



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

قدر مطلق

$$۱) |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$۲) \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|2-\sqrt{3}|}_{+} = 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-2|}_{-} = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{الف) } 3 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} 3 < |x| < 5 \\ 9 < x^2 < 25 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{ب) } -5 < x < -3 \Rightarrow \begin{cases} 3 < |x| < 5 \\ 9 < x^2 < 25 \\ -\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{ج) } -5 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x| < \max\{|-5|, 3\} \Rightarrow |x| < 5 \\ x^2 < (\max\{|-5|, 3\})^2 \Rightarrow x^2 < 25 \\ \begin{cases} 0 < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{3} \\ -5 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{د) } -3 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

سؤال ۱: کمترین مقدار $|x^2 - 4| + 3$ کدام است.

$$|x^2 - 4| \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 4| + 3 \geq 3$$

سؤال ۲: کمترین مقدار $|x^2 - 2| + 3$ کدام است.

$$y = |x^2 + 2| + 3$$

$$\text{راه حل غلط: } |x^2 + 2| \geq 0 \Rightarrow |x^2 + 2| + 3 \geq 3$$

$$\text{راه حل درست: } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow |x^2 + 2| \geq 2 \Rightarrow |x^2 + 2| + 3 \geq 2 + 3 = 5$$

سؤال ۳: حاصل $A = \sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ کدام است.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5}(\sqrt{3})} + \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{2})} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-1| \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{3} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{2}-1 = \sqrt{5}-1 \end{aligned}$$

سؤال ۴: اگر $b < 0 < a$ باشد حاصل $|a-b| + |a+1| - |1-b|$ چقدر است؟

- (۱) $2a$ (۲) $2b$ (۳) $-2a$ (۴) $-2b$

$$\begin{aligned} b < 0 < a &\Rightarrow \begin{cases} a > b \Rightarrow a-b > 0 \\ a > 0 \Rightarrow a+1 > 0 \\ b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow 1-b > 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \underbrace{|a-b|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|a+1|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|1-b|}_{\text{مثبت}} &= a-b+a+1-(1-b) = 2a \end{aligned}$$

سؤال ۵: اگر $a < b, b < 0$ حاصل $|2b-a| - |a-b|$ کدام است.

- (۱) b (۲) $-b$ (۳) a (۴) $-a$

$$\begin{aligned} |a| < |b| \xrightarrow{b < 0} |a| < -b \Rightarrow b < a < -b \Rightarrow \boxed{a-b > 0} \\ \Rightarrow b-a < 0 \xrightarrow[b < 0]{+b} 2b-a < b < 0 \Rightarrow \boxed{2b-a < 0} \\ \Rightarrow \underbrace{|2b-a|}_{\text{منفی}} - \underbrace{|a-b|}_{\text{مثبت}} &= -2b+a-(a-b) = -b \end{aligned}$$

سؤال ۶: الف) اگر $|x| + |2y-4| = 6$ باشد آنگاه حدود تغییرات y کدام است.

ب) حدود تغییرات x را نیز بدست آورید.

$$\text{حدود تغییرات } y: |x| = 6 - |2y-4| \geq 0 \Rightarrow |2y-4| \leq 6 \Rightarrow |y-2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq y-2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$$

$$\text{حدود تغییرات } x: |2y-4| = 6 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$$

سؤال ۷: اگر $a < b < 0 < x$ آنگاه حاصل $|x-b| + |a-b-x|$ کدام است.

$$a < b < 0 < x \Rightarrow \begin{cases} x-b > 0 \\ a-b < 0, -x < 0 \Rightarrow a-b-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{|x-b|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|a-b-x|}_{\text{منفی}} = x-b-(a-b-x) = 2x-a$$

سؤال ۸: اگر $|a+1| < 1-b$ باشد حاصل عبارت $|a+b| + |a-b+2| - |b-2|$ کدام است.

- (۱) $-b$ (۲) $4-3b$ (۳) $3b-4$ (۴) $b-2a-4$

$$y = 1-b, \quad x = a+1 \Rightarrow |x| < y \Rightarrow -y < x < y$$

$$|a+b| + |a-b+2| - |b-2| \Rightarrow \underbrace{|x-y|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|x+y|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|-(y+1)|}_{\text{منفی}}$$

$$-x + y + x + y - (y+1) = y-1 = (1-b)-1 = -b$$

سؤال ۹: برای x, y, z مخالف صفر، حداقل $\left(\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{x}{z} \right| \right) \left(\frac{|y|+|z|}{|x|} \right)$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

یادآوری:
$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 2 & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 & a < 0 \end{cases}$$

$$\left(\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{x}{z} \right| \right) \left(\left| \frac{y}{x} \right| + \left| \frac{z}{x} \right| \right) = 1 + \left| \frac{z}{x} \right| + \left| \frac{y}{z} \right| + 1 = 2 + \left| \frac{z}{y} \right| + \left| \frac{y}{z} \right|$$

اگر $a = \left| \frac{y}{z} \right|$ چون $a > 0$ است پس $a + \frac{1}{a} \geq 2$

گزینه (۴) درست است $\Rightarrow a + \frac{1}{a} + 2 \geq 4$

دقت کنید که حالت تساوی دو طرف حداقل مقدار برای $a=1$ رخ می دهد یعنی: $|y|=|z|$



ویژگی های قدر مطلق

۱) $|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$

۲) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

۳) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

۴) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$

۵) $|x| = |-x|$

$$\begin{cases} \text{اگر } a.b \geq 0 \Rightarrow |a| + |b| = |a+b| \\ \text{اگر } a.b < 0 \Rightarrow |a| + |b| > |a+b| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{اگر } a.b > 0 \Rightarrow |a| + |b| > |a+b| \\ \text{اگر } a.b \leq 0 \Rightarrow |a| + |b| = |a-b| \end{cases}$$

۶) $-|x| \leq x \leq |x|$

۷) $|a| + |b| \geq |a+b|$ (نامساوی مثلث)

۸) $|a| + |b| + |c| \geq |a+b+c+\dots|$

۹) $|a| + |b| \geq |a-b|$

۱۰) $|a| + |b| \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

سؤال ۱۰: به ازای چه مقادیری از x نامساوی $|x+2| + |3-x| \geq |4x+3|$ برقرار است.

(۱) $x \geq 3$ یا $x \leq \frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4} \leq x \leq 3$ (۳) $x \geq -2$ (۴) R

$$\underbrace{|4x+3|}_{|a|} + \underbrace{|3-x|}_{|b|} \geq \underbrace{|3x+6|}_{|a+b|} \Rightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$$

این نامساوی همواره برقرار است پس $x \in R$ می تواند باشد و لذا گزینه (۴) درست است.

سؤال ۱۱: به ازای کدام مقادیر x ، نامساوی $|x^2-x-2| + |x^2+3x+2| > 2|x^2+x|$ برقرار است.

(۱) R (۲) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(-2, 2) - \{-1\}$

$$\underbrace{|x^2-x-2|}_{|a|} + \underbrace{|x^2+3x+2|}_{|b|} > \underbrace{2|x^2+x|}_{|a+b|} \Rightarrow |a| + |b| > |a+b|$$

$$\xrightarrow{ab < 0} (x^2-x-2)(x^2+3x+2) < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1)(x+1)(x+2) < 0 \Rightarrow (x+1)^2(x-2)(x+2) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 2 & \\ \hline + & - & - & + \end{array}$$

گزینه (۴) درست است. $\Rightarrow -2 < x < 2 - \{-1\}$

سؤال ۱۲: اگر $|b| > |a| - |b-a|$ برقرار باشد کدام گزینه همواره صحیح است.

(۱) $ab < a^2$ (۲) $ab > a^2$ (۳) $ab < b^2$ (۴) $ab > b^2$

$$|b| > |a| - |b-a| \Rightarrow |b| + |b-a| > |a|$$

از طرفی می دانیم $|b-a| = |a-b|$ پس:

$$|b| + |a-b| > |a| \Rightarrow |b| + (a-b) > |a|$$

در واقع $|x| + |y| > |x+y|$ این اتفاق زمانی رخ می دهد که $xy < 0$ باشد یا $b(a-b) < 0$ باشد:

$$ab - b^2 < 0 \Rightarrow ab < b^2 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

سؤال ۱۳: مجموعه جواب نامعادله $|2-x| + |2x+3| > |3x+1|$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

$$\underbrace{|2-x|}_{|a|} + \underbrace{|2x+3|}_{|b|} > \underbrace{|3x+1|}_{|a+b|} \xrightarrow{a+b < 0} (x-2)(2x+3) < 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < 2$$

پس ۳ مقدار صحیح برای x وجود دارد. $x = -1, 0, 1$



ادامه ویژگی های ...

۱۱) $|a| - |b| \leq |a+b|$

۱۴) $||a| - |b|| \leq |a+b|$

۱۲) $|a| - |b| \leq |a-b|$

۱۵) $|a| - |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

۱۳) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

سؤال ۱۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟ $(a, b \in R)$

(۲) $|a-b| - |a+b| \leq 2|b|$

(۱) $|a-b| + |a+b| \geq 2|a|$

(۴) $|a-b| - |a+b| \geq 2|a|$

(۳) $|a-b| + |a+b| \geq 2|b|$



ادامه ویژگی های ...

۱۶) $|a| \geq a \Rightarrow a \in R$

۱۸) $|a| \leq a \Rightarrow a \geq 0$

۱۷) $|a| > a \Rightarrow a < 0$

۱۹) $|a| < a \Rightarrow a \in \emptyset$

سؤال ۱۵: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-2}{x-3} > \frac{x-2}{x-3}$ را بدست آورید.

$$\frac{x-2}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{2}{+} \mid \frac{3}{-} \mid \Rightarrow 2 < x < 3$$

سؤال ۱۶: اگر $|x-y| + |x+y| > 2|y|$ باشد کدام نتیجه گیری صحیح است.

(۴) $x+y < 0$

(۳) $x+y > 0$

(۲) $|x| < |y|$

(۱) $|x| > |y|$

$$|x+y| + |x-y| > 2|y| \Rightarrow |x+y| = |x+y| - (x-y) \Rightarrow |a| + |b| > |a-b|$$

یادآوری:

$$\begin{aligned} a \cdot b > 0 &\Rightarrow |a| + |b| > |b-a| \\ a \cdot b \leq 0 &\Rightarrow |a| + |b| = |b-a| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow |x| > |y|$$

سؤال ۱۷: اگر $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$ چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

- (الف) $|x+y| = |x| + |y|$ (ب) $|x-y| = |x| + |y|$ (ج) $|x+y| < |x| + |y|$ (د) $|x-y| < |x| + |y|$
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۴

چون $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ لذا شرط آنکه $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$ باشد، آن است که x و y مختلف علامه و یکی از عبارت ها برابر یک و دیگری منفی یک (-۱) باشد. حال اگر $x \cdot y < 0$ باشد آنگاه $|x+y| < |x| + |y|$ در همین حالت $|x-y| = |x| + |y|$ لذا دو تا از موارد بیان شده صحیح است.

سؤال ۱۸: در کدام نواحی مختصات تساوی $||\sin x| - |\cos x|| = |\sin x + \cos x|$ برقرار است.

- (۱) اول یا دوم (۲) اول یا چهارم (۳) دوم یا چهارم (۴) سوم یا چهارم

یادآوری: $|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$ زمانی رخ می دهد که $ab \leq 0$ باشد.

$$||\sin x| - |\cos x|| = |\sin x + \cos x| \Rightarrow \sin x \cos x \leq 0$$

ناحیه دوم $\Rightarrow \sin x \geq 0, \cos x \leq 0$
 ناحیه دوم یا ناحیه چهارم $\Rightarrow \sin x \leq 0, \cos x \geq 0$

سؤال ۱۹: $|x-a| + |x-b| \geq |a-b|$

برای بدست آوردن $|a-b|$ ، ساده ترین روش این است که ریشه ی یک قدر مطلق را به جای x در قدر مطلق دیگر قرار بدهیم و سپس حاصل قدر مطلق را بدست آوریم:

$$|x-2| + |x+5| \geq 7$$

$x=2$

سؤال ۲۰: $-|a-b| \leq |x-a| - |x-b| \leq |a-b|$

برای بدست آوردن $|a-b|$ ، نیز دقیقاً مانند شماره ی قبل عمل می کنیم:

$$-7 \leq |x-2| - |x+5| \leq 7$$

$x=2$

حل معادلات قدر مطلق

$$|u| = a \xrightarrow{a \geq 0} u = \pm a$$

سؤال ۱: $(x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0$

می دانیم $x^2 = |x|^2$ بنابراین:

$$|x-1|^2 - 5|x-1| + 4 = 0 \Rightarrow (|x-1| - 4)(|x-1| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 1 \Rightarrow x-1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0, 2 \\ |x-1| = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, 5 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۴ ریشه ی $\{-3, 0, 2, 5\}$ است.

سؤال ۲: $|x-1| = 2x+6$

$$x-1 = \pm(2x+6) \xrightarrow{x \geq -3} \begin{cases} x-1 = 2x+6 \Rightarrow x = -7 \text{ غ ق} \\ x-1 = -(2x+6) \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \checkmark \end{cases}$$

سؤال ۳: مساحت ناحیه ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟ (داخلی تجربی ۹۵)

۳ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

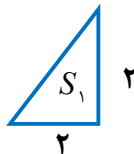
$\frac{7}{3}$ (۲)

۲ (۱)

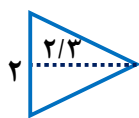
$$y_1 = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$2x = 2 - x \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

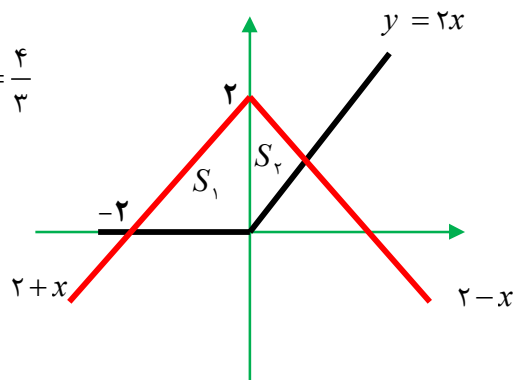
$$S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$



$$S_2 = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$



$$S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$



سؤال ۴: مجموع جواب های معادله ی $2|x| = 1 + |x-1|$ کدام است.

۱ (۴)

$-\frac{4}{3}$ (۳)

$-\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$$2|x| - |x-1| = 1$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x - (x-1) = 1 \Rightarrow x+1=1 \Rightarrow x=0 \text{ غ ق}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 2x - (1-x) = 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \checkmark$$

$$x < 0 \Rightarrow -2x - (1-x) = 1 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \checkmark$$

$$\text{مجموع جواب ها: } -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

پس تنها دو جواب $x = -2$ و $x = \frac{2}{3}$ قابل قبول است در نتیجه:

سؤال ۵: معادله $|x| = kx$ به ازای $k \neq 0$ چند جواب دارد.

$$x|x| - kx = 0 \Rightarrow x(|x| - k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| = k \end{cases}$$

اگر $k > 0$ باشد آنگاه $x = \pm k$ اما اگر $k < 0$ باشد $|x| = k$ دارای جواب نیست پس این معادله حداقل یک و حداکثر ۳ جواب دارد.

سؤال ۶: اگر خط $2x + ay = 2$ نمودار $|x| + |y| = 4$ را در ۲ نقطه قطع کند. حدود a کدام است.

$$|a| > 1 \quad (۴)$$

$$|a| < 2 \quad (۳)$$

$$|a| < 1 \quad (۲)$$

$$|a| > 2 \quad (۱)$$

ابتدا در مورد $|x| + |y| = 4$ می نویسیم:

$$\begin{cases} y \geq 0 & x + y = 4 \\ y < 0 & x - y = 4 \end{cases}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \Rightarrow (2-a)y = 6 \xrightarrow{a \neq 2} y = \frac{6}{2-a}$$

$$y < 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \Rightarrow (a+2)y = -6 \xrightarrow{a \neq -2} y = \frac{-6}{a+2}$$

پس اگر $y \geq 0$ و $2-a > 0$ دقیقاً یک نقطه‌ی تقاطع و اگر $y < 0$ و $a+2 > 0$ دقیقاً یک نقطه‌ی تقاطع خواهیم داشت پس برای آنکه ۲ نقطه‌ی تقاطع داشته باشیم باید:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{6}{2-a} \geq 0 &\Rightarrow 2-a > 0 \Rightarrow a < 2 \\ y = \frac{-6}{a+2} < 0 &\Rightarrow a+2 > 0 \Rightarrow a > -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 < a < 2 \Rightarrow |a| < 2$$

سؤال ۷: روی محور اعداد حقیقی شکل زیر، چند نقطه با طول صحیح وجود دارد بطوریکه فاصله‌ی آن از A از سه

برابر فاصله‌ی آن از B، یک واحد کمتر باشد.



(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) هیچ

$$|x - 7| = 3 \vee |x - 1| = 1 \Rightarrow 3|x - 1| \vee |x - 7| = 1$$

$$x \geq 7: 3(x-1) - (x-7) = 1 \Rightarrow 2x + 4 = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق}$$

$$1 \leq x \leq 7: 3(x-1) - (7-x) = 1 \Rightarrow 4x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{4} \notin \mathbb{Z} \text{ غ ق}$$

$$x \leq 1: 3(1-x) - (7-x) = 1 \Rightarrow -2x - 4 = 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ غ ق}$$

پس هیچ عدد صحیحی در معادله‌ی بالا صدق نمی کند.

سؤال ۸: نمودار تابع $y = ||3x| - |x||$ بر نمودار کدام تابع منطبق است.

$$|2x| \quad (۴)$$

$$|4x| \quad (۳)$$

$$|3x| - x \quad (۲)$$

$$|3x| - |2x| \quad (۱)$$

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow y = |3x - x| = |2x| \\ x \leq 0 &\Rightarrow y = |(-3x) - (-x)| = |-3x + x| = |-2x| = |2x| \end{aligned} \right\} \rightarrow y = |2x|$$

سؤال ۹: معادله $|3x - |x|| = x + 1$ چند جواب دارد.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

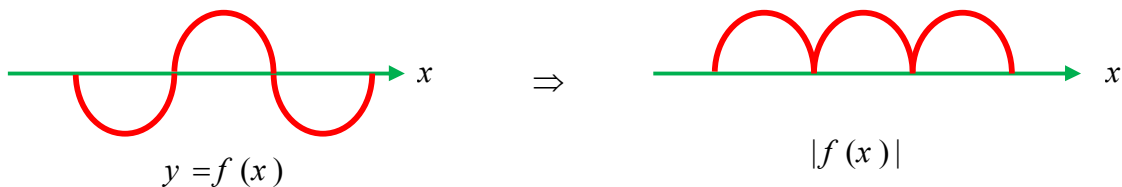
$$|3x - |x|| = x + 1 \xrightarrow[x \geq -1]{x+1 \geq 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow |3x - x| = x + 1 \Rightarrow 2x = x + 1 \Rightarrow 2x = \pm(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 1 \Rightarrow x = 1 \\ 2x = -x - 1 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ x \leq 0 \xrightarrow{x \geq -1} -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow |3x - (-x)| = x + 1 \Rightarrow 4x = x + 1 \Rightarrow 4x = \pm(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} 4x = x + 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 4x = -x - 1 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 1, -\frac{1}{5} \right\}$$

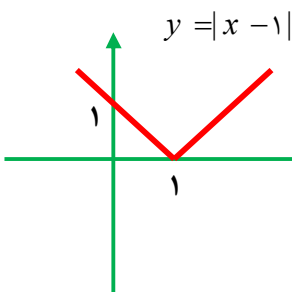
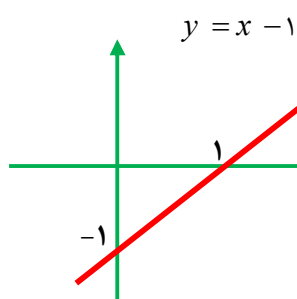
روش رسم $y = |f(x)|$

در نمودار $y = f(x)$ فقط قسمت هایی را که زیر محور x ها قرار دارند نسبت به این محور قرینه می کنیم. نمودار حاصل نمودار $y = |f(x)|$ است.



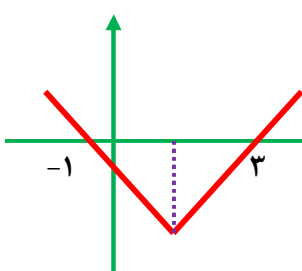
سؤال ۱۰: نمودار تابع $y = |2 - |x - 1||$ را ترسیم کنید.

$$y = ||x - 1| - 2|$$

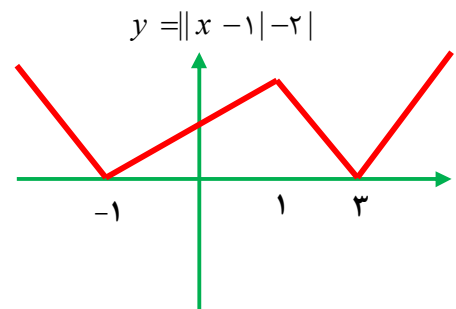


نمودار را ۲ واحد
به سمت پایین انتقال
می دهیم.

$$y = |x - 1| - 2$$



نمودار $y = ||x - 1| - 2|$
را به دست می آوریم



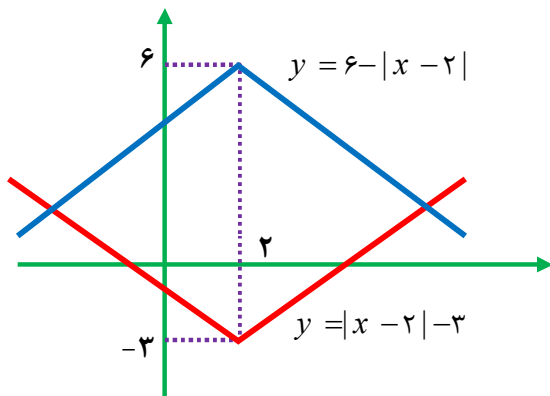
سؤال ۱۱: فرض کنید $f(x) = |x - 2| - 3$ ، اگر نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه شود و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال یابد، سطح بین دو منحنی کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۲۷ (۳) ۱۸ (۴) $\frac{۸۱}{۲}$

اگر بخواهیم $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، کافیهست که $y = -f(x)$ را رسم کنیم (در واقع نمودار را در یک منفی ضرب می کنیم)

$$f(x) = |x - 2| - 3 \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} g(x) = 3 - |x - 2| \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{سه واحد به سمت}}$$

$$h(x) = 3 - |x - 2| + 3 = 6 - |x - 2|$$

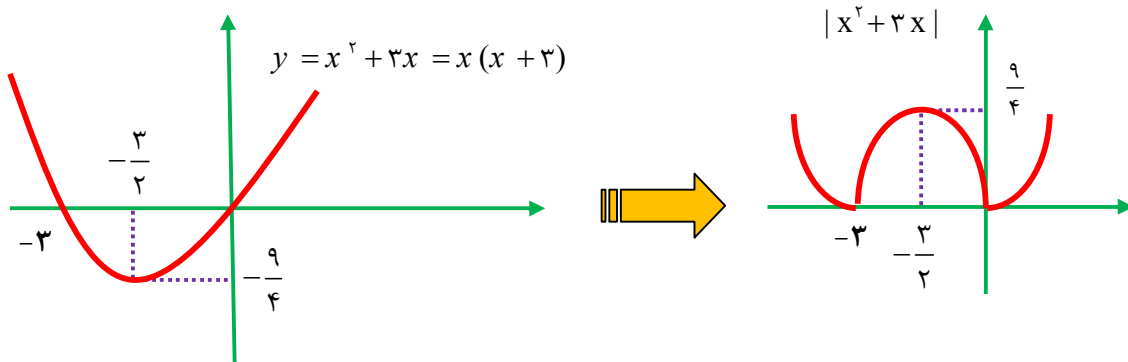


اما برای حل این سؤال احتیاجی به دانستن معادله $h(x)$ نیست در واقع رأس زاویه نقطه‌ای $(2, -3)$ است پس از قرینه کردن به $(2, 3)$ تبدیل شده و با انتقال ۳ واحدی به سمت بالا، رأس جدید $(2, 6)$ می شود شکل حاصل مربعی است که نقاط $(2, -3)$ و $(2, 6)$ دو سر قطر آن می باشند لذا $d = 9$ و $S = \frac{d^2}{۲} = \frac{۸۱}{۲}$ است.

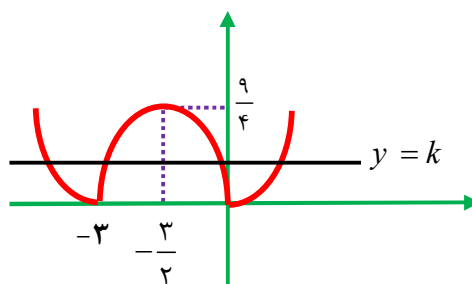
سؤال ۱۲: مجموعه جواب های نامعادله $|x^2 + 3x| \leq k$ یک بازه‌ی متقارن است حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{۹}{۴}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) $\frac{۹}{۲}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

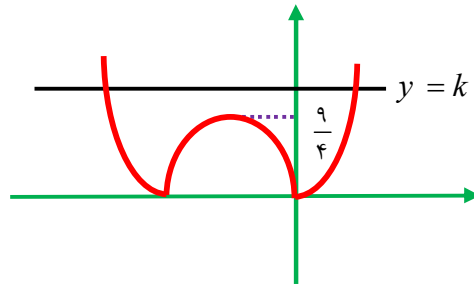
ابتدا نمودار $y = x^2 + 3x$ را رسم می کنیم:



اگر $k < \frac{9}{۴}$ مجموعه جواب دو بازه‌ی جدا از هم است که نمی توان آن را بازه‌ی متقارن دانست.



اما اگر $k \geq \frac{9}{4}$ مجموعه جواب یک بازه‌ی متقارن است پس: $K_{\min} = \frac{9}{4}$



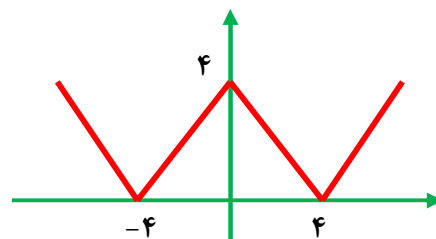
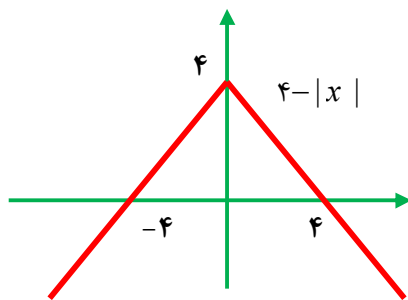
سؤال ۱۳: به ازای چه مقدار k معادله $||4 - x|| = k$ سه ریشه دارد.

(۱) $k < 4$

(۲) $k = 0$

(۳) $k > 4$

(۴) $k = 4$



به ازای $k < 4$ معادله ۴ ریشه دارد.

به ازای $k = 4$ معادله ۳ ریشه دارد.

به ازای $k > 4$ معادله ۲ ریشه دارد.

پس $k = 4$

سؤال ۱۴: به ازای چه مقادیری از k معادله $|x^2 - 4x - 3| = k$ دقیقاً ۲ جواب دارد.

(۱) $k > 7$

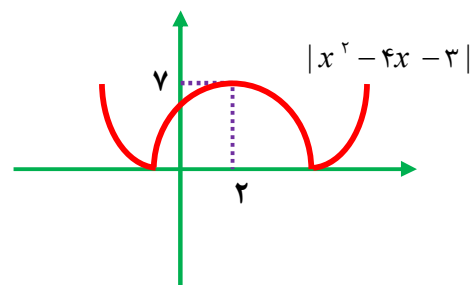
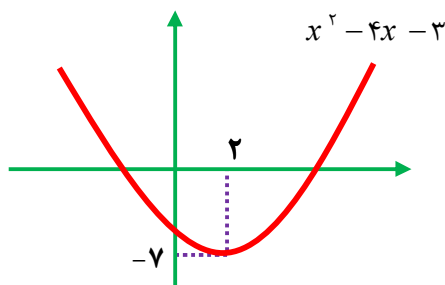
(۲) $0 < k < 7$

(۳) $0 \leq k < 7$

(۴) $k > 7$ یا $k = 0$

اول رأس سهمی $x^2 - 4x - 3$ را پیدا می‌کنیم و آن را می‌کشیم:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{4}{2}, -\frac{28}{4}\right) = (2, -7)$$



با توجه به شکل واضح است که اگر $k > 7$ یا $k = 0$ باشد معادله دقیقاً ۲ جواب دارد.

سؤال ۱۵: به ازای چه مقادیری از k معادله $|x^2 - 3x - 3| = k$ دارای دقیقاً ۳ جواب است.

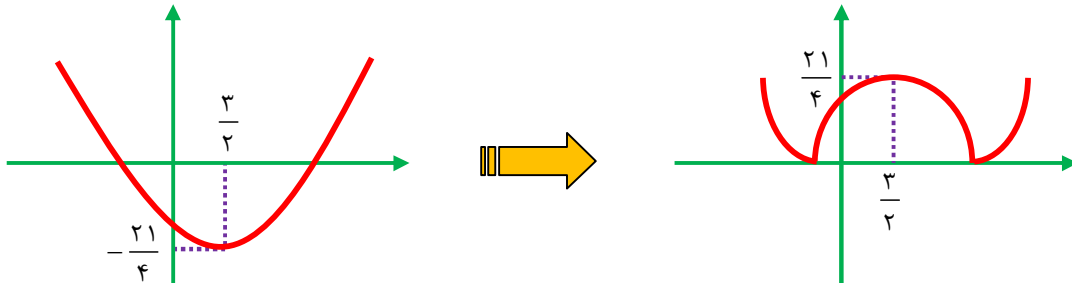
$$(1) \frac{3}{2}$$

$$(2) \frac{21}{4}$$

$$(3) 3$$

$$(4) \frac{21}{2}$$

$$\text{رأس سهمی} \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{21}{4} \right)$$



برای اینکه معادله دقیقاً ۳ جواب داشته باشد باید: $K = \frac{21}{4}$

سؤال ۱۶: به ازای کدام مقادیر a ، معادله $|ax^2 + 3x - 2| = 3$ دقیقاً ۳ جواب دارد.

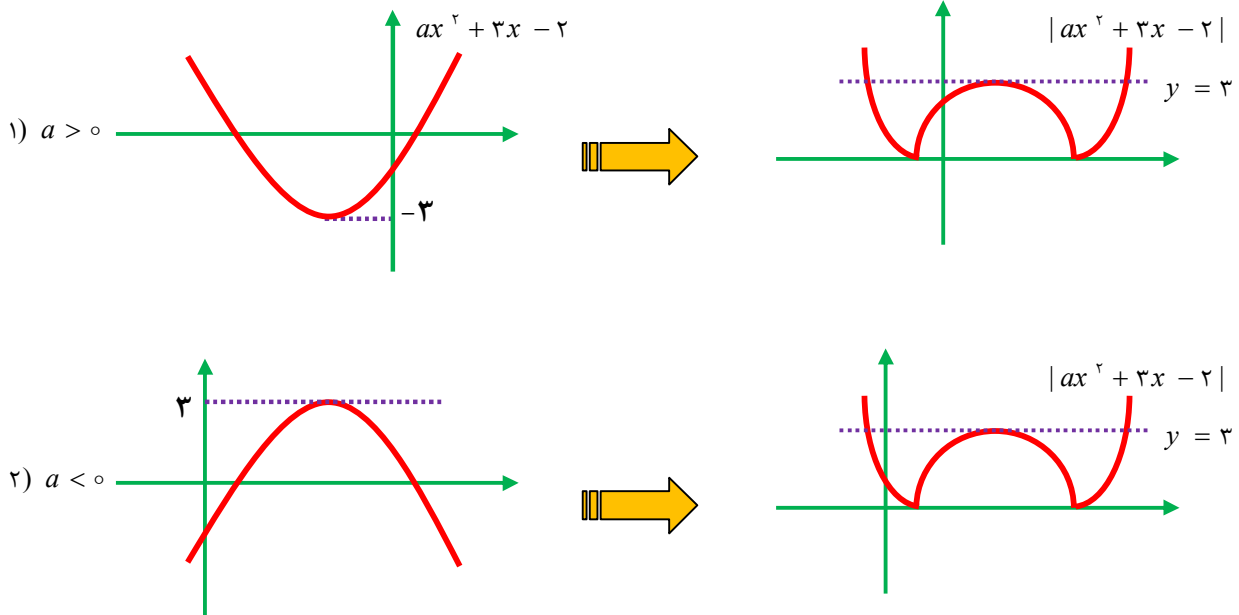
$$(1) R - \left\{ -\frac{9}{4} \right\}$$

$$(2) \left\{ \pm \frac{9}{2} \right\}$$

$$(3) \left[-\frac{9}{20}, 0 \right)$$

$$(4) \left\{ -\frac{9}{20}, \frac{9}{4} \right\}$$

برای آنکه این معادله ۳ جواب داشته باشد دو حالت زیر می تواند اتفاق بیفتد:



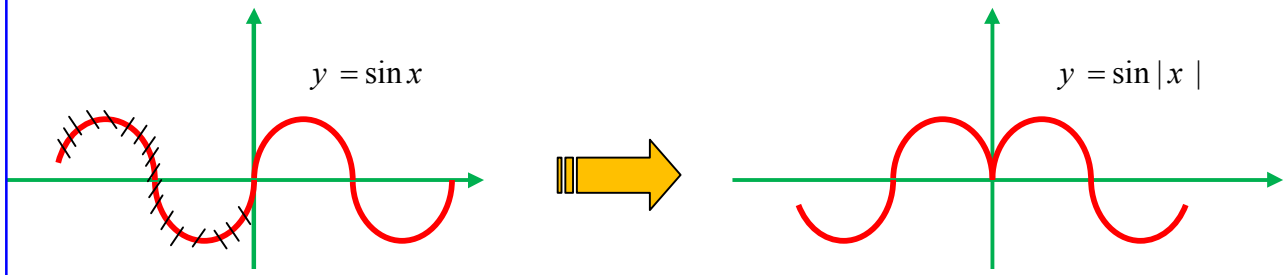
در حالت اول مقدار مینیمم تابع $ax^2 + 3x - 2$ باید برابر ۳- باشد و در حالت دوم ماکزیمم تابع باید برابر ۳ باشد پس:

$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9+9a}{4a} = -3 \Rightarrow 9+9a = 12a \Rightarrow a = \frac{9}{4} \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9+9a}{4a} = 3 \Rightarrow 9+9a = -12a \Rightarrow a = -\frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow a \in \left\{ -\frac{9}{20}, \frac{9}{4} \right\}$$

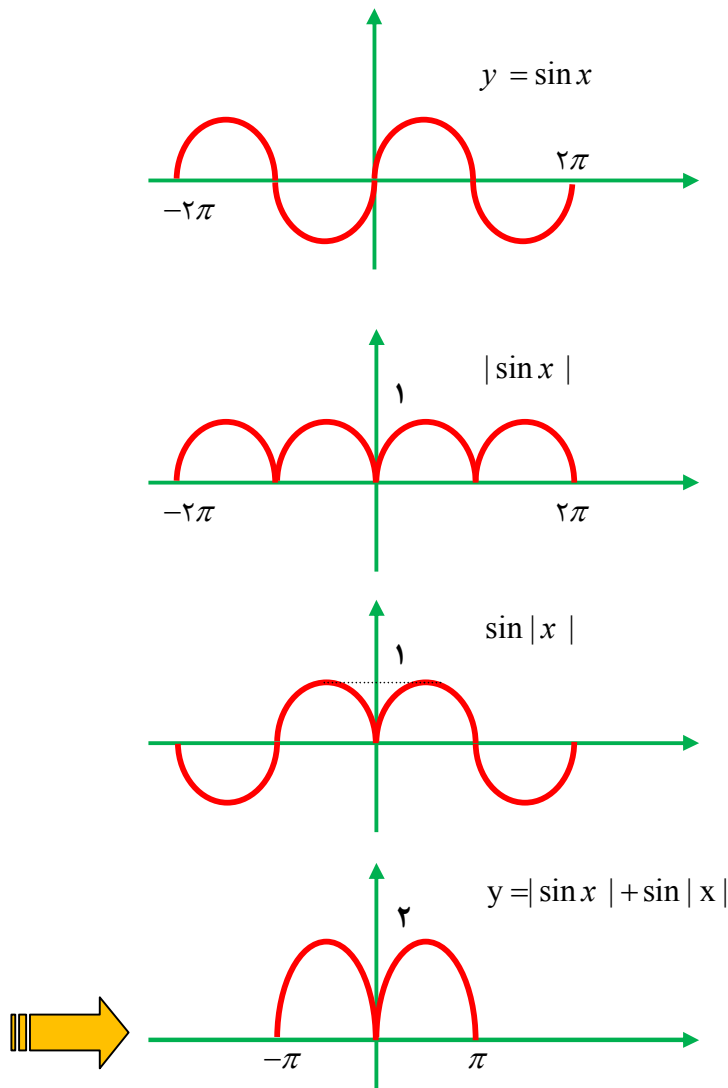
روش رسم $y = f(|x|)$

ابتدا $y = f(x)$ را رسم می کنیم سپس قسمت سمت چپ محور y ها حذف می کنیم و قرینه ی نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها رسم می کنیم.

سؤال ۱۷: نمودار تابع $y = \sin |x|$ را در بازه ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.



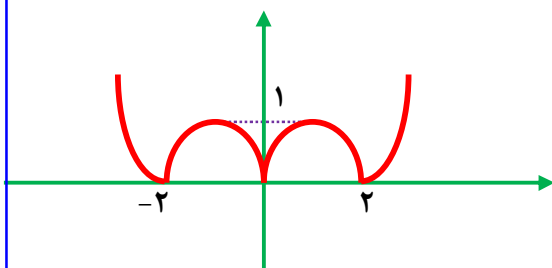
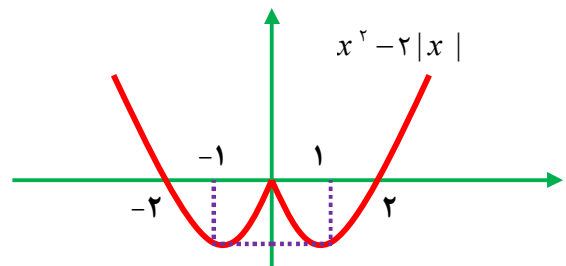
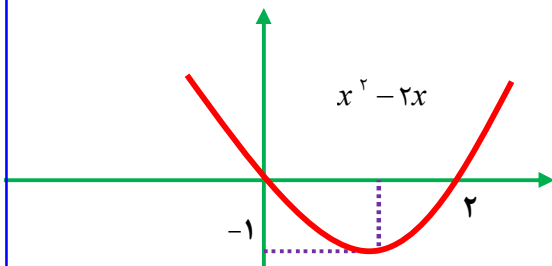
سؤال ۱۸: نمودار $y = |\sin x| + \sin |x|$ را در بازه ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.



سؤال ۱۹: معادله $|x^2 - 2|x|| = k$ به ازای چه مقادیری از k دارای ۶ جواب است.

- (۱) $0 \leq k \leq 1$ (۲) $0 < k \leq 1$ (۳) $0 \leq k < 1$ (۴) $0 < k < 1$

ابتدا $x^2 - 2|x|$ را رسم می کنیم سپس $f(|x|)$ یعنی $|x^2 - 2|x||$ سپس کلاً قدر مطلق می گیریم:



با توجه به شکل اگر $0 < k < 1$ باشد معادله ۶ جواب دارد.

اگر $k = 0$ معادله ۳ جواب دارد.

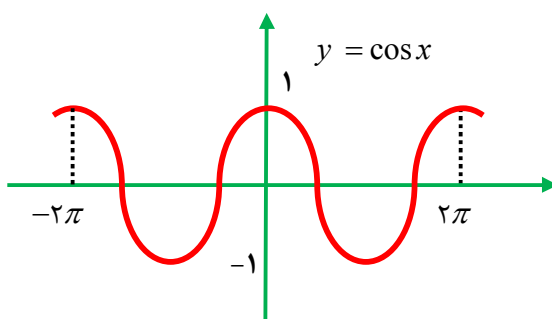
اگر $k = 1$ معادله ۴ جواب دارد.

اگر $k > 1$ معادله ۲ جواب دارد.

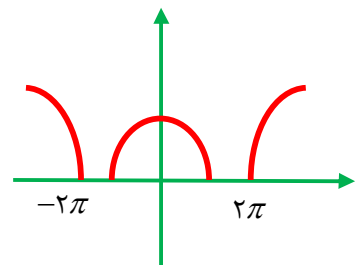
روش رسم $|y| = f(x)$

ابتدا دقت کنید $f(x) = |y| \geq 0$. این بدان معنی است که در نمودار $|y| = f(x)$ مقدار $f(x)$ نمی تواند منفی باشد. بنابراین قسمت هایی از نمودار $y = f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد را حذف می کنیم. بعد قرینه ی قسمت های باقیمانده را نسبت به محور x ها را به آن اضافه می کنیم تا نمودار حاصل نسبت به محور x ها متقارن باشد (در $|y| = f(x)$ با تغییر y به $-y$ تغییری حاصل نمی شود).

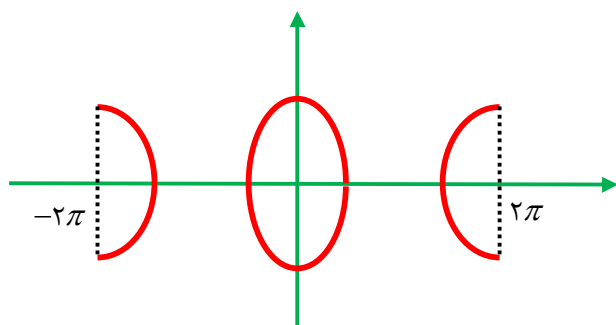
سؤال ۲۰: مقدار $|y| = \cos x$ را ترسیم کنید. (در بازه $[-2\pi, 2\pi]$)



قسمت هایی که زیر محور
x ها قرار دارد را حذف می کنیم



قسمت های باقیمانده را نسبت به محور x ها
قرینه و به نمودار اضافه می کنیم



نامعادلات قدر مطلق

$$\begin{cases} |u| < a \xrightarrow{a>0} -a < u < a \\ |u| > a \longrightarrow u > a \text{ یا } u < -a \end{cases}$$

سؤال ۱: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$|x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5 \Rightarrow -3 < x < 7$$

$$|x - 2| > 7 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > 7 \\ \text{یا} \\ x - 2 < -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 9 \\ \text{یا} \\ x < -5 \end{cases}$$

سؤال ۲: مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| < x^2 - 2x$ به صورت کدام بازه است؟ (خارج تجربی ۹۲)

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

$$|x - 2| > x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > x^2 - 2x \\ \text{یا} \\ x - 2 < -x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \phi \\ \text{یا} \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

سؤال ۳: مجموعه جواب نامعادله $x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3$ به کدام صورت است.

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-6, 1]$ (۳) $[-6, 2]$ (۴) $[-2, 6]$

$$x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow |x| \leq -\frac{1}{2}x + 3 \quad \boxed{-\frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x - 3 \leq x \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 \leq x \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{2}x \Rightarrow x \geq -6 & (1) \\ x \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -6 \leq x \leq 2$$

ترفند ویژه: برای حل نامعادله به صورت $a < p(x) < b$ می توان نامعادله $(p(x) - a)(p(x) - b) < 0$ را حل کرد زیرا:

$$\begin{cases} a < p(x) \Rightarrow p(x) - a > 0 & (1) \\ p(x) < b \Rightarrow p(x) - b < 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow (p(x) - a)(p(x) - b) < 0$$

تست قبل به این روش:



$$\frac{1}{2}x - 3 \leq x \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}x + 3\right)\left(x + \frac{1}{2}x - 3\right) \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 2$$

سؤال ۴: مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ به صورت کدام بازه است؟ (خارج تجربی ۹۵)

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(1, 2)$

$$2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1| \xrightarrow{x^2 + 1 > 0} 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1 \Rightarrow |x - 2| < -x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &\geq 0 \Rightarrow -x(x - 2) \geq 0 \\ \Rightarrow &\begin{array}{c} \\ - \quad | \quad + \quad | \quad - \\ \end{array} \\ &0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 < -x^2 + 2x \Rightarrow (x - 2 - x^2 + 2x)(x - 2 + x^2 - 2x) < 0$$

$$\Rightarrow (-x^2 + 3x - 2)(x^2 - x - 2) < 0 \Rightarrow -(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2) < 0$$

$$\Rightarrow -(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2)^2 > 0$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \end{array} \quad \xrightarrow{0 \leq x \leq 2} 1 < x < 2$$

گزینه (۴) درست است.

سؤال ۵: اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۲)

- (۱) $x \leq -1$ (۲) $x \geq -1$ (۳) $x \leq 1$ (۴) $x \geq 1$

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|x - 2| - x}$$

$$\Rightarrow D_f : |x - 2| - x \geq 0 \Rightarrow |x - 2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} x - 2 \geq x \\ \text{یا} \\ x - 2 \leq -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \geq 0 \\ 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۶: نامعادله‌ی زیر را حل کنید. $|x - 2| > |2x + 1|$

طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \Rightarrow (3x - 1)(x + 3) < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{1}{3}$$

ترفند ویژه: برای حل نامعادلات $|A| < |B|$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$|A| < |B| \Rightarrow A^2 < B^2 \Rightarrow A^2 - B^2 < 0 \Rightarrow (A - B)(A + B) < 0$$

$$\Rightarrow |A| < |B| \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$|A| > |B| \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$$



سؤال ۷: مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ به صورت کدام بازه است؟ (تجربی ۹۵ - با تغییر)

(۱) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۲) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ (۴) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} |x-2| > |2x-3|$$

$$\Rightarrow (x-2-2x+3)(x-2+2x-3) > 0 \Rightarrow (-x+1)(3x-5) > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x-5) < 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

سؤال ۸: مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$ کدام است. (داخل تجربی ۹۲)

(۱) $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (۲) $\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (۴) $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} |x-2| > |2x+1| \Rightarrow (x-2-2x-1)(x-2+2x+1) > 0$$

$$\Rightarrow (-x-3)(3x-1) > 0 \Rightarrow (x+3)(3x-1) < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{1}{3} \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

مجموعه جواب نامعادله $a \leq u \leq b$ به صورت زیر است:

$$a \leq u \leq b \cup -b \leq u \leq -a$$

سؤال ۹: مجموعه جواب نامعادله $3 \leq x-2 \leq 6$ کدام است.

$$3 \leq x-2 \leq 6 \quad \text{یا} \quad -6 \leq x-2 \leq -3 \Rightarrow 5 \leq x \leq 8 \quad \text{یا} \quad -4 \leq x \leq -1$$

سؤال ۱۰: مجموعه جواب نامعادله $3x - |x-2| > 7$ کدام است.

$$3x - |x-2| > 7 \Rightarrow \underbrace{|x-2|}_{\text{همواره مثبت}} < 3x-7 \xrightarrow{\substack{3x-7>0 \\ x>\frac{7}{3}}} |x-2| = x-2 \Rightarrow x-2 < 3x-7$$

$$\Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \xrightarrow{x>\frac{7}{3}} x > \frac{5}{2}$$

الف) $3 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} 3 < |x| < 5 \\ |x| < 5 \end{cases}$

ب) $-5 < x < -3 \Rightarrow \begin{cases} 3 < |x| < 5 \\ |x| < 5 \end{cases}$

ج) $-5 < x < 2 \Rightarrow |x| < 5$

اگر بازه $a < x < b$ را بخواهیم به صورت $|x| < k$ بنویسیم، کمترین مقدار k از دستور $k = \max\{|a|, |b|\}$ بدست می آید.



سؤال ۱۱: اگر مجموعه جواب نامعادله $||x-2|-3| < 10$ را به صورت $|x| < k$ مطرح کنیم، کوچکترین مقدار k کدام است.

۱۳ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۱ (۱)

$$||x-2|-3| < 10 \Rightarrow -10 < |x-2|-3 < 10 \Rightarrow \underbrace{-7 < |x-2| < 13}_{\text{همواره درست}} \Rightarrow |x-2| < 13$$

گزینه (۲) درست است. $\Rightarrow -13 < x-2 < 13 \Rightarrow -11 < x < 15 \Rightarrow |x| < \max\{|-11|, |15|\} \Rightarrow |x| < 15$

سؤال ۱۲: اگر مجموعه جواب های نامعادله های $|2x-3| < 1$ ، $|3x-1| < a$ ، غیرتهی باشند و هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند برای a چند عدد صحیح بدست می آید.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$|2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$$|3x-1| < a \Rightarrow -a < 3x-1 < a \Rightarrow 1-a < 3x < a+1 \Rightarrow \frac{1-a}{3} < x < \frac{a+1}{3}$$

در دو حالت مجموعه‌ی جواب ها نقطه‌ی مشترک ندارند.

$$\begin{cases} \frac{a+1}{3} \leq 1 \Rightarrow a \leq 2 \\ 2 \leq \frac{1-a}{3} \Rightarrow 6 \leq 1-a \Rightarrow a \leq -5 \end{cases} \xrightarrow{a>0} 0 < a \leq 2$$

پس دو مقدار صحیح برای a بدست می آید: $(a=1, 2)$

سؤال ۱۳: اگر برای هر x که در نامساوی $|2x-4| < x+1$ صدق می کند، نامساوی $|x-2| < k$ برقرار باشد در این صورت کمترین مقدار k کدام است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$|2x-4| < x+1 \xrightarrow{x>-1} -x-1 < 2x-4 < x+1 \Rightarrow (2x-4+x+1)(2x-4-x-1) < 0$$

$$\Rightarrow (3x-3)(x-5) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow -1 < x-2 < 4 \Rightarrow -4 < -1 < x-2 < 4 \Rightarrow |x-2| < 4$$

$\Rightarrow k=4$: کمترین مقدار k

سؤال ۱۴: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2-2| < |x+1|-1$ بازه‌ی (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟ (خارج ۹۵)

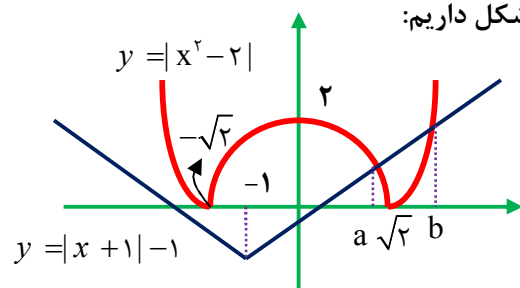
۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

با رسم شکل داریم:



$$\begin{cases} 0 < a < \sqrt{2}: -x^2+2=x+1-1 \Rightarrow x^2+x-2=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow a=1 \\ b > \sqrt{2} \Rightarrow x^2-x=x+1-1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله بازه‌ی $(1, 2)$ بوده که طول وسط آن $x = \frac{3}{2}$ است.

سؤال ۱۵: اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a, b) باشد، طول وسط بازه کدام است؟

(داخل ریاضی ۹۵)

۴ (۴)

 $\frac{7}{2}$ (۳)

۳ (۲)

 $\frac{5}{2}$ (۱)حالت اول) اگر $x \geq 1$ باشد:

$$\sqrt{3x+4} > 2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$3x+4 > x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-7x < 0 \Rightarrow 0 < x < 7 \xrightarrow{x \geq 1} \boxed{1 \leq x < 7} \quad (1)$$

حالت دوم) اگر $x < 1$ باشد:

$$\sqrt{3x+4} > -2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$3x+4 > 9x^2-12x+4 \Rightarrow 9x^2-15x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{x < 1} \boxed{0 < x < 1} \quad (2)$$

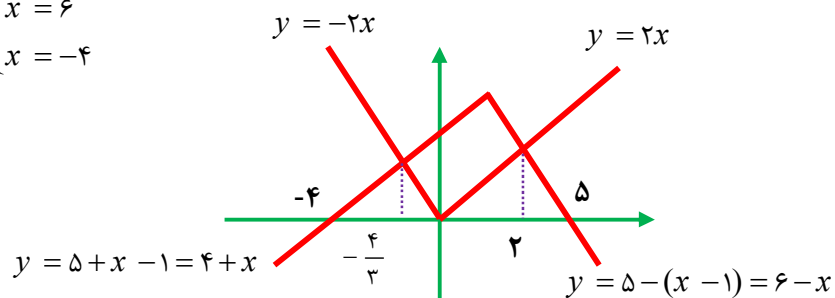
$$(1) \cup (2) \Rightarrow 0 < x < 7 \Rightarrow x = 3/5 \text{ وسط بازه}$$

سؤال ۱۶: در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $f(x) = 5 - |x-1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد.

(خارج ۹۳)

 $(-\frac{2}{3}, 2)$ (۴) $(-\frac{4}{3}, 2)$ (۳) $(-\frac{2}{3}, 1)$ (۲) $(-\frac{4}{3}, 1)$ (۱)ابتدا ببینیم که $f(x)$ در چه نقاطی محور x ها را قطع می کند:

$$5 - |x-1| = 0 \Rightarrow |x-1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x = 6 - x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ -2x = 4 + x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{نقاط تقاطع دو نمودار:}$$

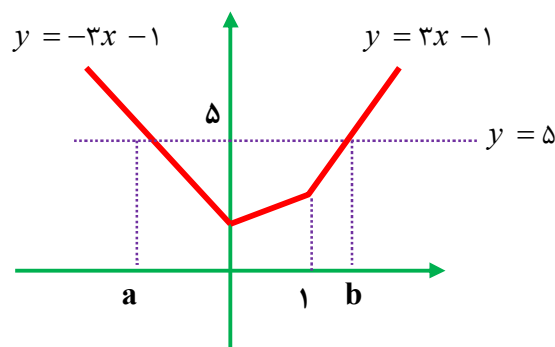
با توجه به شکل واضح است که در بازه $(-\frac{4}{3}, 2)$ ، $f(x)$ بالاتر از $g(x)$ قرار دارد.



سؤال ۱۷: در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد.

(خارج از کشور ۹۳)

$$5 - |x - 1| > |2x| \Rightarrow |x - 1| + |2x| < 5$$



همانطور که از شکل مشخص است در بازه (a, b) ، $|x - 1| + |2x|$ زیر $y = 5$ قرار دارد:

$$\left. \begin{array}{l} a: -3x + 1 = 5 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ b: 3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \end{array} \right\} \longrightarrow -\frac{4}{3} < x < 2$$



سؤال ۱۸: در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ در بالای نمودار $y = |x - 3| + 2$ قرار دارد.

(سراسری ریاضی ۹۳)

$$\begin{array}{ll} (1) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 5 \right) & (2) \left(2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right) \\ (3) \left(2, \frac{4 + \sqrt{15}}{2} \right) & (4) (2, 2 + \sqrt{15}) \end{array}$$

$$\sqrt{5 + 4x - x^2} > |x - 3| + 2 \xrightarrow[-1 \leq x \leq 5]{-x^2 + 4x + 5 \geq 0} \text{دامنه رادیکال}$$

$|x - 3|$ را باید یک بار برای $x \geq 3$ بشکنیم پس باید نامساوی بالا را یک بار در بازه $3 \leq x \leq 5$ و یک بار برای بازه $-1 \leq x \leq 3$ حل کنیم:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 3: \sqrt{5 + 4x - x^2} > -x + 3 + 2 &\Rightarrow \sqrt{5 - 4x - x^2} > -x + 5 \\ \Rightarrow 5 + 4x - x^2 > x^2 - 10x + 25 &\Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 < 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \\ \Rightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 &\Rightarrow \frac{2}{+} \quad \frac{5}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow 2 < x < 5 \xrightarrow{-1 \leq x \leq 3} 2 < x \leq 3 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 5: \sqrt{5 + 4x - x^2} > x - 3 + 2 &\Rightarrow \sqrt{5 + 4x - x^2} > x - 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \\ \Rightarrow 5 + 4x - x^2 > x^2 - 2x + 1 &\Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 < 0 \\ \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} &\xrightarrow{3 \leq x \leq 5} 3 \leq x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} 2 < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

سؤال ۱۹: مجموعه جواب نامعادله $|x - 4| < 2x - 5$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ (۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0: (x - 4)(x) < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) < 0 \\ \Rightarrow 1 < x < 5 \xrightarrow{x \geq 0} 1 < x < 5 \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0: (x - 4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x > 1 + \sqrt{6} \\ x < 1 - \sqrt{6} \end{cases} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6} \quad (2) \end{array} \right.$$

گزینه (۴) صحیح است. $(1) \cup (2) \rightarrow 1 < x < 5 \cup x < 1 - \sqrt{6}$

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6}$$

سؤال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است. (خارج ۹۲)

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

$$-x < x^2 - 2x < x \Rightarrow (x^2 - 2x + x)(x^2 - 2x - x) < 0 \Rightarrow (x^2 - x)(x^2 - 3x) < 0 \Rightarrow x^2(x - 1)(x - 3) < 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 3 & & \\ \hline + & + & - & + & \end{array} \Rightarrow 1 < x < 3$$

سؤال ۲۱: مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| + x < 0$ به صورت $(-\infty, a)$ می باشد. مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -1

$$|x - 2| < -x \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x - 2 < -x \Rightarrow |x + 2| < -x$$

$$\Rightarrow (x + 2 + x)(x + 2 - x) < 0 \Rightarrow 2(2x + 2) < 0 \Rightarrow \underline{x < -1} \Rightarrow a = 1$$

سؤال ۲۲: اگر A ، مجموعه جواب نامعادله $|4 - x| \leq 2x$ باشد کوچکترین عضو A کدام است؟

$$|4 - x| \leq 2x \xrightarrow{x \geq 0} |4 - x| \leq 2x \Rightarrow (4 - x - 2x)(4 - x + 2x) \leq 0 \Rightarrow (4 - 3x)(x + 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 4) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ \text{یا} \\ x \leq -4 \end{cases} \xrightarrow{x \geq 0} x \geq \frac{4}{3}$$

پس کوچکترین عضو A ، $x = \frac{4}{3}$ است.

سؤال ۱۳: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|2x - 1| (x + 1) < 6x - 4$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(۴) هیچ

(۳) بی شمار

(۲) ۲

(۱) ۱

یا

اگر عددی طبیعی در نامعادله‌ی داده شده صدق کند پس:

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x - 1 \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(x + 1) < 6x - 4 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 < 6x - 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 < 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 1) < 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$$

هیچ عدد طبیعی در بازه‌ی $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ وجود ندارد. پس مجموعه‌ی جواب نامعادله شامل هیچ عدد طبیعی نیست.

سؤال ۱۴: چند عدد طبیعی x در نامعادله‌ی $|x - 8| > x + 10$ صدق نمی‌کند.

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

$$x \geq 8: x(x - 8) > x + 10 \Rightarrow x^2 - 9x - 10 > 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < -1 \end{cases} \xrightarrow{x \geq 8} x > 10$$

$$x \leq 8: x(8 - x) > x + 10 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 2) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5 \xrightarrow{x \leq 8} 2 < x < 5$$

پس جواب نهایی برابر $(10, +\infty) \cup (2, 5)$ است که اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ را شامل نمی‌شود.

سؤال ۱۵: اگر برای هر x در بازه‌ی (a, b) نامساوی $\sqrt{20 - x^2} > |x - 1| + 1$ برقرار باشد بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{10} + 2$ (۳) $\sqrt{10} + 1$ (۲) $2\sqrt{2} + 2$ (۱) $2\sqrt{2} + 1$

ابتدا دامنه را تعیین می‌کنیم $x \in [-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$ سپس قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq 1: \sqrt{20 - x^2} > (x - 1) + 1 \Rightarrow \sqrt{20 - x^2} > x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 20 - x^2 > x^2$$

$$\Rightarrow x^2 < 10 \Rightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < \sqrt{10} \quad (1)$$

$$x \leq 1: \sqrt{20 - x^2} > -(x - 1) + 1 \Rightarrow \sqrt{20 - x^2} > -x + 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 20 - x^2 > x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \xrightarrow{x \leq 1} -2 < x \leq 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} -2 < x < \sqrt{10} \Rightarrow b - a = \sqrt{10} + 2$$

سؤال ۲۶: در کدام بازه نمودار تابع $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ زیر منحنی $y = |x+1| - 2$ می باشد.

- (۱) $(1+\sqrt{2}, 3)$ (۲) $(1-\sqrt{3}, 3)$ (۳) $(1, 1+\sqrt{2})$ (۴) $(1, 1+\sqrt{3})$

ابتدا دامنه را بررسی می کنیم:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < |x+1| - 2$$

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 & (1) \\ |x+1| - 2 > 0 \Rightarrow |x+1| > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -3 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow 1 < x \leq 3$$

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < |x+1| - 2 \xrightarrow{1 < x \leq 3} \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < x+1-2$$

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x^2 + 2x + 3 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x^2 + 2x + 3 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0$$

$$\begin{cases} x > 1 + \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1 < x \leq 3} 1 + \sqrt{2} < x \leq 3$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

سؤال ۲۷: جواب نامعادله $|x-2| < b$ به صورت $x < a$ است. مقدار $a+b$ کدام است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

واضح است که باید $b > 0$ باشد پس:

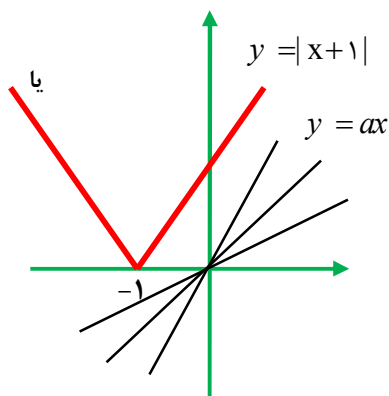
$$|x-2| < b \Rightarrow (x-b)(x+2b) < 0 \Rightarrow ((1-b)x+2b)((1+b)x-2b) < 0$$

می دانیم جواب این نامعادله یا به صورت $\alpha < x < \beta$ است یا به صورت $x > \beta$ یا $x < \alpha$ است پس برای اینکه جواب نامعادله به صورت $x < a$ باشد باید ضریب x در یکی از پرانتزها صفر شود. پس باید:

$$\begin{cases} 1-b=0 \\ \text{یا} \\ 1+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-1 \end{cases} \xrightarrow{b=1} 2(2x-2) < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a+b=1+1=2$$

سؤال ۲۸: نامساوی $|x+1| > ax$ برای هر x حقیقی برقرار است. مجموعه ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) $a < 0$ (۲) $a \geq 1$ (۳) $0 < a \leq 1$ (۴) $a < 1$



بهترین راه، رسم نمودار است برای آن که همواره $|x+1| > ax$ باشد باید خط $y = ax$ یا موازی شاخه های $y = x+1$ یا شیبش کمتر از شیب آن باشد که این تا هنگامی که شیب نزدیک صفر شود ادامه می یابد پس $0 < a \leq 1$ (برای $a \leq 0$ خط حداقل یکی از دو شاخه ی منحنی (یا رأس زاویه) را قطع می کند).

سؤال ۲۹: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x^2 + 3x| \leq k$ یک بازه متقارن است حداقل مقدار K کدام است.

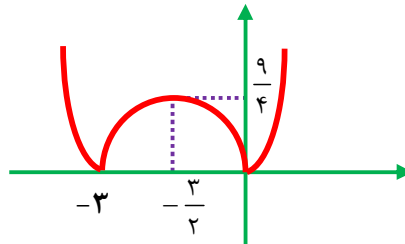
$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{9}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

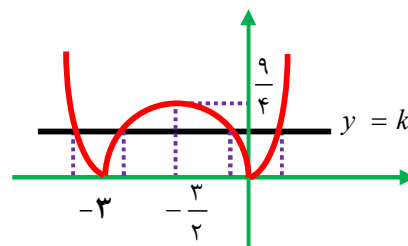
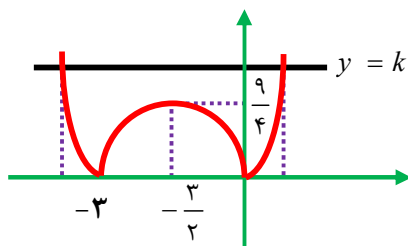
$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

با توجه به نمودار $|x^2 + 3x|$ داریم:



اگر $k < \frac{9}{4}$ باشد مجموعه جواب دو بازه‌ی جدا از هم است که نمی‌توان آن را بازه‌ی متقارن دانست اما اگر $k \geq \frac{9}{4}$ باشد

مجموعه جواب یک بازه‌ی متقارن است پس $k_{\min} = \frac{9}{4}$



سؤال ۳۰: دو نامعادله‌ی $|x - \alpha| < \beta$ و $|x + 1| > x^2 - 1$ معادل اند مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x+1 > x^2-1 \\ \text{یا} \\ x+1 < -x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2 < 0 \\ \text{یا} \\ x^2+x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) < 0 \\ \text{یا} \\ x(x+1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ \text{یا} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$$

از طرفین نامساوی به اندازه‌ی میانگین اعداد -1 و 2 $\left(\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}\right)$ کم می‌کنیم:

$$-1 - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 3$$

در حالت کلی:

$$a < x < b \Rightarrow a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \Rightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$$

سؤال ۳۱: مجموعه جواب نامعادله $|x| < x + 6 < 2|x - 2|$ با مجموعه جواب کدام نامعادله برابر است.

(۱) $|x - 4| < 2$ (۲) $|x - 4| > 2$ (۳) $|x - 2| < 4$ (۴) $|x - 2| > 4$

$$\Rightarrow |x + 6| < 2|x| \Rightarrow |x + 6| < 2x \Rightarrow (x + 6 - 2x)(x + 6 + 2x) < 0 \Rightarrow (-x + 6)(3x + 6) < 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(3x + 6) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ \text{یا} \\ x < -2 \end{cases}$$

از طرفین این نامساوی ها به اندازه‌ی میانگین اعداد ۶، -۲ $\left(\frac{6-2}{2} = 2\right)$ کم می کنیم:

$$\begin{cases} x - 2 > 4 \\ \text{یا} \\ x - 2 < -4 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| > 4 \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

$$\begin{cases} x - \frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{2} \\ x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{a-b}{2} \text{ باشد آنگاه: } \begin{cases} x > a \\ \text{یا} \\ x < b \end{cases}$$

سؤال ۳۲: اگر نامعادلات $|x+1| - 2 < 3$ ، $|x+1| - 2 < 3$ معادل یکدیگر باشند $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{2}{5}$

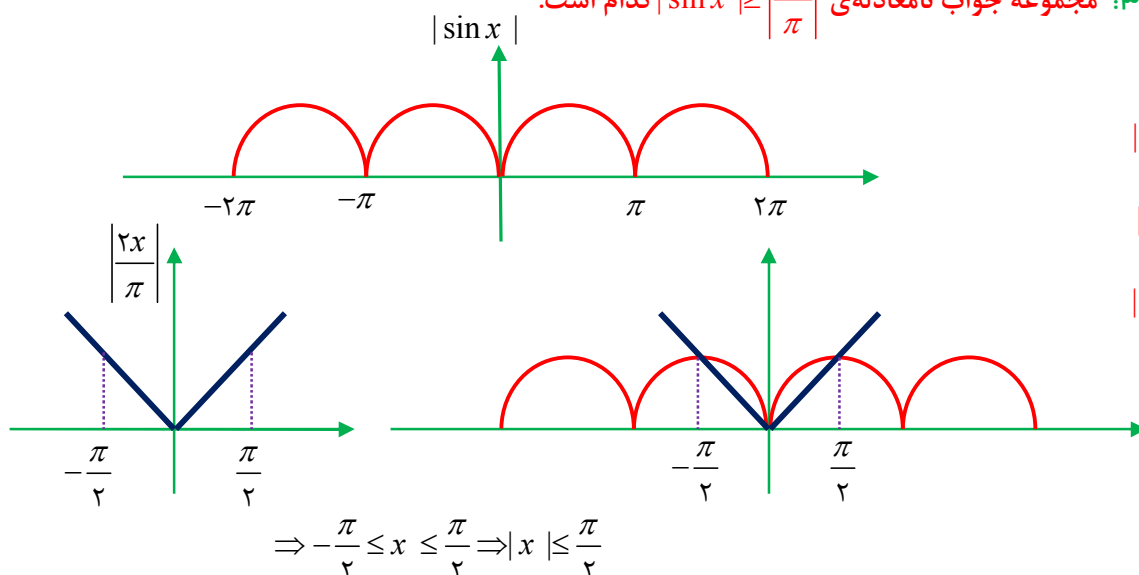
$$||x+1| - 2| < 3 \Rightarrow -3 < |x+1| - 2 < 3 \Rightarrow -1 < |x+1| < 5 \Rightarrow |x+1| < 5 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} |x+1| < 5$$

همواره درست

$$\left| \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

سؤال ۳۳: مجموعه جواب نامعادله $|\sin x| \geq \left| \frac{2x}{\pi} \right|$ کدام است.

(۱) $|x| \leq \pi$
(۲) $|x| \leq \frac{\pi}{4}$
(۳) $|x| \leq \frac{\pi}{2}$
(۴) $|x| \leq \frac{\pi}{3}$



تابع گلدانی

$$y = |x-a| + |x-b|$$

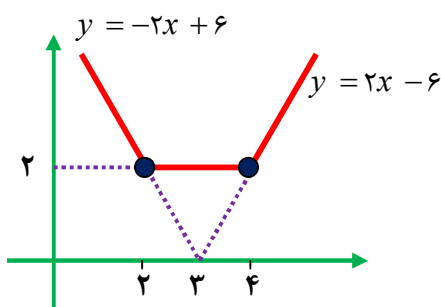
سؤال ۱: تابع $y = |x-2| + |x-4|$ را رسم کنید.

	۲	۴
$x-2$	-	+
$x-4$	-	+

ناحیه اول: $x < 2 \Rightarrow y = \overset{-}{|x-2|} + \overset{-}{|x-4|} = -x+2 -x+4 \Rightarrow y = -2x+6$

ناحیه دوم: $2 \leq x \leq 4 \Rightarrow y = \overset{+}{|x-2|} + \overset{+}{|x-4|} = x+2 -x+4 \Rightarrow y = 2$

ناحیه سوم: $x > 4 \Rightarrow y = \overset{+}{|x-2|} + \overset{+}{|x-4|} = x-2+x-4 \Rightarrow y = 2x-6$



مرکز تقارن $y = |x-a| + |x-b|$
برابر $x = \frac{a+b}{2}$ است.

رسم سریع تابع گلدانی

سؤال ۲: نمودار $y = |x-2| + |x-4|$ را رسم کنید.

.....

.....

.....

سؤال ۳: نمودار $y = |x| + |x+2|$ را رسم کنید.

.....

.....

.....

سؤال ۴: نمودار $y = |2x+2| + |2x+4|$ را رسم کنید.

.....

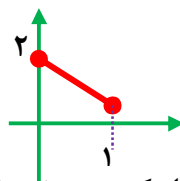
.....

.....

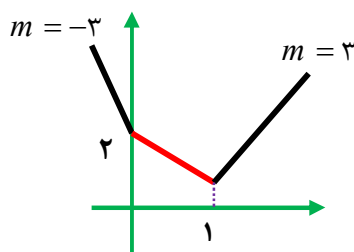
سؤال ۵: نمودار تابع $y = |x| + |2x-2|$ را رسم کنید.

۸۰ (مرله ۱) ریشه های درون قدر مطلق را پیدا کن و درون تابع قرار بده تا مختصات ۲ نقطه شکستگی نمودار معلوم بشه بعدش این دو نقطه رو به هم وصل کن.

$$y = \underbrace{|x|}_{x=0} + \underbrace{|2x-2|}_{x=1} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline f(x) & 2 & 1 \end{array}$$



۸۰ (مرله ۲) از دو سر پایه خطی که ایجاد کردی دو نیم خط به سمت بالا یکی به شیب ۳ و اون یکی شیب -۳ رسم کن.



توجه: در تابع $y = |ax+b| + |cx+d|$ شیب بازوی راست برابر با $(|a| + |c|)$ و شیب بازوی چپ برابر با $-(|a| + |c|)$ است.

سؤال ۶: برد تابع $y = |x-1| + |2x+2|$ را بدست آورید.



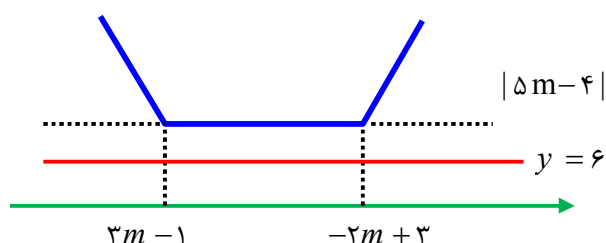
سؤال ۷: به ازای چه مقادیری از m معادله $|x-3m+1| + |x+2m-3| = 6$ جواب ندارد.

$$-2 < m < \frac{2}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{2}{5} < m < 2 \quad (3)$$

$$m > \frac{2}{5} \text{ یا } m < -1 \quad (2)$$

$$m > 2 \text{ یا } m < -\frac{2}{5} \quad (1)$$



برای اینکه معادله ی بالا جواب نداشته باشد کافیست:

$$|(3m-1) - (-2m+3)| > 6 \Rightarrow |5m-4| > 6 \Rightarrow \begin{cases} 5m-4 < -6 \\ \text{یا} \\ 5m-4 > 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m < -2 \\ \text{یا} \\ 5m > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{2}{5} \\ \text{یا} \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (۱) درست است.}$$

سؤال ۸: خط $y = 2x + 3$ نمودار $y = |x - 2| + |x + a|$ را در بی شمار نقطه قطع می کند. مقدار a کدام است.

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۵



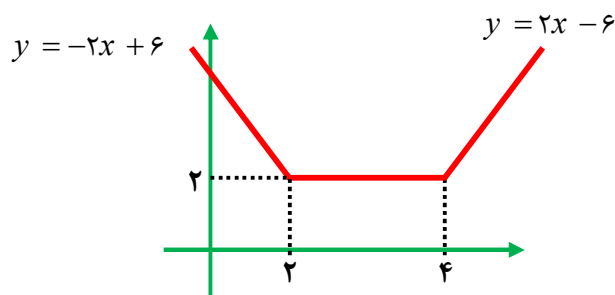
اگر خط $y = 2x + 3$ بخواهد منحنی را در بی شمار نقطه قطع کند باید بر یکی از اضلاع مایل آن منطبق باشد لذا خط $y = 2x + 3$ باید بر خط $y = 2x - 2 + a$ منطبق باشد لذا:

$$-2 + a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

سؤال ۹: معادله $|x - 2| + |x - 4| = 2x + k$ فقط یک ریشه دارد مجموعه ی مقادیر ممکن برای x کدام است؟

- (۱) $k < 4$ (۲) $k < 6$ (۳) $k > -4$ (۴) $k > -6$

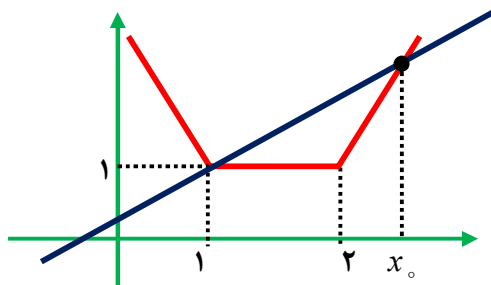
$$|x - 2| + |x - 4|$$



شرط آن که معادله $|x - 2| + |x - 4| = 2x + k$ یک ریشه داشته باشد آن است که همواره $2x - 6 < 2x + k$ باشد، پس: $k > -6$

$$|x - 1| + |x - 2| > x$$

سؤال ۱۰: مجموعه جواب نامعادله ی روبرو را بدست آورید.



مجموعه جواب نامعادله $(-\infty, 1) \cup (x_0, +\infty)$ است برای بدست آوردن x_0 نمودار دو تابع را به ازای $x > 2$ تقاطع می دهیم:

$$(x - 1) + (x - 2) = x \Rightarrow x_0 = 3$$

$$\Rightarrow \text{اگر } |x - 1| + |x - 2| > x \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

سؤال ۱۱: معادله $||x-1|+|x-2|| = \sin x$ در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد.

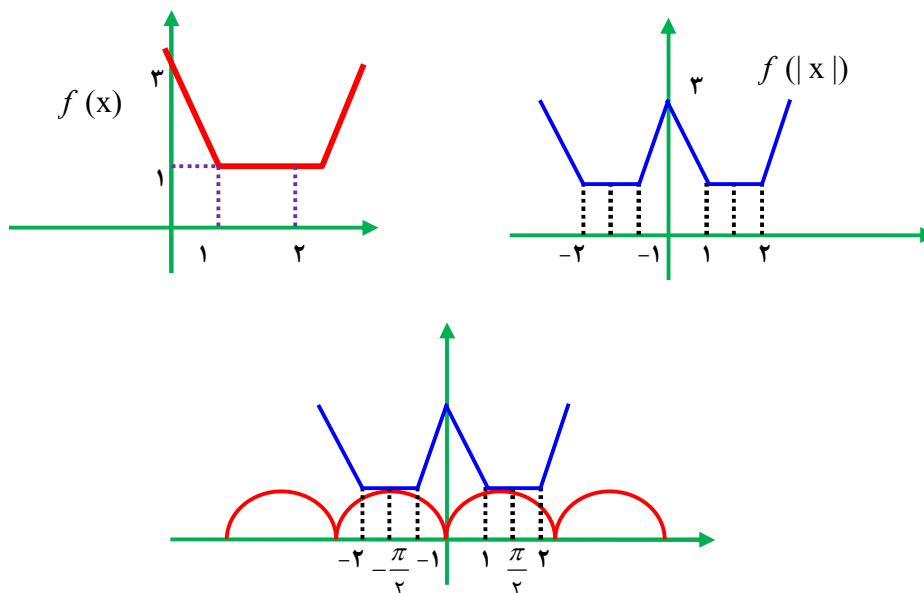
۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

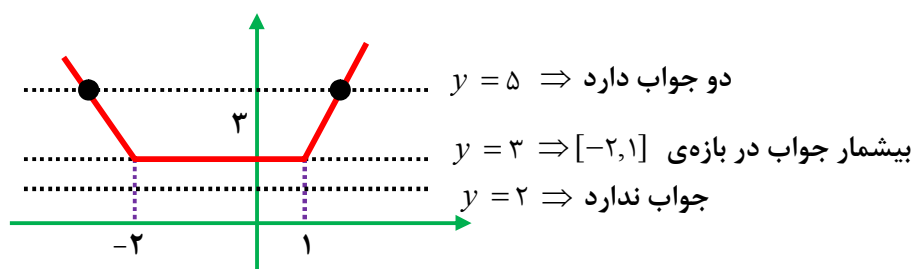
اگر فرض کنیم $f(x) = |x-1| + |x-2|$ باید ببینیم معادله $f(|x|) = \sin x$ چند جواب دارد.



معادله دو جواب دارد.

حل معادله گلدانی

سؤال ۱۲: تعداد جواب های معادله گلدانی $|x-1| + |x+2| = k$ را در حالت های $k = 2, 3, 5$ بررسی کنید.



پس: در واقع جواب های معادله $|x-a| + |x-b| = k$ از سه مدل خارج نیست ($a < b$)

(۱) اگر k از کف تابع گلدانی بالاتر باشد معادله دو جواب دارد: $|a-b| < k$

(۲) اگر k با کف تابع گلدانی یکی باشد معادله بی شمار جواب دارد ($|a-b| = k$) $x \in [a, b]$

(۳) اگر k از کف تابع گلدانی پایین تر باشد معادله جواب ندارد $|a-b| > k$

در حالتی که معادله‌ی گلدانی دو جواب دارد ($|a-b| < k$) می‌توان ریشه‌های معادله‌ی گلدانی را به طریق زیر بدست آورد.

$$|x-a| + |x-b| = k$$

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{k}{2}$$

$x_1 + x_2 = a+b \quad |x_1 - x_2| = k$

$$|x-2| + |x-4| = 3$$

$$x = \frac{2+4}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$$

سؤال ۱۳: جواب‌های معادله‌ی $|x+2| + |x-3| = 9$ را بدست آورید.

$$|x+2| + |x-3| = 9$$

$$\frac{-2+3}{2} \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \end{cases}$$

سؤال ۱۴: معادله‌ی $|x-a| + |x+1| = 4$ بی‌شمار ریشه داشته باشد، a کدام است.

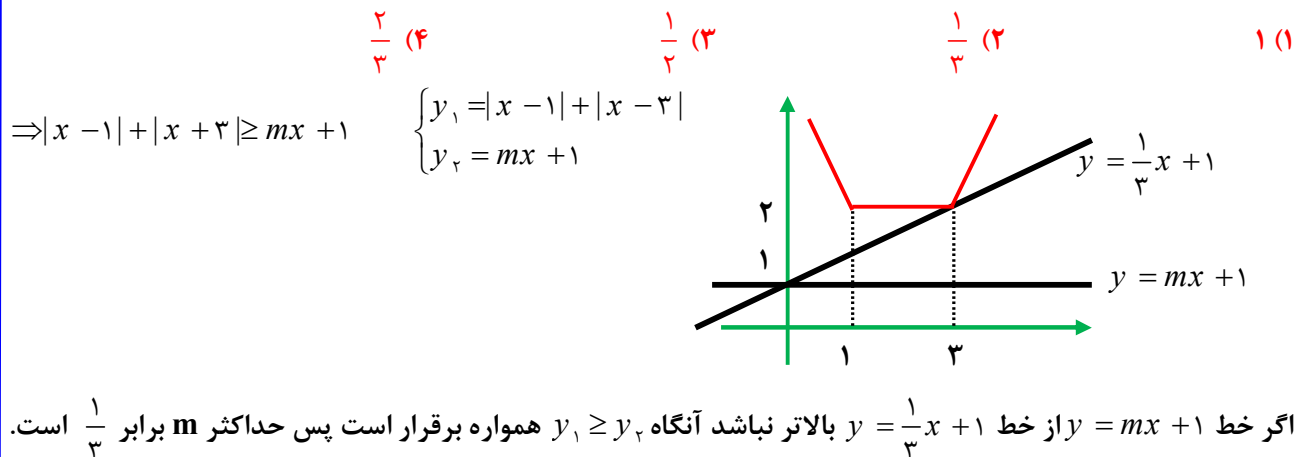
(۱) -۵ یا ۲ (۲) -۲ یا ۵ (۳) ۳ یا -۵ (۴) ۳ یا -۲

$$\Rightarrow |a-1| = 4 \Rightarrow a-1 = \pm 4 \Rightarrow a = 1 \pm 4 \Rightarrow a = 5 \text{ یا } -3$$

سؤال ۱۵: منحنی $y = |x-2| + |x-3|$ با خط $y = m$ یک چهارضلعی به مساحت ۸ می‌سازد. M چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) $\sqrt{15}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{17}$

سؤال ۱۶: فرض کنید $p = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ اگر برای هر x نامساوی $p \geq mx + 1$ برقرار باشد آنگاه حداکثر m کدام است؟



سؤال ۱۷: در معادله $|x + 6a| + |x - 2a| = -10a$ تفاضل ریشه‌ی کوچکتر از ریشه‌ی بزرگتر برابر ۱۰ است. در این معادله مجموع ریشه‌ها کدام است.

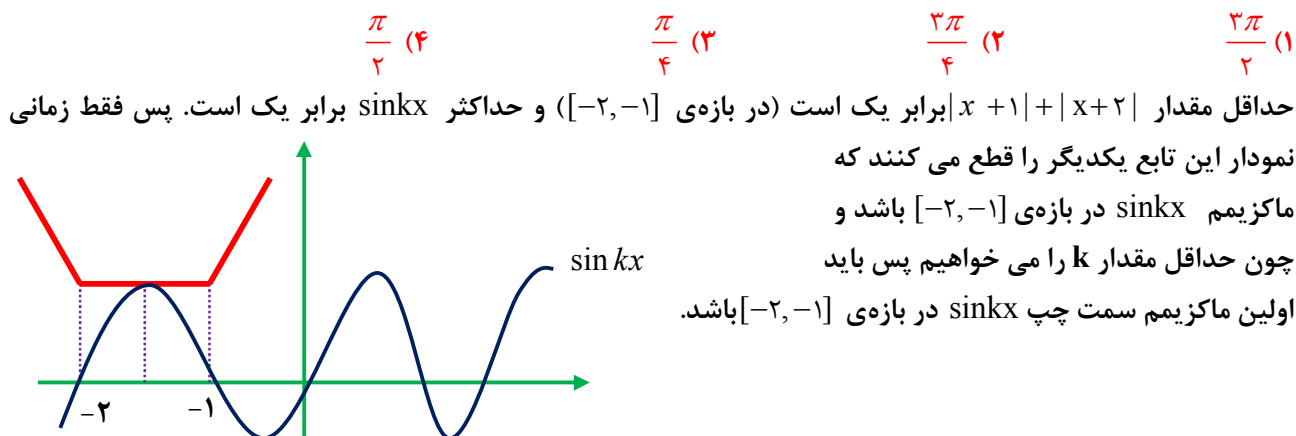
۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

در معادله $|x - a| + |x - b| = k$ اگر x_1, x_2 ریشه‌های معادله باشند و با شرط $x_1 > x_2$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + b \\ x_1 - x_2 = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6a + 2a = -4a \\ x_1 - x_2 = -10a = 10 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -4a = -4(-1) = 4$$

سؤال ۱۸: معادله $|x + 1| + |x + 2| = \sin kx$ جواب داد حداقل مقدار k کدام است. ($k > 0$) (ویژه‌ی تیزهوشان)



اولین زاویه‌ای که در سمت چپ سینوس برابر یک می‌شود $-\frac{3\pi}{2}$ است. پس $kx = -\frac{3\pi}{2}$ و یا $x = \frac{-3\pi}{2k}$ که باید در بازه‌ی $[-2, -1]$ باشد.

پس حداقل مقدار مثبت k ، $\frac{3\pi}{4}$ است. $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{-3\pi}{2k} \leq -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{-2k}{3\pi} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \leq k \leq \frac{3\pi}{2}$

نمودار آبشاری (سرسره ای)

$$y = |x - a| - |x - b|$$

$$(a \neq b)$$

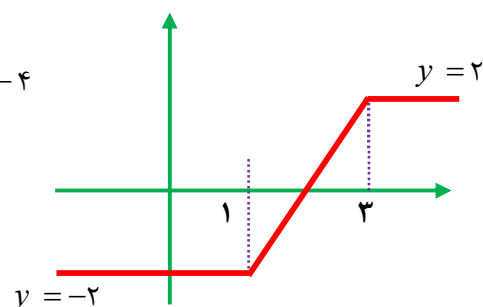
سؤال ۱۹: نمودار تابع $y = |x - 1| - |x - 3|$ را رسم کنید.

	۱	۳
$x - 1$	-	+
$x - 3$	-	-

$$x < 1 \Rightarrow y = \overset{\ominus}{|x - 1|} - \overset{\ominus}{|x - 3|} \Rightarrow y = -x + 1 + x - 3 \Rightarrow y = -2$$

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow y = \overset{\oplus}{|x - 1|} - \overset{\ominus}{|x - 3|} \Rightarrow y = x - 1 + x + 3 \Rightarrow y = 2x - 4$$

$$x > 3 \Rightarrow y = \overset{\oplus}{|x - 1|} - \overset{\oplus}{|x - 3|} \Rightarrow y = x - 1 - (x - 3) \Rightarrow y = 2$$



رسم سریع نمودار آبشاری

سؤال ۲۰: نمودار $y = |x - 1| - |x - 3|$ را رسم کنید.

.....

.....

.....

سؤال ۲۱: نمودار $y = |x - 2| - |x + 1|$ را رسم کنید.

.....

.....

.....

سؤال ۲۲: نمودار $y = |2x| - |2x - 2|$ را رسم کنید.

.....

.....

.....

سؤال ۱۳: نمودار $y = |x| - |2x - 2|$ را رسم کنید.



سؤال ۱۴: نمودار $y = |2x| - |x - 1|$ را رسم کنید.

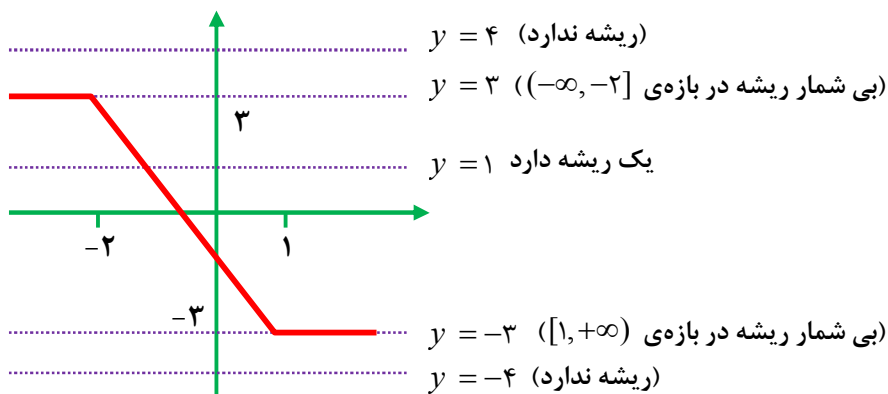


حل معادله‌ی آبشاری $|x - a| - |x - b| = k$



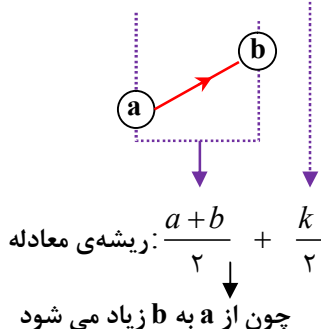
برای حل معادله‌ی آبشاری از روش برخورد استفاده می‌کنیم یعنی: نمودارهای دو تابع $y = k$ و $y = |x - a| - |x - b|$ را رسم می‌کنیم.

سؤال ۱۵: تعداد جواب‌های معادله‌ی آبشار $|x - 1| - |x + 2| = k$ را در حالت‌های $k = -4, -3, 1, 3, 4$ بررسی کنید.

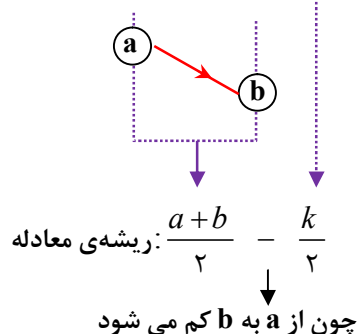


اگر k بین کمترین و بیشترین مقدار تابع آبشاری باشد، در این صورت دو تابع فقط در یک نقطه با هم برخورد دارند در نتیجه معادله فقط یک ریشه دارد و ریشه‌ی معادله‌ی آبشاری به روش زیر بدست می‌آید.

$$|x - a| - |x - b| = k$$



$$|x - a| - |x - b| = k$$



سؤال ۲۶: ریشه‌ی معادله‌های زیر را بدست آورید.

۱) $|x-3| - |x-1| = 1$



۲) $|x-2| - |x-6| = 3$



سؤال ۲۷: نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به سمت x های منفی و یک واحد به سمت y های مثبت انتقال

می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع اند؟ (داخل تجربی ۹۳)

-۲ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۳ (۲)

-۳/۵ (۱)

انتقال ۴ واحد سمت چپ
 $y_1 = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \xrightarrow{x \rightarrow (x+4)} y_2 = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 2$

انتقال یک واحد بالا
 $y_2 = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 2 \xrightarrow{y_2 = y_2 + 1} y_3 = \left(\left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 2 \right) + 1 = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 1$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 1 \xrightarrow{\times 2} |x| - 4 = |x+4| - 2 \Rightarrow |x| - |x+4| = 2 \Rightarrow x = \frac{0-4}{2} - \frac{2}{2} = -2-1 = -3$

سؤال ۲۸: اگر $f(x) = |x| - 3$ را سه واحد به چپ و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم دو منحنی یکدیگر را در نقطه با چه طولی قطع می کنند؟

$-\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

اگر منحنی را سه واحد به سمت چپ انتقال دهیم معادله‌ی آن عبارت است از: $g(x) = |x+3| - 3$

حال اگر منحنی را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم معادله‌ی آن عبارت است از:

$h(x) = |x+3| - 3 + 2 = |x+3| - 1 \Rightarrow |x| - 3 = |x+3| - 1 \Rightarrow |x| - |x+3| = 2$

$-3 < x < 0 \Rightarrow -x - (x+3) = 2 \Rightarrow -2x = +5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

سؤال ۲۹: اگر $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ به مقدار x بستگی نداشته باشد حدود x کدام است؟

$0 \leq x \leq 1$ (۴)

$-1 \leq x \leq 1$ (۳)

$x \geq 0$ (۲)

$-1 < x \leq 0$ (۱)

$y = \sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1} - \sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$
 $= |\sqrt{x+1}+1| - |\sqrt{x+1}-1|$

همواره مثبت

پس برای اینکه عبارت بالا به x بستگی نداشته باشد باید $\sqrt{x+1}-1$ نامنفی باشد یعنی:

$\sqrt{x+1}-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$

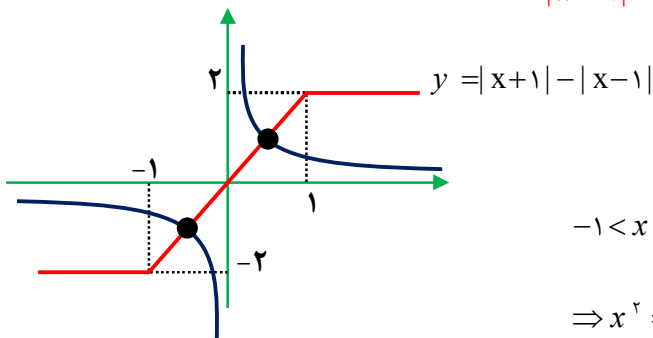
سؤال ۳۰: محدوده m برای آنکه معادله $|x+3m+2| - |x+m+1| = m$ فقط یک ریشه داشته باشد.

معادله $|x-a| - |x-b| = k$ زمانی یک ریشه دارد که $|a-b| < k$ یا $|a-b| = k$

$$\begin{cases} a = -3m - 2 \\ b = -m - 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = -3m - 2 - (-m - 1) = -2m - 1 \Rightarrow |a - b| = |2m + 1| \Rightarrow |m| < |2m + 1|$$

$$\Rightarrow (m - 2m - 1)(m + 2m + 1) < 0 \Rightarrow (-m - 1)(3m + 1) < 0 \Rightarrow (m + 1)(3m + 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \text{یا} \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

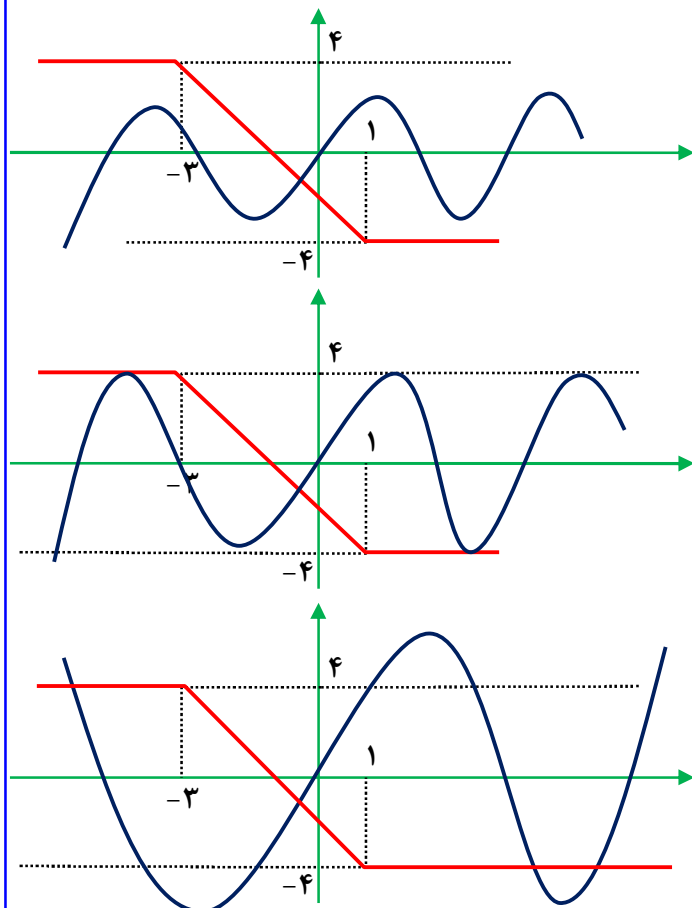
سؤال ۳۱: معادله $|x+1| - |x-1| = \frac{1}{x}$ زیر چند جواب دارد.



با توجه به شکل واضح است که این معادله دو ریشه در بازه $(-1, 1)$ دارد.

$$\begin{aligned} -1 < x < 1 &\Rightarrow (x+1) + (x-1) = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

سؤال ۳۲: به ازای چه مقادیری از k منحنی $y = k \sin x$ نمودار $y = |x-1| - |x+3|$ را در بی شمار نقطه قطع می کند؟ (ویژه تیزهوشان)



می کند؟ (ویژه تیزهوشان)

۱) $|k| \geq 4$
۲) $|k| \leq 4$
۳) $|k| \leq 2$
۴) $|k| \geq 2$

یک جواب دارد. $|k| < 4$

در بی شمار نقطه برهم مماس اند. $|k| = 4$

وقتی $|k| > 4$ باشد دو نمودار در بی شمار نقطه همدیگر را قطع می کنند پس جواب $|k| \geq 4$ است.