



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

WWW.RIAZISARA.IR

کشور

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعدادی طبیعی باشند که  $ac = ۲۰۱۲$ ، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک  $a$  و  $b$  برابر ۱ و کوچک ترین مضرب مشترک  $b$  و  $c$  برابر ۱۳۹۰ است. مقدار  $a + b + c$  چند است؟



۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده اند. جهان گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می خواهد از همه بلیط های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر ۳۰ است. بیش ترین مقدار ممکن  $۳ab + ۴bc$  چه قدر است؟

۴. به چند حالت می توان در عبارت  $۷ \pm ۶ \pm ۵ \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱$  مثبت ها و منفی ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده اند. فاصله بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ ها خاموش شده اند اما در فاصله کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ های خاموش حداکثر چندتا است؟

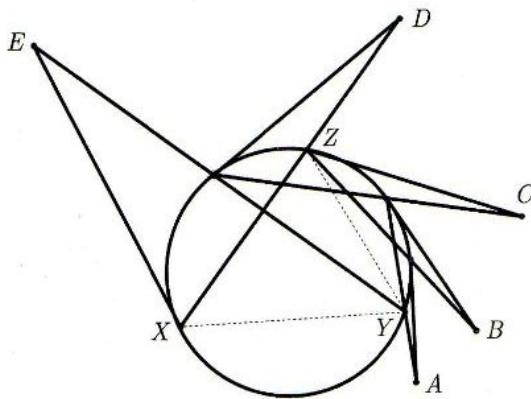


# آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

WWW.RIAZISARA.IR

کشور

دانلود از سایت ریاضی سرا



۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آنها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای  $\hat{A}$ ،  $\hat{B}$ ،  $\hat{C}$ ،  $\hat{D}$  و  $\hat{E}$ ، به ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه زاویه  $\angle XYZ$  را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)

۷. فرض کنید  $a$  و  $b$  اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت  $a$ ،  $b$  و  $ab$ ، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد  $b^2$  چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول  $4 \times 4$  قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث  $ABC$  داریم  $\angle BAC = 60^\circ$ ،  $AB = 7\sqrt{3}$  و  $AC = 14\sqrt{3}$ . نقطه متغیر  $X$  را روی پاره‌خط  $BC$  در نظر می‌گیریم. از نقطه  $X$  دو خط به موازات  $AB$  و  $AC$  رسم می‌کنیم تا به ترتیب  $AC$  و  $AB$  را در نقاط  $Y$  و  $Z$  قطع کنند. طول پاره‌خط  $BX$  چه قدر باشد تا پاره‌خط  $YZ$  کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چندجمله‌ای  $P(x)$  برابر است با مجموع  $x^n$ ‌هایی که  $1 \leq n \leq 120$  و  $n$  بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چندجمله‌ای چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟



# آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

WWW.RIAZISARA.IR

کشور

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده  $6 \times 4$  روی زمین قرار دارد. نقطه  $A$  روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلتانیم و این کار را در همان جهت آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه  $A$  چه مسافتی را در فضای طی کرده است؟

الف)  $3\pi$  (ب)  $4\pi$  (ج)  $6\pi$  (د)  $8\pi$  (ه)  $12\pi$

۲. سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضایی است که دست‌کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

الف)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$  (ب)  $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$   
ج)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$  (د)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$   
ه) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می‌توان مجموعه  $\{1, 2, \dots, 30\}$  را دو قسمت کرد که حاصل ضرب اعضای آن‌ها با یک‌دیگر برابر باشد؟

الف) این کار ممکن نیست. (ب) بین ۱ و ۱۰ روش (ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش  
د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش (ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $ABC$  به زاویه رأس  $A$  و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطه دل‌خواه  $D$  در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه  $A$  داخل مثلث  $BCD$  قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای  $\angle CAD$  و  $\angle BAD$  را رسم می‌کنیم تا اضلاع  $BD$  و  $CD$  را به ترتیب، در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث  $BCD$  واقع بر پاره خط  $EF$  باشد، طول پاره خط  $AD$  چه قدر است؟

الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (ج) ۲۰ (د) ۳۰ (ه) بستگی به مکان  $D$  دارد.

۵. چندجمله‌ای  $x^4 - x^2 - 2x - 1$  را در نظر بگیرید. مجموعه  $x$ هایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

الف) یک پاره خط (ب) دو پاره خط (ج) یک پاره خط و یک نیم خط  
د) یک پاره خط و دو نیم خط (ه) دو نیم خط



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

WWW.RIAZISARA.IR

کشور

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶. به چند طریق می توان دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر

$$\frac{a+b}{a-b}$$

عددی طبیعی باشد؟

۳۴ (ه)

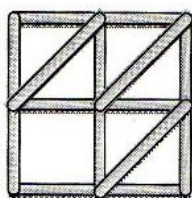
۲۹ (د)

۲۸ (ج)

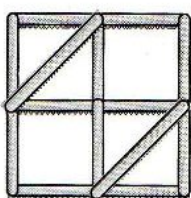
۲۴ (ب)

۱۹ (الف)

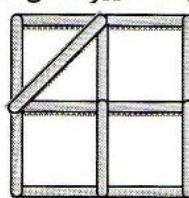
۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول های یک متر و  $\sqrt{2}$  متر چهار شکل زیر را ساخته ایم به طوری که قطعات می توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل ها می توانند با حرکت قطعه چوب ها تغییر شکل دهند؟



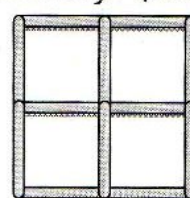
۴ (ه)



۳ (د)



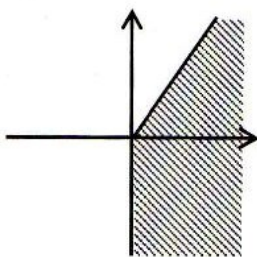
۲ (ج)



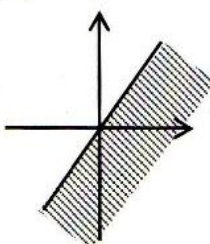
۱ (ب)

الف) هیچ کدام

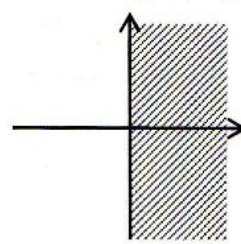
۸. مجموعه نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل  $(x^2 + y^2, xy)$  هستند، که  $x$  و  $y$  اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل ها تقریبی هستند.)



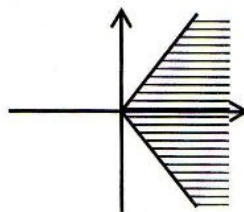
(ج)



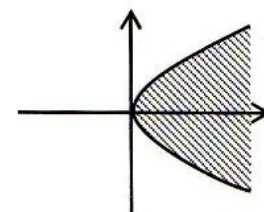
(ب)



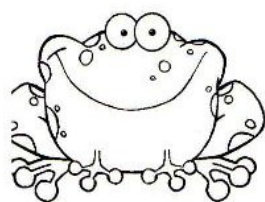
(الف)



(ه)



(د)



۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصله ۲ متری یکدیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت وزغ می پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می خورد و می ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟

۳۲ (ه)

۲۴ (د)

۱۸ (ج)

۱۷ (ب)

۸ (الف)



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

WWW.RIAZISARA.IR

کشور

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) بی‌نهایت  
(ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی  $a$  که برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  که  $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$  و  $x > 0$ ، داشته باشیم  $ax < y$ ، کدام است؟

- الف)  $-\sqrt{80}$  (ب)  $-4$  (ج)  $0$  (د)  $4$  (ه)  $\sqrt{80}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را انتخاب کرد که  $x + y + 2z = xyz$  (الف) ۷ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ممکن نیست.



۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیمرو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامه هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

- الف) ۷۸ (ب) ۸۴ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۶۸ (ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب  $ABCD$  محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

- الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا (ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا (ج) گاهی یکی و گاهی دو تا (د) همواره دو تا (ه) همواره یکی

