



تاریخ: ۱۳۹۱/۱۰/۱۳

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه

نام دبیر: جناب آقای رضائی صدرآبادی

نمره و امضاء:

(۵)

باسمه تعالی
مجتمع فرهنگی آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانی نوبت اول - سال تحصیلی ۹۲-۹۱

سؤالات امتحانی درس: جبر و احتمال

کلاس سوم شهید:

نام و نام خانوادگی:

شماره:

آگاه باشید که دل ها تنها با یاد خدا آرامش می یابد.

با سلام و صبح بخیر لطفاً به نکات زیر توجه داشته باشید :

(الف) نوشتن توضیحات کافی، کامل و کلیه روابط و فرمول ها برای هر سؤال الزامی است. (از خلاصه نویسی اکیداً پرهیزید.)

(ب) پاسخ سؤالات را داخل برگه و سرجای خود خوش خط و خوانا بنویسید. (مداد و خودکار قرمز ممنوع!)

(ج) زمان را مدیریت کنید.

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (رسیدن به جواب آخر ارزش دارد.)

۰/۷۵ (الف) اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه حاصل $[A - (B \cap A)] \cup (B - A)$ همواره برابر است با:

(ب) می دانیم مربع هر عدد فرد را می توان به فرم $8k + 1$ نوشت. اگر n عددی فرد باشد، در این صورت عبارت زیر

۰/۷۵ همواره بر چه عددی بخش پذیر است؟ بزرگترین عددی که بر آن بخش پذیر است را بیابید. $2n^4(n^4 - 2) + 2$

۰/۷۵ (ج) مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیر مجموعه دارد به طوری که حداقل یکی از اعضای آن زوج باشد؟

۲/۲۵ ۲- موارد الف و ب و ج را به روش استقرای ریاضی اثبات کنید: $37 | 5^{n+1} + 2^{n+5} \times 3^{4n}$ (الف)

(ب) $\frac{2}{n^2} < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(ج) اگر تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ این طور تعریف شده باشد

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = 2f(n-1) + 1 \quad n \geq 2 \end{cases}$$

آنگاه ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ رابطه ی روبرو برقرار است: $f(n) = 2^n - 1$

۱/۷۵ ۳- به روش استدلال استنتاجی اثبات کنید:

(الف) ثابت کنید اگر یک واحد به ۴ برابر، حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی اضافه کنیم حاصل مربع کامل است.

(ب) اگر "مجموع مکعبات اعداد طبیعی متوالی" برابر باشد با "مربع مجموع اعداد طبیعی متوالی"، ثابت کنید هر عدد طبیعی به فرم n^3 را می توان به شکل تفاضل دو مربع کامل نوشت.

۱ ۴- به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۰/۵ ۵- مثال نقض بزنید:

(الف) اگر $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$

(ب) هرگاه n نقطه روی پیرامون دایره انتخاب و آنها را دو به دو به هم وصل کنیم آنگاه تعداد ناحیه های ایجاد شده 2^{n-1} می باشد.

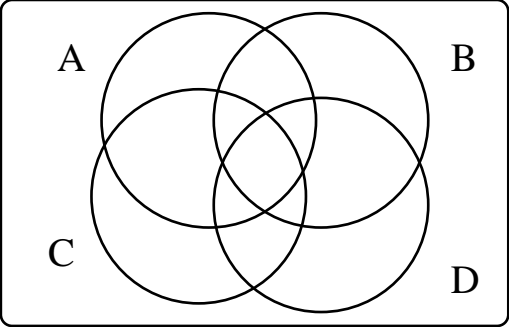
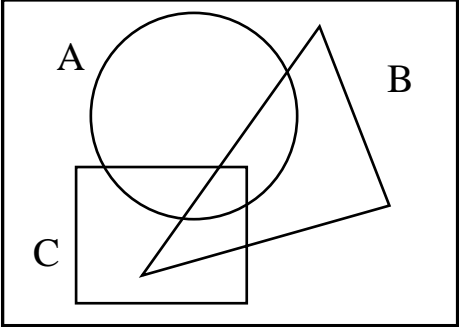
۰/۵ ۶- عکس گزاره های شرطی زیر را بنویسید:

(الف) اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، آنگاه نسبت پاره های به وجود آمده در یک ضلع برابر است با نسبت پاره خط های ایجاد شده در ضلع دیگر.

(ب) شرط کافی برای اینکه دانش آموزی باهوش باشد آن است که تشری نخورد. (به صورت اگر ... آن گاه ... بنویسید.)

۱/۷۵ ۷- به روش برهان خلف ثابت کنید:

(الف) اگر $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ آنگاه $a = b = c = 0$

<p>۱/۷۵</p> <p>۱/۲۵</p> <p>۱</p>	<p>ب) فرض کنید n عددی صحیح به شکل $۲k + ۲$ باشد، ثابت کنید n را نمی توان به صورت تفاضل مربع های دو عدد صحیح نمایش داد.</p> <p>۸- مسایل زیر را با استفاده از اصل لانه کبوتر حل کنید:</p> <p>الف) در یک فروشگاه ۳ نوع شلوار (لی - پارچه ای - کتان) در ۳ رنگ متفاوت و ۵ اندازه ی مختلف به فروش می رسد، حداقل چند شلوار در این فروشگاه باشد تا بتوانیم مطمئناً ۶ عدد شلوار هم جنس و هم رنگ و هم اندازه پیدا کنیم؟</p> <p>ب) از بازه ی $[۰, ۱۳۹۱]$ حداقل چند عدد حقیقی باید انتخاب کرد تا حتماً در میان آنها سه عدد مانند x و y و z یافت شود که $[x] = [y] = [z]$ ([] علامت جزء صحیح می باشد).</p> <p>۹- مجموعه ی A را با اعضا و B را با نماد ریاضی بنویسید:</p> <p>الف) $\{x x \in \mathbb{Z}, \sqrt{3-2x} \in \mathbb{N}\}$ (حداقل ۳ عضو متوالی از ابتدا را بنویسید)</p> <p>ب) $\{۶, ۶۶, ۶۶۶, ۶۶۶۶, \dots\} =$</p> <p>۱۰- فرض کنید A مجموعه ی اعداد طبیعی ۳ رقمی باشد و $B = \{x x = ۱۱k, k \in \mathbb{N}, x \in A\}$ باشد.</p>
<p>۱</p>	<p>حال تعداد زیر مجموعه های محض $P(A \cap B)$ را بیابید.</p> <p>۱۱- اگر مجموعه ی A_i به صورت بازه ی روبرو تعریف شده باشد، $A_i = [-i, 2i]$ حاصل موارد زیر را بیابید:</p> <p>الف) $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i =$ ب) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$</p> <p>۱۲- اگر مجموعه های زیر مفروض باشند، مجموعه ی $A \cap B$ چند زیر مجموعه ی ۳ عضوی دارد؟ (استدلال و ۰/۷۵)</p> <p>راه حل کامل نوشته شود) $A = \{۲^1, ۲^2, ۲^3, \dots, ۲^{۳۳}\}$ $B = \{۴^1, ۴^2, \dots, ۴^{۳۳}\}$</p> <p>۱۳- نمودارهای هاشور خورده زیر چه مجموعه ای را مشخص می کنند؟ (فقط مجموعه ی مربوطه را داخل کادر بنویسید).</p>
<p>۱</p> <p>۲/۲۵</p>	<p>الف) </p> <p>ب) </p> <p>۱۴- اگر یک ششم زیر مجموعه های ۵ عضوی مجموعه ی A شامل عدد ۷ باشد، n را بیابید.</p> <p>$A = \{۱, ۲, ۳, \dots, 2n\} \quad (n \geq ۴)$</p> <p>۱۵- موارد الف و ب و ج را با قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید: (فقط از قوانین مطرح شده بهره بگیرید و خلاصه نویسی ممنوع!)</p> <p>الف) یکی از قوانین جذب را به دلخواه اثبات کنید. (الف)</p> <p>ب) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$</p> <p>ج) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$</p>