بسمه تعالی

آزمون ترم اول درس: جبر و احتمال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰دقیقه
دبیرستان صادقیه	پایه سال سوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۹۱/۱۰/۱۴

ردیف	سوالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثا بت کنید: الف) $5^{2n}+3n-1=9r \qquad (n\in N)$ ب) $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^n \geq 1+n\sqrt[3]{2} \qquad (n\in N)$	۳
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر m و n دو عدد طبیعی متوالی با شند،آن گاه $m^2+n^2+(mn)^2$ مربع کامل است	۱/۵
۳	آیا عبارت « اگر x و y دو عدد گنگ با شند ، آن گاه $\frac{x+y}{x-y}$ نیز گنگ است» درست است؟ چرا؟	۰/۵
۴	به ازای هر دو عدد حقیقی a و b به روش اثبات باز گشتی ثا بت کنید: $(a+1)^2+b(b+a-4)\geq -9$	۲
۵	الف) اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۵ با شد آن گاه n نیز مضرب ۵ است.(برهان خلف) ب) ثا بت کنید $\sqrt{5}$ گنگ است.(برهان خلف)	۲
۶	الف) در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رای بیش تری از سایرین داشته باشد. حداقل رای انتخاب شونده چقدر است؟ چرا؟	۱
۷	مجموعه « A » را که با گزاره نما نوشته شده با نوشتن اعضا نشان دهیدو مجموعه « B » را با استفاده از گزاره نما بنویسید. الف) $A=\{3x \mid x\in N, \frac{14}{x}\in N\}$ ب) $B=\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$	۱/۵
۸	اگر دو مجموعه $\{\{2,1\},\{y+1\},x+1\}$ و $\{3,\{y+1,z-1\},\{z\}\}$ برابر با شند ، x و y و z را بیا بید.	۰/۷۵
۹	تعداد زیر مجموعه های محض(سره) یک مجموعه ی $2k$ عضوی از تعداد زیر مجموعه ای یک مجموعه k عضوی ۹۹۱ واحد بیش تر است. k را پیدا کنید.	۱
۱۰	اگر $A_n=[n-1,n+1]$ با شد،آنگاه مجموعه های A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 ، $\bigcup_{i=1}^{4}A_i-\bigcap_{i=1}^{4}A_i$ را مشخص بیا بید.	۱/۷۵

دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۱	به کمک جبر مجوعه ها ثابت کنید: $(A-B)\cup(B-A)=(A'-B')\cup(B'-A')$	۱/۵
۱۲	عبارت $A\Delta(B\cup C)$ را در نمودار ون هاشور بزنید.	۰/۷۵
۱۳	x و y طوری بیا بید که دو زوج مرتب $(x-y,۲۸)$ و $(۴,x^۲-y^۲)$ با هم مساوی با شند.	۱/۲۵
۱۴	مجموعه های $A=\{x \mid x\in Z,-۲<x\leq ۱\}$ و $B=\{x \mid x\in R, x^۲-x=۰\}$ را در نظر گرفته و سپس اعضای $A^۲-B\times A$ را مشخص کنید.	۱/۵
	موفق و سر بلند با شید. شعرباف «www.sharbafmath.ir» جمع	۲۰

دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

به نام خدا کلید آزمون جبر و احتمال دبیرستان صادقیه مورخه ۹۱/۱۰/۱۲

۱) الف)

گام اول $n=1 \Rightarrow 5^2+3-1=9r \Rightarrow 27=9r \Rightarrow r=3\in Z$ ✓

گام دوم $n=k \Rightarrow 5^{2k}+3k-1=9r'$ فرض استقراء

گام سوم $n=k+1 \Rightarrow 5^{2k+2}+3k+2=9r''$ حکم استقراء

برهان: طرفین فرض استقراء در 5^2 ضرب می‌کنیم

$$5^2\times(5^{2k}+3k-1)=5^2\times 9r' \Rightarrow 5^{2k+2}+75k-25=5^2\times 9r'$$

$$\Rightarrow 5^{2k+2}+3k+2+72k-27=5^2\times 9r' \Rightarrow$$

$$\underbrace{5^{2k+2}+3k+2}_{\text{طرف اول حکم استقراء}}=5^2\times 9r'-72k+27 \Rightarrow$$

$$=9(25r'-8k+3)=9r''$$

ب)

گام اول $n=1 \Rightarrow (1+\sqrt[3]{2})\geq 1+\sqrt[3]{2}$ ✓

گام دوم $n=k \Rightarrow (1+\sqrt[3]{2})^k\geq 1+k\sqrt[3]{2}$ فرض استقراء

گام سوم $n=k+1 \Rightarrow (1+\sqrt[3]{2})^{k+1}\geq 1+(k+1)\sqrt[3]{2}$ حکم استقراء

برهان: طرفین فرض استقراء را در $(1+\sqrt[3]{2})$ ضرب می‌کنیم

$$(1+\sqrt[3]{2})^k\times(1+\sqrt[3]{2})\geq(1+k\sqrt[3]{2})\times(1+\sqrt[3]{2}) \Rightarrow$$

$$(1+\sqrt[3]{2})^{k+1}\geq 1+\sqrt[3]{2}+k\sqrt[3]{2}+k\sqrt[3]{4}\geq 1+\sqrt[3]{2}+k\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt[3]{2})^{k+1}\geq 1+(k+1)\sqrt[3]{2}$$

---

۲)

$$\left.\begin{array}{l} m=k \xrightarrow{P.2} m^2=k^2 \\ n=k+1 \xrightarrow{P.2} n^2=(k+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2+n^2+(mn)^2=$$

$$k^2+(k+1)^2+(k(k+1))^2=k^2+2k+1+k^2+(k(k+1))^2$$

$$=2k^2+2k+(k(k+1))^2+1=[k(k+1)+1]^2=$$ مربع کامل

www.riazisara.ir دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

۳) نادرست است زیرا اگر $x=2\sqrt{3}$ و $y=\sqrt{3}$ باشد داریم:

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\in\mathbb{Q}$$

۴)

$$(a+1)^2+b(b+a-4)\geq -9 \Longleftrightarrow$$

$$a^2+2a+1+b^2+ab-4b+9\geq 0 \xLeftrightarrow{\times 2}$$

$$2a^2+4a+2+2b^2+2ab-8b+18\geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$a^2+a^2+4a+b^2+b^2+2ab-8b+20\geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$(a^2+2ab+b^2)+(b^2-8b+16)+(a^2+4a+4)\geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$(a+b)^2+(b-4)^2+(a+2)^2\geq 0 \quad *$$

چون * همواره درست است لذا حکم بنابه اثبات بازگشتی برقرار است.

۵) الف) فرض: فرض می‌کنیم n مضرب ۵ نباشد پس

$$n=5k+r \;;\; r\in\{1,2,3,4\} \xRightarrow{P.2} n^2=25k^2+10kr+r^2 \Longrightarrow$$

$$n^2=5(5k^2+2kr)+r^2 \Longrightarrow n^2=5p+r^2 \;\; \times$$

$n^2=5p+r^2$ یا n^2 مضرب ۵ است در تناقض است پس فرض باطل و حکم صادق است

ب) فرض: فرض می‌کنیم $\sqrt{5}$ گویا باشد.

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b} \;;\; a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0 \;;\; (a,b)=1$$

$$\xrightarrow{P.2} 5=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=5b^2 \Longrightarrow$$ a^2 مضرب ۵ است $\Rightarrow$ a مضرب ۵ است

$$\Rightarrow a=5k \xRightarrow{P.2} a^2=25k^2 \Longrightarrow 5b^2=25k^2 \Rightarrow b^2=5k^2$$

$\Rightarrow$ b^2 مضرب ۵ است $\Rightarrow$ b نیز مضرب ۵ است.

a و b هردو مضرب ۵ شدند این مطلب با $(a,b)=1$ در تناقض است پس فرض باطل و حکم صادق است.

۶) اگر دانش آموزان کلاس را بعنوان کبوتر و ۷ نامزد را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم چون $(40>7)$ است طبق اصل لانه و کبوتری داریم:

www.riazisara.ir دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

بقیه‌ی سوال ۶)

$$\begin{array}{r|l} 40 & 7 \\ \underline{35} & 5 \\ 5 & \end{array} \rightarrow 5+1=6$$

پس نامزد برنده باید حداقل ۶ رأی داشته باشد.

---

۷) الف) $\frac{14}{x} \in N \Rightarrow$ x مقسوم‌علیه مثبت ۱۴ است $\Rightarrow x \in \{1, 2, 7, 14\}$

$\Rightarrow A = \{3, 6, 21, 42\}$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 2-\sqrt{3} \\ \beta = 2+\sqrt{3} \\ \hline \alpha+\beta = 4 \Rightarrow S=4 \\ \alpha \cdot \beta = 4-3 = 1 \Rightarrow P=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

---

۸) $\{3, \{y+1, z-1\}, \{z\}\} = \{\{2, 1\}, \{y+1\}, x+1\}$

$\Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow \underline{x=2}$ & $y+1 \underset{*}{=} z$ &

$\begin{cases} z-1=2 \\ y+1=1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} z-1=1 \rightarrow z=2 \\ y+1=2 \rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow$ در * صدق می‌کند پس $z=2$ و $y=1$ قابل قبول است.

---

۹) $2^{2k} - 1 = 2^k + 991 \xrightarrow{2^k = x} x^2 - x - 992 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 1 + 4(992) = 1 + 3968 = 3969$

$x = \frac{1+63}{2} = 32 \Rightarrow 2^k = 32 = 2^5 \Rightarrow k=5$

---

۱۰) $A_n = [n-1, n+1]$

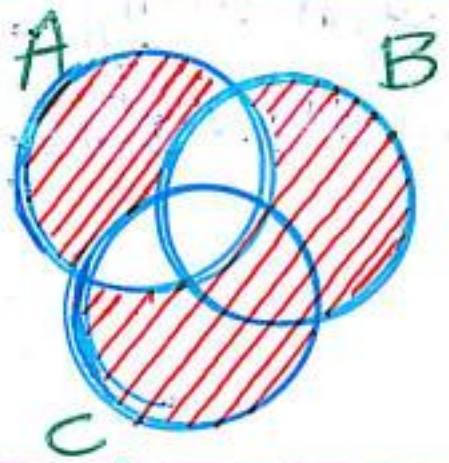
$$\left.\begin{array}{l} A_1 = [0, 2] \\ A_2 = [1, 3] \\ A_3 = [2, 4] \\ A_4 = [3, 5] \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{4} A_i = [0, 5] \ \& \ \bigcap_{i=1}^{4} A_i = \phi$$

$\bigcup_{i=1}^{4} A_i - \bigcap_{i=1}^{4} A_i = [0, 5] - \phi = [0, 5]$

۱۱)

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$
$$=(B'\cap A)\cup(A'\cap B)$$
$$=(B'-A')\cup(B\cap A')$$

۱۲)



۱۳)

$$\begin{cases} x-y=۴ \\ x^۲-y^۲=۲۸ \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y)=۲۸ \Rightarrow ۴(x+y)=۲۸ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=۷ \\ x-y=۴ \end{cases} +$$

$$۲x=۱۱ \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}-y=۴ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}-۴=y \Rightarrow$$
$$y=\frac{۳}{۲}$$

۱۴)

$$A=\{-۱,۰,۱\}$$
$$x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases} \Rightarrow B=\{۰,۱\}$$
$$A^۲=A\times A=\{(-۱,-۱),(-۱,۰),(-۱,۱),(۰,-۱),(۰,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$
$$B\times A=\{(۰,-۱),(۰,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$
$$\Rightarrow A^۲-B\times A=\{(-۱,-۱),(-۱,۰),(-۱,۱),(۰,-۱)\}$$

«تیزهوش و سربلند باشید»

www.riazisara.ir
دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا