www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

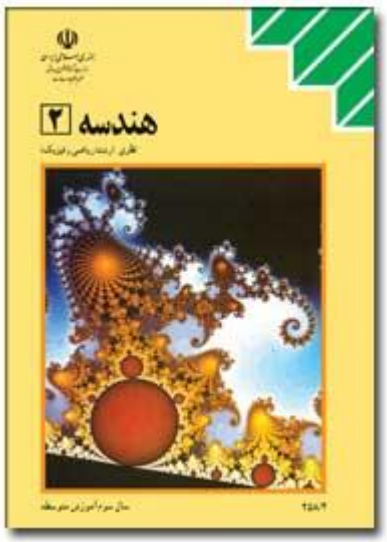
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

کتاب کار و آموزش

هندسه(۲)



فرامرز سپهری
www.karamath.ir
کانال تلگرام : @sepehrimath

ویرایش ۹۵

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

بارم بندی کتاب هندسه ۲

فصل ها	نوبت اول	نوبت دوم، شهریور وبزرگسال
اول	۱۲	۵
دوم (تا صفحه۷۴ ، رابطه طولی در دایره)	۸	۵
دوم (ازصفحه۷۴ ، رابطه طولی در دایره تا آخر فصل)	-	
سوم	-	۵
چهارم	-	۵
جمع	۲۰	۲۰

فصل اول : استدلال در هندسه

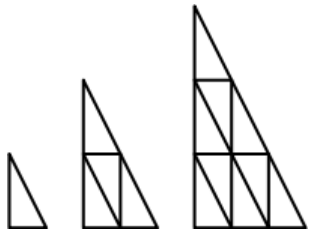
درس نامه

استدلال استقرایی:

شکل خود متشابه :

خطوط همرس :

۱- مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک همه با هم هم‌نهشت هستند. با توجه به شکل‌های زیر و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید.



(۱) (۲) (۳)

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	.....	n
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹			

۲ – اگر وسط اضلاع یک مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم، نام چهارضلعی حاصل چیست؟ حدس خود را با روش استدلال استقرایی روی دو مربع بررسی کنید و نتیجه را بیان کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ – الف) با استفاده از روش استقرایی، رابطه‌ی بین تعداد قطرهایی که از یک رأس n ضلعی محدب می‌گذرد را با تعداد اضلاع حدس بزنید. مراحل انجام کار را توضیح دهید.

ب) تعداد قطرهایی که از یک رأس ۸ ضلعی محدب می‌گذرد را به‌دست آورید.

۴ – با استفاده از استدلال استقرایی، مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب را حدس بزنید و مراحل انجام کار را توضیح دهید.

الف) جدول زیر را با استفاده از استدلال استقرایی کامل کنید:

چند ضلعی محدب	۳	۶	۵	۴	...	n
مجموع زوایای داخلی	۰	۱				

ب) رابطه بین تعداد ضلع‌ها و تعداد قطرهایی که از تمام رأس‌های یک n ضلعی می‌گذرند را حدس بزنید.

چند ضلعی محدب	۳	۶	۵	۴	...	n
تعداد قطرها	۰	۱				

۵ – یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین به طول ساق ۳ سانتی‌متر در نظر بگیرید. از این نقطه به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنید. طول دو پاره‌خط ایجاد شده را اندازه بگیرید. سپس مجموع آن‌ها را به‌دست آورید. با استفاده از استدلال استقرایی نشان دهید که آیا با جا به جا کردن این نقطه روی قاعده تغییری در اندازه‌ی این مجموع ایجاد می‌شود؟ آیا رابطه‌ای بین این مجموع و اجزای مثلث وجود دارد؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶ – سه مرحله ی برف دانه کخ را روی اضلاع مثلث متساوی الاضلاع انجام داده و سپس جدول زیر را کامل کنید. برای رسم هر مرحله هر ضلع مثلث را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و با حذف پاره خط میانی ، آن را به چهار پاره خط با طول های مساوی تقسیم می کنیم.

مرحله	۰	۱	۲	۳	....	n
تعداد پاره خط های ایجاد شده						
محیط شکل حاصل						

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، محیط شکل حاصل در مرحله‌های ۱، ۲ و ۳ ... n را به‌دست آورید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
محیط	۳						

۷ – چهار مر حله ی رسم مثلث سرپینسکی را انجام داده و سپس جدول زیر را کامل کنید. رسم هر مرحله بدین صورت است که در یک مثلث متساوی الاضلاع وسط اضلاع را به هم وصل کرده و مثلث میانی را حذف کرده و مثلث های کنار را نگه می داریم.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	....	n
تعداد مثلث های باقی مانده							
مساحت مثلث های باقی مانده							

اگر مساحت مثلث در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مرحله‌های ۱ تا n به‌دست آورید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
مساحت	۱							

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

استدلال استنتاجی:

قضیه۱: ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع است.

۸ – از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطه‌ی بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به‌دست آورید.

تذکر :

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه۲: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع رو به رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۹ -اندازه‌های اضلاع مثلثی۴، ۷ و ۱۰ می‌باشد. اندازه‌های قطعاتی را که نیمساز زاویه مقابل به بزرگترین ضلع، بر این ضلع پدید می‌آورد را محاسبه کنید.

۱۰

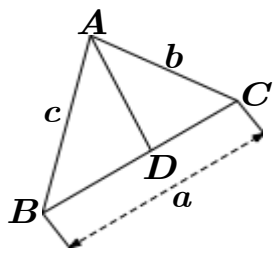
تمرین: ثابت کنید نیمساز هر زاویهٔ خارجی مثلث،ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دوضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱ -

اگر در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی درونی رأس A از مثلث ABC باشد.

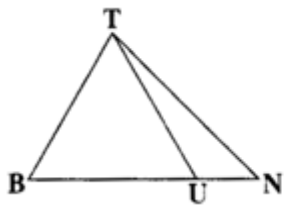
ثابت کنید: $BD=\frac{ac}{b+c}$ و $CD=\frac{ab}{b+c}$



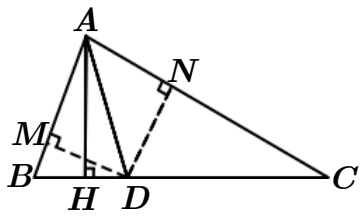
قضیه۳: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.

۱۲

در شکل مقابل فرض کنیم $BT=BU$ ثابت کنید $B\hat{T}N > T\hat{U}B$



۱۳ -در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.



الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌های این مثلث‌ها نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

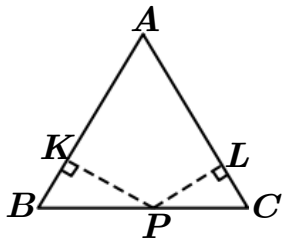
ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آن‌ها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلث‌های ABD و ADC، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

ت) از مقایسه نسبت‌ها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۱

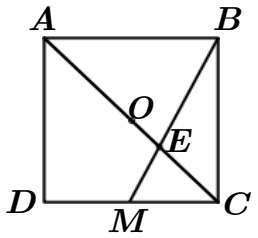
مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل زیر) را در نظر بگیرید. نقطه‌ی دلخواه P را روی قاعده BC اختیار کنید. سپس مجموع فواصل نقطه‌ی P از دو ساق AB و AC را به‌دست آورید. با جا به جا کردن نقطه‌ی P روی قاعده، این مجموع چگونه تغییر می‌کند؟ درستی حدس خود را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید. $PK+PL=?$



۱۴

درمثلث متساوی الساقین ABC ، نقطهٔ دلخواه P روی امتداد قاعدهٔ BC قرار دارد . ثابت کنید تفاضل فاصله های نقطهٔ P از دو ساق آن مقداری ثابت است .

۱۵ - در مربع شکل زیر، اندازه ضلع مربع $۶\sqrt{۲}$ و O مرکز مربع و M وسط ضلع DC می‌باشد.
اندازه OE را به‌دست آورید.



۱۶ -ثابت کنید اگر از یک نقطه واقع بر قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق مثلث رسم کنیم، آنگاه مجموع دو پاره‌خط ایجاد شده برابراندازه ساق مثلث است.

۱۷ –با استفاده از استدلال استنتاجی، ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق مقداری ثابت و برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

۱۸ –در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.

۱۹ –ثابت کنید مجموع فاصله های هر نقطه ی درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را بیابید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۰

در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ سانتی متر نقطه دلخواه M درون مثلث مفروض است. مجموع فاصله های این نقطه یعنی M را از سه ضلع مثلث بدست آورید.

قضایای شرطی ، دو شرطی ، عکس قضیه شرطی و مثال نقض

۲۱ -
درستی یا نادرستی جملات زیر را معلوم کنید.
الف)نقطه ی همرسی میانه های مثلث ، مرکز ثقل آن است.
ب)هر زاویه ی خارجی یک چند ضلعی از هر زاویه ی داخلی آن بزرگتر است.

۲۲ - جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.
الف) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک است.

ب) در هر مثلث، مجموع طول‌های دو ضلع از طول ضلع سوم است.

۲۳-قضیه‌های زیر را در نظر گرفته، عکس آن‌ها را بنویسید. اگر عکس آن‌ها قضیه شرطی نباشد، یک مثال نقض بیاورید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه از مثلث نیز با هم برابرند.

پ)در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر، متناسب‌اند.

۲۴ - قضیه تالس را نوشته سپس آن را به صورت دو شرطی بنویسید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵ -قضیه‌ی فیثاغورس را به صورت شرطی، عکس شرطی و قضیه‌ی دو شرطی بنویسید.

۲۶ -الف) قضیه زیر را به صورت قضیه «دو شرطی» بنویسید.
«در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.»

ب) قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را نیز بنویسید.
«در مثلث قائم‌الزاویه، عمود منصف‌های ضلع‌ها در وسط وتر همرسند.»

۲۷ -کدام یک احکام کلی زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند.

ب) اگرسه نقطه‌روی یک خط باشند، آنگاه از این سه نقطه فقط یک صفحه می‌گذرد.

پ) اندازه ارتفاع نظیر یک ضلع از میانه آن ضلع در هر مثلث همواره کمتر است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ت) نقطه همرسی عمود منصف اضلاع هر مثلث داخل یا در خارج مثلث واقع می‌شود.

ث) هر زاویه خارجی یک چند ضلعی از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.

چ) «ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث واقع است»

ح)اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آنگاه هم‌نهشت هستند.

خ) از تلاقی نیمسازهای هر مستطیل یک مربع پدید می آید.

د) نقطه همرسی ارتفاع های هر مثلث داخل واقع می‌شود.

۲۸ –قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را نیز بنویسید.
« هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره خط از دوسر پاره خط به یک فاصله است. »

۲۹
قضیه‌های زیر را به‌صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آنها قضیه شرطی است یا نه درصورتی که یک قضیه نباشد یک مثال نقض بیاورید.
الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
ب) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحتهای برابر هستند.
پ) در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر، متناسب هستند.
ت) در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف‌های ضلع‌ها در وسط وتر همرس می‌شوند.
ث) هرکس در شیراز زندگی می‌کند، در استان فارس است.

اثبات غیر مستقیم یا برهان خلف:

در مثلث ABC (شکل ۶)، AD نیمساز زاویه A است. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید $AB \neq AC$.

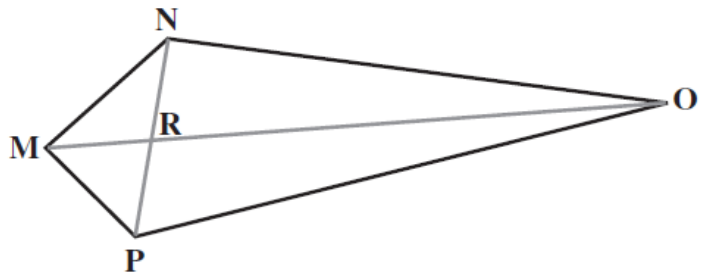
قضیه ۴ : ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچکتر است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

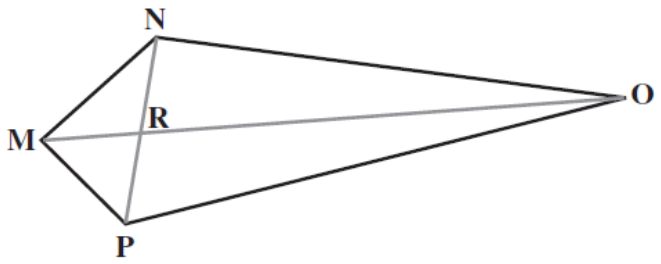
۳۰

در چهارضلعی MNOP، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند..

الف) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$ ، آنگاه MO نیمساز زاویهٔ PMN نیست.



ب) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$ ، آنگاه OM بر NP عمود نیست.



۳۱ – در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$ ، ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

۳۲– اگر a، b و c سه خط راست باشند که $a||b$ و $c||b$ ، آنگاه $a||c$.

۳۳ – عمود منصف هر پاره خط یکتاست.

۳۴ –در هر مثلث عمود منصف های هر دو ضلع متقاطع اند.

۳۵ –در هر مثلث هر دو نیمساز زاویه های داخلی متقاطع اند.

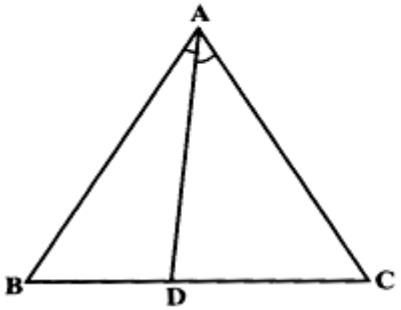
۳۶ –در هر مثلث هر دو میانه متقاطع اند.

۳۷ –در هر مثلث هر دو ارتفاع متقاطع اند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۸

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر $BD < DC$، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$.



قضیه نامساوی مثلث ۵ : ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

ثابت کنید در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل طول دو ضلع دیگر بزرگتر است.

قضیه وجود مثلث :

۳۹ -سه نقطه A، B و C چنان داده شده‌اند که $AB=۲a-۱$، $AC=۱۲$ و $BC=a-۲$ است. حدود a چنان بیابید که این سه نقطه رأس‌های یک مثلث باشند.

۴۰ -سه پاره‌خط با طول‌های $۶x$، $x+۷$ و $۴(x-۱)$ مفروض‌اند. اگر مجموع این طول‌ها ۳۶ باشد، آیا این پاره‌خط‌ها می‌توانند ضلع‌های یک مثلث باشند؟ چرا؟

۴۱ -ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

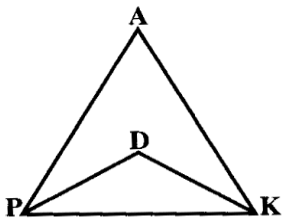
۴۲ -ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس، از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است.

قضیه لولا ۶: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویه بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است.

عکس قضیه لولا ۷: ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشد و ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویه بین این دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

۴۳

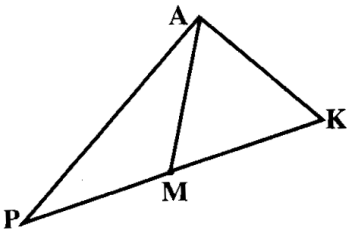
نقطه D را به دلخواه در درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم ثابت کنید زاویه PDK از زاویه PAK بزرگتر است.



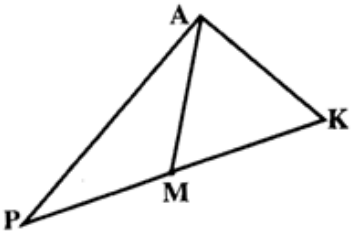
۴۴

در مثلث PAK، نقطه M روی ضلع PK قرار دارد.

الف) ثابت کنید اگر $PM = AK$ آنگاه $AP > MK$



ب) ثابت کنید اگر $AM = AK$ آنگاه $AP > AK$



مکان هندسی

مکان هندسی را تعریف کنید.

۴۵ – مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که از یک خط داده شده به فاصله معلوم k باشد.

۴۶ – مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از خط d به فاصله‌ی معلوم۲ باشد.

قضیه ۸: ثابت کنید، نیمساز یک زاویه مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی آن زاویه است که فاصله‌ی آن از دو ضلع زاویه برابر است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه۹: نقطه M روی عمود منصف پاره‌خط AB است، ثابت کنید: M از دو نقطه A و B به یک فاصله است.

ثابت کنید عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

قضیه ۱۰ : ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

قضیه۱۱ : ثابت کنید عمود منصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرسند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه۱۲: ثابت کنید سه ارتفاع مثلث همرسند.

قضیه۱۳: ثابت کنید سه میانه مثلث همرسند

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۴۷ -مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد را با رسم شکل بیابید.

۴۸ -سه نقطه A، B و C غیر واقع بر یک خط راست می‌باشند، نقطه‌ای تعیین کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد.

۴۹
سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.

۵۰ -به کمک استدلال استقرایی مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحه‌ی موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطه‌ی ثابت P، به فاصله‌ی معلوم d باشد، را حدس بزنید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۱
جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.
الف) مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد ..... است.
ب) مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد ..... می باشد.

۵۲ -مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد.

۵۳
مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

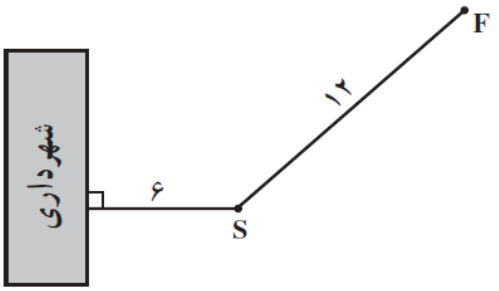
۵۴
مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطهٔ مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.

۵۵
مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحهٔ موازی به یک فاصله باشد.

۵۶
مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک خط داده شده به فاصله d باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۷– نمودار مقابل محل قرارگرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فوارهٔ F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میلهٔ پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصلهٔ ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میلهٔ پرچم را تعیین کنید.



ترسیم با خط‌کش و پرگار

راهبرد حل مسائل ترسیم هندسی

۵۸ -با توجه به استراتژی حل مسئله‌های ترسیم‌های هندسی، طریقه رسم عمود منصف یک پاره‌خط را بنویسید.

۵۹ -مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن داده شده است.

۶۰-با استفاده از خط‌کش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج آن خط رسم کنید

۶۱ -مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع AB و ارتفاع CH و میانه CM رسم کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۲- مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های ضلع $BC=a$، میانه‌های $BB'=m_b$ و $CC'=m_c$ رسم کنید.
(با ذکر روش رسم)

۶۳ -از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلع‌های $AB=c$، $AC=b$ و طول ارتفاع $AH=h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید. مراحل رسم را بنویسید

۶۴ - مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض $DH=L$ قطر آن باشد.

۶۵ -دو نقطه A و B در دو طرف خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو طرف نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

۶۶ -خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. (با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب‌ها بحث کنید.)

۶۷ -نقطه A روی خط d مفروض است. از نقطه A خطی بر d عمود کنید. (طریقه ترسیم را توضیح دهید)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۸– دایرهٔ (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم l باشد.

مسأله چند جواب دارد؟

۶۹

زاویه ی XOY داده شده است . با استفاده از خط کش و پر گار روی نیم خط $O'X'$ زاویه ای به رأس O' و مساوی زاویه ی XOY رسم کنید.

یادداشت:

یادداشت:

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل دوم– دایره

زاویه مرکزی. وتر و مماس

دایره:

زاویه ی مرکزی:

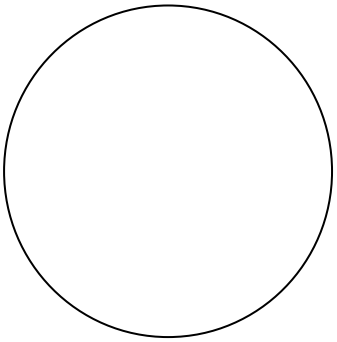
وضعیت یک نقطه ویک دایره:

وتر و قطر:

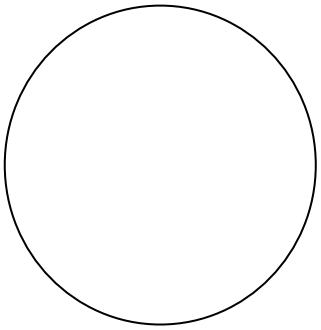
تذکر :

قاطع و مماس بر یک دایره:

قضیه ۲۰۱ : در هر دایره، قطر عمود بر وتر آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

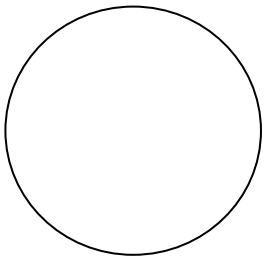


۱ – ثابت کنید در هر دایره ، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز نگذشته باشد، وصل می کند ، بر آن وتر عمود است.



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲ -ثابت کنید در هر دایره ، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می کند ، بر آن وتر عمود است.



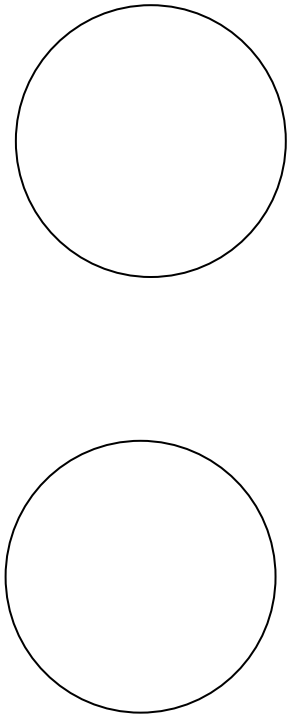
۳ - دایره‌ی $C(O,۲۶)$ داده شده است. اگر طول وتر AB از این دایره ۴۸ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB را بیابید.

۴ - در دایره $C(O,۱۰)$، اگر فاصله مرکز از وتر AB برابر ۶ باشد، اندازه وتر AB را بیابید.

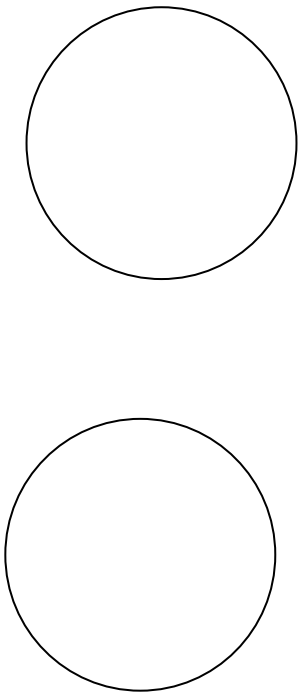
۵ - شعاع‌های دو دایره هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است پیدا کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶ – در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بر عکس.



۷ – ثابت کنید در یک دایره ، کمانهای نظیر دو وتر مساوی ، باهم برابرند و برعکس.



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

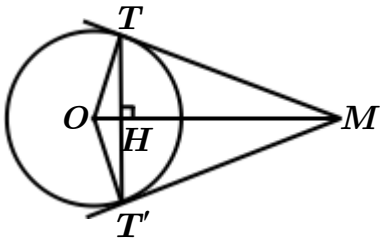
قضیه۲۰۲: در یک دایره از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بر عکس.

۸ – ثابت کنید ، کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه ، عمود است.

قضیه۲۰۳: ثابت کنید طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹ - ر شکل زیر MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره $C(O,R)$ مماسند و زاویه H قائمه است نشان دهید.



الف) $MT = MT'$

ب) خط OM عمود منصف پاره‌خط TT' است.

ج) $OH.OM = R^{۲}$

د) خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ه) $TT'.OM = ۲R.MT$

$TT'^{۲} = ۴OH.HM$

چند ضلعی محاطی:

چند ضلعی محیطی:

در سوالات زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید:

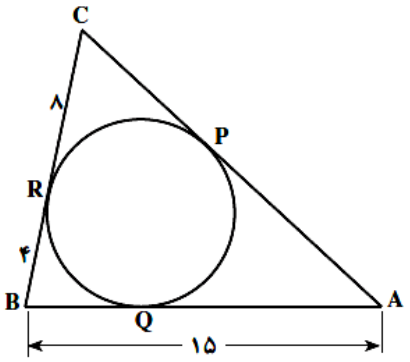
الف)مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث ، محل برخورد ..... آن مثلث است .

۱)ارتفاع های اضلاع ۲)عمود منصف های اضلاع ۳)نیمسازهای زاویه های درونی ۴)میانه های اضلاع

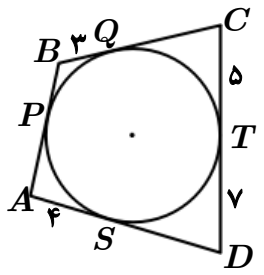
ب)مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث ، محل برخورد ..... آن مثلث است .

۱)ارتفاع های اضلاع ۲)عمود منصف های اضلاع ۳)نیمسازهای زاویه های درونی ۴)میانه های اضلاع

۱۰ – در شکل مقابل ، ضلع های مثلث ABC در نقطه های P و Q و R بر دایره مماس اندبا تو جه به مقدار های داده شده ، اندازه ی ACرا بیابید.

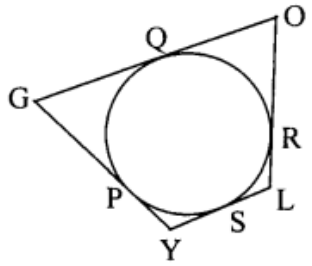


۱۱ - اگر P، Q، T و S نقطه‌های تماس ضلع‌های $ABCD$ با دایره باشند، محیط چهارضلعی را به‌دست آورید.



۱۲ — ضلع های چهار ضلعی محیطی GOLY بردایره مماسند،

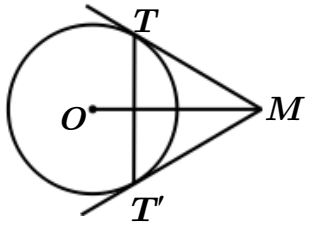
ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



۱۳ -زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه A بر دایره $C(O,۵)$ برابر ۶۰ درجه است. طول پاره‌خط OA را بیابید.

۱۴ - دایره $C(O,۴)$ و نقطه M به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خط‌های MT و MT' بر این دایره مماسند.(T و T' نقطه‌های تماسند.)

الف) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.



ب) طول وتر TT' را به‌دست آورید.

ج) اندازه‌ی زاویه‌ی TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

۱۵ - دایره $C(O,۶)$ و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۲ واحد از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خط‌های AB و AC بر این دایره مماس هستند. (B و C نقطه‌های تماس هستند) نوع مثلث ABC را تعیین کنید.

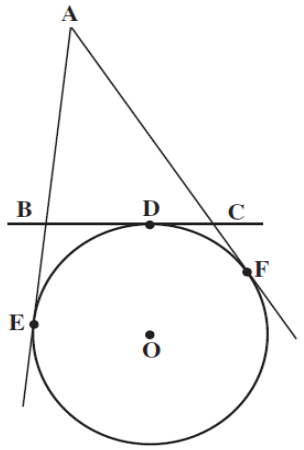
۱۶

جاهای خالی را بطور مناسب پرکنید :

الف) اگر دریک چهار ضلعی، زاویه های رو به رو . . . . . یکدیگر باشند ، آن چهار ضلعی‌محاطی است .

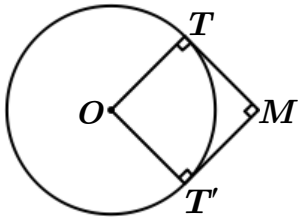
ب) از هر نقطه خارج یک دایره فقط . . . . . بر آن دایره می توان رسم نمود.

۱۷ - خط‌های AE ، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E ، F و D بردایره مماس هستند (مطابق شکل)، ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



۱۸ - دایره $C(O,R)$ مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره برهم عمود باشند.

۱۹ - از نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,۷)$ دو مماس عمود بر هم بر آن رسم کرده‌ایم.
اگر T و T' نقاط تماس دو مماس با دایره باشند، اندازه‌ی MT را بیابید.



وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم

۲۰

وضعیت دو دایره نسبت به هم را در حالت های زیر تعیین کنید.

الف) $R = ۱ + \sqrt{۲}$ ، $R' = \sqrt{۲} - ۱$ ، $d = ۱$

ب) $R = \frac{۱}{۳}$ ، $R' = \frac{۱}{۲}$ ، $d = \frac{۵}{۶}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱

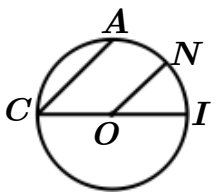
دودایره ی $C(O,۶)$ و $C'(O',۴)$ مفروضند اگر $OO'=d$ باشد اوضاع دایره را در حالتهای زیر بنویسید .

(باذکر دلیل)

الف) $d=۲$ ب) $d=۷$

۲۲ - در دایره‌ی به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA||ON$،

ثابت کنید: $\widehat{AN}=\widehat{NI}$

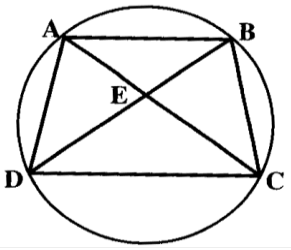


۲۳

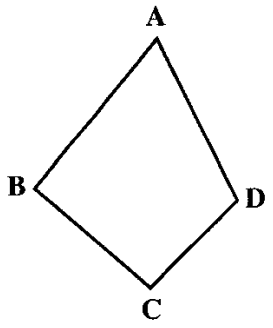
با توجه به شکل نشان دهید :

الف) اگر $AD=BC$ ، آنگاه $AC=BD$.

ب) اگر $AC=BD$ ، آنگاه $AD=BC$.



۲۴



در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.

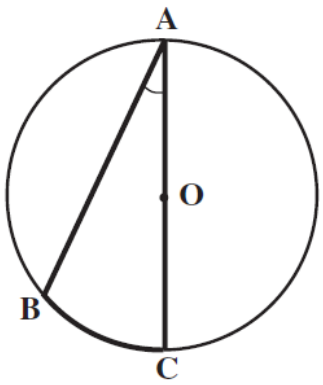
راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرد. از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.

زاویه محاطی:

زاویه ظلی:

قضیه۲۰۴: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

ثابت کنید: اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.



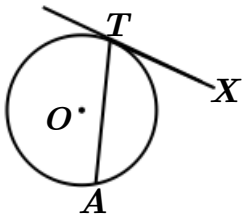
۲۵ - ثابت کنید در یک چهار ضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند.

قضیه ۲۰۵: ثابت کنید، اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

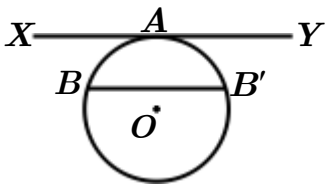
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه ۲۰۶: در هر دایره اندازه هر زاویه ظلّی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

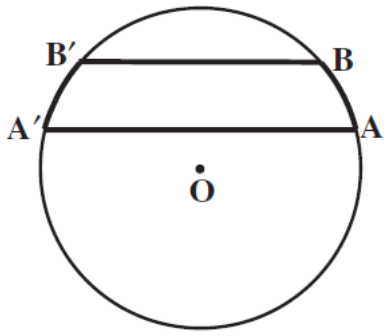
۲۶ - در شکل زیر اندازه زاویه ظلّی ATX برابر $(۲a-۶)^\circ$ و اندازه کمان مقابل به آن برابر $(۳a+۳۳)^\circ$ باشد، مقدار a و اندازه زاویه ATX را بیابید.



۲۷ - خط XY در نقطه‌ی A بر دایره (C) مماس است.وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید کمان AB برابر با کمان AB' است.

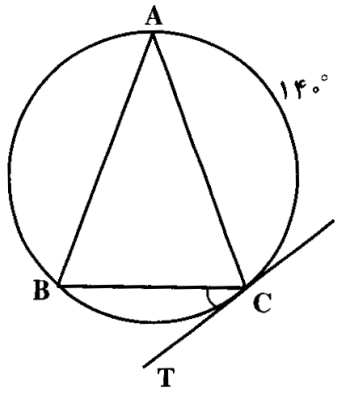


۲۸ – ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.



۲۹

در شکل روبه‌رو، $AB = AC$ ، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید.



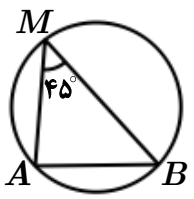
۳۰ – با استفاده از تعریف زاویه‌ی محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

کمان در خور (کمان حاوی)یک زاویه :

قضیه ۲۰۷:

۳۱ - دایره $C(O,R)$ مفروض است. وتر AB به طول $\sqrt{۲}$ سانتی‌متر داده شده است. با توجه به شکل، اگر $AMB = ۴۵^\circ$ مطلوب است محاسبه:

الف) شعاع دایره ب) فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB



۳۲ - پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر داده شده است. کمان در خور زاویه ۳۰ درجه روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم کنید.

۳۳ - پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر مفروض است، کمان در خور زاویه ۳۰ درجه روبه‌رو به این پاره‌خط می‌باشد، شعاع دایره‌ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.

۳۴ - پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر مفروض است، کمان در خور زاویه ۶۰ درجه روبه‌رو به این پاره‌خط می‌باشد، شعاع دایره‌ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵ - پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر و کمان در خور زاویه ۶۰ درجه روبه‌رو به این پاره‌خط داده است، فاصله مرکز دایره‌ای که کمان در خور قسمتی از آن است تا وسط پاره‌خط AB و شعاع دایره را به‌دست آورید.

۳۶ - کمان در خور زاویه $\alpha = ۶۰^\circ$ روبه‌رو به پاره‌خط AB (به طول a) بخشی از دایره‌ای با شعاع $R = ۲\sqrt{۳}$ است، مقدار a و فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB را بیابید.

۳۷

در مثلث ABC ضلع $BC = a$ ، $\hat{A} = \alpha$ و میانهٔ $AM = m_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۸

از مثلث ABC، ضلع $BC = a$ ، زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

زاویه بین دو وتر . زاویه بین امتداد دو وتر

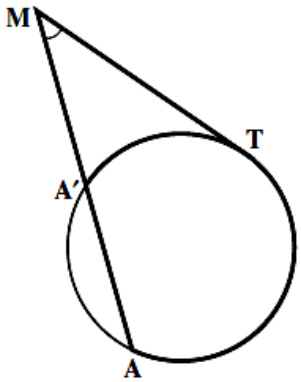
قضیه ۲۰۸: ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه ۲۰۹: ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف قدرمطلق تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های زاویه محدودند.

۳۹

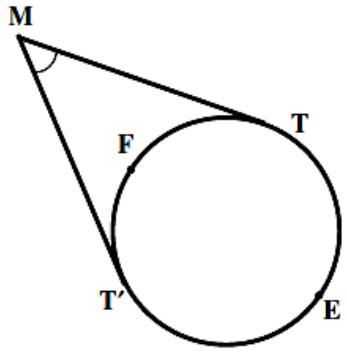
خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ T امتداد وتر AA' از این دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است (شکل). ثابت کنید :



$$A\hat{M}T = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$$

۴۰

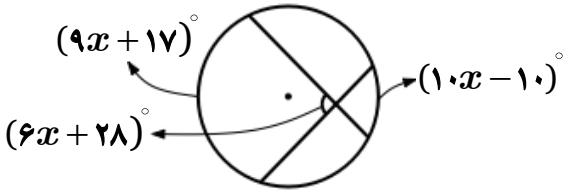
ثابت کنید زاویهٔ بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه T و T' بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه‌های T و T' است.



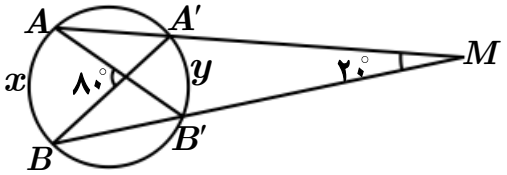
$$T\hat{M}T' = \left|\frac{\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}}{۲}\right|$$

۴۱

در شکل زیر مقدار x را بیابید.

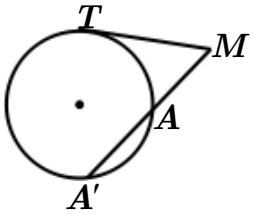


۴۲ - در شکل زیر x و y را به‌دست آورید.

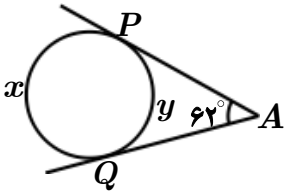


۴۳ - در شکل زیر خط MT مماس بر دایره در نقطه T و MA قاطع دایره است.

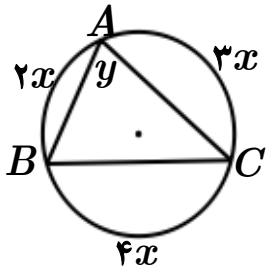
اگر $M=۸۰^\circ$ ، $\overset{\frown}{AT}=۱۰۰^\circ$ مطلوب است محاسبه $\overset{\frown}{A'T}$.

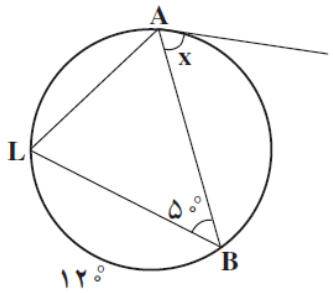


۴۴ - در شکل مقابل x و y را بیابید.



۴۵ - اندازه x و y را در شکل مقابل تعیین کنید.

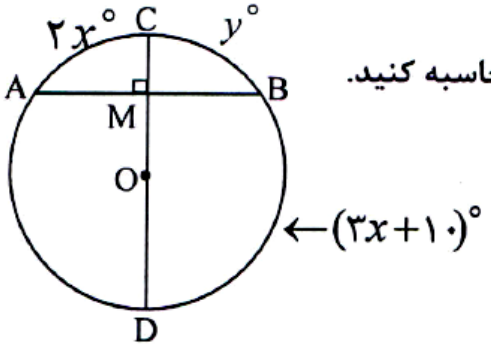




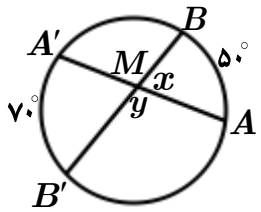
۴۶

قطر CD در نقطه ی M بر وترAB ا ز دایره ای به مرکز O عمود است .

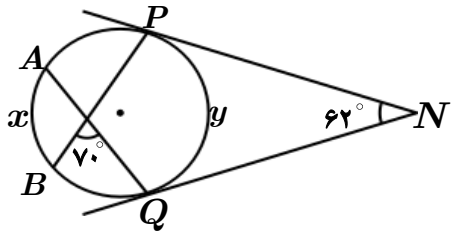
اگر $\overset{\frown}{AC} = ۲x^\circ$ ، $\overset{\frown}{BC} = y^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = (۳x+۱۰)^\circ$ باشد، x وy را محاسبه کنید.



۴۷ - در شکل مقابل مقدارهایx و y را بیابید.



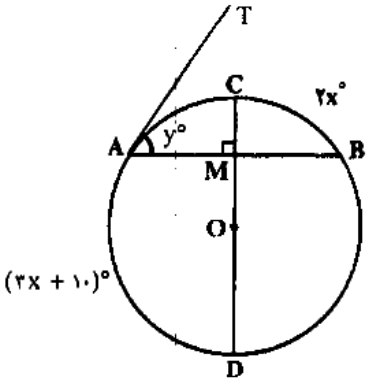
۴۸ – در شکل مقابل مقدارهای x و y را بیابید.



۴۹

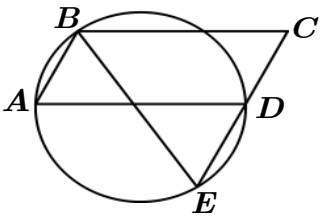
در شکل مقابل قطر CD بر وتر AB عمود و AT بر دایره مماس است.

اگر $\overset{\frown}{CB} = ۲x^\circ$ و $\overset{\frown}{AD} = (۳x + ۱۰)^\circ$ و $T\hat{A}B = y^\circ$ آنگاه x و y را محاسبه کنید.

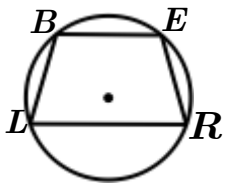


۵۰ – در شکل مقابل چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های C، D و E بر یک خط راست واقع‌اند.

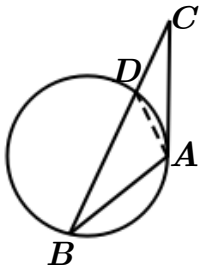
ثابت کنید: $BE = BC$



۵۱ - در دایره (C)، $ER = BL$ مفروض است. ثابت کنید: $BE || LR$



۵۲ - در دایره $C(O,R)$ مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند.
خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است.
ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

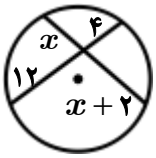


نیمسال اول سال تحصیلی

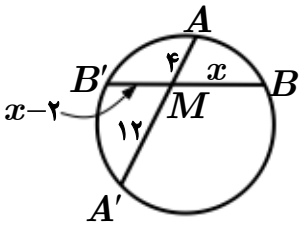
رابطه طولی در دایره

قضیه ۲۰۱۰: از نقطه M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند،
ثابت کنید: $MA.MA' = MB.MB'$

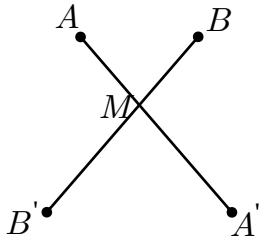
۵۳ - در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.



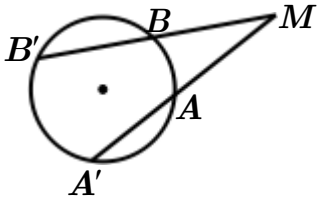
۵۴ - در شکل مقابل مقدار x را حساب کنید.



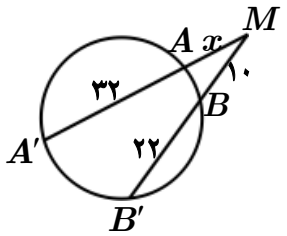
قضیه۲۰۱۱: اگر دو پاره خط AA' و BB' در نقطه ی M یکدیگر را طوری قطع کنند
که $MA.MA' = MB.MB'$ آنگاه چهار نقطه B', B, A', A روی یک دایره اند.



۵۵ - در شکل مقابل ثابت کنید: $MA.MA' = MB.MB'$

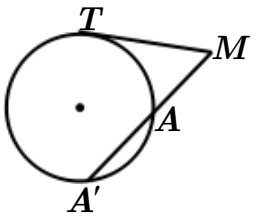


۵۶ - در شکل زیر مقادیر x را بیابید.

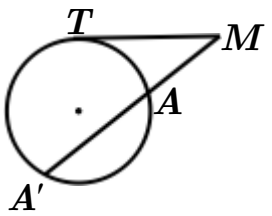


قضیه۲۰۱۲: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، آنگاه قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است.

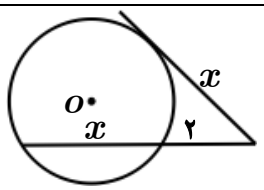
۵۷ - در شکل زیر خط MT مماس بر دایره در نقطه T و MA قاطع دایره است.
اگر $MA = ۴$ و $AA' = ۵$ باشد، اندازه MT را تعیین کنید.



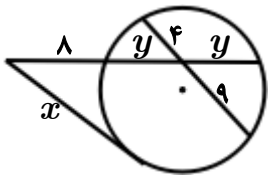
۵۸ - در شکل زیر $MA' = ۱۸$ و $MT = ۱۲$ می‌باشد، طول AA' را بیابید.



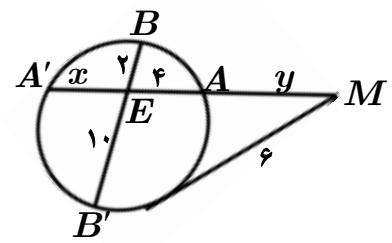
۵۹ - در شکل زیر مقدار x را به‌دست آورید.



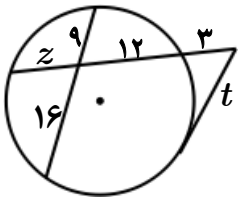
۶۰ - در شکل زیر مقادیر x و y را بیابید.



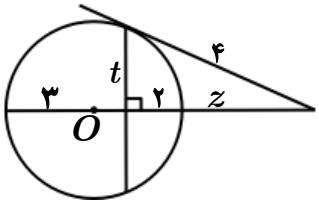
۶۱ - درشکل مقابل x و y را بدست آورید.



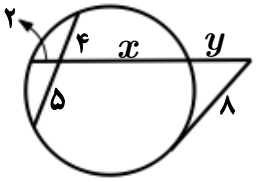
۶۲ - در شکل مقابل مقادیر z و t را به‌دست آورید.



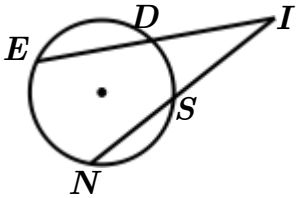
۶۳ – در شکل مقابل مقادیر z و t را به‌دست آورید.



۶۴ – با توجه به شکل مقادیر x و y را بیابید.

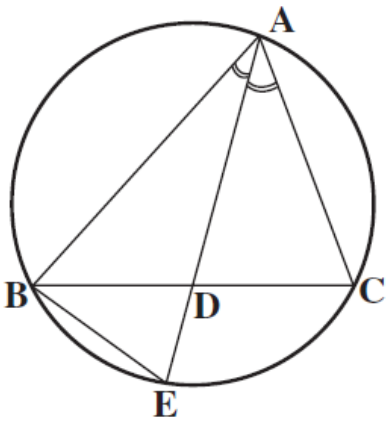


۶۵ – در شکل مقابل دو قاطع IE و IN با هم برابرند.
ثابت کنید: $IS = ID$



۶۶

با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید. (AD نیمساز زاویهٔ BAC است)



الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

ب) $AB.AC = AD.AE$

پ) $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$

مماس مشترک خارجی:

مماس مشترک داخلی:

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۶۷ – طول مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی $C(O,۷)$ و $C(O',۱)$ برابر ۸ است.
الف) طول خط‌المرکزین را محاسبه کنید. ب) دو دایره نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۶۸ – مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d=۱۳$ برابر با $۵a-۳$ باشد.

۶۹ – اندازه خط‌المرکزین دو دایره‌ی $C(O,۵)$ و $C(O',۳)$ برابر ۱۰ است. نسبت اندازه‌های مماس مشترک خارجی و مماس مشترک داخلی این دو دایره را حساب کنید.

۷۰ – مقدار m را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۲ و خط‌المرکزین $d=۱۳$ برابر با $۷m-۲$ باشد.

۷۱ – جدول زیر را کامل کنید.

تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی	وضع نسبی دو دایره
.....	.....	متخارج
.....	.....	مماس درون

۷۲ – دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار m را چنان تعیین کنید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲m - ۲$ باشد.

۷۳ – دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره را به‌دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۷۴ – شعاع‌های دو دایره۳ و ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها ۶ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی بین مرکزهای دو دایره را بیابید.

۷۵ – دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر $۲x + ۱$ سانتی‌متر مفروض‌اند، اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۶ – وضعیت دو دایره را در حالت‌های مماس برون، متقاطع و مماس درون در نظر بگیرید سپس در حالات ذکر شده مماس مشترک‌های داخلی و خارجی آن‌ها را در صورت وجود رسم کنید.

۷۷ – درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) در دو دایره مماس برون فاصله‌ی مرکزهای دو دایره برابر مجموع اندازه شعاع‌های دو دایره است.

ب) در هر چهارضلعی، اگر مجموع اضلاع مقابل یکسان باشد، آن چهارضلعی محیطی است.

ج) در هر دو دایره مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین همرس‌اند.

۷۸

دایرهٔ $C(O, R)$ ونقطهٔ M واقع در خارج این دایره داده شده اند ، از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید .(مراحل رسم را توضیح دهید)

۷۹

ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرسند.

۸۰

در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط‌المرکزین آنها چه می‌توان گفت؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

یادداشت:

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل سوم: تبدیل‌ها

نگاشت

۱ - تبدیل $T(x,y)=(x+۱,۳y)$ مفروض است.

الف) تصویر نقاط $A=(۳,-۲)$ و $B=(۲,۵)$ را تحت این تبدیل به‌دست آورید.

ب) تحت این تبدیل نقطه‌ی $(۴,۹)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲ - نقاط $A=(۳,۷)$ و $B=(-۴,۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات تصویر نقاط را تحت تبدیل $R(x,y)=(y,x)$ به‌دست آورید.

ب) طول پاره‌خط AB و تصویرش و نیز شیب AB و شیب تصویرش را با هم مقایسه کنید.

۳ - تحت تبدیل $T(x,y)=(-۲x+۱,۳y-۲)$، نقطه‌ی $A'=(-۱,۴)$ تصویر چه نقطه‌ای است.

۴- اگر $A=(۵,-۴)$ و $B=(۳,۲)$ دو سر پاره‌خط AB و A' و B' تصاویر آن‌ها تحت تبدیل $T(x,y)=(۲x,۲y)$ باشند،

الف) مختصات نقاط A' و B' را بیابید.

ب) طول پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ را به‌دست آورده و تعیین کنید که این تبدیل ایزومتری است یا خیر؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ - نقاط $A=(-۳,۱)$ ، $B=(-۲,-۲)$ ، $C=(۱,-۱)$ و $D=(۳,۳)$ رأس‌های یک ذوزنقه می‌باشند، ذوزنقه و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+۶,x)$ به‌دست آورده سپس رسم کنید.

۶ - نقاط $A=(۱,۲)$ و $B=(-۲,-۱)$ را در نظر بگیرید. تصویر این نقاط را تحت تبدیل $T(x,y)=(x,-y)$ ، A' و B' می‌نامیم. الف) طول AB و $A'B'$ را با هم مقایسه کنید.
ب) شیب AB و $A'B'$ را با هم مقایسه کنید.

۷ - الف) تصویر نقطه‌ی $A=(-۱,۲)$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۲,y+۳)$ به‌دست آورید و آن را A' بنامید.
ب) مختصات تصویر A' را تحت انتقال $T'(x-۳,y+۱)=(x+۲,y+۳)$ به‌دست آورید و آن را A'' بنامید.
ج) ضابطه انتقالی را بنویسید که مستقیماً A را به A'' تصویر نماید.

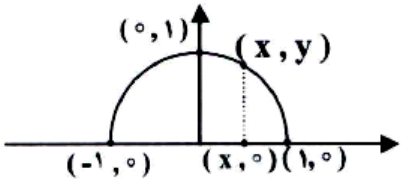
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸

تبدیل تصویر قائم نیم دایرهٔ داده شده روی محور x ها را در نظر بگیرید .

الف) تصویر $(۰,۱)$ و $(-۱,۰)$ چیست ؟

ب) $(\frac{۱}{۲},۰)$ تصویر چه نقطه ای است ؟



۹ - تبدیل $T(x,y)=(۲x+۱,۲y)$ را در نظر بگیرید.

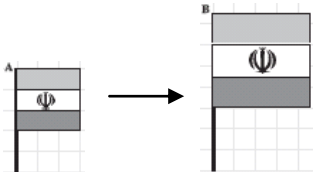
الف) تصویر نقاط $A=(۱,۲)$ و $B=(۰,۰)$ را تحت این تبدیل به‌دست آورید.

ب) طول و شیب پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.

پ) آیا تبدیل T ایزومتری است؟ و آیا این تبدیل سیب خط را حفظ می‌کند؟ (پاسخ خود را با دلیل نشان دهید.)

۱۰ - ابتدا تبدیل را تعریف کنید سپس نوع هر یک از تبدیل‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $T(x,y)=(x,y-\frac{۱}{۲})$ ب) $T(x,y)=(\frac{x}{۳},\frac{y}{۳})$ ج)



۱۱ - اگر $T(x,y)=(x-۲y,x+y)$ ضابطه‌ی یک نگاشت باشد و تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی $A'=(-۳,۳)$ باشد. مختصات نقطه‌ی A را بنویسید.

۱۲ - نقاط $A=(۷,۰)$ و $B=(۵,۳)$ مختصات دو سر یک پاره‌خط هستند.

الف) تصویر پاره‌خط را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+۳,x-۳)$ به‌دست آورید.

ب) تصویر پاره‌خط AB را ابتدا تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کنید و آن را $A'B'$ بنامید. سپس تصویر $A'B'$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۳,y-۳)$ تعیین کنید. نتیجه‌ی به‌دست آمده را با نتیجه‌ی (الف) مقایسه کرده و توضیح دهید.

۱۳ - نقاط $M=(۳,۳)$، $N=(۱,-۱)$، $P=(-۲,۲)$ و $D=(-۳,۱)$ رأس‌های یک ذوزنقه هستند.

الف) مختصات تصویر این ذوزنقه را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۲,-y)$ به‌دست آورید.

ب) این تبدیل را توصیف کنید. (دو ویژگی این تبدیل را بررسی کنید.)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتقال

۱۴
نقاط(۵ , ۳-)A ، (۳ , ۱)B داده شده است ، ضابطه ی انتقالی را بنویسید که A را روی B تصویر کند .

۱۵ - نقاط $A=(۱,۱)$ ، $B=(۴,۲)$ ، $C=(۳,۵)$ و $D=(۰,۴)$ رأس‌های یک مربع‌اند.
الف) مربع و تصویرش را تحت انتقالی که رأس را بر روی D تصویر می‌کند، رسم کنید.
ب) قاعده نگاشت این انتقال را بنویسید.
ج) این انتقال را توصیف کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۶ - نقاط $A=(۶,۱)$ ، $B=(۸,۳)$ ، $C=(۶,۵)$ و $D=(۴,۳)$ رأس‌های یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۵,y-۲)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلع‌ها با هم مقایسه کنید. (بررسی یک مورد کافی است)

۱۷ - نقاط $A=(۰,۲)$ ، $B=(۳,۰)$ و $C=(-۱,-۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند. تصویر مثلث ABC را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۱,y-۴)$ را رسم کنید.

۱۸ - تبدیل $T(x,y)=(x+۳,y-۳)$ و نقاط $A=(۴,۲)$ و $B=(۱,۳)$ مفروض‌اند.

الف) پاره‌خط AB و تصویرش $A'B'$ را رسم نمایید.

ب) آیا چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است؟ چرا؟

۱۹ - الف) تصویر نقطه‌ی $A=(-۱,۲)$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۲,x+۳)$ به‌دست آورید و آن را A' بنامید.

ب) مختصات تصویر A' را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۳,y+۱)$ به‌دست آورید و آن را A'' بنامید

ج) ضابطه‌ی انتقالی را بنویسید که مستقیماً A را به A'' تصویر نماید.

بازتاب

۲۰ - الف) خط $y=\frac{۱}{۲}x-۱$ و تصویر بازتاب آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

ب) معادله تصویر بازتاب خط داده شده را به‌دست آورید.

۲۱ - $A=(۰,۲)$ ، $B=(-۵,۰)$ ، $C=(-۳,-۵)$ و $D=(۲,-۳)$ رأس‌های یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت بازتاب $R(x,y)=(y,x)$ را رسم کنید.

ب) مساحت مربع و تصویرش را مقایسه کنید.

همین سؤال با $R(x,y)=(-y,-x)$

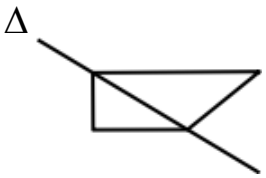
۲۲- اگر $A=(۰,a)$ بازتاب نقطه‌ی $C=(۴,۵)$ نسبت به مرکز تقارن $W=(۲,۱)$ باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

۲۳ - تحت یک بازتاب نقطه‌ی $A=(-۳,-۱)$ روی نقطه‌ی $A'=(۳,۵)$ تصویر می‌شود. الف) محور تقارن را رسم کنید.

ب) معادله‌ی محور تقارن را بنویسید.

۲۴ - شکل مقابل را در پاسخ‌نامه برگردان کنید:

بازتاب آن را تحت خط داده شده رسم نمایید.



۲۵

نقاط $A(۲,۰)$، $B(۶,۲)$، $C(۵,۴)$ و $D(۱,۲)$ رأس های یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل و تصویرش را تحت بازتاب $T(x,y)=(x,-y)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلع AB و تصویرش را به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

پ) آیا تبدیل ایزو متری است؟چرا؟

دوران

۲۶ - ابتدا ضابطه تبدیل دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی ۹۰° را بنویسید سپس معادله‌ی تصویر خط $x-y+۲=۰$ را تحت این دوران بیابید.

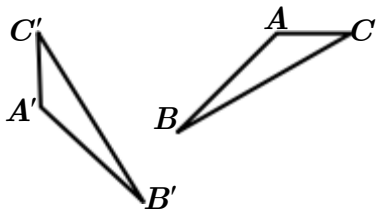
۲۷ - نقاط $A=(۵,۳)$ ، $B=(۳,-۱)$ و $C=(۵,-۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(-y,x)$ را رسم کنید.

ب) نوع تبدیل را مشخص کنید و با توجه به آن تعیین کنید آیا این تبدیل ایزومتری است یا خیر؟

۲۸ - در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ دوران یافته‌ی مثلث ABC است.

مرکز دوران و زاویه‌ی دوران را مشخص کنید. (توضیح دهید)



۲۹ - الف) نقطه‌ی $A=(-۱,۲)$ را تحت زاویه‌ی ۹۰° حول مبدأ مختصات دوران داده، مختصات نقطه‌ی جدید را به‌دست آورده و A' بنامید.

ب) مختصات دوران یافته‌ی نقطه‌ی A' را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۸۰° به‌دست آورید و A'' بنامید.

ج) تحت چه دورانی مستقیماً نقطه‌ی A به A'' تبدیل می‌شود.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۰ - نقطه‌ی $A=(۲,-۱)$ را تحت زاویه‌ی ۲۷° حول مبدأ مختصات دوران داده، مختصات نقطه‌ی جدید را به‌دست آورید.

۳۱ - الف) خط $۲x+y-۶=۰$ و تصویر آن را تحت دوران ۲۷° (حول مبدأ مختصات) رسم نمایید.
ب) معادله‌ی خط تصویر را به دست آورید.

۳۲ - نقاط $A=(۲,-۱)$ و $B=(۱,۲)$ دو سر یک پاره‌خط هستند.
الف) تصویر پاره‌خط AB را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+۳,x-۳)$ به‌دست آورید $A''B''$ نامیده و آن‌ها را رسم نمایید.
ب) تصویر پاره‌خط AB را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کنید و آن را $A'B'$ بنامید. اگر تصویر $A'B'$ تحت یک انتقال بر پاره‌خط $A''B''$ منطبق گردد، ضابطه‌ی این انتقال را به‌دست آورید.

۳۳ - عبارت‌های زیر را چنان کامل کنید که هر قسمت به گزاره‌ای درست تبدیل شود.
الف) دوران یافته‌ی $A(۴,۳)$ با زاویه‌ی ۹۰° حول مبدأ نقطه‌ی . . . است.

ب) دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۱۸۰° را . . . می‌نامند و در این حالت نقطه‌ی O را . . . می‌گویند.

ج) تبدیلی که فاصله‌ی بین نقاط را حفظ می‌کند . . . است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تجانس

۳۴ - نقاط $A=(۱,۳)$ ، $B=(۵,۵)$ و $C=(۶,۳)$ رأس‌های یک مثلث‌اند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $D(x,y)=(۲x,۲x)$ را رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول یکی از ضلع‌ها مقایسه کنید.

ج) خط‌هایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵ - نقاط $A=(۳,۳)$ ، $B=(-۲,۱)$ و $C=(۴,-۲)$ رأس‌های یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش مجانس آن را با در نظر گرفتن $O(۰,۰)$ به عنوان مرکز تجانس و $\frac{۱}{۲}$ به عنوان عامل مقیاس رسم کنید.

ب) نوع تجانس را مشخص کنید.

ج) نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث $A'B'C'$ را تعیین کنید.

۳۶ - نقاط $A=(۱,۲)$ ، $B=(۰,۱)$ ، $C=(۱,۰)$ و $D=(۲,۱)$ رأس‌های یک مربع هستند.

الف) مربع $ABCD$ و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن $O(۰,۰)$ به عنوان مرکز تجانس و عدد ۲ به عنوان عامل مقیاس را رسم کنید.

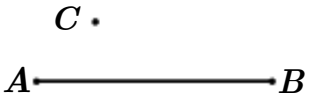
ب) نوع تجانس را مشخص کنید.

ج) نسبت مساحت مربع $A'B'C'D'$ به مساحت مربع $ABCD$ را مشخص کنید.

ج) نسبت محیط مربع $A'B'C'D'$ به محیط مربع $ABCD$ را بنویسید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۷ - پاره‌خط AB و نقطه‌ی C خارج آن را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن C به عنوان مرکز تجانس، تصویر مجانس پاره‌خط AB را با نسبت $k=\frac{۱}{۲}$ رسم نمایید. (روش رسم را توضیح دهید)



۳۸ - نقاط $A=(۱,۱)$ ، $B=(۱,۳)$ و $C=(۳,۱)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. اگر $O(۰,۰)$ مرکز تجانس و تبدیل $D(x,y)=(۲x,۲x)$ باشد.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل را رسم کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

ج) با توجه به ویژگی‌های تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

د) نوع تجانس را مشخص کنید.

۳۹ - نقاط $A=(۲,۲)$ ، $B=(۸,۲)$ ، $C=(۸,۶)$ و $D=(۴,۶)$ رأس‌های یک ذوزنقه هستند. اگر $O(۰,۰)$ مرکز تجانس باشد:

الف) تصویر این ذوزنقه را تحت تجانس $D(x,y)=(\frac{۱}{۴}x,\frac{۱}{۴}-y)$ رسم کنید.

ب) نوع تجانس را بنویسید. ج) نسبت تجانس را بنویسید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۰ - نقاط $A=(۲,۰)$ ، $B=(۲,۳)$ ، $C=(۴,۳)$ و $D=(۴,۰)$ رأس‌های یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل $ABCD$ و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن $O(۰,۰)$ به عنوان مرکز تجانس و ۲ به عنوان عامل مقیاس رسم کنید.

ب) نوع تجانس را مشخص کنید.

ج) نسبت $\frac{OB'}{OB}$ را به‌دست آورید.

تبدیل یافته‌ی خط

۴۱ - معادله تصویر خط $y=x+۵$ را تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ را به‌دست آورده سپس آن را رسم کنید.

۴۲ - تحت یک بازتاب تصویر خط $L: x+y-۳=۰$ خط $L': x+y+۳=۰$ است، معادله‌ی محور تقارن را تعیین کنید.

۴۳ - معادله تصویر خط $۳x-y+۶=۰$ تحت دوران ۹۰° حول $O(۰,۰)$ را به‌دست آورید.

۴۴ - خط $x+۲y-۶=۰$ مفروض است. معادله خط تصویر را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۳,y+۱)$ به‌دست آورید.

۴۵ - ازتاب خط $y=۲x+۴$ را نسبت به خط $y=-x$ بیابید.

۴۶ - معادله تصویر خط $x+۲y-۶=۰$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(-y,-x)$ را به‌دست آورید.

۴۷ - معادله تصویر خط $۳x-y+۶=۰$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x,-y+۲)$ به‌دست آورید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۸ - دو معادله‌ی خط $L_1: 3x-2y-6=0$ و $L_2: 3x-2y-12=0$ مفروض‌اند. ضابطه‌ی دو انتقال متفاوت که تحت آن‌ها L_2 تصویر L_1 باشد را بنویسید.

۴۹ - معادله تصویر خط $2y=x-8$ را تحت تقارن نسبت به محور xها بنویسید.

۵۰ - معادله تصویر خط $y=\frac{1}{2}x-4$ را تحت تقارن نسبت به محور xها بنویسید.

۵۱ - تحت یک بازتاب خط $3x-7y+9=0$ تصویر خط $3x-7y-9=0$ است، معادله‌ی محور تقارن رابنویسید.

۵۲
معادلهٔ تصویر خط $L: 2x+y=6$ تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ را به دست آورید .

اثبات با استفاده از ویژگی‌های تبدیل

با استفاده از ویژگی‌های بازتاب قضیه زیر را اثبات کنید.

قضیه: زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با یکدیگر برابرند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

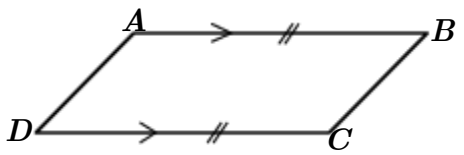
قضیه: با استفاده از تبدیل دوران ثابت کنید هرگاه دو خط یک‌دیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یک‌دیگرند.

قضیه: با استفاده از ویژگی تبدیل‌ها ثابت کنید اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.

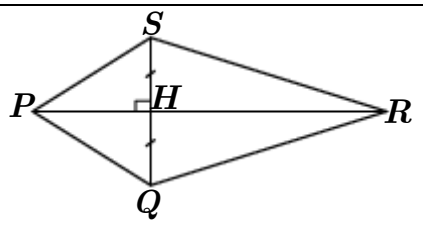
۵۳ -

در چهار ضلعی $ABCD$ اگر $AB||DC$ ، با استفاده از تبدیل انتقال ثابت کنید:

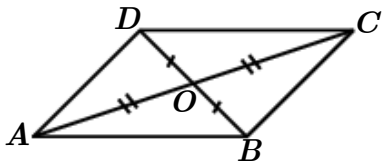
$AD||BC$ و $AD=BC$



۵۴ - در شکل روبه‌رو PR عمود منصف QS است با استفاده از ویژگی‌های تبدیل‌ها ثابت کنید: $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$



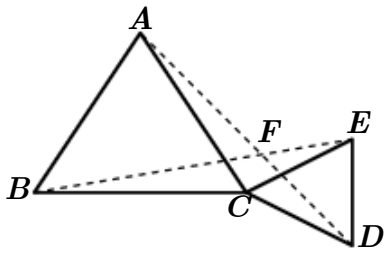
۵۵ - قطرهای چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را نصف کرده‌اند،
با استفاده از تبدیل دوران ثابت کنید $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.



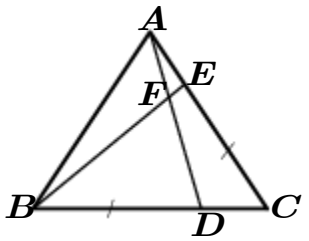
۵۶ - مثلث ABC و مثلث ECD متساوی‌الاضلاع هستند.

با استفاده از ویژگی‌های تبدیلات ثابت کنید:

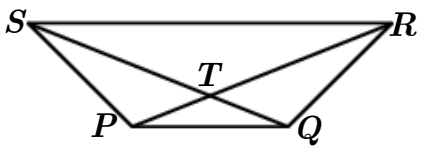
$AD = BE$ و $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$



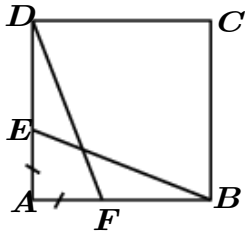
۵۷ - ABC متساوی الاضلاع است و $BD=CD$، با استفاده از تبدیلات ثابت کنید:
$AD=BE$



۵۸ - در شکل روبه‌رو PQ و QS قطرها، $PT=QT$ و $RT=ST$،
با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $\overset{\Delta}{PQS}\cong\overset{\Delta}{QPR}$

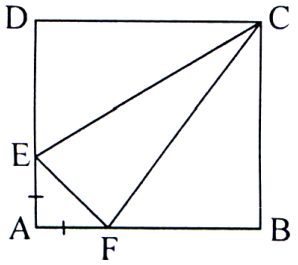


۵۹ - چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است و $AE=AF$،
با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $DE=BF$



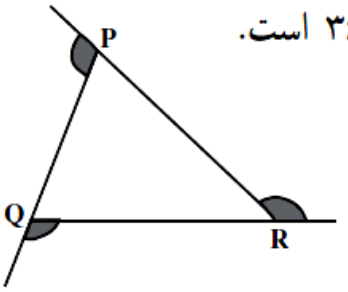
۶۰

چهار ضلعی ABCD یک مربع است و AE=AF ،با استفاده ازویژگی های تبدیل بازتاب ثابت کنید:CE=CF



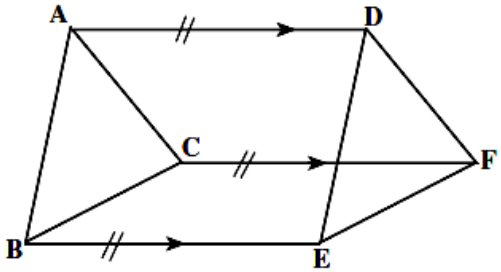
۶۱

در مثلث دلخواه PQR، ثابت کنید مجموع زاویه‌های خارجی °۳۶۰ است.



۶۲

پاره‌خط‌های AD، BE و CF مساوی و موازیند. ثابت کنید $ABC \cong DEF$.



یادداشت:

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل چهارم– هندسه در فضا

خط و صفحه در فضا

اصل ۱:

اصل ۲ :

اصل ۳ :

اصل ۴ :

اصل ۵ :

اصل ۶:

وضعیت دو صفحه نسبت به هم

فصل مشترک دو صفحه

وضعیت نسبی دو خط نسبت به هم در فضا

اصل توازی اقلیدس

حالت های مشخص شدن صفحه در فضا

وضعیت نسبی خط و صفحه نسبت به هم در فضا:

۱ - سه نقطه‌ی A، B و C مفروض‌اند،

الف) اگر . . . . . آنگاه بیشمار صفحه از سه نقطه‌ی A، B و C می‌گذ رد.

الف) اگر . . . . . آنگاه یک صفحه بر سه نقطه‌ی A، B و C می‌گذ رد.

۲ - هر یک از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزاره درست حاصل شود.

الف)) از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند یک و تنها یک . . . می‌گذرد.

ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط . . . می‌نامیم.

پ) اگر دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری دو به دو موازی باشند، . . . .

ت) اگر P و Q دو صفح عمود بر هم باشند، هر کدام شامل خطی است که . . . .

۳ - هر یک از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزاره درست حاصل شود.

الف) اگر دو صفحه‌ی متمایز یک نقطه مشترک داشته باشد آنگاه در یک . . . مشترک خواهند بود.

ب) در هر صفحه حداقل . . . وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.

ج) از نقطه‌ی O خارج صفحه‌ی P . . . خط می‌گذرد که با P موازی است.

د) از دو خط متقاطع یک و تنها یک . . . می‌گذرد.

۴ - ر یک از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزاره درست حاصل شود.

الفحداقل . . . نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

ب) محل تقاطع دو صفحه، . . . آن دو صفحه نامیده می‌شود.

ج) اگر L و L' دو خط . . . باشند، یک صفحه شامل L وجود دارد که با L' موازی است.

د) از یک نقطه خارج یک صفحه‌ی . . . خط موازی آن صفحه می‌گذرد.

از هر دو نقطه در فضا . . . صفحه می‌گذرد.

اگر دو صفحه‌ی متمایز یک نقطه مشترک داشته باشد آنگاه . . . مشترک‌اند.

۵ - اگر L_1 و L_2 دو خط متقاطع و P_1 صفحه‌ای شامل L_1 و P_2 صفحه‌ای شامل L_2 باشد وضعیت دو صفحه‌ی P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه است؟ (توضیح دهید)

۶ - اگر A ، B ، C و D چهار نقطه متمایز در فضا باشند، ثابت کنید این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر دو خط AB و CD متقاطع یا موازی باشند.

۷ - اگر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 دو به دو متقاطع باشند ثابت کنید این سه خط یا در یک صفحه قرار دارند یا همرسند.

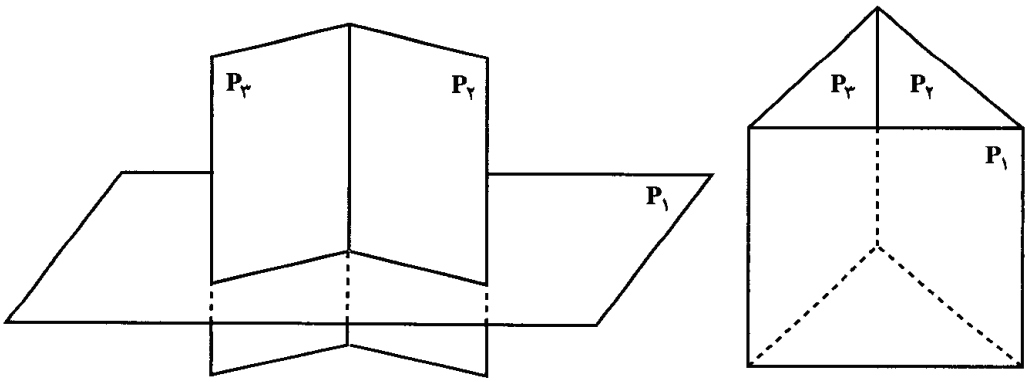
۸ - سه خط L_1 ، L_2 و L_3 دو به دو متقاطع هستند ولی همرس نیستند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹ - اگر A ، B ، C و D چهار نقطه متمایز در فضا باشند، که در یک صفحه قرار ندارند . وضعیت خط هایی که از دو به دو این نقطه ها می گذرد ، چگونه است.

۱۰

اگر P_1 ، P_2 و P_3 سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید فصل مشترکهای این سه صفحه، یا سه خط موازیند و یا هر سه از یک نقطه می‌گذرند.



راهنمایی: دو صفحه P_1 ، P_2 یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. وضعیت این خط و صفحه P_3 را در نظر بگیرید.

خط و صفحه های موازی:

قضیه: ثابت کنید اگر خط L با صفحه P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می‌کند.

قضیه :ثابت کنید اگر خط L با یکی از خط‌های صفحه P موازی باشد، آنگاه خط L با خود صفحه P موازی است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

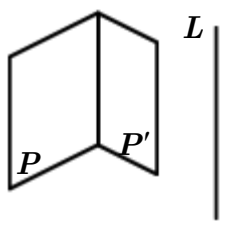
۱۱ - الف) از نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P خطی موازی P رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.)
ب) در فضا اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند آیا لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند؟ در صورت درستی این حکم را ثابت کنید و در صورت نادرستی، یک مثال با شکل رسم کنید.

۱۲ - چند خط می توان از یک نقطه مفروض موازی یک صفحه ی مفروض گذراند؟

نتیجه ۱ :

نتیجه ۲ :

قضیه : ثابت کنید اگر خطی با دو صفحه متقاطع، موازی باشد، آنگاه با فصل مشترک آن‌ها موازی است.



چند ویژگی از خط ها و صفحه های موازی

نتیجه ۱:

نتیجه ۲ :

نتیجه ۳ :

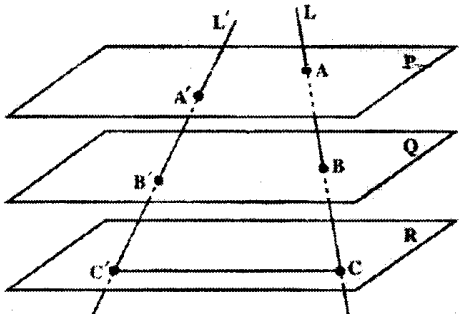
صفحه های موازی

۱۹- نقطه‌ی A خارج صفحه P مفروض است.

از A یک صفحه موازی P رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه(تالس در فضا):ثابت کنیداگر P ، Q وRسه صفحه موازی باشند و دوخط L و'L این صفحه ها را بـه ترتیـب درنقطه های A، B و C و 'A، 'B و 'C قطع کنند،آنگاه:



$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

زاویه‌ی بین دو خط متنافر

۲۰ – ثابت کنید که اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع بر یکی از این صفحه‌ها، با صفحه دیگر موازی است. آیا عکس مطلب نیز درست است؟ یعنی اگر هر خط از صفحه مفروضی با صفحه مفروض دیگر موازی باشد، آیا آن دو صفحه موازیند؟

۲۱ - اگر O نقطه‌ای خارج صفحه‌ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خط‌های گذرنده از O که با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

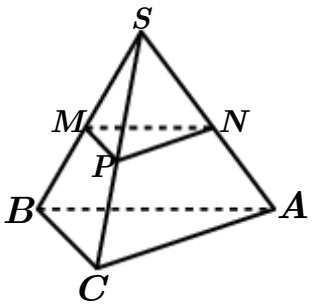
۲۲ - ثابت کنید اگر دو صفحه با صفحه‌ی سومی موازی باشند، خودشان با هم موازیند.

۲۳ - ثابت کنید اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی، موازی باشد با دیگری هم موازی است.

۲۴ - ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه‌ی موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵ – ثابت کنید در یک هرم، وسط یال‌های آن در یک صفحه موازی قاعده قرار دارند.



۲۶

اگر O نقطه‌ای خارج از صفحه‌ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خطهای گذرنده از O با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

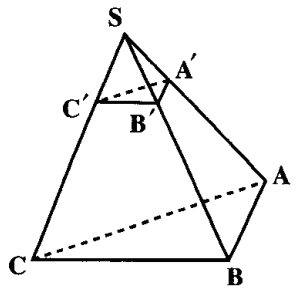
۲۷

در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند؟
در صورت درستی این حکم، آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی، یک مثال با شکل رسم کنید.

۲۸

در هرم روبه‌رو صفحه $A'B'C'$ موازی صفحه قاعده ABC است و $SA = 5SA'$.

نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC چقدر است؟



تعامد

قضیه تعامد : ثابت کنید اگر خط L صفحه‌ی P را قطع کند و بر دو خط غیر موازی در نقطه‌ی تقاطع عمود باشد آنگاه خط L بر صفحه P عمود است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نتیجه ۱ :

نتیجه ۲ :

نتیجه ۳:

۲۹ - در دو حالت زیر از نقطه‌ی A ، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید. (روش رسم را توضیح دهید.)

الف) نقطه‌ی A روی خط L باشد.

ب) نقطه‌ی A خارج خط L باشد.

۳۰ - نقطه‌ی A خارج صفحه P مفروض است.

از A خطی رسم کنید که بر صفحه‌ی P عمود باشد. (روش رسم را توضیح دهید.)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۱

اگر صفحه P با دو صفحه P_1 و P_2 موازی باشد، دو صفحه P_1 و P_2 نیز با هم موازیند.

۳۲

اگر خط L با دو خط L_1 و L_2 موازی باشد، دو خط L_1 و L_2 نیز با هم موازیند.

۳۳ – هر یک از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزاره درست حاصل شود.

پ) هر صفحه، با . . . و یک خط عمود بر آن، مشخص می‌شود.

ت) مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند . . . آن پاره‌خط نام دارد.

در یک مکعب مستطیل، هر دو وجه . . . بر هم عمودند.

از هر نقطه مانند A در فضا، . . . خط می‌گذرد که بر صفحه‌ای مانند P عمود است.

صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط، بر آن عمود باشد . . . می‌نامیم.

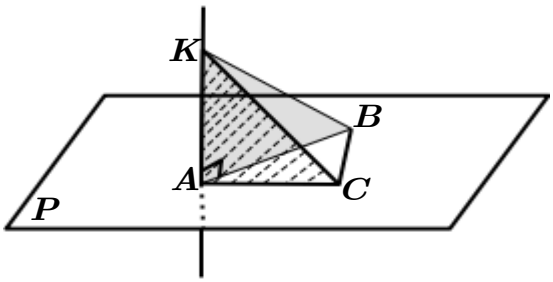
دو خط عمود بر یک صفحه . . . هستند.

صفحه‌ی عمود منصف یک پاره‌خط را تعریف کنید.

۳۴ – ثابت کنید که در یک مکعب مستطیل هر یال در دو وجه قرار دارد، و با دو وجه موازی است، و بر دو وجه عمود است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵ - فرض کنید A، B و C سه نقطه از صفحه P باشندکه بر یک خط قرار ندارند و $AB=AC$. اگر K نقطه‌ای خارج صفحه P باشد که $KB=KC$ و خط KA بر خط AB عمود باشد، ثابت کنید خط KA بر صفحه P عمود است.

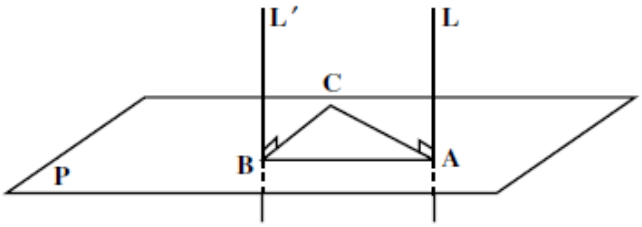


۳۶

فرض کنید L و L′ دو خط موازی باشند که صفحه P را به ترتیب در نقاط A و B قطع کنند.

اگر C نقطه‌ای در صفحه P باشد که روی خط AB نباشد و خط L بر خط AC و خط L′ بر خط BC عمود با

ثابت کنید دو خط L و L′ بر صفحه P عمودند.



۳۷ - اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، ثابت کنید هر خط که بر خط L عمود باشد با صفحه P موازی است.

۳۸ - ثابت کنید اگر خطی بر یکی از دو صفحه‌ی موازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است. (با رسم شکل)

۳۹

تمام خطهای گذرنده از یک نقطه مانند O و عمود بر یک خط مانند L، در یک صفحه قرار دارند که بر خط L عمود است.

۴۰

اگر L و L′ دو خط متنافر باشند، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L′ عمود است.

دو صفحه عمود بر هم:

قضیه ۷ :

۴۱ - اگر خط L بر صفحه P عمود نباشد، صفحه‌ای از خط L بگذرانید که بر صفحه P عمود باشد. (با رسم شکل)

۴۲ - ثابت کنید از هر خط L که بر صفحه P عمود نیست یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه P عمود باشد.

۴۳ - ثابت کنید که فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه، کوتاه‌ترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.

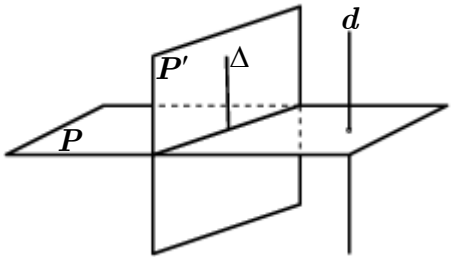
عمود مشترک دو خط متنافر را تعریف کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۴ - اگر L و L' دو خط متنافر باشند، عمود مشترک آن‌ها را رسم نمایید و روش رسم را توضیح دهید.

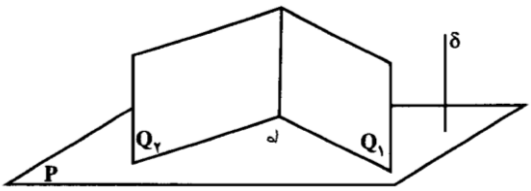
۴۵

اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید
هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P' موازی است.
راهنمایی: صفحه P' دارای یک خط عمود بر صفحه P است.



۴۶

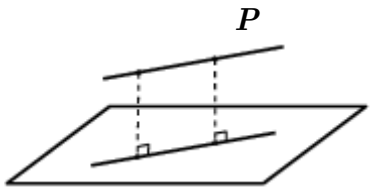
۲. اگر دو صفحه متقاطع Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود باشند، ثابت کنید فصل مشترک دو صفحه Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود است.
راهنمایی: یک خط δ عمود بر صفحه P در نظر بگیرید. وضعیت خط δ نسبت به دو صفحه Q_1 و Q_2 چگونه است؟



۴۷ - اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P' موازی است. (با رسم شکل)

۴۸ - اگر صفحه‌ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، ثابت کنید بر دیگری هم عمود است.

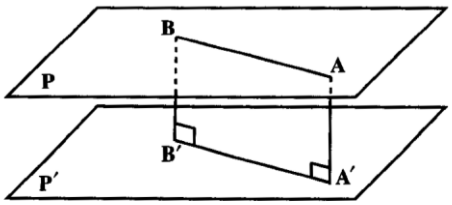
۴۹ - اگر خط L با صفحه P موازی باشد ثابت کنید فاصله هر دو نقطه از خط L، تا صفحه‌ی P، مساوی است.

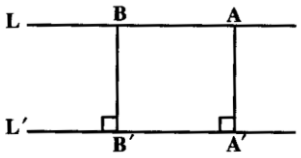


۵۰ - اگر دو نقطه‌ی متمایز A و B از صفحه‌ی P به یک فاصله و A و B هر دو در یک طرف صفحه‌ی P باشند، ثابت کنید خط AB با صفحه‌ی P موازی است.

۵۱

ثابت کنید برای دو صفحه موازی P و P′ ، فاصله هر دو نقطه از صفحه P، تا صفحه P′ برابر است.





مجموعه ای از سئوالات کامل کردنی امتحانات نهائی هندسه ۲

۱-اگرقسمتی ازیک شکل باکل شکل متشابه باشد، شکل را.....گویند.

پاسخ : خودمتشابه

۲-مجموع فواصل هرنقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع تا سه ضلع برابر.....است.

پاسخ : ارتفاع مثلث

۳-مجموع فواصل هرنقطه روی قاعده ی یک مثلث متساوی الساقین تا دوساق برابر.....است. پاسخ : ارتفاع واردبرساق

۴-قدرمطلق تفاضل فواصل هرنقطه ی دلخواه درامتداد قاعده ی یک مثلث متساوی الساقین ازدوساق آن برابر.....است. پاسخ: ارتفاع واردبرساق

۵-ازبرخورد نیمسازهای داخلی هرمتوازی الاضلاع یک ..... پدید می آید.

پاسخ : مستطیل

۶-از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل یک ..... پدید می آید.

پاسخ : مربع

۷-چهارضلعی حاصل ازتلاقی نیمسازهای داخلی یک مستطیل به اضلاع a و b برابر ..... است . پاسخ : $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$

۸-ازنقطه ای دلخواه روی قاعده ی یک مثلث متساوی الساقین دوخط به موازات دوساق رسم می کنیم مجموع دوپاره خط برابر .....است. پاسخ : ساق مثلث

۹-درهرمثلث مجموع دوضلع ازضلع سوم.....وتفاضل دوضلع ازضلع سوم..... است. پاسخ : بزرگ تر – کوچک تر

۱۰-درهرمثلث زاویه مقابل به ضلع ..... ، بزرگ تر است از زاویه مقابل به ضلع ..... .

پاسخ : بزرگ تر – کوچک تر

۱۱-مکان هندسی نقطه ای که از خط d به فاصله ی ℓ می باشددرصفحه .....ودرفضا..... می باشد. پاسخ : دوخط به فاصله ی ℓ ازd – استوانه ای بدون قاعده

۱۲-مکان هندسی نقطه ای که ازدوسرپاره خط AB به یک فاصله می باشد،درصفحه..... ودرفضا..... می باشد. پاسخ : خط عمودمنصف – صفحه عمودمنصف

۱۳-مکان هندسی نقطه ای درصفحه که ازدوضلع یک زاویه به یک فاصله باشد.....است.

پاسخ : نیمساز زاویه

۱۴-درهردایره قطرعمودبر وتر ، آن وتر وکمانهای نظیرش را..... می کند.

پاسخ : نصف

۱۵-در هردایره ازدووترنابرابر آن که ..... است به مرکزدایره نزدیک تر است.

پاسخ : بزرگ تر

۱۶-مرکزدایره ی محاطی یک چندضلعی محیطی نقطه همرسی ..... است .

پاسخ : نیمسازهای زوایای داخلی

۱۷-مرکز دایره محیطی یک چندضلعی محاطی نقطه همرسی ..... است .

پاسخ : عمودمنصف های اضلاع

۱۸-یک چهارضلعی محیطی است اگروتنها اگر..... اضلاع ..... باشد .

پاسخ : جمع – روبه رو برابر

۱۹-یک چهارضلعی محاطی است اگروتنها اگر زوایای روبه رو..... باشند.

پاسخ : مکمل

۲۰-مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره روی محیط آن می غلتد ..... می باشد . پاسخ : دایره ای به مرکز دایره داده شده و به شعاع $R + R'$

۲۱-مکان هندسی نقطه ای که ازدوصفحه ی موازی به یک فاصله بوده وازنقطه ی p به فاصله ی ℓ می باشد یک ..... است . پاسخ : دایره

۲۲-مکان هندسی مرکز دوایری که دریک نقطه روی خط ℓ مماس می باشد ..... است .

پاسخ : خطی عمود برخط ℓ درنقطه ی مورد نظر

۲۳-مکان هندسی نقاطی ازصفحه که دومماس مرسوم ازآن نقاط بردایره ی به مرکز O وشعاع R ، برهم عمودباشند.....است.

پاسخ: دایره ای به مرکز O وبه شعاع $R\sqrt{۲}$

۲۴-کمان درخورزاویه ۹۰° روبه رو به پاره خط AB ..... است

پاسخ : دایره ای به قطر AB

۲۵-ازهرنقطه خارج یک دایره فقط ..... بر آن دایره می توان رسم نمود.

پاسخ : دومماس

۲۶-مماس مشترک های داخلی وخط المرکزین دو دایره ..... .

پاسخ : همرسند

۲۷-زاویه ای که راسش روی دایره است ، یک ضلعش دایره راقطع می کند وضلع دیگرش بردایره مماس است ..... نامیده می شود. پاسخ : زاویه ی ظلی

۲۸-کمان های محصوربین دووتر ..... با هم مساویند.

پاسخ : موازی

۲۹-نگاشتی یک به یک ازصفحه به روی خودش را ..... می نامیم.

پاسخ : تبدیل

۳۰-تبدیلی که فاصله ی بین نقاط راحفظ کند ..... است.

پاسخ : ایزومتری

۳۱-در تبدیل انتقال $T(x,y)=(x-۳,y+۲)$ بردارانتقال برابربا.....است.

پاسخ: $(-۳,۲)$

۳۲-محورتقارن یک پاره خط ..... آن پاره خط است .

پاسخ : عمودمنصف

۳۳-تصویر کاخ چهلستون اصفهان در آب معرف تبدیل ..... است.

پاسخ : بازتاب

۳۴-دوران یک تبدیل ..... است .

پاسخ : ایزومتری

۳۵-دوران به مرکز O وزاویه ی ۱۸۰° را ..... می نامند ودراین حالت نقطه ی O را ..... می گویند. پاسخ : بازتاب مرکزی - مرکزتقارن

۳۶-تحت انتقالی بابردار..... خط ℓ برروی خودش تصویرمی شود.

پاسخ : موازی ℓ

۳۷-تحت دورانی به مرکز ..... وزاویه ی ..... خط ℓ برروی خودش تصویر می شود. پاسخ : هرنقطه روی ℓ - ۱۸۰°

۳۸-تحت بازتابی که محور تقارن آن ..... است ، خط ℓ برروی خودش تصویر می شود. پاسخ : عمود بر ℓ

۳۹-زاویه ی دوران برای اینکه یکی ازدوخط موازی $\ell 1$ و $\ell 2$ برروی دیگری تصویرشود ..... است . پاسخ : 180°

۴۰-تحت تجانس طول، k برابرومساحت ..... برابر می شود.
پاسخ : k^2

۴۱-دریک تجانس به نسبت k ، اگر $0 < k < 1$ باشد، تجانس یک ..... است.
پاسخ : انقباض

۴۲-حداقل ..... نقطه درصفحه وجود دارد که روی یک خط قرار ندارند.
پاسخ : سه

۴۳-حداقل ..... نقطه در فضا وجود دارد که دریک صفحه قرارندارند.
پاسخ : چهار

۴۴-محل تقاطع دو صفحه ..... آن دو صفحه نامیده می شوند.
پاسخ : فصل مشترک

۴۵-دو صفحه ی متمایز که در یک نقطه مشترک باشند در یک ..... مشترک هستند. پاسخ : خط

۴۶-ازیک نقطه خارج یک صفحه ..... خط موازی صفحه می گذرد .
پاسخ : بی شمار

۴۷-دوخط در فضا را که دریک صفحه قرار نمی گیرند ، دو خط ..... می نامیم.
پاسخ : متنافر

۴۸-پاره خط های متوازی محصور بین دوصفحه ..... متساویند.
پاسخ : موازی

۴۹-ازیک نقطه خارج صفحه ..... صفحه موازی با آن صفحه می گذرد.
پاسخ : یک

۵۰-از هردونقطه درفضا ..... صفحه می گذرد .
پاسخ : بی شمار

۵۱-صفحه ای یکی از دوصفحه ی موازی راقطع کند ، دیگری راهم قطع می کند وفصل مشترک ها با هم ..... . پاسخ : موازیند
۵۲-ازدوخط متقاطع یک وفقط یک ..... می گذرد. پاسخ : صفحه
۵۳-اگر ℓ و ℓ' دوخط ..... باشند یک صفحه شامل ℓ وموازی ℓ' وجود دارد . پاسخ : متنافر
۵۴-اگرخطی با دو صفحه متقاطع موازی باشند با ..... موازی است . پاسخ : فصل مشترک دو صفحه
۵۵-سه خط متمایز دو به دو متقاطع اند دراین صورت این سه خط یا ..... هستند یا ..... . پاسخ : همرس – دریک صفحه اند
۵۶-کلیه خطوطی که ازنقطه o خارج صفحه ی p موازی p رسم می شوند در ..... قراردارند که ..... p است . پاسخ : صفحه - موازی
۵۷-در یک مکعب مستطیل هر دو وجه ..... برهم عمودند. پاسخ : مجاور
۵۸-اگر صفحه ای یکی ازدوصفحه ی موازی راقطع کند دیگری را ..... می کند و فصل مشترک ها ..... هستند. پاسخ : قطع – موازی
۵۹-هر صفحه ، با .....و یک خط عمود برآن مشخص می شود. پاسخ : یک نقطه از آن
۶۰-دوخط عمودبریک صفحه ..... هستند. پاسخ : موازی
۶۱-از هرنقطه در فضا ..... خط می گذرد که برصفحه ای مانند p عمود است. پاسخ : یک
۶۲-اگر صفحه ای بردو صفحه ی متقاطع عمود باشد بر..... آن ها عمود است . پاسخ : فصل مشترک
۶۳-کوتاه ترین پاره خط متکی بردو خط متنافر ، ..... آن دو خط متنافر می باشد. پاسخ : عمود مشترک

کانون آموزش ریاضیات آراز

www.karamath.ir

کانال تلگرام : @sepehrimath

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا