

نام و نام خانوادگی :	 لا یدکر الله تطمنن القلوب ( با یاد خدا دلها آرام می گیرد ) سئوالات امتحانی نوبت اول - دیماه ۹۳ دبیرستان ۱۷ شهر نور جوانمردی پایه ی چهارم ریاضی	نام درس : حساب و دیفرانسیل
نمره : _____ اعداد : _____ حروف : _____	مدت آزمون : ۱۱۰ دقیقه	تاریخ آزمون : ..... / ۱۰ / ۱۳۹۳
نام کلاس :		

طراح سئوالات : داراب حسن پور		ردیف	سئوالات	نمره
۱	کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام یک گنگ است ؟ د) $\log 3$ ج) $3/\sqrt{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ الف) $\sqrt{5}$	۱		۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید . الف ) کسر گویای مساوی با بسط اعشاری $0.8333...+$ برابر است با ..... ب ) اینفیموم بازه ی $A = (-2, 3]$ برابر است با .....	۲		۱
۱	نامساوی $ x-2  \leq 2$ یک بازه را مشخص می کند . این بازه را بنویسید .	۳		۱
۱/۵	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را فقط مشخص کنید . الف ) هر دنباله صعودی و کراندار همگراست . ب ) دنباله ی $\{1 + (-1)^n\}$ همگراست . ج ) حد دنباله $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ برابر e است .	۴		۱/۵
۰/۷۵	ثابت کنید عضو صفر از $\mathbb{R}$ منحصر به فرد است .	۵		۰/۷۵
۱/۲۵	دنباله ی $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$ را در نظر بگیرید . الف ) سه جمله ی اول این دنباله را بنویسید . ب ) این دنباله صعودی است یا نزولی ؟ ج ) این دنباله به چه عددی همگراست ؟	۶		۱/۲۵
۱/۵	به کمک قضیه فشردگی ، ثابت کنید دنباله $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ همگراست .	۷		۱/۵
۱/۵	ابتدا حد دنباله $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}_{n=1}$ را حدس بزنید سپس حدس خود را با روش $\varepsilon$ اثبات کنید .	۸		۱/۵
۴	حدود زی را در صورت وجود محاسبه کنید : الف ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ x^2 - x - 2 }{2x - \sqrt{x^2 + 12}} =$ ب ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} =$ ج ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) =$ د ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^x =$	۹		۴
۱/۵	اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $a + b$ را به دست آورید . (خ - ۹۲)	۱۰		۱/۵
۱/۵	اگر تابع $f(x) = (x^2 - bx + a) \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد . مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید .	۱۱		۱/۵
۲	همه مجانب های تابع $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - x$ را بنویسید .	۱۲		۲
۱/۵	به کمک تعریف مشتق ، مشتق پذیری تابع $f(x) =  x^2 - 4 $ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید .	۱۲		۱/۵
جمع نمرات		تا عنان سرفروشت دست شماست می توان آن را به دلخواه نوشت و اگر از دستان رفت ..... رفت		

۱۳۹۲۵۴۲۰  
دانا - ریاضی

سید علی

پایه هفتم، فصل اول

$$\Rightarrow \left| \frac{r_{n-1}}{n} - r \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{r_{n-1} - r_n}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-1}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

فرض  $M = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$  عدد صحیح

الف)  $x^2 - n - r = (x - r)(x + r)$  (۹)

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-x^2 + x + r}{r - \sqrt{x^2 + r}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \frac{-x^2 + x + r}{r - \sqrt{x^2 + r}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-2x + 1}{r - \frac{rx}{\sqrt{x^2 + r}}} = \frac{-r}{\frac{r}{r}} = -\frac{r}{1} = -r$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1 - \sqrt{1 + \pi n}}{r - \sqrt{n}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}} \frac{-\pi(1 + \sqrt{1 + \pi n})}{r - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{-\pi(r)}{r - 1} = -2\pi$$

ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n})(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

د)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1+1}{n-1} \right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^n = e$$

الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

ج)  $|x - r| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x - r \leq \varepsilon$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow [0, \varepsilon]$

د)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

ه)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

$O_1 = O_2 + O_1$  (مقدور)

$= O_2 + O_1$  (مقدور)

$= O_2$  (مقدور)

الف)  $\frac{r}{r}, \frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{y}{1}$  (۶)

ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

ج)  $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

د)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

ه)  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, n > M \Rightarrow |f(n) - L| < \varepsilon$



(۱۲) ابتدا تابعی را به تابع زوج یا فرد می‌کنیم

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

یعنی تابع در فواصل  $(-\infty, -1)$  و  $(1, \infty)$  مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - x \right) = \sqrt{\frac{-1}{0^-}} - 0 = +\infty$$

پس  $x=0$  یک نقطه نامتناهی است.

حال می‌بینیم که تابع زوج یا فرد است.

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x$$

وقتی  $x \rightarrow \infty$  در اینصورت  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  پس

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (|x| - x) = \begin{cases} y = x - x = 0 & (x \rightarrow \infty) \\ y = -x - x = -2x & (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

بنابراین  $y = -2x$  و  $y = 0$  می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & ; x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ -x^2 + 4 & ; -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (13)$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4 - 0}{x - 2} = -4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = 4$$

تابع در  $x=2$  مشتق‌پذیر نیست

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 4 - 0}{x - 2} = -4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = 4$$

پس در  $x=2$  مشتق‌پذیر نیست

ادامه داشته باشد



(۱۰) وقتی  $n \rightarrow \frac{\pi}{4}$  می‌شود

$$\sqrt{2} \cos n \rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

پس  $\sqrt{2} \cos n$  به ۱ میل می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sqrt{2} \cos n] = \left[ \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \right] = [1] = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{[\sqrt{2} \cos n] - 1}{n - \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - 1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

از آنجا که صورت و مخرج هر دو به ۰ میل می‌کنند پس باید:

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{[\sqrt{2} \cos n] - 1}{n - \frac{\pi}{4}} = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 1}{n - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 1}{n - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$a = -4b \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$a + b = -4 + 4 = 0$$

۱۱- به ترتیب در تابع  $\text{sgn}$  داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - bx + a)x & ; x^2 + x - 2 > 0 \\ 0 & ; x^2 + x - 2 = 0 \\ (x^2 - bx + a)x & ; x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + a & ; x > 1 \text{ یا } x < -2 \\ 0 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + bx - a & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

پس تابع در  $x=0$  و  $x=-2$  مشتق‌پذیر نیست

$$x^2 - bx + a = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 - bx + a = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -2 \end{cases} \rightarrow (a, b) = (-2, -1)$$