

| | | |
|--|---|---------------------|
| سال سوم ریاضی | سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان دارالفن/گگون شهید بهشتی لاهیجان | جبر و احتمال |
| تاریخ امتحان: دی ۹۴ حسین پور ۱۰۰ دقیقه |  | نام و نام خانوادگی: |
| نمره | سوالات | ردیف |

| | | |
|----|--|------------|
| ۱ | الف) با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید $\frac{3(n^2 + n)}{2} = 3 + 6 + 9 + \dots + 3n \quad (n \in \mathbb{N})$ به کمک استقراء ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عبارت $5^n - 4n - 1$ بر ۱۶ بخش پذیر است. | ۱/۵ ۱/۵ |
| ۲ | با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید: الف) تفاضل هر دو عدد گویا یک عدد گویا است. ب) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است. | ۱ ۱/۵ |
| ۳ | درست و یا نادرست بودن عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) اگر x گویا و y گنگ باشد آیا x^y گنگ است؟ ب) به ازای هیچ دو عدد اول a و b ، عدد $a + b$ اول نیست. | ۰/۵ ۰/۵ |
| ۴ | به کمک اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ | ۱/۵ |
| ۵ | الف) اگر $n+2$ عددی فرد باشد، با برهان خلف نشان دهید n نیز است. ب) اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ نیز گنگ است. | ۱ ۱ |
| ۶ | الف) به تعداد ۵۰ ورزشکار مرد در رشته هدایای فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و لاهیجان در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند. ب) نشان دهید هرگاه S یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد. اگر اعضای S را بر ۳۹ تقسیم کنیم حداقل دو عضو از این مجموعه باقی مانده یکسانی بر ۳۹ است. | ۱ ۱ |
| ۷ | با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید: الف) $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$ ب) $(A - B) = A - (A \cap B)$ | ۲ |
| ۸ | مجموعه توانی مجموعه $\{a, b, \{c\}\}$ را بدست آورید. | ۱/۵ |
| ۹ | مقدار x و y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(15, x - y)$ و $(x^2 - y^2, 3)$ با هم برابر باشند. | ۱ |
| ۱۰ | رابطه $A = \{(x, y) x - 2 \leq y \leq x + 1\}$ را رسم کنید. | ۱ |
| ۱۱ | اگر $A_i = [i-4, i]$ ، A_1 و A_2 و A_3 و A_4 را تعیین کنید و سپس $\bigcup_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ را بیابید. | ۱/۵ |
| | موفق و سربلند باشید. حسین پور | ۲۰ |

سوم ریاضی
دی ۹۴
حسن پور

مسئله تقابلی
سازمان پژوهش استعداد های درخشان
دارالفنون شهید گیتی (ایمان)

پاسخ جبر و افعال

الف ۱

۱۱۵

با استفاده از $n=1: 3(1) = \frac{3(1^2+1)}{2} \rightarrow 3=3$

فرض استقراء $n=k: 3+6+9+\dots+3k = \frac{3(k^2+k)}{2}$

حکم استقراء $n=k+1: 3+6+9+\dots+3k+(3k+3) = \frac{3[(k+1)^2+(k+1)]}{2}$

اثبات حکم: $3+6+9+\dots+3k+(3k+3) = \frac{3(k^2+k)}{2} + 3k+3$

$= \frac{3k(k+1)}{2} + 3(k+1) = (k+1) \left(\frac{3k+6}{2} \right) = \frac{3(k+1)(k+2)}{2}$

$= \frac{3[(k+1)^2+(k+1)]}{2}$ لذا برای هر عدد طبیعی n برقرار است

ب

۱۱۵

با استفاده از $5^n - 4n - 1 = 14t$

$n=1: 5 - 4 - 1 = 0 \times t$

فرض استقراء $n=k: 5^k - 4k - 1 = 14t$

حکم استقراء $n=k+1: 5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 14t'$

اثبات حکم: $(5^k - 4k - 1 + 14t) \cdot 5 \rightarrow 5^{k+1} = 5 \cdot 5^k = 5(4k + 1 + 14t) = 20k + 5 + 70t$

$\Rightarrow 5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 20k + 5 + 70t - 4k - 4 - 1 = 16k + 70t = 14(2k + 5t) = 14t'$

۱

الف) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \in \mathbb{Q}$
 $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$
 $b \neq 0, d \neq 0$

۱۱۵

ب) $a=2k, b=2k+2$
 $a \times b = 2k(2k+2) = 4k(k+1) = 4 \times 2t = 8t$
 زوج

۲

الف) $2^{\sqrt{2}} = 1$ خیر

ب) $2+3=5$ اول

$$(x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y) \times 2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

الف) فرض خلف n فرد نباشد لذا زوج است.

$$n = 2k \rightarrow 3n = 3 \times 2k = 2(3k)$$

$$3n + 2 = 2(3k + 1) = 2t \text{ خلف زوج که فرض است.}$$

ب) فرض خلف: $\sqrt{3} + 2$ گنگ نیست لذا توان است.

$$(\sqrt{3} + 2 = a^2) \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{3} + 2 = a^2 \rightarrow \sqrt{3} = a^2 - 2 \in \mathbb{Q}$$

که تناقض است. لذا فرض خلف باطل است.

$$2 \times 4 = 12$$

الف) ۱۲ نفر در ۵ کبوتر (۵۰ > ۱۲) طبق اصل دانه کبوتری ابتدا در هر لانه ۴ کبوتر جای می‌دهیم کبوتر بعدی در یکی از لانه‌های قبلی جای خواهد گرفت یعنی حداقل ۵ لانه ۴ نفر هم رشت و هم شماری هستند.

ب) باقی مانده‌های تقسیم ۳۹، ۳۸، ۳۷، ۳۶، ۳۵، ۳۴، ۳۳، ۳۲، ۳۱، ۳۰، ۲۹، ۲۸، ۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۴، ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ می‌باشند یعنی ۳۹ لانه داریم و ۴ کبوتر (۳۹ > ۴) ابتدا در هر لانه ۱ کبوتر جای می‌دهیم کبوتر بعدی در یکی از لانه‌های قبلی جای خواهد گرفت پس حداقل دو کبوتر باقی مانده ۲ لانه دارند.

$$\text{الف) } (A - B) \cup (A \cap C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C)$$

$$= A \cap (B \cap C')' = A \cap (B - C)' = A - (B - C)$$

$$\text{ب) } A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup$$

$$(A \cap B') = \emptyset \cup (A - B) = A - B$$

1,8 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ 1

$(x^r - y^r, r) = (10, x - y)$ 9

1 $\Rightarrow \begin{cases} x^r - y^r = 10 \\ x - y = r \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x + y) = 10 \rightarrow x + y = 10$

$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = r \end{cases}$

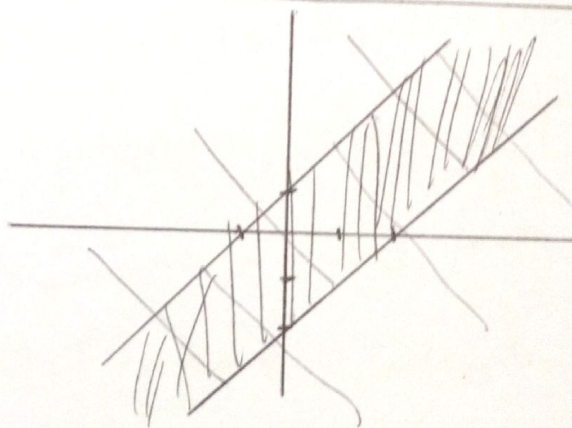
$2x = 10 + r \rightarrow x = \frac{10 + r}{2}$ $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 10 - x \end{cases}$

$x - r \leq y$

$\begin{array}{c|c} + & r \\ \hline - & r \end{array}$

$y \leq x + 1$

$\begin{array}{c|c} + & -1 \\ \hline - & 1 \end{array}$



$A_1 = [-r, 1]$

$A_r = [-r, r]$

$A_r = [-1, r]$

$A_r = [0, r]$

$\bigcup_{i=1}^r A_i = [-r, r]$

$\bigcap_{i=1}^r A_i = [0, 1]$