



باسمه تعالی

تاریخ: ۱۳۹۳/۱۰/۰۹
مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
نام دبیر: جناب آقای رضائی صدرآبادی
نمره و امضاء:

آگاه باشید که دل‌ها تنها بایا خدا آرامش می‌یابد.
مجتمع فرهنگی آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی^(ره)
پایانی نوبت اول - سال تحصیلی ۹۴-۹۳

سؤالات امتحانی درس: جبر و احتمال
کلاس سوم شهید^(ره)
نام و نام خانوادگی:
شماره:

با سلام و صبح بخیر لطفاً به نکات زیر توجه داشته باشید :

الف) پاسخ سؤالات را داخل برگه و سر جای خود خوش خط و خوانا بنویسید. (فقط با خودکار آبی پاسخ دهید!)
ب) نوشتن توضیحات کافی، کامل و کلیه روابط و فرمول‌ها برای هر سؤال الزامی است. (از خلاصه نویسی اکیداً پرهیزید.)
ج) مدیریت زمان را فراموش نکنید.

بارم	۱	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. (رسیدن به جواب آخر ارزش دارد).
۰/۵	الف	اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند آن گاه بزرگترین عددی که $m^2 - n^2$ حتماً بر آن بخش پذیر است چه عددی است؟
۰/۲۵	ب	معلم جبر کلاس الف در هفتمین جلسه از سال تحصیلی وقتی وارد کلاس می‌شود قبل از اینکه تکالیف دانش‌آموزان را ببیند به بابک می‌گوید: «حتماً امروز هم تکالیفت را ننوشته‌ای!» به نظر شما معلم از چه استدلالی استفاده کرده است؟
	۲	برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ موارد الف و ب را به روش استقرای ریاضی اثبات کنید:
۱	الف	$9 \mid 2^{2n} + 6n - 1$
۱/۲۵	ب	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
	۳	به روش استدلال استنتاجی اثبات کنید:
۱	الف	آیا می‌توان از مجموعه‌ی $A = \{1, 3, 5, \dots, 17\}$ پنج عدد پیدا کرد که مجموعشان ۳۲ شود؟ (دلیل خود را با استدلال ریاضی ذکر کنید.)
۱	ب	اگر «مجموع مکعبات اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک» برابر باشد با «مربع مجموع اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک» حاصل عبارت روبرو را بیابید (با جواب آخر).
		$10^3 + 12^3 + 14^3 + \dots + 28^3 = ?$
۱	۴	اگر x, y دو عدد حقیقی باشند به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:
		$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$
۰,۲۵	۵	آیا $P(n) = 3^n + 4$ همواره عدد اول تولید می‌کند؟ ($n \in \mathbb{N}$)
۰,۲۵	۶	عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید: (به صورت اگر ... آن گاه ... بنویسید.) گر صبر کنی ز غوره حلوا سازی!
بارم	۷	به روش برهان خلف ثابت کنید:
۱	الف	دو عدد طبیعی متوالی عامل اول مشترک ندارند.
۱	ب	$\sqrt[3]{\sqrt{3}} - \sqrt{7}$ عددی گنگ است. (می‌دانیم $\sqrt{3}$ یا $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند.)

۸	مسایل زیر را با استفاده از اصل لانه کبوتر حل کنید: (به طور کامل توضیح دهید و راه حل بنویسید).	
الف	۱ حدافل چند نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۵ سانتی متر انتخاب کنیم، تا مطمئن شویم که دست کم فاصله‌ی دو تا از آن نقاط از یک سانتی متر کمتر است. (رسم شکل کامل الزامی است).	
ب	۱ از بازه‌ی $[۱, ۱۳۹۳]$ حدافل چند عدد حقیقی باید انتخاب کرد تا حتماً در میان آن‌ها چهار عدد مانند x و y و z و t یافت شوند که رابطه $\lceil \sqrt{x} \rceil = \lceil \sqrt{y} \rceil = \lceil \sqrt{z} \rceil = \lceil \sqrt{t} \rceil$ برقرار باشد. ([] علامت جزء صحیح یا براکت می‌باشد).	
۹	مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید: $A = \left\{ \frac{۵}{۲}, \frac{۸}{۶}, \frac{۱۱}{۱۰}, \dots \right\} =$ $B = \{-۱, ۴, -۹, ۱۶, \dots, ۱۴۴\} =$ $C = \left\{ \frac{\sqrt{۱۳} + ۷}{۳}, \frac{۷ - \sqrt{۱۳}}{۳} \right\} =$	۲/۲۵
۱۰	اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$, $B = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ تعداد مجموعه‌هایی که به جای X می‌توان قرارداد تا رابطه‌ی زیر همواره برقرار باشد را بیابید. $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$	۱
۱۱	اگر مجموعه‌ی $A_i = [-i^2, 2i]$ مفروض باشد، حاصل موارد زیر را بیابید: (راه حل کوتاه) الف) $\bigcap_{i=۱}^{۱۰۰۰} A_i =$ ب) $\bigcup_{i=۳}^{۱۱} A_i =$	۱
۱۲	اگر مجموعه‌ی A اعداد دو رقمی و $B = \{vk k \in A\}$ آن‌گاه $P(A \cap B)$ چند زیر مجموعه دارد؟	۰/۷۵
۱۳	موارد الف و ب را با قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: (فقط از قوانین مطرح شده بهره بگیرید و خلاصه نویسی ممنوع!)	
الف	$[A \cap (A - B)'] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$	۱
ب	$(A \cup B) \Delta C = (A - C) \cup (B - C) \cup [(C - B) - A]$	۱/۲۵
۱۴	درستی تساوی زیر را با استفاده از نمودار ون بررسی کنید. (اشکال را مرحله به مرحله رسم کنید). $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$	۰/۷۵
۱۵	نمودار موارد زیر را بزرگ و دقیق رسم کنید. (نمودارها را با خط کش رسم کنید). ۱) $\{-۲, ۱, ۲\} \times (-۳, ۲]$ ۲) $[-۴, -۱) \times (۲, ۵]$ ۳) $R = \{(x, y) x^2 + y^2 \leq ۹, x - ۲y > ۱\}$	۱/۵
۲۰	ان شاء ... موفق و عاقبت بخیر باشید.	