نام و نام خانوادگی :

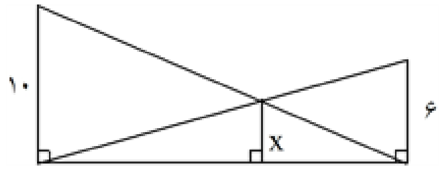
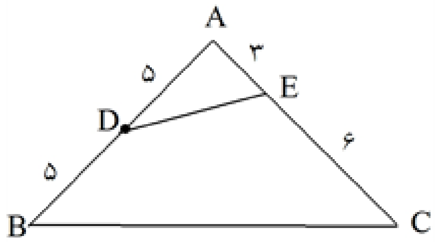
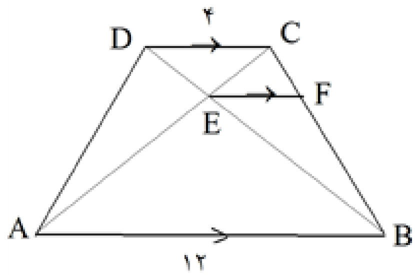
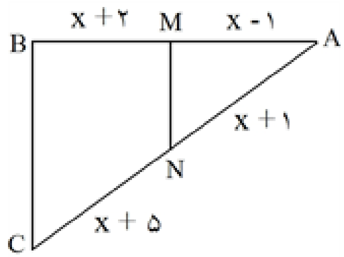
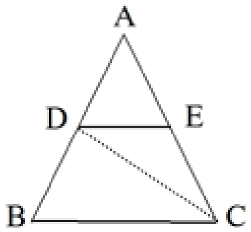
عنوان آزمون : آزمون نیمسال اول هندسه ۱ سمپاد بهشهر

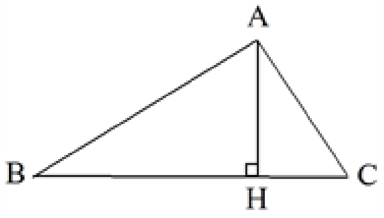
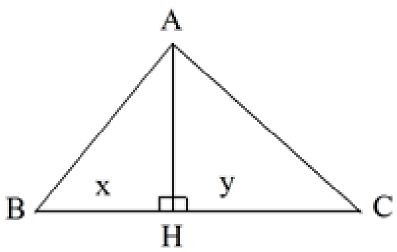
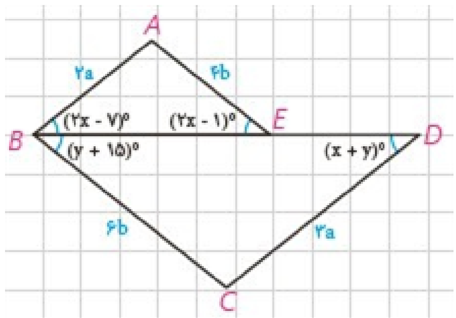
پایه تحصیلی : دهم ریاضی

زمان آزمون : ۹۰ دقیقه

نام دبیر : رضا حکمتی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۱۰/۰۳

ردیف	**لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید**	بارم
۱	مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟	۱.۵
۲	مقدار x را حساب کنید. 	۱.۵
۳	در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$: 	۱.۵
۴	در شکل زیر مطلوب است اندازه‌ی پاره‌خط EF: 	۱.۵
۵	در مثلث ABC پاره‌خط MN موازی BC است. به کمک قضیه‌ی تالس مقدار x را به دست آورید. سپس نسبت محیط AMN به محیط ABC را به دست آورید. 	۱.۵
۶	در شکل زیر $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$، $DE \parallel BC$ مساحت ADE و DEC را به دست آورید. 	۱.۵
۷	قضیه‌ی زیر را ثابت کنید: «در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.»	۱

<table>
<tr><td>۸</td><td>با درنظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر، روابط را اثبات کنید.
الف) $AB^{۲} = BC.BH$
ب) $AH^{۲} = BH.CH$

</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۹</td><td>عکس قضیه‌ی تالس را بیان و آن‌را اثبات کنید.</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>با توجه به شکل زیر و این‌که $BC = ۶$ و $S_{ABH} = ۴$ و $S_{AHC} = ۹$. مقادیر x و y را به دست آورید.

</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که از هر نقطه خارج خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه عمودمنصف هر مثلث همرس هستند.</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = ۲DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

</td><td>۱.۵</td></tr>
<tr><td>۱۴</td><td>نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)</td><td>۱</td></tr>
</table>

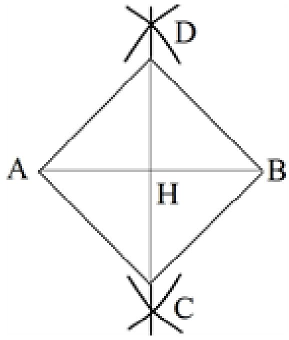
ای مفتخر به طالع مسعود خویشتن   تاثیر اختران شما نیز بگذرد

پیروز باشید و سربلند- حکمتی

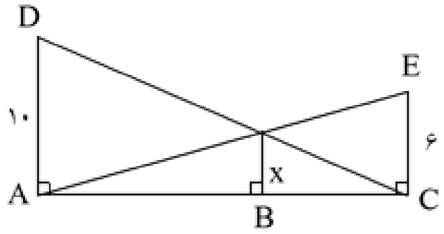
۱ در مربع قطرها عمودمنصف یک‌دیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده و سپس عمودمنصف آن‌را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.

نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $HD = HC = ۲$.

نقاط A، B، C و D را به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.



۲



$$\begin{cases} \frac{AB}{AC} = \frac{x}{۶} \\ \frac{BC}{AC} = \frac{x}{۱۰} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}$$

$$\frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{x}{۶} + \frac{x}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{AB + BC}^{AC}}{AC} = \frac{۱۰x + ۶x}{۶۰} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۶x}{۶۰} \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۱۶} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

۳

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AD \times AE \operatorname{Sin} A}{\frac{۱}{۲} AB \times AC \operatorname{Sin} A} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC} = \frac{۳ \times ۵}{۱۰ \times ۹} = \frac{۱}{۶}$$

۴

$$\frac{۱}{EF} = \frac{۱}{DC} + \frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{EF} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EF = ۳$$

۵

$$\frac{x-۱}{x+۲} = \frac{x+۱}{x+۵} \Rightarrow (x-۱)(x+۵) = (x+۱)(x+۲) \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۴x - ۵ = \cancel{x^۲} + ۳x + ۲$$

$$\Rightarrow ۴x - ۳x = ۲ + ۵ \Rightarrow x = ۷$$

$$AM = ۶, BM = ۹ \Rightarrow AB = ۱۵$$

در ضمن بنابر قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و از آن‌جا که نسبت محیط همان نسبت تشابه است:

$$\frac{\text{محیط } AMN}{\text{محیط } ABC} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

۶ چون $DE || BC$، پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AE}{AC-AE}=\frac{۳}{۷-۳}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}$$

چون دو مثلث در رأس D مشترک‌اند و قاعده‌های آن‌ها بر روی یک خط قرار گرفته است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{DEC}}}=\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

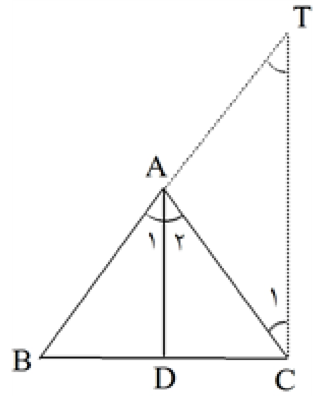
۷ AD نیمساز زاویه‌ی A است. باید ثابت کنیم که $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

اثبات: از نقطه‌ی C موازی AD خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه‌ی T قطع کند. از آن‌جا که $CT || AD$ و BT خط مورب آن‌ها $\widehat{A}_۱=\widehat{T}$ و با درنظر گرفتن AC به عنوان خط مورب $\widehat{C}_۱=\widehat{A}_۲$.

$$\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲\Rightarrow\widehat{C}_۱=\widehat{T}\Rightarrow ATC \text{ مثلث متساوی‌الساقین}$$
$$\Rightarrow AT=AC\ \ (۱)$$

با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث BEC می‌توان نوشت: $(AD || EC)$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AT}\xrightarrow[\text{طبق ۱}]{AT=AC}\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$



۸

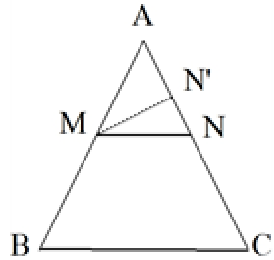
$$\text{الف)}\ A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{B}H\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^۲=BC.BH$$

$$\text{ب)}\ A\overset{\triangle}{B}H \sim A\overset{\triangle}{H}C\Rightarrow\frac{AH}{BH}=\frac{HC}{AH}\Rightarrow AH^۲=BH.HC$$

۹ اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است اثبات از طریق برهان خلف: $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ و فرض کنیم برخلاف حکم $\mathrm{MN} \nparallel \mathrm{BC}$، پس از نقطه‌ی M پاره‌خط 'MN را موازی BC رسم می‌کنیم.

حال با توجه به قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AN}'}{\mathrm{AC}}$ با توجه به رابطه‌ی فرض مسئله داریم:

$\frac{\mathrm{AN}'}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ که از آن نتیجه می‌شود که $\mathrm{AN}=\mathrm{AN}'$ و بنابراین N بر 'N منطبق است و MN همان 'MN است که موازی BC است.



۱۰
$$\frac{S_{\mathrm{ABH}}}{S_{\mathrm{AHC}}}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}} \Rightarrow \frac{۴}{۹}=\frac{x}{y} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{۴}{۴+۹}=\frac{x}{x+y} \xrightarrow{x+y=\mathrm{BC}=۶}$$

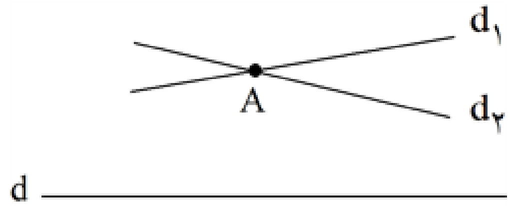
$$\frac{۴}{۱۳}=\frac{x}{۶} \Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۳}$$

$$y=۶-\frac{۲۴}{۱۳}=\frac{۵۴}{۱۳}$$

۱۱ برهان خلف: فرض کنیم از نقطه‌ی A دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را موازی با خط d رسم کرده باشیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \,||\, d \\ d_۲ \,||\, d \end{array}\right\} \Rightarrow d_۱ \,||\, d_۲$$

و این خلاف فرض متقاطع بودن $d_۱$ و $d_۲$ در نقطه‌ی A است پس $d_۱$ و $d_۲$ بر هم منطبق هستند.



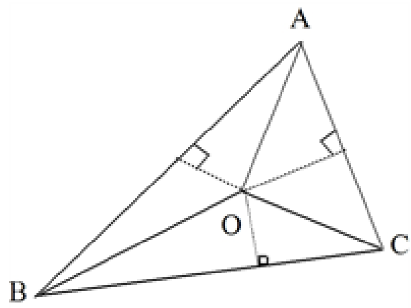
۱۲ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آن‌جا که پاره‌خط های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آن‌ها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس: $(۱) \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OC}$

۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس: $(۲) \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OB}$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

طبق قضیه‌ی عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. نتیجه می‌گیریم O روی عمودمنصف BC است پس O محل تلاقی سه عمودمنصف است. بنابراین عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.



۱۳ $$\mathrm{BE} = ۲\mathrm{DE} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DB}} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DC}} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BC}} = \frac{۴b}{۶b} = \frac{۲}{۳} \ (۱)$$

اندازه‌ی اضلاع مثلث‌ها با هم متناسب‌اند، در نتیجه، مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند و زاویه‌هایشان با هم برابر است. $\angle A = \angle C$ و $\angle D = \angle \mathrm{ABE}$ و $\angle E = \angle \mathrm{CBD}$

بنابراین می‌توان نوشت: $\angle D = \angle \mathrm{ABE} \Rightarrow (x+y)^\circ = (۲x-۷)^\circ \Rightarrow y = x-۷ \ (۱)$

$$\angle E = \angle \mathrm{CBD} \Rightarrow (۲x-۱)^\circ = (y+۱۵)^\circ \Rightarrow y = ۲x-۱۶ \ (۲)$$

با توجه به ۱ و ۲ داریم: $۲x-۱۶ = x-۷ \Rightarrow x = ۹, y = ۲$

با توجه به ۱ نسبت تشابه $\overset{\triangle}{BCD}$ به $\overset{\triangle}{BAE}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه، نسبت مساحت‌ها برابر است با $\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$

۱۴ فرض کنیم p محیط چندضلعی دیگر باشد، داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \left(\frac{p}{p'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{p}{p'} \xrightarrow{p'=۱۲} \frac{۲}{۳} = \frac{p}{۱۲} \Rightarrow p = ۸$$

در حالت دوم داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{p'}{p}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \left(\frac{p'}{p}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{p'}{p} \xrightarrow{p'=۱۲} \frac{۲}{۳} = \frac{۱۲}{p} \Rightarrow p = ۱۸$$