



تاریخ: ۱۳۹۲/۱۰/۰۷
مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
نام دبیر: آقای رضائی صدرآبادی
نمره و امضاء:

باسمه تعالی
مجتمع فرهنگی آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی^(ره)
پایانی نوبت اول - سال تحصیلی ۹۲-۹۳

سؤالات امتحانی درس: جبر و احتمال
کلاس سوم شهید:
نام و نام خانوادگی:
شماره:

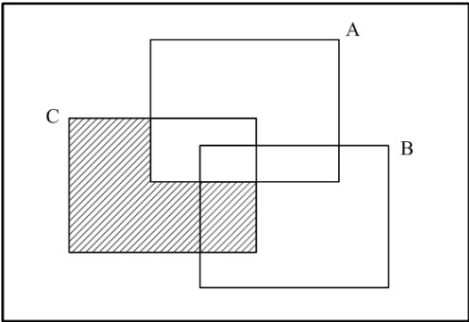
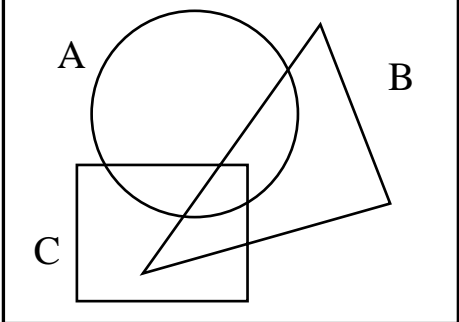
آگاه باشید که دل‌ها تنها با یاد خدا آرامش می‌یابد.

با سلام و صبح بخیر لطفاً به نکات زیر توجه داشته باشید:

- الف) نوشتن توضیحات کافی، کامل و کلیه روابط و فرمول‌ها برای هر سؤال الزامی است. (از خلاصه نویسی اکیداً پرهیزید).
ب) پاسخ سؤالات را داخل برگه و سر جای خود خوش خط و خوانا بنویسید. (استفاده از مداد و خودکار قرمز و مشکی ممنوع!)
ج) مدیریت زمان را فراموش نکنید.

۱	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. (جواب آخر ارزش دارد).	بارم
الف	بر چه اساسی سریع و آسان می‌توان گفت: «کوتاه ترین فاصله‌ی بین دو نقطه به صورت خط مستقیم است»؟ از چه استدلالی استفاده می‌کنیم؟	۰.۲۵
ب	دانشمندان از حرارت دادن یک میله‌ی آهنی دریافتند که فلزات در اثر حرارت طولشان افزایش می‌یابد، نتیجه گیری آن‌ها مبتنی بر چه استدلالی است؟	۰.۲۵
ج	اگر $A = \{1, 2, \{ \}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}\}$ و $P(A)$ مجموعه توانی آن باشد چه تعداد از اعضایشان با هم مشترک است؟	۰.۲۵
۲	موارد الف و ب را به روش استقرای ریاضی اثبات کنید:	
الف	$17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \times 3^{n+2}$	۱
ب	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$	۱
۳	به روش استدلال استنتاجی اثبات کنید	
الف	مربع هر عدد به شکل $6k + 1$ را می‌توان به صورت $24m + 1$ نوشت.	۱
ب	اگر "مجموع مکعبات اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک" برابر باشد با "مربع مجموع اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک"، ثابت کنید: $\frac{(2 \times 3) + (3 \times 8) + (4 \times 15) + \dots + n(n^2 - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{n^2 + n - 2}{2}$	۱
ج	در مجموعه اعداد طبیعی اگر n عددی فرد باشد آن گاه عبارت $n^2(n^2 - 2) + 1$ همواره بر چه عددی بخش پذیر است؟ (بزرگترین عدد ممکن را بیابید).	۱
۴	اگر a, b, c سه عدد مثبت باشند به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$	۱
۵	مثال نقض بزنید:	
الف	تابع $P(n) = n^2 - n + 17$ همواره عدد اول تولید می‌کند. ($n \in \mathbb{N}$)	۰.۲۵
ب	$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$	۰.۲۵

۰.۲۵	۶	عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید: شرط کافی برای لاغری کم خوری است. (به صورت اگر ... آن گاه ... بنویسید).
	۷	به روش برهان خلف ثابت کنید:
۱	الف	اعداد مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$ را به پنج دسته تقسیم کرده ایم ثابت کنید دسته‌ای وجود دارد که مجموع اعضایش بزرگتر از ۵۹ است.
۱	ب	$\sqrt{5} - \sqrt{2}$ عددی گنگ است.
	۸	مسایل زیر را با استفاده از اصل لانه کبوتر حل کنید: (به طور کامل توضیح دهید و راه حل بنویسید).
۱	الف	حداقل چند نقطه درون یک شش ضلعی منتظم به ضلع یک متر انتخاب کنیم، تا مطمئن شویم که حداقل فاصله‌ی دو تا از آن نقاط از یک متر کمتر است. (رسم شکل دقیق و کامل الزامی است).
۱	ب	از بازه‌ی $[\frac{1}{10}, 1392]$ حداقل چند عدد حقیقی باید انتخاب کرد تا حتماً در میان آنها سه عدد مانند x و y و z یافت شود که $\lfloor \log x \rfloor = \lfloor \log y \rfloor = \lfloor \log z \rfloor$ (علامت جزء صحیح یا برکت می باشد).
۲	۹	مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید: $A = \{-1, 11, -111, 1111, \dots\} =$ $B = \{\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots, 128\} =$ $C = \{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\} =$
۰.۷۵	۱۰	اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ تعداد مجموعه‌هایی که به جای X می‌توان قرارداد تا رابطه‌ی زیر همواره برقرار باشد را بیابید. $(A - B) \subseteq X \subseteq (A \Delta B)$
۰.۷۵	۱۱	مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ چند زیر مجموعه‌ی دو عضوی دارد که حاصلضرب اعضای هر کدام از آن‌ها مضرب ۷ باشد.
۱	۱۲	اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای را دو برابر کنیم تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی آن ۳۵ واحد بیشتر می‌شود، تعداد کل زیر مجموعه‌های محض آن چقدر است؟
	۱۳	موارد الف و ب را با قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: (فقط از قوانین مطرح شده بهره بگیرید و خلاصه نویسی ممنوع!)
۱.۲۵	الف	$(A \cup B) - (A \cap B \cap C) = (A - (B \cap C)) \cup (B - (A \cap C))$
۱.۲۵	ب	$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

۱	<p>نمودارهای هاشور خورده زیر چه مجموعه ای را مشخص می کنند؟ (فقط مجموعه ی مربوطه را داخل کادر بنویسید.)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>U</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>U</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 300px; height: 40px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 300px; height: 40px;"></div> </div>	۱۴
۲۰	ان شاء ... موفق و عاقبت بخیر باشید.	