

اداره آموزش و پرورش شهرستان تایباد		امتحان نوبت اول	
دبیرستان نمونه دولتی معراج		سال تحصیلی 94-1393	
دی ماه 1393	رشته تحصیلی: علوم ریاضی	پایه تحصیلی: چهارم	نام درس: هندسه تحلیلی و جبر خطی
طراح سوال: مصطفی فدائی	مدت امتحان: 80 دقیقه	ساعت شروع: صبح	نام و نام خانوادگی:

((رمز موفقیت روشن است: بکوشیم تا در یک زمینه دو بار بازنده نشویم))

ردیف	سوالات	نمره
1	جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: الف) دو بردار a, b را می نامیم هرگاه $r \in \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $b = ra$ ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ی ثابت صفحه، مقدار مثبت ثابتی باشد را می نامند.	1
2	نقطه ی (2 و -1 و 1) A را در نظر بگیرید. اگر M تصویرنقطه ی A روی صفحه ی XOZ و N قرینه ی نقطه ی A نسبت به محور OZ باشد، طول پاره خط MN را بیابید.	1
3	دو بردار $b = i - j, a = 2i - j + 2k$ را در فضای R^3 در نظر بگیرید. هر یک از موارد خواسته شده را به دست آورید. الف) زاویه ی بین دو بردار a, b ب) بردار جهت a ج) قرینه ی a نسبت به بردار b د) زوایای هادی بردار b	2
4	دو بردار a, b به طولهای 3 و 4 واحد با یکدیگر زاویه ی 30 درجه می سازند، مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a + 2b, 4a - 2b$ تولید می شود را بیابید.	1
5	قضیه حاصلضرب داخلی را بیان و اثبات کنید.	1/25
6	فرض کنید p, q, r, s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای $a = p \times s, b = q \times s, c = r \times s$ در یک صفحه قرار می گیرند.	1/25
7	وضعیت نسبی دو خط $L_1: x + 1 = -2y = 2z + 4$ و $L_2: x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ داده شده را بررسی کنید.	1/25
8	معادله ی صفحه ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه ی $(3, 1, 0)$ و $(5, -1, 3)$ را پیدا کنید.	1/25
9	فاصله ی نقطه ی $(1, 1, 2)$ از فصل مشترک دو صفحه به معادلات $x + 2y = 0$ و $2x - y = 0$ را محاسبه کنید.	2
10	کوتهاترین فاصله بین دو خط متناظر $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ و $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ را محاسبه کنید.	1/5
11	کمترین و بیشترین فاصله ی $P(2, -1)$ را از نقاط دایره $x^2 + y^2 = 20$ به دست آورید.	1/5
12	معادله ی یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(2, -2), F'(-4, -2)$ کانون های آن و خروج از مرکز آن $e = \frac{3}{5}$ باشد.	2
13	هذلولی به معادله ی $16y^2 - 9x^2 = 144$ را در نظر بگیرید. الف) مختصات کانونها و مرکز هذلولی را تعیین کنید. ب) معادله ی مجانبهای هذلولی را به دست آورید. ج) کمترین فاصله ی نقاط دو شاخه هذلولی را محاسبه کنید. د) نمودار آن را رسم کنید.	2
14	مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P(x, y)$ را بیابید که از نقطه ی $F(3, 0)$ و خط $x = -3$ به یک فاصله باشد.	1
	موفق و پیروز باشید	20
	جمع کل	

تهیه و تنظیم: مصطفی فدائی

۱. الف) هم رایتا (-) یعنی

$$u(2, 0, 1) \quad N(2, 1, -1) \rightarrow |MN| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad ۲$$

$$\text{الف) } a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 3\sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ \quad ۳$$

$$a \cdot b = (2)(1) + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$\rightarrow e_a = \frac{a}{|a|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$۲) a'' = 2a' - a$$

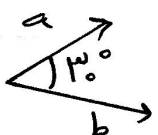
$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right)$$

$$\rightarrow a'' = (3, -3, 0) - (2, -1, 2) = (1, -2, -2)$$

$$> \cos \alpha = \frac{b_1}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{b_2}{|b|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \rightarrow \beta = 135^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{b_3}{|b|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow \gamma = 90^\circ$$

$$S = \frac{1}{r} |(a+2b) \times (4a-2b)| = \quad ۴$$


$$\frac{1}{r} |4(\cancel{a \times a}) - 2(a \times b) + 8(b \times a) - 4(\cancel{b \times b})|$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{r} |-10(a \times b)| = 5|a \times b| = 5|a||b| \sin \theta =$$

$$5(3)(4) \sin 135^\circ = 30$$

۵. اثبات = قضیه در مستن کتا -

$$a \cdot (b \times c) = a \cdot (b \times (r \times s)) = a \cdot ((b \cdot s)r - (b \cdot r)s) \quad ۶$$

$$= a \cdot [(\cancel{a \times s} \cdot s)r - (b \cdot r)s] = -(b \cdot r)(a \cdot s) =$$

$$-(b \cdot r)(\cancel{a \times s} \cdot s) = 0$$

$$u_1 = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad u_2 = (1, 2, 3)$$

۷

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3} \rightarrow \text{دو خط موازی نیستند}$$

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = \frac{-t}{2} \\ z = \frac{t-4}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینی در } L_2} -1+t-3 = \frac{-t}{2} = \frac{t-2}{2}$$

$$4t-14 = -t \rightarrow t = \frac{14}{5}$$

$$4t-14 = -4t \rightarrow t = \frac{14}{10}$$

دو خط متناهی

$$A(3, 1, 0), B(5, -1, 3)$$

۸

$$\rightarrow \rho_0 = \frac{\text{ربط}}{AB} = (4, 0, \frac{3}{2}) \quad \vec{n} = \vec{AB} = (2, -2, 3)$$

$$d = (4)(2) + (0)(-2) + (\frac{3}{2})(3) = \frac{25}{2}$$

$$\text{معادله صفحه: } 2x - 2y + 3z = \frac{25}{2}$$

۹. ابتدا معادله‌ها را به شکل مشترک در می آوریم

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \rightarrow x=y=0 \rightarrow P_0(0, 0, 0)$$

نقطه ای روی دو صفحه

$$n_1 = (1, 2, 0), n_2 = (2, -1, 0) \rightarrow u = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -5)$$

$$P(1, 1, 2) \rightarrow \rho_0 P = (1, 1, 1) \rightarrow u \times \rho_0 P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5, -5, 0)$$

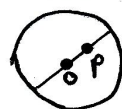
$$\rightarrow D = \frac{|u \times \rho_0 P|}{|u|} = \frac{\sqrt{25+25}}{5} = \sqrt{2}$$

۱۰. نقطه $P_0(-1, 0, -2)$ روی خط L_1 و نقطه $P(0, 0, 0)$ روی خط L_2

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5, -5, 5) \quad \text{و} \quad \rho_0 P(1, 0, 2)$$

$$n \cdot \rho_0 P = -5 + 0 + 10 = 5 \rightarrow D = \frac{|n \cdot \rho_0 P|}{|n|} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2)^2 + (-1)^2 < 20 \rightarrow \text{نقطه } P \text{ داخل دایره است}$$



۱۱

$$\text{فاصله کمترین} = r - OP = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\text{فاصله بیشترین} = r + OP = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$FF' = 2c \rightarrow 2c = \sqrt{39 + 0} \rightarrow c = 3$$

۱۲

$$O = \frac{FF'}{FF'} = (-1, -2) \quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}, c = 3 \rightarrow a = 5$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $h \quad k$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 9 = 25 - b^2 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4$$

معادله بیضی افقی: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

$$16y^2 - 9x^2 = 144 \xrightarrow{\div 144} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

۱۳

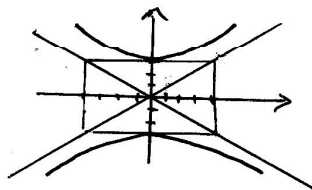
$$O(0,0) \quad a^2 = 9, b^2 = 16 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $h \quad k$

الف) $F(h+c, k) = (5, 0) \quad F'(h-c, k) = (-5, 0)$

ب) معادله مجانب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h) \rightarrow y = \pm \frac{3}{4}x$

ج) $2a = 4 \quad >$



$$y^2 = 4ax$$

۱۴. معریف سهمی افقی به مرکز مبدأ مختصات

$$F(a, 0) = (3, 0) \rightarrow a = 3 \rightarrow y^2 = 12x$$

سهمی

تهیه و تنظیم: مصطفی فدائی