارجی، جذب می‌کند.

من با ارائه یک مقاله به این کنفرانس آمدم. مقاله من در مورد این است که چگونه می‌توان بی‌علاقگی به ریاضی را «درمان» کرد. با این امید که اول معلمان و سپس دانش‌آموزان، ریاضی را دوست داشته باشند. به شناخت روش‌های جدیدی که آموزشگران، اعداد را به دانش‌آموزان می‌آموزند، علاقه دارم.

به‌خصوص دانش‌آموزان پایه‌های اول تا سوم. من متوجه شده‌ام ما آموزشگران ریاضی، آنقدر در عادت‌ها و قواعد تکراری و مسائل معمولی اسیر شده‌ایم، که نمی‌توانیم ببینیم مسائل از راه دیگری نیز قابل حل هستند. در صورتی که داستان خیالی سیندرلا هم نشان می‌دهد که راه‌حل‌های دیگری هم وجود دارند. من به این روش «راه‌حل سیندرلایی^۲» می‌گویم.

نظر من همیشه این بوده که به جای تبعیت صرف از کتاب‌های درسی، فکر کنید که چه چیز دیگری در

به این دلیل، توصیه من این است که ضرب را قبل از جمع آموزش دهید. البته این روش جدیدی است، اما چه مشکلی دارد؟ وقتی که مفید است و می‌توانیم انجامش دهیم. این موضوع اصلی تحقیقات من است که به شما گفتم. برای این کار، یک آکادمی راه‌اندازی کرده‌ام که نامش mathcademy.net است و سایتی برای آموزش ریاضی به معلمان است.

ریاضی بسیط: یعنی یک علم طبیعی در دل سایر علوم. وقتی ما به درک طبیعت نیاز داریم چه می‌کنیم؟ ابتدا می‌شماریم و زمانی که شمرديم، آن‌گاه جمع می‌کنیم. در آن سایت، ویدیوهای آموزشی هست که می‌توانید تماشا کنید و برنامه‌هایی که می‌توانید دنبال کنید. کنفرانس‌های یک روزه مجانی از طریق اسکایپ هم در سایت برگزار می‌شود و امکانات دیگری که معلمان، بتوانند این روش جدید را امتحان کنند.

● ممکن است کمی هم راجع به فلسفه ریاضیاتی که این آکادمی را بر پایه آن طراحی کرده‌اید، صحبت کنید؟

○ ببینید! مثلاً در دوره متوسطه، شروع به اثبات هندسی می‌کنیم همان‌گونه که ما هم در دانمارک، انجام می‌دهیم. اما وقتی که «ریاضیات جدید» با هندسه و بر پایه مجموعه‌ها معرفی شد، روش‌ها هم انگار باید عوض می‌شدند. زیرا حالا هندسه‌ای از نوع دیگر را می‌خواهیم آموزش دهیم تا گروه‌ها و تقارن‌ها را پایه‌ریزی کنیم. یک عمل اینجا، یک عکس‌العمل آنجا و با هم یک تأثیر خنثی‌شونده داریم. این یعنی ناگهان شروع کردید به اینکه دیگر چیزی را اثبات نکنید، بلکه هدف، متقارن کردن و انتقال دادن و نظایر آن شده است. از نظر من، در این نقطه یک اتفاق افتاده است که هندسه قبل از نظریه مجموعه‌ها با هندسه بعد از نظریه مجموعه‌ها، تفاوت دارد.

تمام این مشکلات را، در جبر هم داریم و تازه، این مشکلات را با هم ترکیب کردیم! یعنی ناگهان و بی‌مقدمه، جبر و هندسه را با هم درآمیختیم و به نظرم، این خوب نیست. چون جبر و هندسه، باید به مثابه دو دست کنار هم باشند. این دقیقاً نکته‌ای است که من در ارائه‌ام ذکر کردم، شما در دوره متوسطه اگر به هر مسئله‌ای هم از راه هندسی و هم از راه جبری نگاه کنید، خیلی جالب است و در حقیقت، تمام ایده دستگاه مختصات دکارتی را به دانش‌آموز می‌دهید. از

دنیا هست! فکر کنید که کودکان چگونه می‌شمارند. مثلاً اگر کودکان در بازی‌های کودکانه خود، از دو قطعه (بلوک) سه تایی استفاده می‌کنند، شاید در دنیای آن‌ها تنها همین دو قطعه بلوک وجود دارد، شما باید به سیستم‌های عددی که کودکان به مدرسه می‌آورند، احترام بگذارید و آن را به تدریج، توسعه دهید. آموزش باید بر مبنای داشته‌های ذهنی باشد که کودکان با خود به مدرسه می‌آورند؛ همان ذهنیت‌هایی که دانش‌آموزان، از دنیای واقعی خود ساخته‌اند. در این صورت، بیشتر مشکلات یادگیری ریاضی کودکان حل خواهد شد. البته این کار، کمی مشکل است، چون رویه عادی خلاف این را می‌گوید! رویه عادی انتظار دارد که وقتی کودک وارد پایه اول شد، کتاب مخصوص ریاضی داشته باشد. اما نظر من این است که شما معلم، باید شروع به شمردن کنید. مثلاً «من چند تا دو دارم»، «اینجا چند تا سه دارم»، و همین‌طور، به شمارش با دسته‌های مختلف بپردازیم. منظورم این است که کودکان، با شمردن و دوباره شمردن، چیزهای زیادی یاد می‌گیرند. پس در کلاس اول اجازه دهید آن‌ها بشمارند، دوباره بشمارند، اما بر هر مبنایی به جز ۱۰! یا مبنای ۱۰ نشمارید (یعنی پیش از موعد، مبنای ۱۰ را به ذهن کودک، تحمیل نکنید)! عجله نکنید! یک سال صبر کنید بعد آن را شروع کنید. مسلماً این کار مشکل است، چون تمام معلمان به گونه‌ای دیگر آموزش دیده‌اند و تمام کتاب‌ها هم به گونه‌ای دیگر تألیف شده‌اند. اما می‌خواهیم یاد بگیریم که شاد باشیم، مگر نه؟! پس شاید باید رویه مرسوم را عوض کنیم و به چیزی که کودکان به کلاس می‌آورند، احترام بگذاریم و از آن‌ها یاد بگیریم. به جای اینکه سعی کنیم به آن‌ها چیزی را که مجالش اینجا نیست، یاد بدهیم. به عنوان مثال، دو به اضافه سه می‌شود پنج. آیا همیشه این درست است؟ منظورم این است که دو هفته و سه روز، نمی‌شود پنج روز و می‌شود ۱۷ روز. شما نمی‌توانید بدون داشتن واحد، عمل جمع را انجام دهید، این چیزی است که شما انجام می‌دهید! اما شما نباید این کار را انجام دهید، چرا که برای کودکان، مشکل‌ساز است.

بنابراین، من می‌گویم ضرب قبل از جمع، چون دو ضرب در سه یعنی من سه تا اینجا دارم، سه تا آنجا دارم و حالا من باید این‌ها را با هم بشمارم. پس شش تا یک دارم یعنی ضرب همیشه درست است، ولی جمع نه!

همین زمان بود که ریاضی قدرت پیدا کرد. زمانی که دکارت، با ابداع دستگاه مختصاتش، هندسه و جبر را با هم هماهنگ کرد. در حالی که متأسفانه خیلی کم از این ایده، استفاده می‌کنیم.

بعد از این کسرها را بیان می‌کنیم، دانش‌آموزان نمی‌توانند به سادگی مفهوم مشترک را درک کنند. حرکت از اشیای ملموس به تجرید، به این سادگی نمی‌شود.

وقتی می‌گوییم ریاضی تدریس می‌کنیم، در واقع بیشتر به ریاضیاتی توجه داریم که در کلاس درس درست است ولی در بیرون از کلاس مفهومی ندارد. به چنین ریاضیاتی «ریاضی‌گرایی» (mathematism) می‌گوییم. بگذارید مثالی بزنم: تمام جمع‌ها بدون داشتن واحد مشخص، در بیرون از کلاس درس، نادرست هستند، چون شما نمی‌توانید کسرها را بدون داشتن واحد جمع کنید.

اگر این کار را انجام بدهید، من فکر می‌کنم تکنیک خوبی برای استثنا قائل شدن پیدا کرده‌اید که سمت و سویی ریاضی برای خواص است و نه ریاضی برای همه. اما آموزش محدود به خواص نیست. آموزش باید همگانی باشد و دانش‌آموزان باید یاد بگیرند. اگر دو تا سه و چهار تا پنج داشته باشید و بخواهید همه را با هم جمع کنید، مشکل پیش می‌آید، چون شما دوست دارید آن‌ها را کنار هم جمع کنید؛ سه‌ها و پنج‌ها را با هم جمع کنید، در صورتی که دو نوع بلوک متفاوت دارید.

• راجع به مهارت‌های حل مسئله، در رابطه با کارهای «شونفیلد» صحبت می‌کنید؟ شما «شونفیلد» را می‌شناسید؟

○ بله، شونفیلد را می‌شناسم و با نظرات ایشان در رابطه با مهارت‌های حل مسئله آشنا هستم. ولی در مورد ایده‌هایش تردید دارم. چرا ریاضی را یاد می‌گیریم؟ چون ریاضی می‌خواهد آن را یاد بگیریم، چون مفید است چون می‌تواند در محیط خارج به کار گرفته شود تا مسائل را حل کند، پس وقتی ریاضی را درس دادیم، امیدواریم که کودکان آن را بیاموزند. آن‌گاه می‌توانیم مقداری از دنیای خارج را به عنوان حل کردن مسئله، به کلاس درس بیاوریم. می‌گوییم چیزی هست به نام ریاضی. وقتی که آن را داشته باشید، می‌توانید از آن استفاده کنید. بگذارید کمی به

عقب برگردیم. ریاضی از کجا آمده؟ از چه زمانی شروع شده؟ و سپس شما به یونان می‌رسید! با فیثاغورس که همتیانش، چیزهای زیادی راجع به دنیا می‌دانند. چهار مقوله هست که ما راجع به آن‌ها، چیزهایی می‌دانیم: موسیقی، ستاره‌شناسی، هندسه و حساب. پس نمی‌توانیم خودمان را به عنوان کسی معرفی کنیم که فقط چیزهایی راجع به موسیقی یا ستاره‌شناسی یا هندسه و یا حساب می‌داند. ما یک اسم عمومی برای این‌ها می‌خواهیم. یک کلمه یونانی برای «چه می‌دانیم» نیاز داریم که این، همان کلمه mathematism است. کلمه «ریاضی» یعنی ما کلاً چه می‌دانیم؟ این یک برچسب است و نه یک محتوای مستقل از جهان واقعی. ریاضی به خودی خود، چیزی نیست. چیزی درون آن نیست. درون آن هیچ مقوله‌ای نیست.

حال چه کار می‌کنید؟ می‌گویید اجازه بدهید این مقوله را برداریم و ببینیم چه چیزی داخل آن هست. حالا موسیقی حذف شده، ستاره‌شناسی حذف شده، چیزی که در داخل مانده، فقط هندسه و جبر است، چون یونانی‌ها نمی‌توانستند بشمارند، مجبور بودند جبر را از ایرانی‌ها اقتباس کنند. جبری که اروپا را نجات داد و توانستیم از شر اعداد یونانی و اعداد رومی، راحت بشویم و در عوض، اعداد زیبایی داریم که از شرق آمدند، آن‌ها را دسته می‌کنیم و دسته‌ای از دسته‌ها و دسته‌ای از دسته‌ها چون می‌توانیم با این اعداد عمل ضرب را انجام دهیم چیزی که با اعداد رومی نمی‌توان انجام داد.

اما برمی‌گردیم به چیزی که داشتیم راجع به آن صحبت می‌کردیم؛ یعنی ارتباط بین ریاضی و دنیای بیرون.

هندسه یک کلمه یونانی به معنای اندازه‌گیری زمین است. شما ابتدا هندسه را درس نمی‌دهید تا بعد به بیرون رفته و زمین را اندازه بگیرید. شما در حین اندازه‌گیری زمین، به هندسه مجال رشد کردن می‌دهید و به مکانی می‌روید و زمینی می‌بینید و می‌گویید می‌خواهیم این زمین را اندازه بگیریم. ما روی یک قطعه زمین هستیم. این قطعه را می‌توانیم به مثلث‌هایی تقسیم کنیم و یک مثلث را می‌توان به مثلث‌های قائم‌الزاویه تقسیم‌بندی کرد و یک مثلث قائم‌الزاویه دقیقاً اینجا است! ولی آیا می‌توانیم ببینیمش؟ نمی‌توانیم! پس این چیزی است که هندسه را ایجاد

کرده است و اگر این راهی هست که شما با هندسه برخورد می‌کنید، (عدم توجه به مسائل واقعیت‌مدار)، دچار مشکل می‌شوید. شما نباید بگویید که من باید بعداً از آن استفاده کنم چرا که این نوع هندسه، بر ریشه‌هایش (منشأ پیدایش هندسه) رشد نکرده است. به نظر من در تدریس هندسه، در مورد کاربردهایش صحبت نکنید، در مورد مسائل عجیب هم صحبت نکنید. در مورد ریشه‌های هندسه صحبت کنید. این نگاه غلطی در آموزش است که اول هندسه بعد کاربرد. بلکه منشأ و بعد هندسه. به همین ترتیب برای جبر، اگر شما بپرسید معنای اصلی جبر چیست، جواب، دوباره گرد هم آوردن است. خوب دوباره گرد هم آوردن، اما همان‌طور که می‌بینید، خیلی چیزها اینجاست. چقدر چیز را گرد هم بیاوریم و چطور می‌فهمیم؟ با شمردن و دسته‌بندی کردن و دسته‌بندی کردن دسته‌ها، این‌ها جزئیات شما هستند. شما ایرانی‌ها، این سیستم گردآوری زیبا را به ما دادید، جایی که شما ۳۴۵ دارید به این معنی است که شما پنج تا یک دارید که نمی‌توان آن‌ها را دسته کرد، و چهار تا ده دارید که ده، اندازه هر دسته است و در آخر شما سه تا صد دارید، اما صد می‌شود دسته‌ای از دسته‌ها. پس چیزی که شما دارید، بلوک‌ها هستند. یک بلوک یکی‌ها که پنج تا از آن‌ها دارید، بلوک ده‌تایی‌ها که چهار تا از آن‌ها دارید و سپس شما دسته‌ای از دسته‌ها دارید (بحث راجع به ارزش مکانی اعداد است). یعنی اعداد در واقع بلوک‌هایی هستند که شما می‌توانید مسیر طولانی‌ای را که برای گردهم‌آوری آن‌ها طی کرده‌اید، ببینید.

شما جمع می‌کنید، ضرب می‌کنید، به توان می‌رسانید، چون دسته‌ای از دسته‌ها یعنی ده تا ده، یعنی 10×10 و دسته‌ای از دسته‌ها یعنی ده تا ده تا ده تا ده یعنی $10 \times 10 \times 10$ و این همان مفهوم توان است.

حالا بلوک‌ها را کنار هم قرار می‌دهید و این، مفهوم انتگرال است. این مسیر طولانی گردهم‌آوری است، شما نمی‌روید که اول جبر را یاد بگیرید و بعد از آن استفاده کنید. جبر از ریشه‌هایش شروع به توسعه می‌کند، اگر شما این کار را انجام دهید، آن‌گاه هیچ مشکلی با مسائل دنیای واقعی یا مسائل دیگر نخواهید داشت. شما فقط زمانی به مشکل برمی‌خورید که می‌گویید ریاضی تدریس می‌کنید، در حالی که ریاضی تدریس

نمی‌کنید! شما ترکیبی از ریاضی و مکتب ریاضی را تدریس می‌کنید و مکتب ریاضی در دنیای بیرون، همیشه درست نیست. بنابراین وقتی شما به دنیای واقعی بیرون پا می‌گذارید، با مشکلات بزرگی روبه‌رو می‌شوید و ریاضیات جدید، چیز است که توسط نظریه مجموعه‌ها ایجاد شده است. این رویه در زمان یونانی‌ها نبوده است. همین‌طور زمانی که شما سیستم زیبایی اعداد خود را ابداع کردید، این رویه وجود نداشته است. اما ناگهان در حدود سال ۱۹۰۰ در آلمان چیزی به نام «یک مجموعه» ابداع شد. با این ابداع، یک دفعه همه چیز را می‌شد به صورت مثال‌هایی از مجموعه‌ها توضیح داد. برای مثال در دبیرستان، ما از فرمول‌ها خوشمان می‌آید و یک فرمول را یک تابع می‌نامیم. ناگهان بعد از سال ۱۹۰۰، یک تابع، به عنوان یک ارتباط بین دو مجموعه معرفی شد، به گونه‌ای که وجود هر مؤلفه اول، وجود فقط یک مؤلفه دوم را ایجاب کند. ادامه بدهید که این را تدریس کنید و یاد بگیرید و چیزی که دانش‌آموزان می‌شنوند، این است. قبل از مجموعه، یک فرمول چه بود؟ بسیار دقیق و ظریف توسط اویلر شرح داده شده است که می‌گوید دو نوع محاسبه در این دنیا وجود دارد، دو به اضافه سه و دو به اضافه شاید سه، شاید چهار، شاید پنج، ما نمی‌دانیم. ولی چون می‌توانیم یک عدد بنویسیم، به جای آن یک حرف می‌گذاریم و می‌نویسیم دو به اضافه X. پس این محاسبه را داریم که می‌تواند حساب شود. ولی محاسباتی داریم که باقی می‌ماند، چون نمی‌دانیم X چیست. اما می‌توانم با آن، یک جدول تنظیم کنم، می‌توانم یک سناریو ایجاد کنم که می‌گوید اگر X یک باشد، این می‌شود، اگر دو باشد این می‌شود، اگر سه باشد این می‌شود. می‌توانم یک جدول حالت‌های ممکن تنظیم کنم، حتی یک نمودار در دستگاه مختصات. اما به یک اسم برای این کار نیاز دارم. نمی‌توانم به آن بگویم (محاسبات آماده به کار)، در عوض به آن‌ها می‌گویم تابع‌ها. این راهی است که دوستش دارم و مشکلی با توابع ندارم. تا زمانی که پای مجموعه‌ها وسط آمد. چرا که مجموعه نمی‌تواند برای نوعی خاص از محاسبه و از پایین شروع به توسعه کند و بالا بیاید. بلکه باید از بالا به پایین کشیده شود، وگرنه هیچ کس آن را متوجه نمی‌شود و این ریاضی نیست. این ریاضی فوق بشری است و برای ما، مشکلات زیادی به ارمغان می‌آورد. این نوع ریاضی را کنار بگذارید.

برگردید به روش قدیمی و روشن کننده و وقتتان را تلف نکنید.

● شما درباره آموزش ریاضی با هدف بهینه کردن زندگی شهروندان و کمک ریاضی به داشتن زندگی بهتر برای شهروندان، چه نظری دارید؟

○ حُب آیا مسئله یک شهروند معمولی است؟ اگر این است، می توانیم برویم توی خیابان و او را اینجا بیاوریم و از او پرسیم آیا کیفیت زندگی او با ریاضی غنی تر شده یا ضعیف تر شده است؟

بگذارید با این شهروند شروع کنیم و نمونه اش، خودم هستم. من اینجا، در یک دنیای خوب هستم و اینجا، افراد دیگری هم هستند و من دوست دارم با آن ها، ارتباط برقرار کنم. پس من به یک زبان نیاز دارم. در واقع به دو زبان نیاز دارم. یک زبان جهانی برای توصیف کردن آنچه که می بینم، یک زبان اعداد تا بتوانم بشمارم چند تا اینجا هست، چند تا آنجا هست، مثلاً اینکه تا قبل از پروازم، چند ساعت دیگر می توانم اینجا باشم. یعنی من به دو زبان نیاز دارم، یک زبان جهانی و یکی زبان اعداد و این دقیقاً نقطه شروع تحقیق من است. حالا زبان مثل یک خانه می ماند. یک خانه با دو طبقه. چون در طبقه همکف، شما زبانی دارید که با آن جهان را توصیف می کنید، اما در بالای این زبان، شما زبانی دارید که راجع به ساختار زبان ها، صحبت می کند، یک دستور زبان که جهان را توصیف نمی کند، بلکه زبان هایی که جهان را توصیف می کنند. با استعانت از فرهنگ یونانی آن را «فرا زبان» (meta-language) می نامیم. مثلاً وقتی اشیای فیزیکی داریم، چه چیزی ورای این اشیای فیزیکی هست؟ متافیزیک و این دلیلی هست که من به آن، فرا زبان می گویم.

پس ریاضی، هم نقش زبان جهانی را دارد و هم زبان اعداد است؛ مثل هر زبان دیگری که یک وجه محاوره ای و یک وجه دستوری (گرامری) دارد. حالا در مورد زبان جهانی، آن را در خانه با کمک والدین خود یاد می گیریم. فقط زمانی که زبان ها را یاد گرفتیم، شروع به صحبت درباره آن ها می کنیم. یعنی زبان، قبل از گرامر آموخته می شود. اما در زبان اعداد چنین نیست. چون زبان اعداد درباره اعداد و محاسبه و فرمول هاست. اما در سطح گرامری، درباره فرمول ها صحبت می کنیم که به این ها، تابع و متغیر می گوئیم. اما این صحبت گرامری است که ما آن را ریاضی می گوئیم.

بدین صورت، ریاضی اساساً تبدیل به گرامر زبان اعداد شده است. در واقع، کاری که می کنیم این است که گرامر (دستور زبان) تدریس می کنیم، قبل از اینکه زبان را تدریس کنیم. بنابراین شما مشکل پیدا خواهید کرد. به این دلیل است که یک شهروند عادی، زبان اعداد را نمی فهمد. اما آن ها می توانند زبان اعداد را بیاموزند، به شرطی که بگوئیم اول زبان را یاد می دهیم. یعنی با این بیان؛ جبر دوباره گردهم آوردن اعداد است و هندسه، زمینه هایی است که می خواهیم اندازه گیری کنیم. این پیام من است: جبر و هندسه را درس بدهید، اما آن ها را دوباره با هم ابداع کنید، چون آن ها درباره جهان هستند. آن ها زبان اعدادند. زمانی که شما زبان اعداد را آموخته باشید، آن گاه می توانید یک قدم فراتر رفته و بگوئید خوب اگر یک فرمول داشته باشم، چه اتفاقی می افتد؟ مثلاً الان وقتش است که یک عدد در این فرمول قرار دهم و این فرمول عدد دیگری را بیرون می دهد. حالا اگر یک مجموعه از اعداد داشته باشم که آن ها را در فرمول قرار دهم (ورودی)، آن گاه اعدادی نیز وجود دارند که بیرون می آیند (خروجی). فکر نمی کنم کسی با این مفهوم، مشکلی داشته باشد. هر کس می تواند ببیند کاری که یک فرمول انجام می دهد، این است که دو مجموعه را به هم مرتبط می کند. زمانی که زبان اعداد را آموختید، دیگر با جبر مجرد مشکلی نخواهید داشت. اما اگر زبان اعداد را نیاموخته باشید و بر تدریس گرامر (دستور زبان) ریاضی قبل از یادگیری خود زبان اصرار داشته باشید، آن گاه در ذهن مردم، عدم توانایی محاسبه و ناتوانی در گرفتن نمره خوب را ایجاد کرده اید.

این مشکلی هست که بین مردم وجود دارد که از هر چهار نفر در سن پانزده سالگی، یکی با ریاضی مشکل دارد و بدین سبب، این افراد نمی توانند در یک زندگی عادی شهروندی، مشارکت معنادار داشته باشند. آن وقت چون نمی توانند نمره خوبی از ریاضی بگیرند، نمی توانند شغل مناسبی داشته باشند. همین ها به تدریج باعث حذف فرد از جامعه و سرخوردگی های اجتماعی وی می شود.

ما باید ریاضی را دوباره سازماندهی کنیم. دوباره ابداع کنیم. به جای بردن کودکان به یک دنیای ایده آل، کمک کنید مفاهیم ریاضی را درک کنند. اکنون با مسائل بزرگ و عمیقی روبه رو هستیم. پس لطفاً از تدریس «ریاضی» دست برداریم، زیرا چیزی که درس

می‌دهید، در حقیقت «ریاضی» نیست، بلکه «فرا ریاضی» است.

«فرا ریاضی» از بالا به پایین است؛ همان که با اطمینان می‌گوید $2+3=5$ اما تدریس واقعی ریاضی این‌طور نیست؛ اعداد همیشه باید واحد داشته باشند. مسیر تدریس را عوض کنید، خواهید دید که دانش‌آموزان، قادرند زبان اعداد را یاد بگیرند و زمانی که زبان اعداد را یاد گرفتند شاید دیگر نیازی به گرامر (دستور زبان) نداشته باشند. همان‌طور که بیشتر مردم برای تکلم، به دستور زبان نیاز ندارند. من خودم بدون دانستن دستور زبان دانمارکی، خیلی روان صحبت می‌کنم. من زبان انگلیسی را یاد گرفته‌ام، اما گرامر (دستور زبان) آن را هرگز. بیشتر مردم به «فرا» نیاز ندارند. پس چیزی را که به آن علاقه‌ای ندارند، به آن‌ها نیاموزید. آن‌ها می‌توانند بروند و جبر را به کار ببرند و از آن، استفاده نکنند. از جبر و هندسه برای شمردن و تکرار شمارش استفاده کنید و بدون هیچ سقفی، جمع بکنید و به مثلث‌ها نگاه کنید و زاویه‌ها را اندازه بگیرید. این یک تفریح است. یک سرگرمی جذاب است. پس بگذارید این را انجام بدهیم. بگذارید با کودکان و افراد جوان در مدرسه تفریح کنیم. ما می‌توانیم این کار را انجام دهیم، ولی باید از تدریس «فرا ریاضی» دست برداریم، فوراً!

● چه تفاوتی بین جرج پولیا و شونفیلد است؟ آیا این‌ها دو راه مختلف را در آموزش ریاضی رفتند؟

○ بگذارید سلامی هم به آقای پولیا و آقای شونفیلد بکنم! از نظر من، آن‌ها هر دو به این سنت پای‌بندند که اول ریاضی را تدریس کنند و سپس آن را به کار بگیرند و با آن مسئله حل کنند. ولی من نظرم برعکس است که توضیح دادم. یعنی ریاضی را از طریق ریشه‌های آن تدریس کنید. این کار کمک می‌کند که فکر کنیم. خُب من چگونه می‌توانم ریاضی را به کار بگیرم، درحالی که آن را یاد نگرفته‌ام؟

فوکو (از فیلسوفان معاصر) زندان‌هایی را که در آن‌ها هستیم، توصیف می‌کند. زندان‌های سنتی و خودساخته. طریقه‌ای که ما درباره جهان صحبت می‌کنیم، وادارمان می‌کند که فکر کنیم که باید اول ریاضی را یاد بگیریم، قبل از آنکه بتوانیم آن را به کار ببریم. اما باید این عبارت را بیان کنند که ریاضی را

می‌توان از طریق ریشه‌هایش یاد گرفت و توسعه داد. به این دلیل، نظرم این است که وارد به‌کارگیری ریاضی نشوید. راجع به ریشه‌های آن صحبت کنید، چرا که ریاضی از ریشه‌هایش بالا می‌آید و ما آن را دوباره، به ریشه‌هایش برمی‌گردانیم.

هرگز نگوئید به کار بستن، چون لحظه‌ای که این کلمات را بگوئید در زندانی اسیر شده‌اید و خورشید واقعیت محو می‌گردد و تاریکی خواهد آمد و با مشکلاتی روبه‌رو می‌شوید. ما نمی‌خواهیم این کار را انجام دهیم. درباره مدل‌سازی صحبت نکنید. من با ریاضی، مدل‌سازی می‌کنم، خُب باید ریاضی را داشته باشم، چون اگر آن را نداشته باشم، نمی‌توانم با آن مدل‌سازی کنم. ریاضیات سرشار از مدل‌هایی از دنیای واقعی است و نکته کلی این است که در مورد کلماتی که استفاده می‌کنید، باید بسیار محتاط باشید و دیگر هیچ وقت نگوئید ریاضی. شما باید بگوئید ریاضی بسیط یا مکتب ریاضی، چون ریاضی مجرد هرگز وجود ندارد و هرگز وجود نداشته است. هرگز نبوده است این دستور زبان بی‌روح، زمانی که مجموعه‌ها ابداع شدند، به عنوان «فرا ریاضی» به وجود آمد. این ریاضی نیست.

ریاضی از زبان یونان باستان، به معنای هندسه و جبر بوده است. من همیشه باید بگویم که دارم به کلاس می‌روم تا هندسه و جبر را توأم با ریشه‌های آن‌ها، درس بدهم هر دوی آن‌ها و ما، می‌توانیم جهان را تغییر دهیم. من دیگر نمی‌گویم ریاضی.

پی‌نوشت‌ها

1. Allan Tarp

۲. اشاره وی به داستان مشهور کودکان به نام «سیندرلا»ست. در مصاحبه به تفضیل راجع به این داستان صحبت نمود، ولی با توجه به اینکه اکثر خوانندگان ایرانی، با داستان سیندرلا آشنا هستند، این بخش از مصاحبه حذف شد.

ماجرای بازرسی

مریم بهاء‌لو، معلم ریاضی پایه پنجم نجف‌آباد و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

وارد کلاس شد! آن ساعت علوم داشتیم و دانش‌آموزان در گروه‌هایشان، مشغول بحث و تبادل نظر در مورد «ماهیه و غشروف» بودند. فرمان «برپا» از جانب آموزگار صادر شد! طبق معمول، دانش‌آموزان جایشان ایستادند و آیه «الاذکرالله تطمئن القلوب» را خواندند و بعد از فرمان «بفرمائید»، در جایشان نشستند! همین‌طور که آن‌ها در حال نشستن بودند، یکی از دانش‌آموزان حاضر جواب کلاس، با صدای بلند گفت: «خانم من یه سؤال دارم! چرا تا بازرس میاد تو این مدرسه، سرش را می‌ندازه پایین و میاد وسط کلاس ما!». در آن لحظه، به دنبال پاسخی برای سؤال این دانش‌آموز بودم. نمی‌دانستم تحسینش کنم یا دعوا! ولی صادقانه بگویم که در دلم، گفتم «آفرین پسر، گل کاشتی!» اما نمی‌توانستم بر زبان بیاورم! در نهایت پاسخ دادم که «آقای بازرس، برای کنترل نحوه تدریس به این کلاس آمده‌اند». دوباره همان دانش‌آموز بدون معطلی و خطاب به آقای بازرس گفت: «آقا اجازه! خانومون خیلی خوب درس می‌ده! برامون خیلی چیزها درست می‌کنه و سر کلاس میاره و درس‌مون میده!» بقیه دانش‌آموزان هم برای تأیید حرف هم‌کلاسی‌شان، داد و فریاد سردادند که «آقا راست می‌گه!» یک مرتبه صدای آقای بازرس بلند شد «ساکت!» یکی از دانش‌آموزان گفت «اصلاً آقا هر کی حرف زدا، بهش بگین گوشه کلاس بایسته، سطل آشغال هم بگیره رو سرش!» بازرس پاسخ داد: «در کار بزرگ‌ترها، دخالت نکنین!» همان دانش‌آموز گفت: «من که دخالت نکردم، فقط پیشنهاد دادم. دوست داشتن انجام بدین!» من هم



اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرایند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

در ضمن، گاهی هم به جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.

رشد آموزش ریاضی

من در یک مدرسه پسرانه، در پایه پنجم تدریس می‌کنم. یکی از روزهای سومین ماه سال تحصیلی، یک باره و بدون اطلاع قبلی در کلاس درس باز شد. بازرس اجازه ورود به کلاس را خواست و یک راست،

پیش خودم می‌گفتم «بد نیست بدانید که ما با چه دانش‌آموزانی سر و کار داریم» و در صدد ساکت کردن دانش‌آموزان نبودم! چون نمی‌توانستم! بازرس کلاس ما که از حاضر جوابی دانش‌آموزان خیلی عصبانی شده بود، گفت که «خانم بهاء‌لو! این ساعت چه درسی داشتین؟» من هم در جواب گفتم که «این ساعت، علوم داشتیم و دانش‌آموزان در گروه‌هایشان، هر اطلاعاتی که در مورد ماهیچه و غضروف می‌دانستند، به یکدیگر می‌گفتند». هنوز صحبت‌هایم تمام نشده بود که یکی از دانش‌آموزان گفت، «تازه بحث‌هامون داشت نتیجه می‌داد که کلاس‌مون را به هم زدین!». بازرس رو به من کرده و گفت: «با اجازه شما من چند سؤال از دانش‌آموزان می‌پرسم» و بعد پرسید «کی دوست داره بیاد پای تابلو؟» همه دست‌ها بالا رفت. بازرس یکی را صدا زد که «شما بیا پای تابلو». اولین سؤال ریاضی، الگویابی بود. بعد عددنویسی. دانش‌آموزان همه این سؤال‌ها را درست جواب دادند. بعد نوبت به پرسیدن مبحث ساعت شد. بازرس رو به دانش‌آموزان کرد و گفت، «هر ساعتی را که من گفتم، شما ۲۰ دقیقه به آن اضافه کنین و به ترتیب جواب را بگین». همه دانش‌آموزان، خوشحال از سر و کله هم بالا می‌رفتند و می‌گفتند: «آخ جون، با خانوممون این بازی را خیلی انجام دادیم، بپرسین! همه را بلدی!» بالاخره زنگ تفریح به صدا درآمد. دانش‌آموزان بدون توجه به بازرس، همه به سمت در هجوم بردند! من هم منتظر بودم بازرس محترم از کلاس خارج شود اما از رفتن خبری نبود! تازه بعد از دانش‌آموزان، بازرسی از من شروع شد. وی از پوشه کار دانش‌آموز و معلم گرفته تادست‌سازها و دفتر کلاسی، همه را بررسی کرد. سپس ادامه داد که «خانم بهاء‌لو! می‌دانید تدریس در دانشگاه با تدریس در مقطع ابتدایی کاملاً متفاوت است؟» گفتم «بله اطلاع دارم و به همین دلیل است که در تدریس، از انواع دست‌سازها، فعالیت‌ها و بازی‌ها استفاده می‌کنم». بعد ادامه داد که «بله! این‌ها خیلی عالی هستند. اما تا زمانی که مدیریت کلاسی ضعیف باشه، این‌ها اصلاً فایده‌ای نداره. مدیریت در کلاس درس ابتدایی خیلی مهمه» گفتم «مدیریت کلاسی نه تنها در دبستان بلکه در دانشگاه و تمام دوره‌های تحصیلی مهمه. اما چرا شما فکر می‌کنین که مدیریت کلاس ضعیفه؟ به نظر خودم اینطور نیست! چون دانش‌آموزان اول سال قابل کنترل نبودند و اصلاً سر کلاس نمی‌نشستند، با ترفندهای مختلف به این مرحله رسیده‌اند، برای همین، ضعفی

در مدیریت کلاسی ام نمی‌بینم!» ولی بازرس گفت «متأسفانه یکی از همکاران سال گذشته، در این زمینه کم‌کاری کرده و دانش‌آموزان رها شده بودند» گفتم: «شما اطلاعات کاملی، هم از وضعیت اخلاق و رفتار، و هم از وضعیت تحصیلی دانش‌آموزانم دارید، پس چرا همه را به نام من ثبت می‌کنید و به حساب بی‌تجربگی ام می‌گذارید؟!» بازرس سریع بحث را عوض کرده و ادامه

داد که «می‌دانید تفاوت بین $\frac{1}{3} \times 2$ و $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ چیه. این مفاهیم را چگونه آموزش می‌دین؟» خیلی متعجب بودم که چرا ایشان، این سؤال را از من می‌پرسند؟! در هر صورت پای تابلو رفتم و به‌طور کامل، برایشان توضیح دادم. از حرکات بازرس، اینگونه برداشت می‌شد که تازه، خودشان تفاوت این دو مفهوم را فهمیده‌اند. بعد از توضیحاتم، بازرس گفت: «خیلی از همکاران، معنا و مفهوم این‌ها را نمی‌دانند و شما خیلی خوب و واضح این مفاهیم را بیان کردید.»

زنگ کلاس به صدا درآمد و دانش‌آموزان وارد کلاس شدند و با تعجب به بازرس می‌گفتند: «هنوز که تو کلاس مایی!» بازرس، کتاب ریاضی و کتاب نگارش چند نفر از دانش‌آموزان را نگاهی کرد و گفت: «چرا آنقدر بدخط نوشته‌اند و شما با آن‌ها کار نکردین؟»، من هم گفتم: «صفحات اول کتاب را با این قسمت مقایسه کنید، دست‌خط‌ها خیلی تغییر کرده، اینطور نیست؟!» یکی از دانش‌آموزان گفت: «با نوشتنمون هم کار دارین!»، خودم را به نشنیدن زدم و رو به دانش‌آموزان کرده و گفتم که «کتاب‌های قرأتان را باز کنید و به ترتیب، مشغول خواندن شوید.»

بالاخره بازرس کارش تمام شد و رفت. اما آیا از نظر آموزشی، چیزی عاید معلم و دانش‌آموزان شد؟! ای کاش بازرسان محترم، می‌دانستند که با این کار، بیشتر موجب آشفتگی و اضطراب دانش‌آموزان و معلمان می‌شوند و زمان تدریس آن‌ها را کاهش می‌دهند. چگونه است که اگر معلم پنج دقیقه دیر به کلاس برود، همین بازرسان می‌گویند «شما ۱۵۰ دقیقه (۵ تا ۳۰ نفر) وقت تلف‌شده دارید»، اما برای خودشان که ۱۲۰ دقیقه زمان کلاس و استراحت معلم و دانش‌آموزان را می‌گیرند، ظاهراً اتلاف وقتی در کار نیست!

پی‌نوشت

۱. طبیعی است که گفت‌وگوهای داخل گیومه عیناً صحبت دانش‌آموزان است که الزاماً قابل تأیید نیست.



خلاقیت زهرا،

طلوع دوباره امید

اشاره

کاظم عبدالله پور

دبیر ریاضی شهرستان کههنوج

خوب نبود، دیگر حوصلهٔ مدرسه و خانه را نداشتیم. به این فکر افتادم که دیگر برای همیشه مدرسه را ترک کنم. با خانم مشاور صحبت کردم که من چنین تصمیمی دارم. ایشان با شنیدن این موضوع، خیلی ناراحت شد و به من گفت بدان که «آخرین تصمیم را خودت گرفتی». گفتم فعلاً چنین تصمیمی دارم. نمی‌دانستم دیگر چه بگویم. تا اینکه چند روز گذشت و توانستم در کلاس ریاضی، پیشرفت کنم. مجرای این کلاس به صورت زیر است:

روز اول مدرسه بود که معلم ریاضی، خودش را به ما معرفی کرد. باورم نمی‌شد که این فرد، معلم ریاضی‌ام باشد. داخل مدرسه، احساس غریبی می‌کردم، بعد با معلم‌ها و دیگر دوستان آشنا شدم. در کلاس درس ریاضی، معلم ما را گروه‌بندی کرد، حتی طرز نشستن کلاس درس را تغییر داد و گفت شما در هر جلسه در کلاس، در مکان‌های مختلفی می‌نشینید و کار گروهی خود را انجام می‌دهید. ما گروه سه نفری بودیم. سرگروه به من و یکی از دوستانم زیاد «گیر» می‌داد. در کلاس درس، یک مسئله مطرح شد که نیاز به بحث و مشارکت داشت. سرگروه که در درس، خیلی بهتر از ما بود، با استفاده از روشی که داشت، خیلی زود به مسئله جواب می‌داد. او خواست که ما هم مثل او زود بنویسیم ولی هر چیزی که او می‌گفت و ما نمی‌فهمیدیم، جلوی دوستانمان، ما را مسخره می‌کرد. آنقدر این کار را کرد که یک روز، به من برخورد. با خود گفتم «این سرگروه

این داستان واقعی است! داستان دختری به نام واقعی زهرا، که یک معلم ریاضی دلسوز، انسان و علاقمند، مسیر زندگی تحصیلی وی را تغییر داد. با این معلم گرامی آقای کاظم عبدالله پور در بهمن ۱۳۹۶ و در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در بوشهر، آشنا شدم. این داستان را برایم گفتند و همانجا، با زهرا نازنین صحبت کردند. از ایشان خواهش کردم که این اتفاق شیرین را برای ستون روایت معلمان مجله، بنویسند و ایشان هم لطف کردند و داستان «خلاقیت زهرا» را فرستادند.

کلید واژه‌ها: معلم ریاضی، خلاقیت، انگیزه

داستان زیر، حکایت واقعی زندگی دانش‌آموزی روستایی است که در یکی از مدارس مناطق محروم، تحصیل می‌کند. در آذرماه ۹۶، مسیر زندگی این دانش‌آموز با یک اتفاق ساده تغییر کرد! زهرا جزو ضعیف‌ترین دانش‌آموزان کلاس بود که دیگر امید و انگیزه‌ای برای ادامهٔ تحصیل نداشت. با این اتفاق، دوباره امید و انگیزهٔ تلاش و تحصیل در دل او جوانه زد. شرح این تجربه را از زبان زهرا می‌شنویم:

«نمی‌دانم از کجا برایتان بگویم، از مدرسه یا از شرایطی که داشتم و هنوز هم دارم. پدر خود را ۵ سال پیش از دست دادم. شرایط خوبی در مدرسه و در خانه نداشتیم. از یک طرف وضعیت اسفبار مالی خانواده و از طرف دیگر، پسر عمویم که از من به طور رسمی تقاضای نامزدی کرده بود، ذهنم را درگیر این کرده بود که مدرسه را انتخاب کنم یا پسر عمویم را. چند روز بی‌خیال شدم و به درس فکر کردم. ولی درس خواندنم



نمی‌شد که من، امروز معلم ریاضی آن‌ها باشم. مدیر مدرسه از کلاس من فیلم و عکس گرفتند و من خیلی خوشحال شدم.

این اتفاق مسیر زندگی مرا عوض کرد. به این باور رسیدم که خانواده، معلم، مدیر و دوستانم، همه آرزوی سربلندی و موفقیت مرا دارند و اگر خودم بخواهم و تلاش کنم، می‌توانم زندگی و سرنوشت‌م را عوض کنم. دیگر قصد ترک تحصیل ندارم. بلکه می‌خواهم با تلاش زیاد، در آینده یک معلم موفق باشم. «یک معلم ریاضی دلسوز که مسیر زندگی دانش‌آموزانم را به سوی سربلندی و افتخار تغییر دهم!»

زهره معلم کلاس درس ریاضی

تصویر راه‌حل زهره

راه‌حل زهره نشانه خلاقیت دانش‌آموزان روستایی

$$4(2x - 3y + 4) - 8(3x + 2y - 5) =$$

$$2x - 3y + 4$$

$$2x - 3y + 4$$

$$2x - 3y + 4$$

$$2x - 3y + 4$$

$$-----$$

$$8x - 12y + 16$$

$$8x - 12y + 16$$

$$-24x - 16y + 40$$

$$-----$$

$$-16x - 28y + 56$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-(3x + 2y - 5) = -3x - 2y + 5$$

$$-----$$

$$..... = -24x - 16y + 40$$

خوبی نیست! بهتر است کمی تلاش کنم و بتوانم برای این مسئله، روش دیگری بنویسم». کمی فکر کردم و به ذهنم خطور کرد که عبارت‌های مسئله را زیر هم بنویسم تا بتوانم آن را حل کنم. وقتی معلم، هنگام بررسی کار گروه‌ها در کلاس راه‌حل‌م را دیدند توجهشان جلب شد و بسیار خوشحال شدند، به من گفتند «آفرین! واقعاً روشی که به کار بردی بی‌نظیر است!» و در کلاس درس، خیلی تشویقم کردند. روز بعد، معلم ریاضی در کلاس درس، راه‌حل من را روی دیوار کلاس نصب کرد که روی آن نوشته بود «راه‌حل زهره، نشانه خلاقیت دانش‌آموزان روستایی!»

چند روز بعد، مادرم به مدرسه دعوت شدند. با خودم گفتم لایذ چیزی شده! حتماً درس‌م بد است که مدیر، مادرم را به مدرسه فراخوانده است. وقتی در دفتر مدرسه، معلم ریاضی جلوی مادرم از جریان کاری کرده است که تا به حال بین دانش‌آموزان، چنین روشی را ندیده‌ام»، آن موقع خیلی خوشحال شدم. باورم نمی‌شد که کمی پیشرفت کرده‌ام و با خودم گفتم که «من آمیدی به مدرسه آمدن نداشتم. پس چه شد که پیشرفت کردم». پیدا کردن این روش سبب شد که امیدم به زندگی، برگردد و حتی دیگر فکر نیامدن به مدرسه را نکنم و با امید، به زندگی ادامه دهم. بعد از این، شماره تلفن معلم ریاضی‌ام را گرفتم و به مادرم دادم. تا اینکه یک روز معلم ریاضی ما، اعلام کرد که من «جلسه بعد نیستم، ولی کسی را به جای خودم می‌گذارم تا با شما کار کند!» وقتی که فهمیدم معلم ریاضی قرار است برای شرکت در کنفرانس به بوشهر بروند، به ایشان یک پیام دادم و از وی خواستم که اگر امکان دارد، به من اجازه دهند که جلسه بعد، به جای ایشان تدریس کنم. بعد از مدتی که گذشت، معلم ریاضی از کنفرانس آموزش ریاضی بوشهر با من تماس گرفتند و گفتند «وقتی پیام شما را دیدم خیلی خوشحال شدم و با مدیر مدرسه هماهنگ می‌کنم که شما به جای من، در کلاس درس معلم باشید». وقتی جلسه بعد شد، دانش‌آموزان فکر می‌کردند که دانش‌آموز «خوب» کلاس، امروز جایگزین معلم ریاضی است، یک دفعه مدیر وارد کلاس شدند و گفتند معلم ریاضی شما با من تماس گرفته و گفته که «امروز زهره معلم ریاضی شماست!» با شنیدن این خبر، دانش‌آموزان بسیار تعجب کردند و باورشان



اشتباهات، مغالطه‌ها و سفسطه‌های ریاضی

اعداد گنگ در تناظر یک‌به‌یک با اعداد گویا نیستند، دانش‌آموزی اعتراض کرد که مگر اعداد گویا و گنگ یک در میان نیستند؟! شاید برای این دانش‌آموز، این شهود اشتباه، استنتاجی از این احکام باشد که بین هر دو عدد گویای متمایز یک عدد گنگ وجود دارد و بین هر دو عدد گنگ متمایز یک عدد گویا وجود دارد.

بعضی اوقات، حتی نام‌گذاری مفاهیم و اشیای ریاضی، می‌تواند دانش‌آموزان را به اشتباه بیندازد. مثلاً گاهی دانش‌آموزان اصطلاح «بسته» را که مفهومی در آنالیز و توپولوژی است، با مفهوم «کرانداری» اشتباه می‌گیرند. شاید یک علت چنین اشتباهی این باشد که از نظر زبانی، «بسته» به‌طور ناخودآگاه محصور بودن در یک مرز محدود را در ذهن القاء کند. حتی ممکن است دانش‌آموز، «بسته» و «باز» را به‌خاطر معنی لغوی آن‌ها نقیض همدیگر بگیرد.

اشتباهات دیگری هم هستند که جنبه منطقی دارند. یک نمونه بارز در این زمینه موقعی است که از شاگرد خواسته می‌شود نشان دهد حکم خاصی با حذف یکی از مفروضاتش برقرار نیست. بسیاری از اوقات مشاهده شده است که شاگرد به جای ارائه مثال نقض، بیان می‌کند که چون استدلال حکم، بدون فرض حذف شده کار نمی‌کند، پس این شرط حذف شده لازم است.

همچنین در بعضی مواقع، شاگردان از یک راه نادرست به یک پاسخ درست می‌رسند، که البته در چنین شرایطی متقاعد کردن آن‌ها همیشه کار زیاد ساده‌ای نیست!

نوع دیگری از اشتباهات آن‌هایی هستند که بسیار غیربدیهی‌ترند و گاهی ممکن است یک فرد باتجربه را هم

مدرس‌ان ریاضی، اغلب با اشتباهات ریاضی شاگردان^۱ هنگام تدریس یا هنگام امتحان مواجه می‌شوند. اشتباهات ریاضی درجاتی دارند. بعضی از آن‌ها می‌توانند اشتباهات سهوی باشند، از قبیل یک اشتباه محاسباتی، کم دقتی یا سهل‌انگاری در اثبات، خلط کردن دو میحث، استفاده از یک فرمول نادرست، اشتباه در به‌کار بردن جمع و ضرب، اشتباه در نسبت و تناسب، بد گذاشتن جای پرانتزها در محاسبات جبری، ساده‌سازی اشتباه در محاسبات با کسرها، اشتباه بین یک مثبت و منفی در یک محاسبه یا بسیاری موارد دیگر که طبقه‌بندی مفصل آن‌ها، از حوصله این متن خارج است. موقعیت‌هایی هم وجود دارند که خطا و اشتباه از علم و دانش دانش‌آموز نشأت می‌گیرد، یعنی اگر دانش‌آموز مطلبی را نمی‌داند، شاید مرتکب یک اشتباه به‌خصوص نمی‌شد.

اشتباهات دیگری هستند که یک شهود نادرست، مسبب آن‌هاست، از قبیل قاعده اشتباه مشتق‌گیری مانند $(fg)' = f'g'$ ، $(a+b)^x = a^x + b^x$ ، $\log(x+y) = \log x + \log y$ ، $2^{x+y} = 2^x + 2^y$ و نظایر این‌ها یا حالا اشتباه دیگری که در آن ممکن است دانش‌آموز $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 1$ در نظر بگیرد. در واقع این اشتباه، شاید از شهودی می‌آید که در آن، $\frac{\infty}{\infty} = 1$ که البته در مواردی هم درست است یا اشتباهات دیگری که دانش‌آموز از قاعده‌هایی استفاده می‌کند که در حالت‌هایی درست هستند، اما در حالت به‌کار گرفته شده درست نیستند، مثل دانش‌آموزی که می‌پندارد ضرب دو عدد مثبت صرف‌نظر از اینکه صحیح یا کسری باشند، همواره از خود آن دو عدد بزرگتر یا مساوی است. نگارنده به یاد می‌آورد سر یک کلاس وقتی نشان داده شد که

به اشتباه بیندازند که این اشتباهات را می‌توان به‌عنوان سفسطهٔ ریاضی تلقی کرد.

سفسطه یا پارادوکس

بین سفسطه و پارادوکس تفاوت است، زیرا پارادوکس ریاضی تناقضی است که معمولاً با یک استدلال موجه حاصل می‌شود. پارادوکس موجب ایرادهایی جدی به اصول، تعریف‌ها یا مفروضات شده و گاهی مجبور می‌شویم در آن‌ها تجدید نظر کنیم، یا آن‌ها را به‌طور دقیق‌تری بیان کنیم. از این منظر، پارادوکس‌ها باعث می‌شوند نسبت به استوار کردن شالوده‌های ریاضیات، اهتمام بورزیم. اما سفسطه تناقضی است که از یک استدلال با ظاهر صحیح، اما در باطن تقلبی، به دست آمده است. البته سنخ سفسطه در ریاضیات با گونه‌های نظیر آن در فلسفه یا علوم دیگر، متفاوت است. قبحی که گاهی برای سفسطه و سوفسطائیان در بعضی از علوم وجود دارد، شاید در ریاضیات چندان وجود نداشته باشد. یک دلیل این است که در ریاضیات، تشخیص درستی برهان، کمتر محل مناقشه است و سفسطه و سوفسطائیان خطری جدی در این علم تلقی نمی‌شوند. در لغت‌نامهٔ انگلیسی آکسفورد، سوفسطائی^۲ را این‌طور توصیف کرده است: **فردی که یک استدلال هوشمندانه اما مغالطه‌آمیز به کار می‌بندد.**

سفسطه‌های ریاضی اشتباه‌هایی هستند که فریبنده‌تر و چیره‌دستانه‌تر هستند و وجه نهفتهٔ حقیقت در آن‌ها، نسبتاً قابل توجه است. این خطاها و اشتباهات می‌توانند از منظر ریاضی، گاهی بسیار جالب و آموزنده باشند. معلمان باتجربه واقفند که تا چه حد توضیح یک اشتباه غیربیدی برای کلاس، می‌تواند از نظر آموزشی ارزشمند باشد. حتی این موضوع در زندگی هم پیش می‌آید که بشر از اشتباهات و شکست‌هایش، بیشترین درس را می‌آموزد. اشتباهات جالب، معمولاً از علم و دانش نشأت می‌گیرند و حتی بعضی از آن‌ها در حالت‌هایی، می‌توانند نشانهٔ نبوغ تلقی شوند. بدین سبب در بعضی مواقع، اشتباهات در ریاضیات به خاطر بُعد آموزشی آن‌ها، تا حدودی تحسین شده‌اند. لمب^۳ استاد دانشگاه یوتا در «وبلاگی دربارهٔ وبلاگ‌های ریاضی^۴» روی سایت انجمن ریاضی آمریکا، هم قافیه با نقل قول مشهوری از تولستوی می‌نویسد «راه‌حل‌های درست همه شبیه هستند، اما راه‌حل‌های نادرست هر کدام به شیوه خود نادرست هستند.»

در بخش بعد، چند نمونه از این سفسطه‌ها یا مغالطه‌ها که بیشتر ماهیت هندسی دارند، بیان می‌شوند. همهٔ مواردی که می‌آیند، سفسطه‌های شناخته شده و قدیمی‌اند، اما به قولی «روح نو بین در تن حرف کهن».

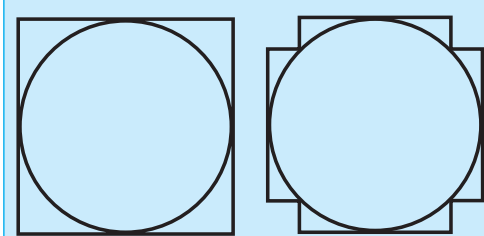
برای برانگیختن بیشتر حس کنجکاوی، از بیان جایی که اثباتش سفسطه‌آمیز است، اجتناب کرده‌ایم.

مغالطه $\pi = 4$

یک دایره به قطر ۱ در نظر بگیرید. محیط این دایره برابر با π است.

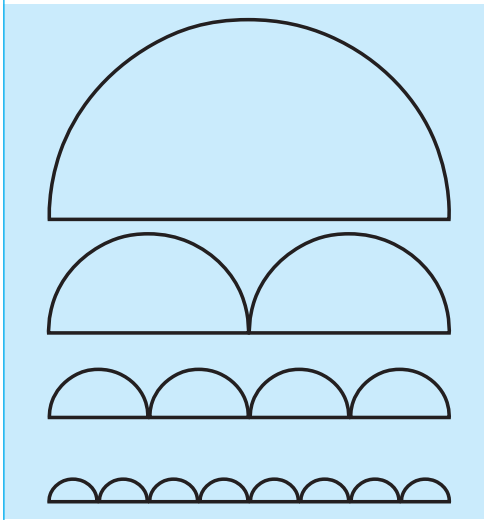
این دایره را در یک مربع به ضلع ۱ محاط می‌کنیم. محیط این مربع برابر با ۴ است. حال به صورت زیگزاگی، گوشه‌های این مربع را ببرید و آن را به دو گوشهٔ کوچک‌تر تقسیم کنید.

محیط شکل ۸ گوشه حاصل، تغییری نمی‌کند و برابر با ۴ است. این فرایند را ادامه دهید، یک شکل ۱۶ گوشه به دست می‌آید. با ادامهٔ این فرایند در هر مرحله، چندضلعی‌ای حاصل می‌شود که محیط آن همچنان ۴ است و به دایره میل می‌کند. پس $\pi = 4$!

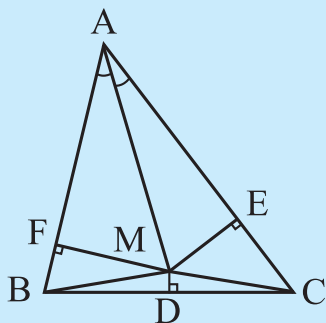


مغالطه $\pi = 2$

یک پاره‌خط به طول ۱ در نظر می‌گیریم و روی آن، n نیم‌دایره هر کدام به قطر $\frac{1}{n}$ رسم می‌کنیم. محیط هر کدام از این نیم دایره‌ها برابر با $\frac{\pi}{2n}$ است. بنابراین مجموع محیط شکل حاصل، برابر با $n \times \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ می‌شود. وقتی n زیاد می‌شود، این نیم‌دایره‌ها به پاره‌خط نزدیک می‌شوند و طول آن‌ها به طول پاره‌خط نزدیک می‌شود، پس $\frac{\pi}{2} = 1$!



عمود منصف ضلع BC را M می‌نامیم. فرض کنید F پای عمود فرود آمده از M بر ضلع AB و E پای عمود فرود آمده از M بر ضلع AC باشد. دو مثلث قائم‌الزاویه AMF و AME به حالت وتر و یک زاویه با هم هم‌نهشت هستند. پس خواهیم داشت.



$$AF=AE \quad (1)$$

$$MF=ME \quad (2)$$

از سوی دیگر، چون MD عمود منصف ضلع BC است، پس $MB=MC$. از تساوی اخیر و رابطه (۲) نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویه MFB و MED به حالت وتر و یک ضلع، با هم هم‌نهشت هستند. در نتیجه خواهیم داشت.

$$FB=EC \quad (3)$$

از دو رابطه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $AB=AC$ ، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است!

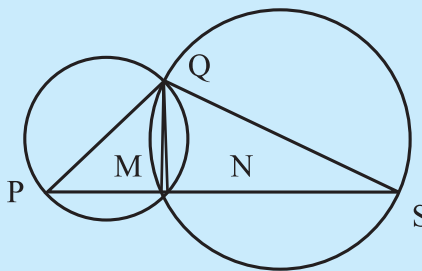
مغالطه برابر بودن محیط هر دو دایره

دو دایره هم‌مرکز را در نظر می‌گیریم. تصور کنید که این دو دایره به صورت یک چرخ درآمده باشند. این چرخ را روی یک خط مستقیم آن قدر می‌غلطانیم تا نقطه تماس اولیه A با خط، دوباره روی همان خط قرار گیرد، نقطه جدید A' را می‌نامیم. در این فرایند، A به اندازه محیط دایره بزرگتر را طی می‌کند تا به A' برسد. پس طول AA' برابر با محیط دایره بزرگتر است. با همین استدلال، طول BB' برابر با محیط دایره کوچک‌تر است. چون AA' و BB' با هم برابرند، نتیجه می‌شود محیط دو دایره با هم برابرند!



مغالطه رسم دو عمود از یک نقطه بر یک خط

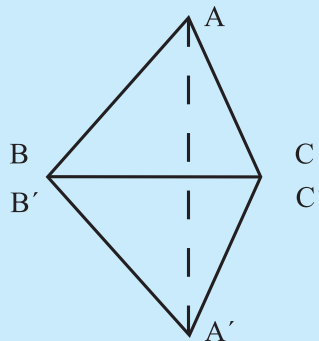
یک نقطه Q خارج از یک پاره‌خط PS در نظر می‌گیریم. دایره‌هایی به قطر QP و QS رسم می‌کنیم. پاره‌خط PS ، این دو دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند. زاویه QMS با توجه به اینکه روبه‌روی قطر QS است، قائمه است. به همین ترتیب زاویه QNP با توجه به اینکه روبه‌روی قطر PQ است قائمه است. پس QM و QN دو عمود از Q بر خط واصل بین S و P هستند!



مغالطه هم‌نهشتی دو مثلث به حالت ض‌ض‌ز

فرض کنید برای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم، $AB=A'B'$ و $BC=B'C'$ و $\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha$ ، یعنی به حالت ض‌ض‌ز هم‌نهشت هستند.

اضلاع BC و $B'C'$ را مطابق شکل، روی هم قرار می‌دهیم. نقطه A را به A' وصل می‌کنیم. با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ABA' ، دو زاویه $\angle BAA'$ و $\angle B'A'A$ با هم برابرند. با توجه به اینکه دو زاویه $\angle BAC$ و $\angle B'A'C'$ با هم برابرند، نتیجه می‌شود دو زاویه $\angle AA'C$ و $\angle A'AC$ نیز با هم برابرند. پس مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است، یعنی $AC=A'C'$ ، در نتیجه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت ض‌ض‌ض با هم هم‌نهشت هستند!



مغالطه متساوی‌الساقین بودن هر مثلث

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. فرض کنید D نقطه وسط BC باشد. محل تقاطع نیمساز زاویه A و

معلم‌ان با تجربه
واقفند که تا چه حد
توضیح یک اشتباه
غیربدیهی برای
کلاس، می‌تواند
از نظر آموزشی
ارزشمند باشد.
حتی این موضوع
در زندگی هم
پیش می‌آید که
بشر از اشتباهات
و شکست‌هایش،
بیشترین درس را
می‌آموزد

مغالطه در اثبات محاسبه مجموع زوایای داخلی

یک مثلث

فرض کنید مجموع زوایای داخلی مثلث برابر با α باشد. پس در مثلث ABD داریم

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \alpha$$

به طور مشابه در مثلث ADC به دست می آوریم.

$$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \alpha$$

با جمع کردن دو رابطه اخیر به دست می آید

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2\alpha$$

اما چون دو زاویه $\angle 3$ و $\angle 4$ مکمل هستند پس

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

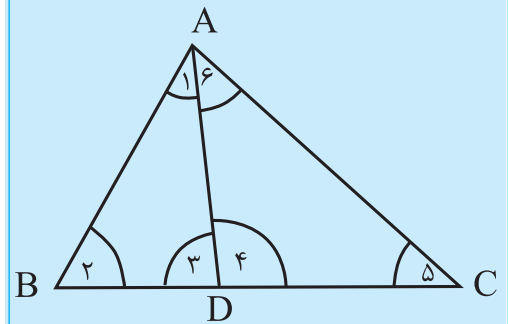
بنابراین به دست می آید

$$\angle 1 + \angle 2 + 180^\circ + \angle 5 + \angle 6 = 2\alpha$$

اما $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6$ مجموع زوایای داخلی

مثلث ABC است که برابر با α است. پس به دست

می آید $2\alpha = \alpha + 180^\circ$ ، پس $\alpha = 180^\circ$.



منابعی برای مطالعه بیشتر

کتابهای زیادی درباره اشتباهها، مغالطهها، پارادوکسها و سفسطههای ریاضی نوشتهاند. یکی از این کتابها، منبع [۳] نوشته نورتروپ است که در سال ۱۳۵۰ تحت عنوان «معماهای ریاضی، حیلها، جبری و هندسی، مغالطات و تناقضات» توسط محمد رکنی قاجار (از زبان فرانسوی) ترجمه شده و به وسیله انتشارات یکان چاپ شده که ظاهراً در حال حاضر، این کتاب خارج از چاپ است. یک کتاب دیگر در این زمینه منبع [۲] نوشته ماکسول است که تحت عنوان «مغالطههای ریاضی» توسط غلامرضا یاسی پور ترجمه شده و انتشارات محراب قلم در سال ۱۳۸۰ آن را چاپ کرده است. یک کتاب قدیمی تر و منبع [۱] هم توسط لیتسمان و تریر با عنوان «اشتباه کجاست؟» نوشته شده است (چاپ اول، سال ۱۹۱۳) که یکی از سرچشمههای اصلی کتابهای معرفی شده محسوب

می شود. در این منبع، بسیاری از اشتباههای ریاضی مورد بررسی قرار می گیرند. در شمارههای پیشین مجله رشد آموزش ریاضی، مقالههای متعددی به بررسی اشتباههای ریاضی پرداخته اند که از جمله، می توان به مقاله با عنوان «منشأ خطاهای دانش آموزان» نوشته بن زیو اشاره کرد که خلاصه ای از این منبع، توسط سپیده چمن آرا در مجله رشد آموزش ریاضی (دوره ۲۹، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۰) ترجمه و چاپ شده است و در آن، نویسنده به بررسی خطاهای معقول ریاضی پرداخته است. در مقاله «پارادوکسهای هندسی» نیز (مجله رشد برهان متوسطه ۲، دوره ۲۱، شماره ۷۴، تابستان ۱۳۹۳) فرزاد حمزه پور به بررسی سه سفسطه هندسی پرداخته است. یکی سفسطه متساوی الساقین بودن هر مثلث و دیگری، رسم دو عمود از یک نقطه بر یک خط داده شده است که در این مقاله هم بررسی شدند. همچنین یک سفسطه دیگر نیز در مورد منفرجه بودن زاویه قائمه در مقاله «مغالطههای ریاضی» (مجله رشد برهان متوسطه ۲، دوره ۲۵، شماره ۹۴، اردیبهشت ۱۳۹۵) توسط احسان یارمحمدی نوشته شده است که در آن، به دو مغالطه هندسی، یکی متساوی الساقین بودن هر مثلث (با روش مثلثاتی) و دیگری مغالطه قرار داشتن هر نقطه درون یک دایره روی محیط آن، بررسی شده است.

پی نوشت

۱. منظور از شاگرد، هم دانش آموز و هم دانشجویست و معادل student است.

2. Sophist

3. Evelyn Lamb

4. Blog on Math Blogs, (<http://blogs.ams.org/blogonmathblogs/>)

منابع

- [1] Lietzmann, W. and Trier, O. (1913). "Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler." Leipzig: B. G. Teubner. IV+57 S. kl. 8° (Math. Bibl. X) (1913).
- [2] Maxwell, E. A. (1959). Fallacies in mathematics Cambridge University Press, New York.
- [3] Northrop, E. P. (1959). "Riddles in mathematics. A book of paradoxes." London: The English Universities Press Ltd. X, 242 p. (1959).



آزمزروی شهری

تامدل سازی ریاضی



اشاره

اگر به محیط اطراف خود، از دریچهٔ ریاضی و مدل سازی نگاه کنیم، گاهی به مسائل جذابی می‌رسیم که در عین سادگی، مسئله حل کن را با چالش‌های جدی مواجه می‌کند و لذت حل یک مسئلهٔ جالب را به وی می‌چشانند. این مسئله یکی از آن‌هاست.

کلیدواژه‌ها: مدل سازی ریاضی، حل مسئله

باز هم فکر کردم که اگر جای او بودم و کسی به من پیشنهاد می‌داد هفت جفت جوراب را به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان به من بدهد، آیا بهتر بود که پیشنهادش را می‌پذیرفتم یا نمی‌پذیرفتم؟ باید مشخص شود سود فروش هفت جفت ۱۰۰۰۰ تومان، در چه صورت از سود فروش سه جفت ۵۰۰۰ تومان، بیشتر است؟ اگر باز هم فرض کنیم هر جفت جوراب x تومان است بنابراین:

$$\begin{aligned} 10000 - 7x &> 5000 - 3x \\ \Rightarrow -7x + 3x &> 5000 - 10000 \\ \Rightarrow -4x &> -5000 \\ \Rightarrow x &< 1250 \end{aligned}$$

جواب به دست آمده نشان می‌دهد که اگر $x < 1250$ باشد، بهتر است که فروشنده هفت جفت جوراب را به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان بفروشد، و اگر $1250 < x < 1500$ باشد، بهتر است سه جفت جوراب را به قیمت ۵۰۰۰ تومان بفروشد (اگر $x = 1250$ باشد، سود او برای فروش سه جفت ۵۰۰۰ و هفت جفت ۱۰۰۰۰ تومان، برابر است) و اگر $x > 1500$ باشد، بهتر است یک جفت جوراب را ۲۰۰۰ تومان بفروشد (اگر $x = 1500$ باشد، سود او برای فروش سه جفت ۵۰۰۰ و یک جفت ۲۰۰۰ تومان، برابر است).

روی صندلی مترو نشسته بودم. مرد جوانی را دیدم که جوراب می‌فروخت. او با صدای بلند می‌گفت «جوراب جفتی ۲۰۰۰ تومان، سه جفت ببری ۵۰۰۰ تومان». به فروشنده و جوراب‌هایش به دقت نگاه کردم. تخفیف خوبی برای خرید سه جفت جوراب پیشنهاد داده بود که فکر من را به خود مشغول کرد. مگر روی فروش هر جفت جوراب چقدر سود می‌کند که ۱۰۰۰ تومان یعنی نصف قیمت یک جوراب را به کسی که سه جفت جوراب می‌خرد، تخفیف می‌دهد؟

با خود فکر کردم که مطمئناً، سود او از فروش سه جفت جوراب به قیمت ۵۰۰۰ تومان، بیشتر از سود او از فروش یک جفت ۲۰۰۰ تومان است، زیرا او برای فروش سه جفت جوراب، تبلیغ می‌کند! حال اگر فرض کنیم هر جفت جوراب را x تومان خریداری کرده است.

پس

$$\begin{aligned} 5000 - 3x &> 2000 - x \\ \Rightarrow -3x + x &> 2000 - 5000 \\ \Rightarrow -2x &> -3000 \\ \Rightarrow x &< 1500 \end{aligned}$$

یعنی قیمتی که او بابت خرید هر جفت جوراب پرداخته است، عددی کمتر از ۱۵۰۰ تومان است.



نگرشی بر کمیت و کیفیت آموزشی مستمر معلمان

مقاله ارائه شده در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران: ۳ تا ۶ بهمن ۱۳۹۶، بوشهر

علی روزدار

کارشناسی ارشد آموزش ریاضی،
دبیر و مدرس دانشگاه فرهنگیان چهار محال و بختیاری

چکیده

می‌خواستم بنویسم «ضرورت آموزش مستمر معلمان ریاضی بر کسی پوشیده نیست!»، ولی هنوز جمله شروع نشده بود که متوجه شدم امروزه در کشور ما، این یک گزاره الزاماً درست نیست! حالا که صحبت از «گزاره» شد، یک دلیل برای تأیید این ادعا می‌آورم. در کتاب‌های نونگاشت ریاضی دبیرستان، موضوع «منطق ریاضی»، در قالب یک فصل یا چند درس آورده شده است. بحث‌هایی در گروه‌های مجازی دبیران ریاضی شکل گرفته که عمق فاجعه «نبود آموزش تخصصی دبیران» را پیش از تدریس، نمایان می‌سازد. بعضی از معلمان، حتی در تشخیص گزاره‌ها دچار اشکال بودند. فارغ از اصل ضرورت گنجاندن این بخش در قالب «ریاضیات جدید»، به اعتقاد مؤلفان، این بخش از ریاضیات، پایه و پیش نیاز اساسی برای استدلال ریاضی و فهم بسیاری از مفاهیم آن است. بنابراین، ناتوانی و ناکارآمدی معلم ریاضی در فهم و آموزش ریاضی، گریزان شدن دانش‌آموز را از ریاضی، در پی دارد. در این مقاله که در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ارائه شده است، به ضرورت، محتوا و کیفیت آموزش مستمر دبیران ریاضی، پرداخته‌ام.

کلید واژه‌ها: آموزش معلمان، منطق ریاضی، گروه‌های مجازی آموزشی

مقدمه

اساس برنامه‌ای مدون به اجرا درآید. اما بنا به دلایل ناشناخته، این موضوع مهم، با جدیت دنبال نشده است. در صورتی که لازم است ساز و کار آموزش معلمان و دانشجو-معلمان، به گونه‌ای باشد که آن‌ها با بیشترین آمادگی علمی، سال تحصیلی را آغاز کرده و راهنمای توانمندی برای دانش‌آموزان خود باشند.

ضرورت آموزش دبیران ریاضی

این سال‌ها، نسخه‌های «غیرقابل استناد»! کتاب‌های نونگاشت، تنها چند هفته مانده به آغاز سال تحصیلی، یا

در چند سال گذشته کتاب‌های درسی دچار تغییرات زیادی شده‌اند. گرچه گاهی ناگزیر از تغییر، نو و به روز کردن محتوا و منابع آموزشی هستیم، ولی به نظر می‌رسد طی سال‌های اخیر، در این کار زیاده‌روی و بی‌برنامه‌گی شده است که نمونه آن، تغییرات کتاب‌های ریاضی ۱۲ پایه طی کمتر از ۱۰ سال بوده است. از طرف دیگر، به موازات تغییرات اخیر برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی، آموزش معلمان نیز باید به‌طور مستمر و بر

به موازات تغییرات اخیر
برنامه و کتاب‌های درسی
ریاضی، آموزش معلمان
نیز باید به‌طور مستمر و بر
اساس برنامه‌ای مدون به
اجرا درآید. اما بنا به دلایل
ناشناخته، این موضوع
مهم، با جدیت دنبال نشده
است

ببینند، مقاومتشان در برابر تغییر کمتر شده و حتی همراه خواهند شد. از آنجایی که «هدف متعالی آموزش، توسعه تمام قابلیت‌های درونی کودک است» [۱]، آموزش مستمر معلمان، برای شکوفا کردن توانمندی دانش‌آموزان، اجتناب‌ناپذیر است.

دبیران ریاضی چه چیزی را باید آموزش ببینند؟

محتوای آموزشی برای تربیت دبیران کارآمد را می‌توان در دو بخش پیش از خدمت و ضمن خدمت، دسته‌بندی نمود:

الف) آموزش دبیران پیش از خدمت

دوره کارشناسی دبیری ریاضی، ویژه دانشجویانی است که برای گرفتن مدرک «صلاحیت حرفه‌ای» معلمی وارد دانشگاه فرهنگیان و تربیت دبیر می‌شوند. این دانشجویان - معلمان، از بین داوطلبان علاقمند به دبیری ریاضی و از طریق کنکور سراسری، به روش نیمه متمرکز پذیرفته می‌شوند.

دانشجو-معلمان در طول دوره کارشناسی، درس‌ها و واحدهای گوناگونی را می‌گذرانند که در صورت آموزش درست و برنامه‌ریزی شده از سوی مدرسان، و جدیت از سوی دانشجویان، می‌تواند آن‌ها را به دبیرانی کارآمد تبدیل نماید.

الف-۱) درس‌ها و موضوع‌های پایه و تخصصی

برخی از این درس‌ها عبارتند از: مبانی ریاضیات، ریاضیات عمومی (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، آنالیز ریاضی، جبر خطی، معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی، نظریه اعداد، جبر، آموزش ریاضی، آمار و احتمال، فیزیک و آزمایشگاه و مبانی کامپیوتر و برنامه‌ریزی.

تقویت دانش و مهارت تخصصی دانشجویان که از آن‌ها به «صلاحیت فنی» تعبیر می‌شود، شرط نخست برای پذیرش مقام دبیری ریاضی است. «آگاهی از موضوع مورد آموزش و مهارت‌هایی که با کاربرد آن سر و کار دارند، از اجزای اصلی و کلیدی یک تدریس اثربخش به حساب می‌آیند. زیرا همان‌طور که نمی‌توان از محل نبوده بازگشت، نمی‌توان نادانسته را آموخت» [۵]

در دوره‌های ضمن خدمت فرهنگیان، و همچنین در دانشگاه فرهنگیان، از دبیران پایه ششم، بسیار می‌شنیدیم که ابراز می‌کردند خودشان از عهده درک ریاضیات پایه ششم بر نمی‌آیند و به این ترتیب، چطور می‌توانند آن را به دانش‌آموزان یاد بدهند؟ برخی از این همکاران، اعتقاد

چند روز پس از بازگشایی مدارس، آماده می‌شوند^۱. در حالی که دبیران مربوطه، آموزش لازم را در زمینه این تغییرات ندیده‌اند. همچنین، ساز و کار جدید نوشتن کتاب‌های درسی، در ضعف‌های موجود در آموزش دبیران ریاضی تأثیر داشته و دارد. زیرا یک کتاب درسی نونگاشت، لازم است که نخست به صورت آزمایشی تدریس، و به نقد گذاشته شود و اشکالات احتمالی آن برطرف گردد^۲. سپس معلمان برای تدریس هرچه بهتر آن، آموزش ببینند؛ تا سرانجام، کتاب‌های نونگاشت، با کمترین ضعف، وارد فضای آموزشی جامعه شوند. به این دلیل که حتی یک اشتباه چاپی در این سطح از آموزش متمرکز و در تیراژ میلیونی، قابل پذیرش نیست.

در سال تحصیلی (۹۷ - ۹۶) هم، نسخه‌های «غیر قابل استناد» برخی از کتاب‌های نونگاشت ریاضی، در فضای مجازی منتشر شد و دبیران ریاضی به‌طور خودجوش! به تشکیل گروه‌های هم‌اندیشی، و نقد و بررسی این کتاب‌های غیرقابل استناد پرداختند^۳. تلاش برای افزودن برخی مؤلفان به این گروه‌ها و دفاع از اثرشان، به نتیجه‌ای نرسید، ولی شواهد نشان می‌دهند که خوشبختانه، از نتیجه نقد و بررسی آن‌ها در ویرایش کتاب‌ها، کمک گرفته شده است.

آموزش مستمر معلمان، در جریان دگرگونی (اصلاح) آموزشی، مهم‌ترین مؤلفه در نتیجه‌بخش بودن این تغییرات است. معلمان به‌عنوان معماران دانش نوآموزان، بدون آموزش نوین، بر اساس روش‌های سنتی و خود-آموخته، به تدریس و «انتقال» و تزریق مفاهیم در ذهن دانش‌آموزان می‌پردازند. بسیاری از معلمان در برابر تغییر و اصلاح، مقاومت کرده و بر تدریس سنتی خود پای می‌فشارند. اگر آموزش معلمان مستمر باشد، و آن‌ها در دوره‌های گوناگون و به شیوه‌های نوین آموزش

**در سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶،
سنت‌شکنی شد و دوره‌های
ضمن خدمت درس‌های ریاضی،
به صورت الکترونیکی و مجازی
تدارک دیده شد. مؤلفان، چند
فیلم از آموزش درس‌های
مربوط را بارگذاری کردند. در
این فیلم‌ها، آن‌ها به تدریس
فشرده موضوع مورد بحث
پرداخته و چند تمرین را نیز
حل می‌کنند. صفحه‌ای را هم
برای پرسش و پاسخ در نظر
گرفته‌اند**

کاستی‌های کنونی دوره‌های ضمن خدمت

در سال تحصیلی جاری (۹۷-۱۳۹۶)، و به دنبال دگرگونی ایجاد شده در دوره‌های آموزش عمومی، محتوای آموزشی پایه یازدهم، دستخوش تغییر شد. جدای از نقد این شیوه تغییر کتاب‌های نونگاشت و حتی نام‌گذاری‌ها، بر کمیت و کیفیت برگزاری دوره‌های آموزشی، انتقاد وارد است.

نخست اینکه لازم بود «دوره بررسی، تحلیل و روش تدریس و بازآموزی مبانی علمی آن»^۴ برای دروس مربوطه، پیش از آغاز سال تحصیلی و تدریس رسمی آن صورت می‌گرفت. دبیر ریاضی باید با آگاهی کامل از کم و کیف تغییرات صورت گرفته، و تسلط بر محتوای مورد تدریس، به آموزش آن بپردازد. در حالی که در اغلب موارد، اولین دوره ضمن خدمت دروس ریاضی، از ۱۰ مهرماه آغاز شد.

دوم اینکه بنا به ماهیت ریاضی و روش‌های آموزش آن، نیاز است که دوره‌های ضمن خدمت درس‌های ریاضی، به صورت حضوری و با شرکت مؤلفان کتاب‌ها، یا دبیران توانمندی که به خوبی آموزش دیده‌اند، اجرا شوند تا ابهامات و اشکالات کتاب‌ها و ضعف‌های احتمالی همکاران، به خوبی پوشش داده شود. ولی در سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶ سنت‌شکنی شد و دوره‌های ضمن خدمت درس‌های ریاضی، به صورت الکترونیکی و مجازی تدارک دیده شد. مؤلفان، چند فیلم از آموزش درس‌های مربوط را بارگذاری کردند. در این فیلم‌ها، مؤلفان به تدریس فشرده موضوع مورد بحث پرداخته و چند تمرین را نیز حل می‌کنند. صفحه‌ای را هم برای

داشتند که ریاضی، فقط تا پایه پنجم ارزش و نیاز به آموزش دارد! ولی بالاتر از آن بی‌فایده است! حتی در بین همکاران دوره متوسطه نیز کم و بیش، با چنین اظهار نظرهایی روبه‌رو شده‌ام. به نظر می‌رسد این همکاران، هنوز به صلاحیت فنی دست نیافته‌اند، بنابراین چگونه می‌توانند «نادانسته را آموزش دهند؟!»

بهتر است در منابع ریاضی دوره دبیری (کارشناسی و کارشناسی ارشد)، از شاخه‌های گوناگون ریاضی و کاربردهای آن در رشته‌های علمی دانشگاهی، مثال‌هایی گنجانده شوند تا از این طریق، معلم توانمندی بیشتری به‌دست آورده و بتواند پاسخگوی ذهن پرسشگر دانش‌آموز باشد. در رشته دبیری ریاضی، معمولاً پرسش‌های کاربردی از سر فصل دروس حذف می‌شود و گاه این کار، با پیشنهاد یا اصرار دانشجویان و پذیرش از سوی استاد مربوطه صورت می‌گیرد. پرسش کلیدی دانش‌آموزان در همه موضوع‌های ریاضی این است که «به چه درد می‌خورد؟» یا اینکه «چه جایی استفاده می‌شود؟». اگر دانش فنی معلم به روز باشد، برخی پرسش‌ها را می‌تواند در قالب ظرفیت ذهنی دانش‌آموزان، پاسخ دهد.

علاوه بر این‌ها، «نظریه‌های یادگیری» به معلم کمک می‌کند برای دانش‌آموزان، با توجه به سن، پایه تحصیلی، موضوع مورد آموزش و سطح دشواری و شرایط دیگر حاکم بر آموزش، شیوه‌ای مناسب برای تدریس انتخاب کند.

ب) ضمن خدمت

آموزش معلمان ریاضی در دوره‌های ضمن خدمت آموزشی، با اهداف گوناگونی دنبال می‌شود. یکی از مهم‌ترین اهداف این آموزش‌ها، به‌روز نمودن دانش معلمان ریاضی، و آشنایی آنان با تحولات آموزشی در ایران و جهان است.

هدف دیگر این دوره‌ها، آشنایی معلمان با اهداف برنامه‌ریزان و متولیان آموزشی کشور است. در صورتی که گاهی این دوره‌ها، بی‌ارتباط با دانش ریاضی و آموزش آن است.

دوره‌های مرتبط با آموزش ریاضی، عموماً با هدف دانش‌افزایی معلمان، افزایش کیفیت آموزش و اثربخشی آن صورت می‌گیرد. این دوره‌ها، می‌توانند کمک کنند تا در معلمان، نگرشی ایجاد شود که در همه مراحل کاری و زندگی خود، بتوانند روحیه دانشجویی خود را حفظ نموده و الگوی دانش‌آموزان خویش باشند.

یک کتاب درسی نونگاشت،
لازم است که نخست به
صورت آزمایشی تدریس، و به
نقد گذاشته شود و اشکالات
احتمالی آن برطرف گردد.
سپس معلمان برای تدریس
هر چه بهتر آن، آموزش
ببینند؛ تا سرانجام کتاب‌های
نونگاشت، با کمترین ضعف،
وارد فضای آموزشی جامعه
شوند. به این دلیل که حتی
یک اشتباه چاپی در این سطح
از آموزش متمرکز، و در تیراژ
میلیونی قابل پذیرش نیست

نتیجه‌گیری

«دانش‌آموزان، آینده‌سازان این مرز و بوم هستند». همین جمله قشنگ، هم‌اکنون تنها به یک شعار بدل شده است. واقعیت موجود در جامعه، نشان دلگرم‌کننده‌ای از عزم راسخ برای جدی گرفتن این «شعار زیبا!» نیست. واقعیت این است که در حال حاضر، تعداد زیادی از نخبگان علمی ما، آینده‌سازان کشورهای دیگر شده‌اند. فارغ از کمیت و کیفیت آموزشی، بالاخره بخشی از دانش‌آموزان، در آینده جامعه ما نقش‌آفرینی خواهند کرد. برنامه‌ریزان آموزشی، نویسندگان و معلمان، کارگردان‌های این نقش‌آفرینی هستند. انتخاب درست، آموزش هدفمند، کارشناسانه و مستمر معلمان، در سایه تضمین مقام معنوی و زندگی حرفه‌ای برابر برای آنان، سمت و سو، و توانمندی ایفای نقش دانش‌آموزان را در آینده این کشور، رقم خواهد زد.

پی‌نوشت:

۱. گروه ریاضی متوسطه یادآور شدند که «نسخه‌های کتاب‌ها از فروردین ماه روی سایت گروه و دفتر تألیف قرار گرفته است»
۲. گروه ریاضی توضیح داده است که «از هر استان ۲ نفر و حدود ۶۴ نفر سطر به سطر کتاب‌های درسی نونگاشت را از طریق سامانه اعتبارسنجی بررسی و نظرات خود را مکتوب ارسال می‌کنند و به دست مؤلفین می‌رسد.»
۳. از نظر گروه ریاضی دفتر تألیف، این با نظر نویسندگان در صفحه قبل که نسخه‌ها تنها چند هفته قبل از شروع آماده می‌شود تناقض دارد.
۴. عنوان انتخابی برای این دوره‌ها
۵. این گروه قبل از فیلتر شدن تلگرام، فعالیت می‌کرد.
۶. مستندات این اتفاق، در دفتر مجله موجود است و اگر کسی نسبت به صحت این فاجعه شک داشته باشد، می‌تواند به آن‌ها، دسترسی پیدا کند.

منابع

- ۱- پولیا، جرج؛ ترجمه زهرا گویا و علیرضا طالب‌زاده؛ **اهداف آموزش ریاضی**؛ مجله رشد آموزش ریاضی، سال بیستم شماره ۷۲؛ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، تهران ۱۳۸۲؛ صفحه ۳۵ تا ۴۱
- ۲- کریمی، یوسف؛ **روانشناسی تربیتی**، انتشارات ارسباران، چاپ اول تهران ۱۳۸۰، صفحه ۱ و ۸ و ۱۲۳ تا ۱۳۴
- ۳- لفرانسو، گای آر؛ ترجمه هادی فرجامی؛ **روانشناسی برای معلمان**، شرکت به نشر؛ مشهد ۱۳۷۸، صفحه ۱۸ تا ۴۰
- ۴- میرلوحی، حسین؛ کلیات علم تدریس؛ دانشگاه شهید رجایی، چاپ دوم ۱۳۸۲؛ صفحه ۱ تا ۲۵
- ۵- میلر، دبلیو. آر. و میلر، ماری؛ ترجمه ویدا امیری؛ **راهنمای تدریس در دانشگاه‌ها**، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی (سمت)، چاپ اول تهران ۱۳۸۰، صفحه ۳ تا ۲۲

پرسش و پاسخ در نظر گرفته‌اند. در این صفحه، دبیران پرسش‌های خود را می‌نویسند که کمتر از ۵ درصد آن‌ها، در ارتباط با موضوع‌های تخصصی ریاضی مورد بحث است. این پرسش‌های بی‌پاسخ، فقط گاهی از سوی کاربران، پسند (لایک) می‌شود! بحث و گفت‌وگوهای مجازی و حضوری با همکاران، تا حدودی آشکار کرد که برخی از آنان حتی با سابقه تدریس بالا، در تدریس کتاب‌های نونگاشت، مشکل دارند. این ضعف‌ها، صرفاً با یک دوره مجازی قابل رفع نیست و عواقب آن در کلاس درس، گریبان معلم و دانش‌آموزان را می‌گیرد. واکنش همکاران در گروه‌های چند صد نفری تلگرامی^۵، گذشته از ضعف‌های اشاره شده، نشان از آن می‌داد که بسیاری از همکاران، حتی فیلم‌های آموزشی مؤلفان را نگاه نکرده‌اند. علاوه بر آن، بسیاری از معلمان از محدود افرادی که توانایی گذراندن آزمون مورد نظر را داشتند، درخواست می‌کردند که به جای آن‌ها امتحان دهند؟! برخی دیگر هم پیام تبلیغی می‌فرستادند که در قبال گرفتن ده‌ها و بلکه صدها هزار تومان، به جای آن‌ها آزمون را می‌گذرانند. با این وجود، در همان ساعت‌های اولیه روز آزمون، جواب‌ها در گروه قرار می‌گرفت و پس از آن، همکاران دیگر با توانمندی تخصصی محدود و کمترین زمان صرف شده، با نمره ۲۰ آزمون را با موفقیت کامل به پایان می‌بردند!

* هر کدام از موارد ذکر شده، یک فاجعه است. ولی شوربختانه، در جامعه امروزی ما، در حال تبدیل شدن به یک عرف شده است.



فکر کن توی این موقعیت هستی!

بین جواب درست؟!؟!!

محمد مهدی دُری

کارشناس ارشد آموزش ریاضی، دبیر دبیرستان شهیدین نوربخش بیرجند

چکیده

یکی از مشکلات شایع دانش آموزان در کلاس درس ریاضی، نادیده گرفتن واقعیت‌هاست. اغلب مردم مسائل مربوط به طبیعت، اجتماع، فرهنگ و زندگی روزمره یا مسائل مربوط به مدرسه و دانشگاه را جدا از ریاضی می‌دانند. اخیراً پژوهش‌های زیادی در سطح بین‌المللی، برای تبیین وضعیت عملکرد دانش‌آموزان پایه‌های مختلف در حل انواع مسائل کاربردی دنیای واقعی، انجام شده است. در این مقاله، با استفاده از چند مسئله، به این مهم پرداخته شده است.

کاپیتان، چوپان هم هست و چوپان‌ها کم سن‌اند، ولی ناخداها مسن!

کلید واژه‌ها: ریاضی و دنیای واقعی، مسائل کاربردی ریاضی

مقدمه

نادیده گرفتن «عقل سلیم» در حل مسائل ریاضی، یکی از حوزه‌هایی است که پژوهشگران با استفاده از آن، میزان توجه دانش‌آموزان را به واقعیت‌های دنیای واقعی، می‌سنجند. هاوسون^۱ ۱۹۸۶ عقل سلیم را روشی وابسته به فرهنگ معرفی می‌کند که در آن، حقایق و قراردادهای پذیرفته شده، در نظر گرفته شده‌اند. مفهوم عقل سلیم اشاره شده توسط هاوسون، با مسئله زیر، بهتر قابل درک است.

مسئله ۱: ۲۶ گوسفند و ۱۰ بز در یک کشتی وجود دارند. کاپیتان چند سال دارد؟ (به نقل از کریمیان‌زاده و رفیع‌پور، ۱۳۹۱)

مسئله‌ای که اکثر دانش‌آموزان به آن پاسخ عددی می‌دهند، بدون اینکه در مورد ارتباط داده‌های عددی و مجهول مسئله، توضیحی بدهند. در اینجا انتظار می‌رود که دانش‌آموز با بررسی داده‌ها و مجهول مسئله به جای آنکه دنبال محاسبات صریح با ارقام داده شده در صورت مسئله باشد، به این مطلب پی ببرد که سؤال پرسیده شده، اصولاً به داده‌ها مربوط نیست.

طرح انواع مسائل کلامی غیرمعمولی، روشی برای سنجش و کاربرد عقل سلیم در ریاضی است. پس از خواندن دو مقاله از کریمیان‌زاده و رفیع‌پور (۱۳۹۱) و فرامرزیور و رفیع‌پور (۱۳۹۲)، پیرامون پدیده نادیده گرفتن عقل سلیم توسط دانش‌آموزان، تصمیم گرفتم «مسئله سن کاپیتان» را در کلاس خود مطرح کنم و نتایج آن را بررسی نمایم. از این رو، در اولین جلسه سال تحصیلی جاری (۹۷-۱۳۹۶)، در هر سه کلاسی که تدریس داشتم، این مسئله را مطرح کردم و از دانش‌آموزان خواستم که جواب آن را، روی برگه کوچکی بنویسند. پاسخ‌های دانش‌آموزان، با آنچه که در دو مقاله ذکر شده، ارائه شده بود بسیار شباهت داشت.

نتایج اجرای این مسئله در سه پایه هفتم، به این قرار بود:

۴۵ نفر: پاسخ صرفاً عددی،

۹ نفر: پاسخ تفسیری و توضیحی،

۹ نفر: بدون پاسخ،

(تعداد کل = ۶۳ نفر)

دلیل به عقب برنگشتن دانش آموزان در حل این نوع مسائل چیست؟

وقتی در جمع همکاران هم‌رشته خود، در مورد جواب‌های عجیب و غریب دانش‌آموزان - حتی دانش‌آموزان خوب - بحث می‌کردم، همه اتفاق نظر داشتند که دانش‌آموزان جواب‌هایشان را کمتر با واقعیت‌ها مقابل می‌کنند. تعداد دانش‌آموزانی که جوابشان را با جمع و تفریق اعداد داده شده به دست آورده بودند، نگران‌کننده بود. کمتر کسی بود که فقط به نوشتن عددی به عنوان سن کاپیتان، اکتفا نکند و برای مسئله، توضیح و تفسیر نوشته باشد. تفسیرهای دانش‌آموزان در پاسخ به مسئله نیز، شک‌آلود و غیرممکن بود. فقط یک جواب با تفسیری کمی مطمئن‌تر ارائه شد:

دانش‌آموز: «کاپیتان، چوپان هم هست و چوپان‌ها کم‌سن‌اند ولی ناخداها مسن». پس از این، یک گفت‌وگوی کوتاه بین این دانش‌آموز و من انجام شد. معلم: وقتی به دانش‌آموز دیگری جوابتو بگی، فکر می‌کنی جمع کردن تعداد گاو و گوسفندها به عنوان جواب مسئله به نظرش مناسب بیاد؟ کمی فکر کن! دانش‌آموز: «آقا، چرا از اولش نگفتین! این مسئله اشکال داره!!» معلم: چرا؟! دانش‌آموز: «آقا! مسئله‌های توی کتابمون اینجوری نیست!»

واضح است که وقتی دانش‌آموزان، حقایق مسلم زندگی روزمره خود را در کلاس درس ریاضی نادیده می‌گیرند، دلیل کم‌هوش بودنشان نیست. آن‌ها یاد گرفته‌اند که در کلاس درس ریاضی، باید به دنبال پاسخ‌های قطعی و دقیق باشند. برای مثال، در فصل اول کتاب درسی ریاضی پایه هفتم، مسئله‌ای راجع به قورباغه‌ای است که می‌خواهد از دیوار بالا برود. این قورباغه عجیب و غریب، با هر بار جهش، ۳ متر از دیوار عمودی (!) بالا می‌رود و دقیقاً ۲ متر هم سر می‌خورد! با چنین تصویری غیرواقعی از «واقعیت»، چه انتظاری از این دانش‌آموزان داریم یا می‌توانیم داشته باشیم؟ دانش‌آموزانی که با نوعی از کتاب‌های درسی بزرگ شده‌اند که برای هر مسئله‌ای از آن‌ها، جواب‌های صرفاً عددی و غیرتفسیری می‌خواهد.

خواندن این دو مقاله، مرا به تکاپو انداخت تا با کنکاش در فهرست منابع آن‌ها، در مورد پدیده نادیده گرفتن عقل سلیم بیشتر مطالعه کنم. به نظر می‌رسید مسئله سن کاپیتان، بسیار شبیه به مسائل معمولی کتاب‌های درسی و نامرتبط با زندگی واقعی دانش‌آموز

است. مسئله فقط دو جمله دارد. در یک جمله داده‌هایی از موقعیت مسئله داده شده و در جمله بعد، از دانش‌آموز خواسته شده یک مجهول را از موقعیت مسئله بیرون بکشد. شاید اینکه دانش‌آموزان، عقل سلیم خود را در حل آن نادیده می‌گیرند، به آن دلیل است که هم مسئله شبیه به مسائل کتاب درسی است و هم موقعیت آن نامرتبط با زندگی روزمره دانش‌آموزان است. ما با کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌هایمان، دانش‌آموزان را طوری تربیت می‌کنیم که در مسائل ریاضی، واقعیت‌ها را کنار می‌گذارند. این رویکرد، جالب نیست که دانش‌آموزان را در شرایط کلاس درس، در چالشی شبیه به مسائل کتاب درسی‌شان قرار دهیم و بعد حل‌هایی را که ارائه می‌دهند، عجیب بدانیم! زیرا این نتایج عجیب نیستند و متناسب با آموزشی است که به دانش‌آموزان، عرضه شده است و بدین سبب، سرزنش دانش‌آموزان یا معلم‌هایشان، عجیب است. دانش‌آموزان آنقدرها هم که عده‌ای تصور می‌کنند، ناتوان نیستند. شاید اگر از آن‌ها بخواهیم خود را در موقعیتی نزدیک به خود فرض کنند و از آن‌ها بخواهیم که به زبان خودشان راجع به آن مسئله بنویسند، نتایج متفاوتی به دست آوریم.

مسئله ۲: فرض کنید سوار بر اتوبوس بیرجند-خوسف هستید. این اتوبوس ۲۶ مرد و ۱۰ زن، مسافر دارد. فکر می‌کنید سن راننده اتوبوس چقدر است؟ مسئله فوق با همان هدف مسئله ۱، یعنی ارزیابی میزان نادیده گرفتن عقل سلیم طراحی شده است؛ اما زمینه‌های^۲ دو مسئله، با هم متفاوت‌اند. مسئله اول با آوردن کلماتی شبیه کشتی، بز، گاو، کاپیتان و سپس، پرسیدن سؤالی در مورد یک مجهول بی‌ارتباط با داده‌های مسئله، دانش‌آموز را در یک چالش غیرمرتبط با زندگی واقعی‌اش قرار می‌دهد. زبان مسئله با آنچه دانش‌آموز در زندگی واقعی با آن سر و کار دارد متفاوت است و بیشتر شبیه زبان کتاب‌های درسی است. این در حالی است هدف مسئله، سنجش میزان نادیده گرفتن «واقعیت» است. مسئله دوم، با تغییر کلمات به کار رفته موقعیت مسئله اول را به یک موقعیت آشنا تر تبدیل کرده و سپس مجهولی شبیه به مجهول مسئله قبل، ارائه می‌کند. یک تفاوت دیگر مسئله آن است که از دانش‌آموزان خواسته تا خود را در موقعیت مسئله قرار دهند. همچنین مسئله دوم، طولانی‌تر از مسئله اول است و توضیح بیشتری برای دانش‌آموزان، فراهم می‌کند. نتایج اجرای مسئله دوم در سه کلاس دیگر از همان پایه هفتم ولی در مدرسه‌ای دیگر، به شرح زیر بود:

۳۳ نفر: پاسخ صرفاً عددی،

۲۷ نفر: پاسخ تفسیری و توضیحی،

۶ نفر: بدون پاسخ

(تعداد کل = ۶۶ نفر)

رشد تعداد پاسخ‌های تفسیری در این مسئله، کاملاً مشهود بود (رشد از ۱۵٪ به ۴۰٪). جالب اینجاست که دانش‌آموزان در مسئله دوم، ضمن درک مضمون «بی‌ارتباط بودن» داده‌های مسئله به مجهول خواسته شده، اطمینان بیشتری برای دلایل خودشان داشتند:

دانش‌آموز: «سن راننده ربطی ندارد.»

دانش‌آموز: «مسئله اشتباه است.»

دانش‌آموز: «راننده‌های خط بیرجند- خوسف چند نفر هستند. بعضی از آن‌ها را نمی‌شناسم و سن آن‌ها را نمی‌دانم.»

برخلاف مسئله دوم، اکثر تفسیرهای مسئله اول، شک‌آلود و غیرممکن بود. این تفاوت در نتایج، دلایلی بر لزوم تجدید نظر در یافته‌های تحقیقاتی است که از این مسائل استفاده می‌کنند. یک سؤال جدی که مطرح است این است که در کلاس درس ریاضی، با دانش‌آموزان چه کرده‌ایم که بیش از نیمی از آن‌ها، نمی‌توانند به عقل سلیم خود اطمینان کنند همچنین، شاید عوامل دیگری هم تأثیرگذار باشند ... (مثلاً اگر سؤال در خانه و توسط شخصی غیر از معلم ریاضی پرسیده شود، یا اینکه وقتی دانش‌آموزان در اتوبوس مدرسه هستند، طرح شود، شاید نتایج متفاوتی به دست آید.)

«آقا مسئله‌های توی کتابمون اینجوری نیست!»

شاید این قابل تأمل‌ترین نظری بود که از دانش‌آموزانم در اجرای «مسئله سن کاپیتان» و نسخه اصلاح شده آن «سن راننده اتوبوس» شنیدم. وقتی به تجربه تدریس در کلاس درس رجوع می‌کنم، می‌بینم جملاتی مانند «خودت فکر کن! - توی موقعیت هستی - حالا این جواب درسته؟» در متوجه کردن دانش‌آموز خیلی تأثیر می‌گذارد.

اگر از دانش‌آموزان انتظار داریم که از ریاضی کلاس درس، در دنیای واقعی استفاده کنند، باید مثال‌هایی از دنیای واقعی برایشان بیاوریم، نه مثال‌هایی غیرواقعی. توقع استفاده از عقل سلیم در مسائل غیرواقعی کتاب‌های درسی، انتظار روییدن مو در کف دست است! تا زمانی که دانش‌آموزان مجبور به خواندن این گونه کتاب‌های درسی و دادن امتحاناتی با این نوع مسائل هستند، دیدن این مشکلات در کلاس‌های درس ریاضی، عجیب نخواهد بود. یادگیری غیرمعنادار که نتیجه تدریس هایمان است، باعث یادگرفتن قوانینی «از آسمان آمده» شده که فرصت

به عقب بازگشتن را از دانش‌آموزان گرفته و غیرمستقیم در ذهن آن‌ها ایجاد بدفهمی می‌کند. بعضی مسائل قبل از اینکه از دانش‌آموزان تفکر بخواهد، آن‌ها را درگیر بازی با کلمات می‌کند. بازی‌های از پیش طراحی شده‌ای که دانش‌آموزان، حل آن‌ها را قبلاً دیده‌اند و تنها به آن‌ها برچسب می‌زنند یا حل‌های قبلی را تکرار می‌کنند.

پیشنهادهایی برای بهبود عملکرد دانش‌آموزان

در ادامه مواردی را به صورت خلاصه ذکر می‌کنم که از مطالعه چند مقاله مرتبط با موضوع «نادیده گرفتن عقل سلیم در کلاس درس ریاضی» یادداشت‌برداری کرده‌ام. این موارد برای همکاران علاقمند به این موضوع می‌تواند، مسیری را برای پژوهش‌های بعدی هموار کند.

- اصالت بیشتر و ملموس‌تر بودن صورت مسئله
- در موقعیت قرار دادن دانش‌آموز (با کلام)
- ارائه شفاف آنچه که از دانش‌آموز انتظار می‌رود.
- داربست زدن (شامل کمک هم‌سال برای حل یک نمونه مسئله مشابه + اشاره معلم به در نظر گرفتن موقعیت مسئله)

- حل یک نمونه مسئله توسط معلم (البته به نحوی که حل بقیه مسائل، تبدیل به تمرین و تکرار نشود)
- در موقعیت قرار دادن دانش‌آموزان (شبیه‌سازی فیزیکی مسئله در داخل یا خارج کلاس)
- کنکاش در مورد نظر دانش‌آموزانی که به مسئله پاسخ نوشتنی نمی‌دهند. (از طریق مصاحبه)

احساس می‌کنم خواندن این مقالات به من فرصتی داد که بعد از چند سال که از پشت میز و نیمکت نشستیم در کلاس درس می‌گذرد، به گذشته‌ها برگردم و یافته‌هایم را در مورد طرز تفکر کودکان در حل مسائل کامل‌تر کنم. حسن ختام این چند سطر، بیتی از مرحوم دکتر افشین یداللهی است:

گاهی همان کسی که دم از عقل می‌زند

در راه هوشیاری خود مست می‌رود!

پی‌نوشت

1. Howson
2. Context

منبع

هاوسون، جفری (۱۹۹۸)، ریاضیات و عقل سلیم. ارائه شده در هشتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی، سویل، اسپانیا. ترجمه زهرا گویا (۱۳۷۸).
مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۸.
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.



حل چند تمرین از فصل ۴ هندسه پایه دهم به کمک

نرم افزار جئوجبرا

- **مریم مؤمن زاده**، دبیر ریاضی فرزنانگان امین (۱) اصفهان
- **فرنیا اشراقی**، معاون فناوری فرزنانگان امین (۱) اصفهان
- **الهام شیخان**، دبیر ریاضی فرزنانگان امین (۳) اصفهان
- **منصوره عباد**، دبیر ریاضی ناحیه (۳) اصفهان

اشاره

در این مقاله، به طور مبسوط (۸ صفحه)، به آموزش جئوجبرا پرداخته شده بود که از نویسندگان محترم آن تشکر می‌کنم. ولی به توصیه داوران، با توجه به مقاله‌های متعددی که قبلاً در این مورد، در همین مجله به چاپ رسیده است، این قسمت به نویسندگان بازگردانده شد تا در جای دیگری از آن استفاده کنند. با اجازه ایشان، قسمت دوم که به طور مشخص، مربوط به حل چند تمرین از فصل ۴ هندسه پایه دهم به کمک جئوجبرا است، چاپ می‌شود تا همکاران محترم، از آن بهره گیرند.

سردبیر

چکیده

آموزش هندسه و ایجاد جذابیت و علاقه در دانش‌آموزان، یکی از دغدغه‌های معلمان ریاضی است. درس هندسه هنگامی برای دانش‌آموزان جذاب خواهد شد که آن‌ها بتوانند در حل مسائل از روش‌های متفاوت استفاده کنند و معلم نیز باید فضا را برای ارائه تکنیک‌های متنوع آماده کند. در این راستا، معلمان می‌توانند نرم‌افزارهای مناسب را با درس هندسه تلفیق کنند تا محتوا را برای دانش‌آموزان، جذاب‌تر نموده و یادگیری هندسه را برایشان تسهیل کنند.

یکی از اهداف کلی در تنظیم فصل چهارم هندسه دهم ریاضی، تقویت تفکر تجسمی و مدل‌سازی هندسی در حل مسائل است. آموزش مبحث دَوَران از این فصل و تجسم فضایی شکل‌های حاصل از دَوَران بدون بهره‌گیری از تکنولوژی در مواقعی سخت و غیرقابل شهود است.

کلید واژه‌ها: نرم‌افزار، هندسه دهم، دوران

مقدمه

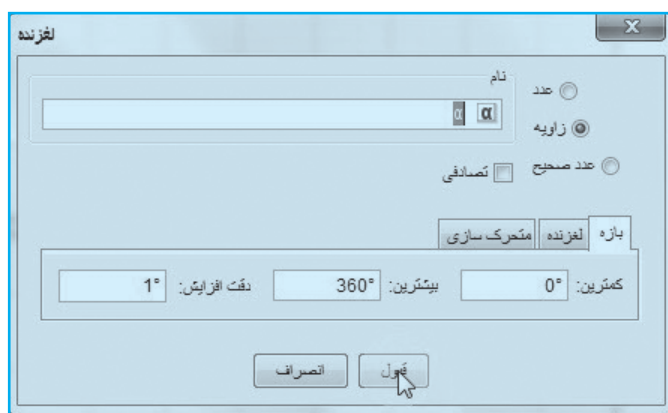
برای تدریس فصل چهارم هندسه پایه دهم (چاپ ۱۳۹۶) از جئوجبرا به‌عنوان نرم‌افزاری مناسب برای تلفیق آن با مباحث دَوَران، استفاده شد. فعالیت‌های زیر همگی با نرم‌افزار جئوجبرا انجام شده است.

فعالیت (۱)

از منوی بالای صفحه، نما را انتخاب می‌کنیم و سپس گزینه نمای سه بعدی را فعال می‌کنیم. با این روش سه فضای «عبارت‌های جبری» و «صفحه ترسیم» و «نمای سه بعدی» را همزمان در اختیار داریم، شکل (۱). صفحه کار جئوجبرا شامل یک پنجره گرافیکی و یک پنجره جبری است.



شکل (۱)



شکل (۲)

با قرار دادن اشاره گر ماوس بر روی مرز بین فضاها و مشاهده \leftrightarrow و درگ کردن ماوس می‌توانیم محدوده فضاها را کم یا زیاد کنیم.

فرض کنید پاره خطی بر خطی عمود است. از دوران پاره خط حول خط چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ (صفحه ۹۵ کتاب هندسه دهم)

۱. در فضای «ترسیم» کلیک کنید تا نوار ابزار مخصوص این فضا ظاهر شود. سپس گزینه «لغزنده» را انتخاب می‌نمائیم. در پنجره ظاهر شده حالت زاویه را انتخاب کرده و با پیش فرض 360° تا 0° درجه دکمه قبول را کلیک می‌کنیم.

شکل (۲)

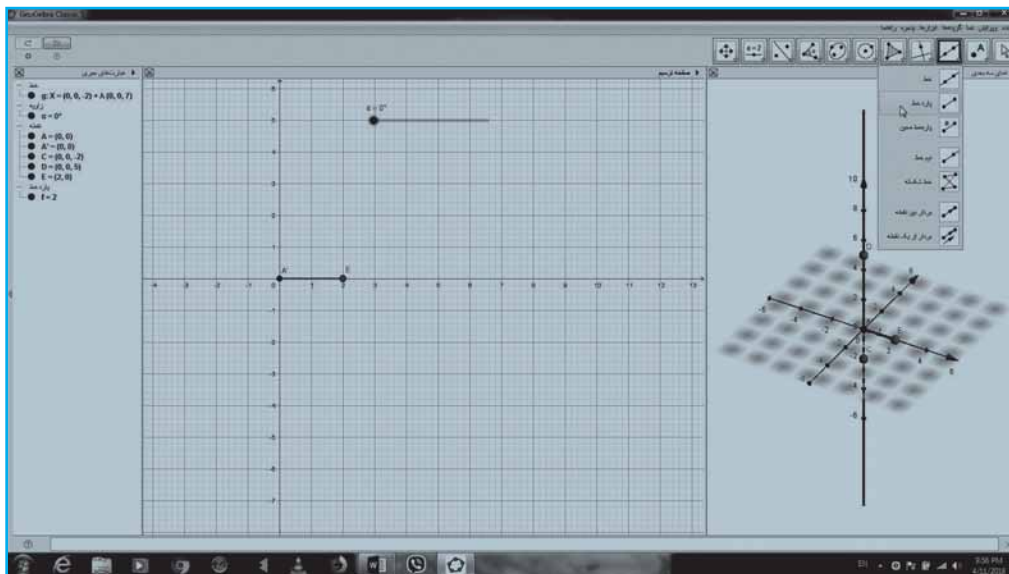
۲. در قسمت نمای «سه بعدی» کلیک نموده تا نوار ابزار مخصوص این فضا ظاهر شود. از نوار ابزار، گزینه «خط» را انتخاب می‌کنیم. خط مورد نظر را با انتخاب دو نقطه از محور z رسم می‌نمائیم. شکل (۳)

۳. حال از همان نوار ابزار، گزینه «پاره خط» را انتخاب کرده و پاره خط مورد نظر را از نقطه $(0, 0)$ تا یک نقطه دلخواه روی محور x ها (یا y ها) رسم می‌کنیم.

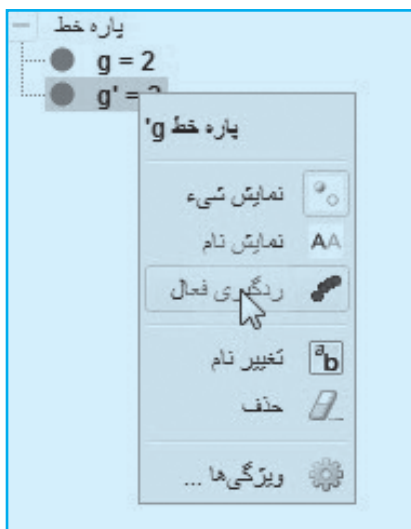
در قسمت عبارت‌های جبری پاره خطی مانند g ساخته می‌شود.

۴. از نوار ابزار «فضای سه بعدی» گزینه «چرخاندن شیء حول خط» را انتخاب می‌کنیم. سپس ابتدا پاره خط (شیئی که می‌خواهیم دوران دهیم) و بعد از آن محور z (محور دوران) را انتخاب می‌کنیم. شکل (۴)

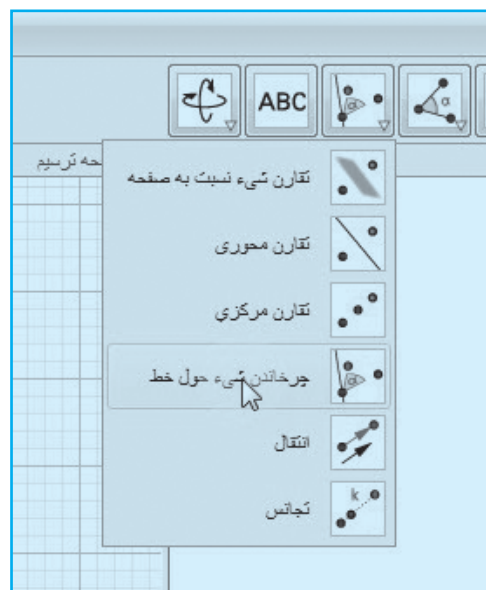
در اینجا یک پنجره برای تعیین زاویه دوران با پیش فرض 45° درجه باز می‌شود. در قسمت 45°



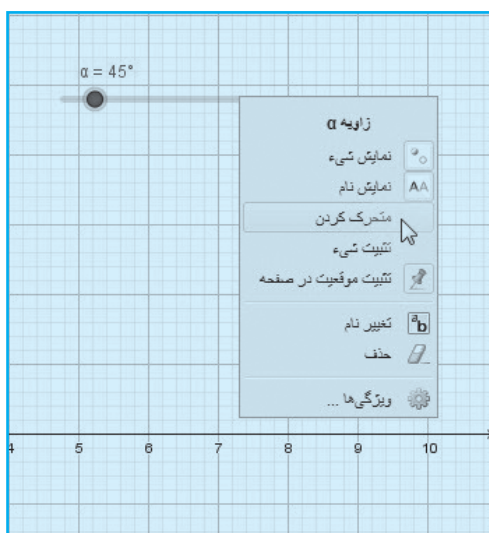
شکل (۳)



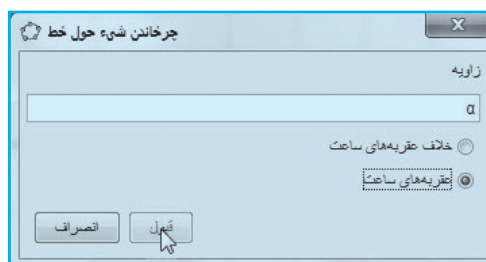
شکل (۴)



شکل (۵)

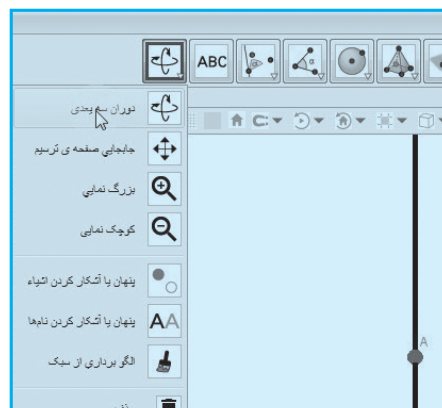
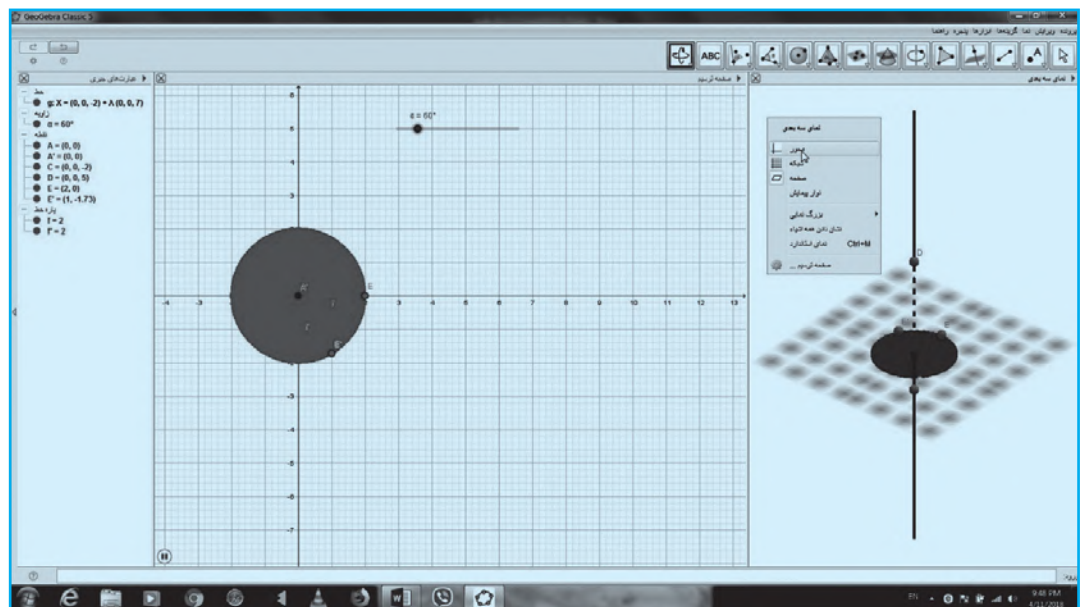
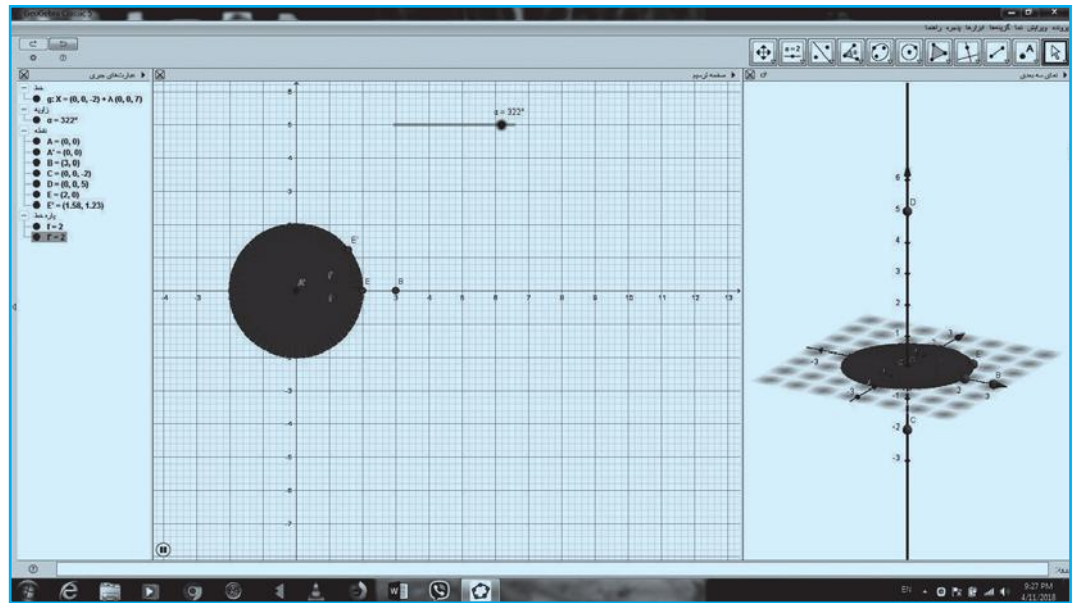


شکل (۶)



شکل (۷)

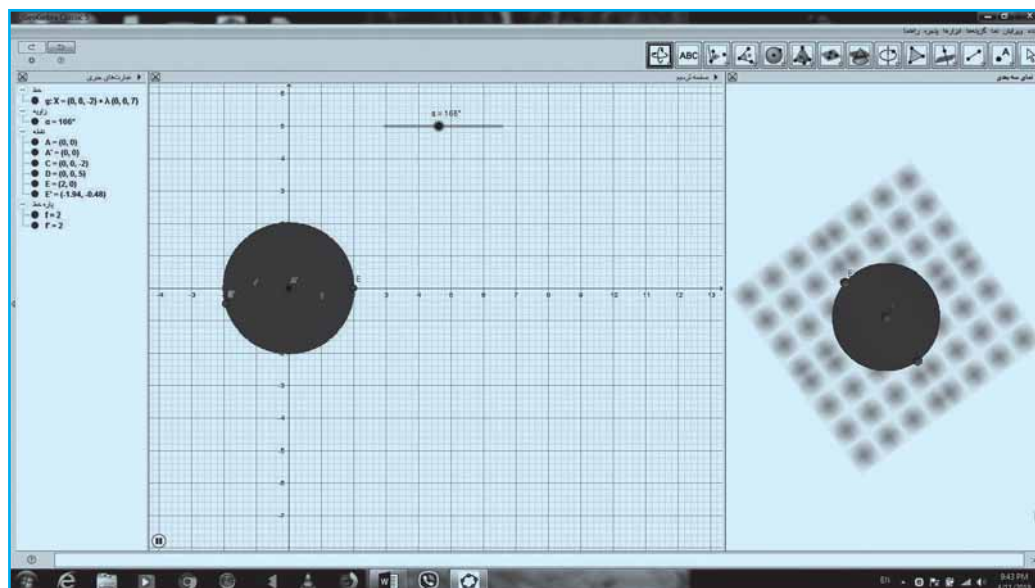
درجه آن را به α نام لغزنده‌ای که ساختیم، تغییر می‌دهیم و دکمه قبول را انتخاب می‌کنیم. شکل (۵) در قسمت «عبارت‌های جبری» پاره‌خطی به نام g' ساخته می‌شود. بر روی g' راست کلیک کرده و «رنگبری فعال» را انتخاب می‌کنیم. شکل (۶)



۵. در «فضای ترسیم» روی لغزنده α راست کلیک کرده (شکل ۷) و گزینه «متحرک کردن» را انتخاب می‌کنیم (شکل ۸).

۶. می‌توانیم در فضای خالی از «نمای سه بعدی» راست کلیک کرده، محورها و صفحه‌ی اضافی را به‌صورت پنهان در آوریم تا تصویر اصلی بهتر دیده شود. (شکل ۹)

۷. همچنین می‌توانیم با انتخاب «دوران سه بعدی» از نوار ابزار «فضای سه بعدی» (شکل ۱۰) و انتخاب شکل رسم شده و حرکت دادن آن، شکل رسم شده را در زوایای مختلف ببینیم. (شکل ۱۱)



شکل (۱۱)

فعالیت (۲)

دوران دایره، حول یکی از قطرهایش (صفحه ۹۵ کتاب هندسه دهم)

از منوی پرونده، یک صفحه جدید باز می‌کنیم و مرحله (۱) و (۲) را مانند فعالیت قبل تکرار می‌کنیم. در ادامه:

(۳) از نوار ابزار، گزینه «دایره گذرنده از سه نقطه» را انتخاب می‌کنیم و با انتخاب نقطه‌های $(0, 0, 1)$ ، $(0, 0, -1)$ ، یک دایره رسم می‌کنیم.

(۴) بقیه مراحل مانند فعالیت قبل است. با ذکر این مطلب که شیء مورد دوران، دایره است. (شکل ۱۲)

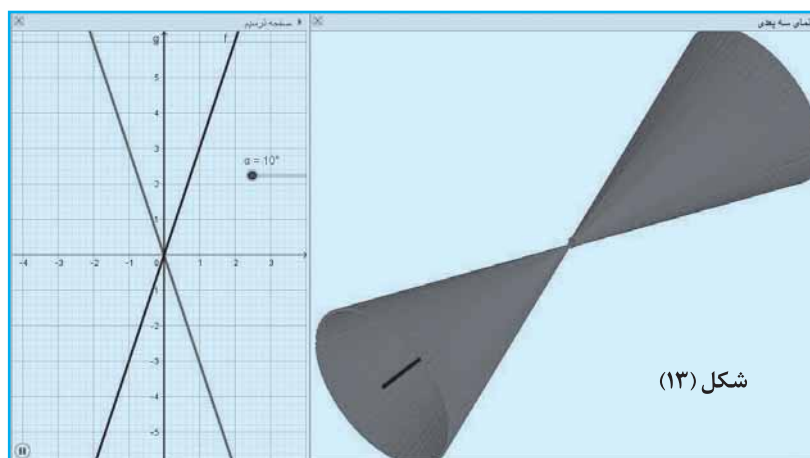


شکل (۱۲)

فعالیت (۳)

دوران دو خط متقاطع یکی حول دیگری (تمرین (۱) صفحه ۹۶ کتاب هندسه دهم)

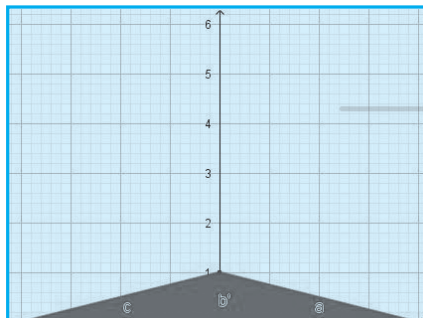
۱. مرحله (۱) از فعالیت (۱) را انجام می‌دهیم.
۲. در فضای ترسیم، از نوار ابزار گزینه «خط» را انتخاب می‌کنیم و دو خط متقاطع ترسیم می‌کنیم.
۳. در فضای «سه بعدی»، از نوار ابزار گزینه «چرخاندن شیء حول خط» را انتخاب می‌کنیم.
۴. بقیه مراحل مانند فعالیت‌های قبل است، با این تفاوت که یکی از این دو خط، شیء مورد دوران و دیگری محور دوران است. (شکل ۱۳)



شکل (۱۳)

فعالیت (۴)

دوران یک مثلث متساوی الساقین حول
قاعده آن (تمرین (۲) صفحه ۹۶ کتاب هندسه
دهم)



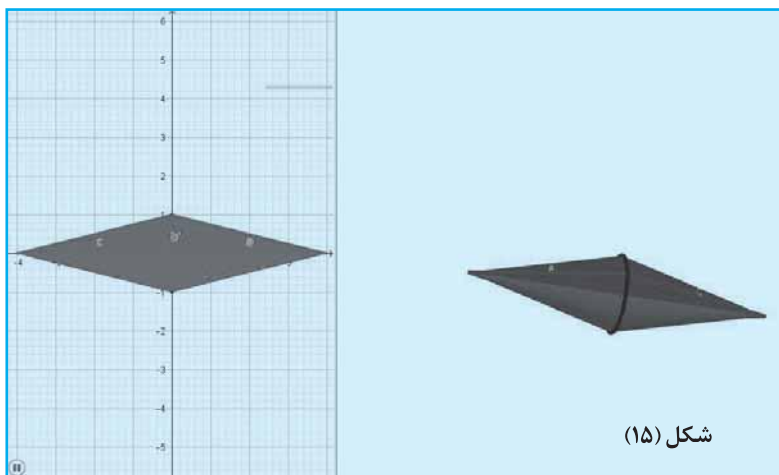
شکل (۱۴)

- مانند مرحله (۱) از فعالیت (۱)
- در «فضای ترسیم»، از نوار ابزار گزینه «چند ضلعی» را انتخاب می‌کنیم و یک مثلث متساوی الساقین که قاعده آن روی محور x باشد رسم می‌کنیم. (شکل ۱۴)
- بقیه مراحل مانند فعالیت‌های قبل است، با ذکر این نکته که شیء مورد دوران، مثلث متساوی الساقین است و محور دوران، محور x هاست. (شکل ۱۵)

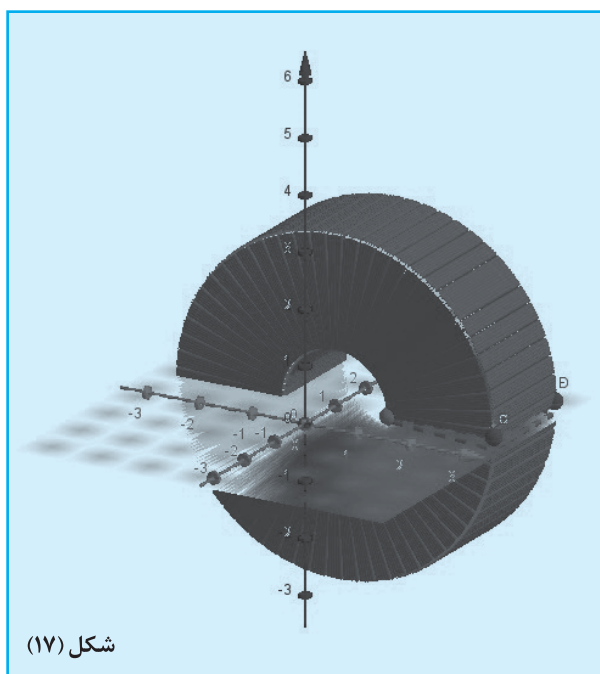
فعالیت (۵)

تمرین (۳) صفحه ۹۵ کتاب هندسه دهم

- مانند مرحله (۱) از فعالیت (۱)
- در «فضای ترسیم»، از نوار ابزار گزینه «چندضلعی» را انتخاب می‌کنیم و یک مربع به ضلع ۲ واحد در فاصله ۱ سانتی‌متر از محور y را رسم می‌کنیم. بقیه مراحل، مانند فعالیت‌های قبل است (شکل ۱۶)، با ذکر این نکته که شیء مورد دوران مربع و محور y هاست. (شکل ۱۷)

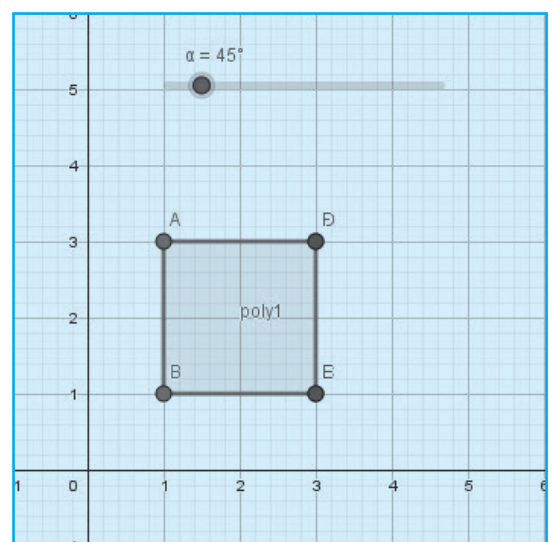


شکل (۱۵)



شکل (۱۷)

شکل (۱۶)





تدریس مفهوم کسر و کسره‌های مساوی

با ابزار آموزشی

رقیه رزمی، آموزگار دبستان دخترانه شهدای پتروشیمی جم، بوشهر، ایران
مینا شادکام، مؤسس و مدرس آموزشگاه آزاد رادیکال آبیخش، بوشهر، ایران

اشاره

یکی از دشوارترین مفاهیم ریاضیات مدرسه‌ای در همه سطوح تحصیلی مفهوم کسر است. در این مقاله، سعی شده است برای فهم و درک عمیق‌تر این مفهوم ابتدا نکته‌های کلیدی مشخص شوند تا با تأکید بر آن‌ها، کار آموزش کسر، مؤثرتر گردد. به این منظور ما در این مقاله، یک بازی ساده و جذاب آموزشی را معرفی کرده‌ایم تا دانش‌آموزان، مفهوم کسره‌های مساوی را عمیق‌تر یاد بگیرند. ابزاری که در این بازی به کار برده‌ایم، استفاده از تا کردن کاغذ و نوارهای شفاف است.

کلیدواژه‌ها: کسر متعارفی، کسره‌های مساوی، صورت، مخرج.

تجربه معلمی نویسندگان نشان می‌دهد که یکی از بهترین راه‌های آموزش مفهوم کسر در دوره ابتدایی، استفاده از وسایل کمک آموزشی به‌ویژه پازل‌ها (جورچین‌ها) یا اشکال هندسی ساده است؛ اشکالی که قابلیت تقسیم شدن به اجزای کوچک‌تر مساوی را داشته باشند.

درک کسره‌های مساوی

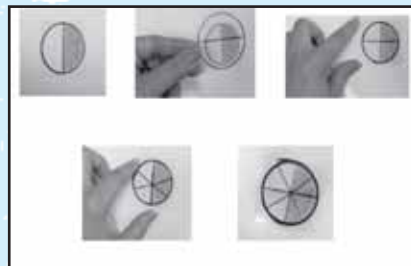
عملکرد پایین دانش‌آموزان ایران در آزمون‌های ملی و بین‌المللی ریاضی، نشانگر این واقعیت است که در رویکردهای آموزشی فعلی، دانش‌آموزان مهارت یادگرفتن مفاهیم ریاضی را به خوبی کسب نکرده‌اند؛ به‌ویژه از اعداد اعشاری و کسری درک درستی ندارند و نمی‌توانند آن‌ها را به خوبی در وضعیت‌های حل مسئله (مسائل کلامی و مسائل در زمینه دنیای واقعی) به کار گیرند. مشاهده نویسندگان از مشکلاتی که اغلب دانش‌آموزان در زمینه یادگیری و درک کسرها دارند، و همچنین توجه به اینکه تسلط دانش‌آموزان ابتدایی بر مفاهیم کسر و درک مفهومی آن‌ها برای موفقیت‌شان در سطوح بالاتر یادگیری ریاضی، اساسی و مهم است، ما را بر آن داشت که در این خصوص، تجربه خود را در زمینه آموزش کسر و کسره‌های مساوی با استفاده از ابزار کمک آموزشی، با همکاران خود، به اشتراک بگذاریم.

روش اول: استفاده از تای کاغذی در آموزش مفهوم کسر، شیوه‌ای مفرح و هیجان‌انگیز است. به‌عنوان معلم، شما می‌توانید در کلاس درس خود از اریگامی برای نشان دادن مفهوم $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، و ... به‌خوبی استفاده کنید. هر تای کاغذ می‌تواند به دانش‌آموزان در درک مفهوم کسر و تقسیم یک خانه به دو یا چند قسمت مساوی، کمک کند. با استفاده از تای کاغذی و اریگامی، دانش‌آموزان می‌توانند یک کاغذ را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم کنند و با باز کردن هر کدام از تاهای کاغذ، روند کسر را معکوس کنند. بعد از این فرایند، دانش‌آموزان متوجه شدند برای اینکه کسرهای مساوی تولید کنند، باید خطوط بیشتری به شکل اولیه اضافه شوند. با استفاده از ابزار دوم، فرایند اضافه شدن خطوط را نشان می‌دهیم (تصویر ۱).



تصویر ۱: پیدا کردن کسرهای مساوی با تا کردن کاغذ

روش دوم: ساخت ابزاری با نوارهای شفاف است در این روش، انواع شکل‌ها و تقسیم‌بندی‌ها در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد. ابتدا چون تازدن را روی کاغذ مستطیلی کار کردیم، شکل‌های مستطیلی را در اختیار آن‌ها قرار می‌دهیم تا با تطبیق کاغذ تا شده با شکل‌ها، به چالش کشیده شوند که چگونه می‌توان با ابزار پیش رو، به کسری دیگر که مساوی کسر قبل است، دست یابند. (تصویرهای ۲ و ۳).



تصویر ۲: مراحل یافتن کسرهای مساوی $\frac{1}{3}$



تصویر ۳: مراحل یافتن کسرهای مساوی $\frac{1}{3}$

جمع‌بندی

در پایان، استدلال‌های دانش‌آموزان را مورد بررسی قرار می‌دهیم تا به جمع‌بندی نهایی برسیم و روش اصلی جهت استفاده از این ابزار و تولید کسرهای مساوی را با همراهی خود دانش‌آموزان، انجام دهیم.

تجربه انجام این کار در کلاس، قابل تأمل بود. از آن پس، پیدا کردن کسرهای مساوی برای دانش‌آموزان، همچون یک بازی بود و ترسی از عدم درک مسئله نداشتند و می‌دانستند در این فرایند، ماهیت اصلی کسر تغییری نمی‌کند.

دو جشنواره و دو همایش در دانشگاه فرهنگیان

مانی رضائی
دکترای آموزش ریاضی

اشاره

دانشگاه فرهنگیان در اقدامی فراگیر چندین گردهمایی برای دانشجویان خود و معلمان با عنوان‌های جشنواره و همایش برگزار کرد. عنوان چهار گردهمایی برای دوره ابتدایی و متوسطه به ترتیب «جشنواره تجربیات برتر آموزش ریاضی ابتدایی»، «همایش کشوری محتوای آموزش ریاضی ابتدایی»، «جشنواره تجربیات برتر آموزشی تربیتی در آموزش ریاضی» و «همایش کشوری محتوای آموزش ریاضی» بودند که در شهرهای بندرعباس، سمنان، کرمان، و تبریز برگزار شدند. هر یک از گردهمایی‌ها، هم در نوع برنامه و هم تعداد شرکت‌کنندگان تنوع زیادی داشتند.

در معرفی این گردهمایی‌ها که با حمایت معاونت پژوهشی سازمان مرکزی دانشگاه فرهنگیان برگزار شد در سایت این دانشگاه آمده است: «عمل معلمی برای معلمانی که به آن به منزله فرصتی برای اعتلای آموزش و رشد شخصی نظر می‌کنند، سرشار از تجربه‌های نادری است که آگاهی از آن برای هر فراگیر دو خاصیت دارد: اول آشنایی با تجربه خاص و دوم کسب انگیزه و اعتماد برای عمل خلاقانه در موقعیت‌های واقعی تربیت. در عین حال، تجربه‌های خاص دربردارنده دانش‌هایی مفید هستند که در قالب‌های معمول «دانش رشته‌ای» و «دانش تربیتی» وارد نشده‌اند اما «کارآمدی موقعیتی» داشته‌اند. برگزاری جشنواره‌های تجربیات برتر، فرصتی برای ارائه، ثبت و سازماندهی تجارب ارزشمند اساتید و معلمان در آموزش رشته تخصصی فراهم می‌کند.



اهداف همایش رشته‌های تخصصی نیز چنین معرفی شده است:

۱. ایجاد فرصت برای نظروزی و تعامل علمی میان صاحب‌نظران و به اشتراک‌گذاری دانش آموزش محتوا در رشته (ریاضی)
۲. ایجاد فرصت برای تأمین و تولید دانش آموزش محتوا در رشته
۳. زمینه‌سازی برای جلب توجه جامعه علمی به ضرورت تولید و اشاعه دانش آموزش محتوا در رشته

جشنواره تجربیات برتر آموزشی تربیتی در آموزش ریاضی (۵ اسفند ۱۳۹۶ - کرمان)

این همایش در پردیس شهید باهنر دانشگاه فرهنگیان کرمان برگزار شد. در این برنامه، پس از افتتاحیه جشنواره، دو سخنرانی عمومی توسط دکتر مانی رضائی، و پروفسور مهدی رجبعلی پور ارائه شد. تا پایان برنامه، در هشت سخنرانی نیم ساعته سخنرانان منتخب، به ارائه تجربیات آموزشی خود اقدام نمودند. در حاشیه این برنامه، کارگاه‌های عملی از فعالیت معلمان و خانه ریاضیات کرمان برگزار شد. این جشنواره با اهدای لوح به سه تجربه ارائه شده برتر در عصر همان روز به پایان رسید.

همایش کشوری دانش موضوعی - تربیتی آموزش ریاضی در ابتدایی (۲ اسفند ۱۳۹۶ - سمنان)

در این همایش که در پردیس الزهرا برگزار شد ۱۷ مقاله و ۳۴ پوستر ارائه شد، همچنین دو کارگاه توسط مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی آقای خسرو داودی برای سه پایه اول ابتدایی و دکتر ابراهیم ریحانی برای سه پایه دوم ابتدایی برگزار شد.

همایش کشوری محتوای آموزش ریاضی (۶ اسفند ۱۳۹۶ - تبریز)

همایش آموزش ریاضی در پردیس علامه امینی دانشگاه فرهنگیان تبریز برگزار شد. در ادامه افتتاحیه برنامه سخنرانی عمومی دکتر زهرا گویا با عنوان «دانش ریاضی لازم برای معلمان ریاضی» ارائه شد. سپس دکتر محمد جهانشاهی سخنرانی خود را با عنوان «راهبردهای تدریس مؤثر در موضوع تابع از دیدگاه کاربردی و صنعت» ارائه کرد. در ادامه برنامه، سخنرانی مقاله‌های داوری شده در شش گروه هر یک چهار سخنرانی ارائه شد. برنامه بعد از ظهر با سخنرانی عمومی دکتر مانی رضائی با عنوان «بهترین روش تدریس کدام است؟!» آغاز شد. سپس در سه گروه هر یک دو سخنرانی ارائه شد.

همچنین به صورت موازی سخنرانی‌ها، ۲۶ مقاله به صورت پوستر ارائه شد. در مراسم پایانی، از سخنرانان عمومی تقدیر به عمل آمد.



۴. ایجاد فرصت برای رشد و بالندگی حرفه‌ای مدرسان و اعضای هیأت علمی در زمینه آموزش محتوا در رشته

جشنواره تجربیات برتر آموزش ریاضی ابتدایی (۱۴ اسفند ۱۳۹۶ - بندرعباس)

سخنرانان مدعو این جشنواره دکتر زهرا گویا و دکتر مانی رضائی بودند. به علاوه دو سخنرانی به عنوان ارائه شفاهی انتخاب شده بود که هر یک در ۳۰ دقیقه ارائه شدند. پیش از ظهر نیز میزگرد گفتگوی معلمان با دکتر گویا و دکتر رضائی برگزار شد که با طرح سؤال توسط حاضران، موضوع آموزش ریاضی ابتدایی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در برنامه بعد از ظهر دو کارگاه، یکی توسط دکتر مانی رضائی با عنوان «هندسه احجام» و دیگری توسط مهندس منوچهر عسکری با عنوان «حل مسئله» به صورت موازی ارائه شد.

همچنین ۴۴ مقاله به صورت پوستر در این جشنواره ارائه شد. در مراسم پایانی جشنواره جوایزی به تجربه‌های برگزیده اعطا شد.

طراحی و رسم

توابع ریاضی و اشکال هندسی

به کمک نرم افزار

(معرفی دو نرم افزار کاربردی ریاضی)
(رسم اشکال هندسی و نوشتن فرمول های متنوع ریاضی)

مصطفی سپهر ابلو

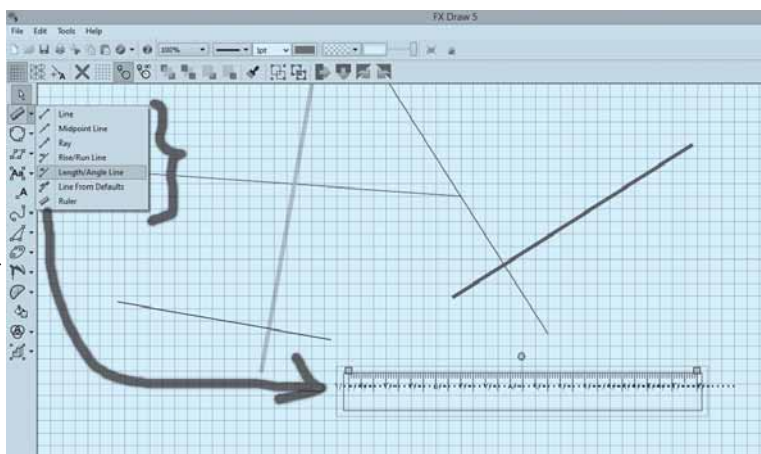
دبیر علوم تجربی متوسطه اول پیرتاج، شهرستان بیجار

اشاره

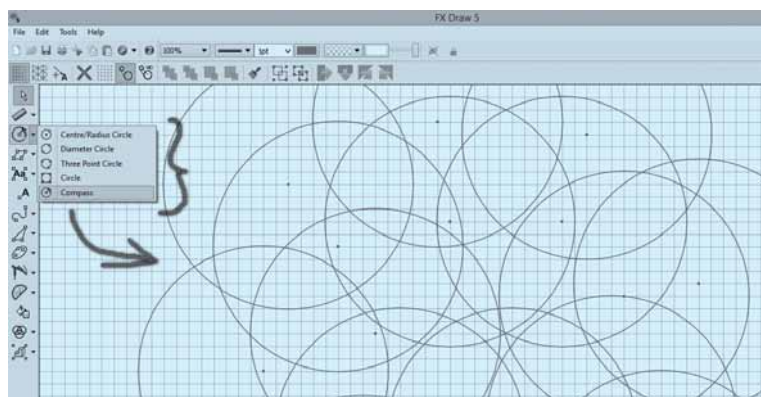
ریاضیات و کاربردهای آن، بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه های مختلف به شمار می آید که دارای کاربردهای وسیعی در فعالیت های متنوع انسانی است. توانایی به کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می باشد. (سند برنامه درسی ملی، ص ۳۳) و فناوری در ریاضی و کاربردهای آن (حسابگرها و رایانه ها، نرم افزارهای رایانه ای) از نکات مورد تأکید در استفاده از فناوری های نوین در ریاضیات است (همان، ۳۴) و باتوجه به اهمیت نرم افزارهای آموزشی و با عنایت به مبانی سند تحول بنیادین از جمله راهبرد کلان بهره مندی هوشمندانه از فناوری های نوین در نظام تعلیم و تربیت رسمی عمومی مبتنی بر نظام معیار اسلامی (هدف های کلان ۳، ۲، ۱، ۵، ۷)، در این مقاله به معرفی دو نرم افزار مفید و کاربردی ریاضی یعنی «Efofex FX Draw»- که برای طراحی و رسم اشکال هندسی- و دیگری نرم افزار «Math type» برای نوشتن و ویرایش علائم و نمادها و فرمول های ریاضی- پرداخته می شود. هریک از این نرم افزارها دارای امکانات و ابزارهای متنوعی هستند که در رسم و طراحی اشکال هندسی به کمک معلم و دانش آموزان می آیند و آموزش مفاهیم ریاضی را جذاب تر می کنند.

کلید واژه ها: نرم افزار ریاضی، طراحی و رسم اشکال هندسی، علائم و فرمول های ریاضی

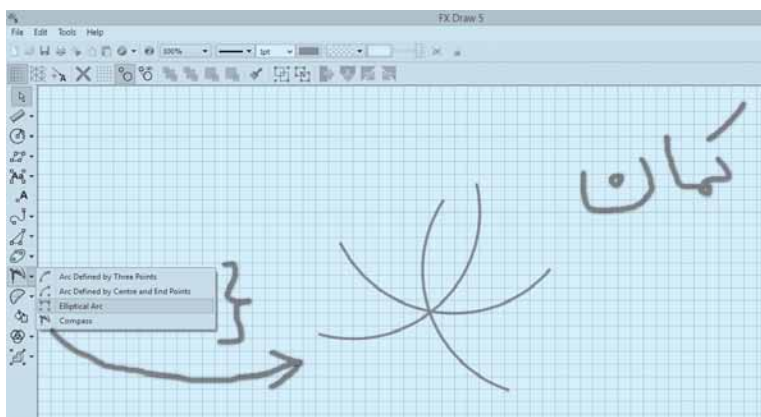
تصویر (۱)



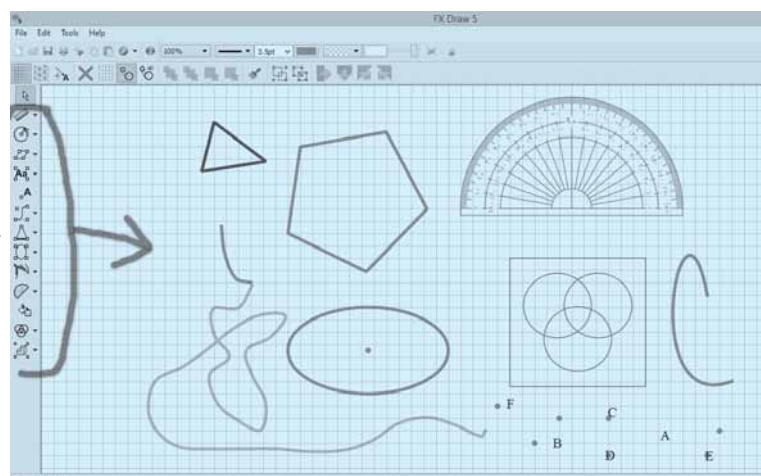
تصویر (۲)



تصویر (۳)



تصویر (۴)



۱. نرم افزار Efofex FX Draw

این نرم افزار کمک می کند تا به آسانی بتوان اشکال هندسی مورد نظر خود را به کمک ابزارهای مناسب آن، ایجاد نمود. این نرم افزار به یادگیری مفاهیم ریاضی و هندسی کمک زیادی می کند.

بخش اصلی نرم افزار، مربوط به رسم انواع خطوط و اشکال و منحنی های متنوع بوده که قابلیت تغییر اندازه و زاویه ها و دیگر خصوصیات را دارند. برای مثال، یکی از این قسمت ها، برای رسم خطوط مختلف و استفاده از خط کش است (تصویر ۱). بخش دیگر، برای تعریف دو یا چند نقطه برای رسم اشکال دایره (تصویر ۲) و رسم کمان با پرگار (تصویر ۳) و ابزارهای رسم اشکال دیگر می باشد. (تصویر ۴).

ویژگی مهم این نرم افزار، قابلیت متحرک بودن اشکال است که به راحتی می توان زاویه ها و اندازه شکل ها را به صورت دلخواه، تغییر داد (تصویر ۵).

همچنین می توان رنگ اشکال هندسی را به دلخواه تعیین کرده و تغییر داد و همچنین اندازه اشکال را با کشیدن گوشه های آن کوچک یا بزرگ نمود. (تصویر ۶)

۲. نرم افزار Math type

این نرم افزار اجازه می دهد تا به راحتی نمادهای ریاضی را برای کار در برنامه word و صفحات وب، چاپ کردن، نمایش دادن و نظایر آن به کار برد. این برنامه، امکانات زیاد، و فرمول های آماده، نمادهای بسیار و فونت ها و قالب های همراه را در اختیار کاربران (معلمان و دانش آموزان) قرار می دهد. در ضمن، می توان از نمادهای ریاضی موجود در سیستم خود نیز، در نرم افزار بهره گرفت. همچنین می توان فرمول های خاص دیگری را دانلود کرده و به برنامه اضافه کرد، فرمول ها را ویرایش نمود و مانند کلمات، آن ها را رنگی کرده و استایل مورد نظر را به آن ها داد. این نرم افزار به راحتی می تواند به انواع مختلف برنامه ها افزوده شود.

(تصویر ۷)

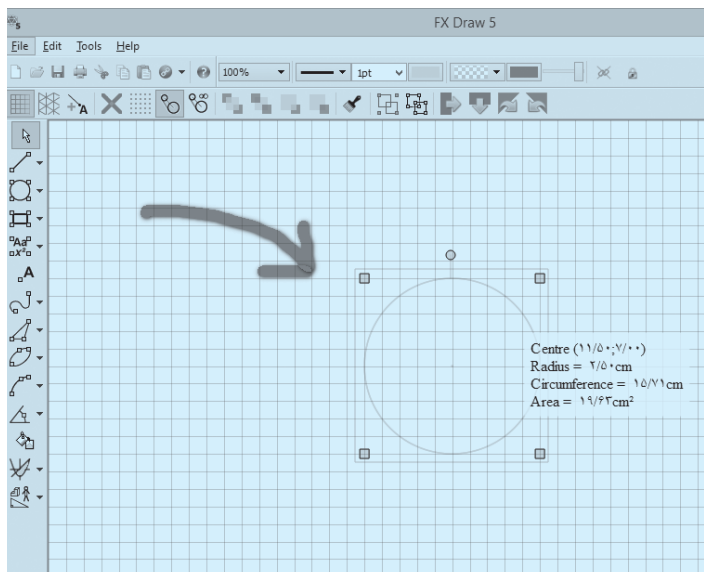
از دیگر ویژگی های این برنامه قابلیت کار با نرم افزارهای مختلف، امکان شناسایی فرمول های دست نویس، و وارد کردن آن ها در برنامه، امکان ذخیره تایپ با فرمت های مختلف و به کارگیری در وبگاه و وبلاگ و غیره است.

پی نوشت ها

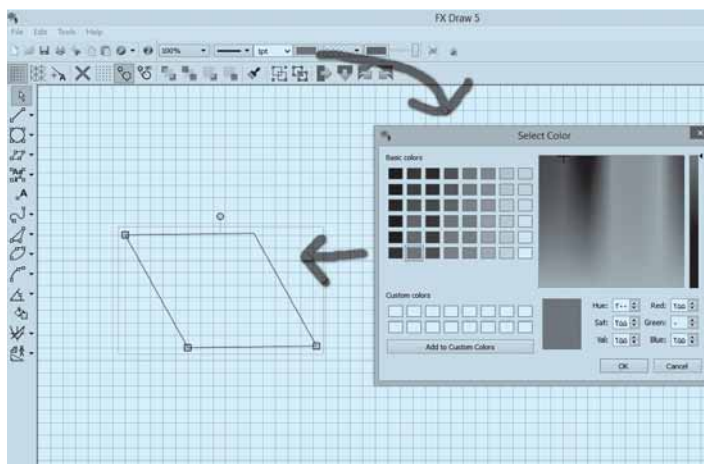
۱. سند تحول بنیادین آموزش و پرورش مصوب شورای عالی انقلاب فرهنگی آذر ماه ۱۳۹۰
2. Word, Powerpoint, Quark xpress documents, Adobe Indesign layouts, Excel spreadsheets, Html pages.

منابع

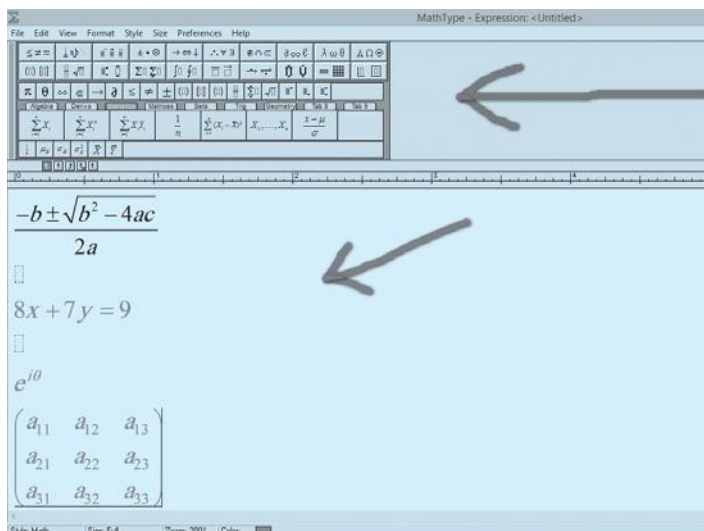
۱. سند تحول بنیادین آموزش و پرورش مصوب شورای عالی انقلاب فرهنگی آذر ماه ۱۳۹۰
۲. سند برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران



تصویر (۵)



تصویر (۶)



تصویر (۷)

نامه‌ی رسیده

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان خرداد ۱۳۹۷، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- ♦ مهدی ولی‌نژاد، از دهلران؛
- ♦ محمد گوهری، از بروجرد؛
- ♦ اژدر سلیمانپور با کفایت، از ارومیه؛
- ♦ سیما کرم سراجی، از هشتگرد؛
- ♦ محمد خدایی‌فر، از پلدختر؛
- ♦ سید ابوطالب گلباگی ماسوله، از مازندران؛
- ♦ حبیب‌اله علی‌زاده، از تهران؛
- ♦ فاطمه افشاری، از درمیان (خراسان جنوبی)؛
- ♦ الهام یوسفی، از درمیان (خراسان جنوبی)؛
- ♦ سید محمد حسن حسینی، از مشهد؛
- ♦ اعظم خلیلی، از تهران؛
- ♦ محمد بختیاری، از قم؛
- ♦ سها احمدی، از هرمزگان؛
- ♦ زهرا شب‌خیز، از بندرعباس؛
- ♦ فرحناز قاسمیان، از گلوگاه (مازندران)؛
- ♦ محمدهادی قاسمیان، از گلوگاه (مازندران)؛
- ♦ مقصود اختری، از البرز؛
- ♦ فهیمه خوش‌آهنگ قصر، از ایلام؛
- ♦ مهنا دهگردی، از ایلام.



با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

رشد نوآموز برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد برهان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد جوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

♦ رشد آموزش ابتدایی ♦ رشد تکنولوژی آموزشی

♦ رشد مدرسه فردا ♦ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

♦ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ♦ رشد آموزش زبان و ادب فارسی
♦ رشد آموزش هنر ♦ رشد آموزش مشاور مدرسه ♦ رشد آموزش تربیت بدنی
♦ رشد آموزش علوم اجتماعی ♦ رشد آموزش تاریخ ♦ رشد آموزش جغرافیا
♦ رشد آموزش زبان‌های خارجی ♦ رشد آموزش ریاضی ♦ رشد آموزش فیزیک
♦ رشد آموزش شیمی ♦ رشد آموزش زیست‌شناسی ♦ رشد مدیریت مدرسه
♦ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار دانش ♦ رشد آموزش پیش‌دبستانی
♦ رشد برهان متوسطه دوم

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

♦ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.

♦ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۲۱

♦ وبگاه: www.roshdmag.ir

2. Editors' Note by: Z. Gooya
4. Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model Trans. By F. Hajazizi & Z. Gooya
13. Bushehr Suvinior by M. Radjabalipour
16. Self- inverse Matrices by J. Mokhtari Dehghadi
18. Constructing Bisector of an angle without Corner by S.J. Bakhshayesh; R. Mansouri & M. Javanbakhsh
22. With Snowflakes and Unicorns, Marina Ratner and Maryam Mirzakhani Explored a Universe in Motion by Amie Wilkinson Tran. by F. Hajazizi & Z. Gooya
25. Teachers' Life- long Learning by A. Rejali
28. Interview with Allan Tarp at the IMEC14 Interviewer: B. Aayatipour
34. Inspector in Class! by M. Bahaloo
36. Zahra's Creativity: Hope rising again! by K. Abdollahpour
38. Mathematics Errors, Paradoxes & Fallacies by S. M. G. Mahmoudi
42. From Metro to Mathematical Modelling by E. Jazayeri
43. A Critical look at Quality & Quantity of Math Teachers' in- service Professional development by A. Roozdar
47. Imagine you are in this Situation! Is your Answer Correct? by M. M. Dorri
50. Solving few exercises from Chapter 4, Grade 10 Geometry, using Geogebra by M. Momenzadeh; F. Eshraghi; E. Sheikhan & M. Ebad
56. Using Manipulative to teach Traction and Equivalent Traction by R. Razmi & M. Shadkam
58. Report: Two Festivals & Two Meetings at the Farhangian University by M. Rezaie
60. Drawing Functions & Geometric Shapes Using Math Softwares by M. Sohrablou
63. Letters

Managing Editor: Mohammad Naseri
Editor: Zahra Gooya
Editorial Board:
Tahereh Asadi, Hamidreza Amiri, Esmail Babolian,
Mohammad Reza Fadaie, Soheila Gholamzad,
Mehdi Radjabalipour, Mani Rezaie, Shiva Zamani,
Bijan Zangeneh.
Executive Director: Pari Hajikhani
Graphic Designer: Mehdi Karimkhani
www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585



حمایت از کالای ایرانی

رشد برای رشد

نحوه اشتراک مجلات رشد به دو روش زیر:

الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshdmag.ir و ثبت نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.
ب. واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سمراه آرمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۸۸۴۹۰۲۳۳.

♦ عنوان مجلات در خواستی:

♦ نام و نام خانوادگی:

♦ تاریخ تولد: ♦ میزان تحصیلات:

♦ تلفن:

♦ نشانی کامل پستی:

استان: شهرستان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

♦ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

• نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵

• تلفن بازگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸

• Email: Eshtarak@roshdmag.ir

♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۴۵۰/۰۰۰ ریال

♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۲۰/۰۰۰ ریال



کنگره بین المللی ریاضی دانان

۱۰ تا ۱۸ مرداد ماه ۱۳۹۷

ریودوژانیرو - برزیل



ساخت ایران

ایران را کالای ایرانی می سازد





سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>