



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

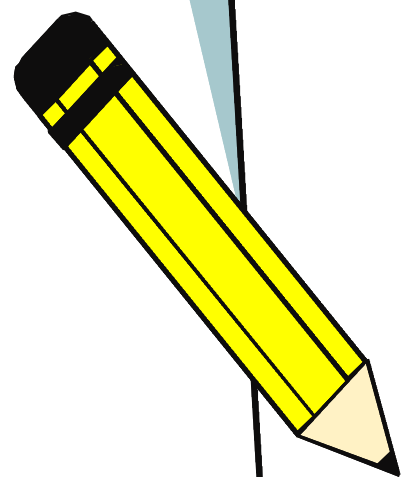


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دردوین و نگارش این جزوه از کتاب بسیار خوب آموزش سگفت
انگیزه‌ننده نوشته‌ی مهندس علی منصف شگری به عنوان مرجع اصل
استفاده شده است. همچنین از کتاب‌های زیر نیز استفاده شده است:

۱- نردبام ریاضی یازدهم خیلی سبز

۲- آی کیو گاج ریاضی یازدهم

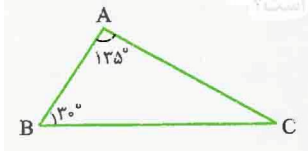


نسبت و تناسب در هندسه

تعریف نسبت: حاصل تقسیم عدد a بر عدد غیر صفر b ، یعنی $\frac{a}{b}$ را نسبت a به b می‌گوییم.

مثلاً اگر دو پاره خط به طول‌های $AB = 6$ و $CD = 8$ داشته باشیم، نسبت طول AB به طول CD برابر $\frac{6}{8}$ یا $\frac{3}{4}$ است. حالا چند تست نسبتاً ساده از مفهوم و تعریف نسبت حل می‌کنیم و سپس به سراغ مفهوم تناسب می‌رویم.

سؤال ۱: در مثلث ABC مطابق شکل نسبت کوچک‌ترین زاویه به بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{7}$

گزینه ۲- همانطور که در شکل می‌بینید یکی از زاویه‌های مثلث معلوم نیست. اما می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است بنابراین داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 135^\circ + 3^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{15}{135} = \frac{1}{9}$$

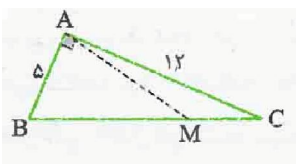
سؤال ۲: در یک مثلث قائم‌الزاویه اختلاف دو زاویه‌ی نابرابر 2° است. نسبت آن دو زاویه کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{11}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{7}{11}$

پاسخ: گزینه ۴- فرض کنیم مثلث در رأس A قائمه باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{B} - \hat{C} = 2^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\hat{B} = 110^\circ \Rightarrow \hat{B} = 55^\circ \Rightarrow \hat{C} = 35^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{\hat{B}} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$$

سؤال ۳: در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل پاره خط AM آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تقسیم می‌کند.



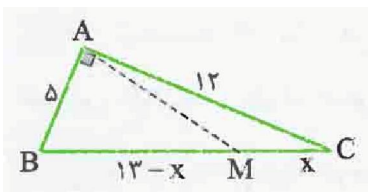
نقطه M وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۲- ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس وتر را پیدا می‌کنیم:

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

حال فرض کنیم یکی از قطعه‌های ایجاد شده روی وتر x باشد در این صورت قطعه دیگر $13-x$ خواهد بود حال محیط‌های دو مثلث را برابر قرار می‌دهیم:



$$5 + AM + 13 - x = AM + 12 + x \Rightarrow 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{x}{13-x} = \frac{3}{10}$$

همان طور که گفتیم تمرکز اصلی ما در بخش اول بر روی تناسب و فاصیبت های آن است، بنابراین ابتدا با تعریف تناسب آشنا می شویم و سپس به سراغ فوایس و ویژگی های آن می رویم:

تعریف تناسب:

اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ در این صورت این تساوی را یک **تناسب** می نامند. در تناسب به اعداد a و d اعداد **طرفین** و به اعداد b و c اعداد **وسطین** تناسب گفته می شود.

مثلاً تساوی $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ یک تناسب است ولی تساوی $\frac{2}{6} = \frac{3}{7}$ یک تناسب نیست، چون واقعاً $\frac{2}{6}$ برابر $\frac{3}{7}$ نیست اما خدایش $\frac{2}{6}$ با $\frac{1}{3}$ برابر است.

ویژگی های تناسب	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ معکوس کردن طرفین تناسب مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، بنابراین: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ طرفین وسطین مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ است، می توان نتیجه گرفت: $3 \times 8 = 6 \times 4$
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ ترکیب صورت ها و مخرج ها مثلن: چون $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ، می توان نتیجه گرفت: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ تعویض جای طرفین و وسطین مثلن: از $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ می توان نتیجه گرفت: $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ یا برعکس.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ترکیب نسبت در مخرج مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، می توان نتیجه گرفت: $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ترکیب نسبت در صورت مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، می توان نتیجه گرفت: $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ تفضیل نسبت در مخرج مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، می توان نتیجه گرفت: $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ تفضیل نسبت در صورت مثلن: چون $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، می توان نتیجه گرفت: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$
۹) تعمیم ویژگی ها مثلن: از تناسب $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ می توان نتیجه گرفت: $\frac{2}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{18}{24}$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_1 + a_2 + \dots}{b_1 + b_2 + \dots}$	

البته این ویژگی ها هیچ وقت به طور مستقیم مورد سؤال قرار نمی گیرند، بلکه ابزاری هستند در خدمت تالس و تشابه و مسائلی از این قبیل. اما در همین مفاهیم ساده و پیش پا افتاده راه های هیجان انگیزی هم وجود دارد که دانستن آنها در حل تست ها واقعاً معجزه می کند. به عنوان مثال یکی از این راه های هیجان انگیز را بیان می کنیم، سپس تستی را یک بار با استفاده از فوایس تناسب حل می کنیم و بار دیگر با روش هیجان انگیز تا تفاوت ها را احساس کنید.

راه های هیجان انگیز:

۱) در تناسب ها اگر یک طرف به صورت پارامتری و یک طرف به صورت عددی بود، می توانید صورت و مخرج طرف پارامتری را به صورت ضربی مانند k از طرف معلوم فرض کنید.

مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ بود فرض کنید: $a = 3k$ و $b = 4k$

۴۴) اگر در یک تناسب صورت‌ها پارامتری و مخرج‌ها عددی بود (یا برعکس) صورت‌ها را به صورت ضربی از k از اعداد مخرج فرض کنید (یا برعکس)

مثلاً اگر $\frac{x}{۲} = y = \frac{z}{۵}$ بود فرض کنید: $x = ۲k, y = k, z = ۵k$

سؤال ۴: اگر $\frac{a}{a+b} = \frac{۲}{۵}$ حاصل $\frac{b}{b-a}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

راه معمولی: $\frac{a}{a+b} = \frac{۲}{۵}$ تفذیل در ۲ مخرج $\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲}{۳}$ تفذیل در ۲ صورت $\rightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{۱}{۳}$ معکوس کردن ۱ $\rightarrow \frac{b}{b-a} = ۳$

همان طور که می بینید طبق این روش ما باید به آن چه مسئله داده و آن چه می خواهد خوب دقت کنیم تا کشف کنیم که طراح سوال چه بلایی سر تناسب اول آورده که به شکل دوم تبدیل شده اما در راه هیجان انگیز نیازی به این ریاضت و کشف و شهود نیست:

راه هیجان انگیز: $\frac{a}{a+b} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow a = ۲k, b = ۳k \Rightarrow \frac{b}{b-a} = \frac{۳k}{k} = ۳$

سؤال ۵: اگر $\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۵}$ بوده و داشته باشیم $x - y + z = ۱۲$ مقدار y کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ - تناسب داده شده را برابر k قرار می دهیم:

$\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۵} = k \Rightarrow x = ۲k, y = ۳k, z = ۵k$

حال x, y, z را بر حسب k در رابطه دوم قرار می دهیم تا k به دست آید:

$۲(۲k) - (۳k) + (۵k) = ۱۲ \Rightarrow ۶k = ۱۲ \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow y = ۳k = ۶$

سؤال ۶: زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۲، ۵ و ۸ است. مقدار تفاضل دو زاویه‌ی نابزرگ تر بر حسب درجه کدام است؟

- ۱) ۳۶° ۲) ۲۴° ۳) ۴۶° ۴) ۴۴°

پاسخ: گزینه ۱ - منظور مسئله این است که $\frac{A}{۸} = \frac{B}{۵} = \frac{C}{۲}$ بنابراین کافی است تناسب را برابر k قرار دهیم:

$\frac{A}{۸} = \frac{B}{۵} = \frac{C}{۲} = k \Rightarrow A = ۸k, B = ۵k, C = ۲k \Rightarrow ۸k + ۵k + ۲k = ۱۸0^\circ \Rightarrow k = ۱۲$

$\Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۵k - ۲k = ۳k = ۳۶^\circ$

راه های هیجان انگیز

اگر یک سمت تناسب پارامتری و سمت دیگر آن عددی بود و در ادامه سوال از شما حاصل یک نسبت را خواستند که بر حسب همان پارامترها بود، اعداد موجود در صورت و مخرج طرف معلوم را به جای پارامترها در نظر بگیرید و در عبارت خواسته شده قرار دهید.

مثلاً اگر داده شود $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$ و حاصل یک نسبت بر حسب a و b را بخواهد کافی است $a = ۳$ و $b = ۵$ فرض شود و در نسبت خواسته شده قرار گیرد.

سؤال ۷: اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد حاصل $\frac{a^2 + 2b^2}{b^2 - a^2}$ کدام است؟

$$\frac{22}{7} \quad (1) \qquad \frac{19}{5} \quad (2) \qquad \frac{22}{5} \quad (3) \qquad \frac{19}{7} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳- چون یک نسبت بر حسب a و b داشته شده و یک نسبت دیگر بر حسب همان a و b را می‌خواهد می‌توان فرض کرد $a = 2$ و $b = 3$ و حال حاصل عبارت خواسته شده به راحتی به دست می‌آید:

$$\frac{a^2 + 2b^2}{b^2 - a^2} = \frac{4 + 18}{9 - 4} = \frac{22}{5}$$

توصیه های هیجان انگیز

اما گاهی اوقات هر دو طرف تناسب پارامتری هستند، در این موارد چه کار باید کرد؟! به توصیه های زیر خوب دقت کنید.
 ✓ (۱) اگر در یک تناسب، یک متغیر با ضرایب برابر هم در صورت و هم در مخرج کسر وجود داشت با **تفضیل نسبت** در طرف شلوغ تر، تناسب را خلوت کنید.

مثلاً اگر $\frac{x}{x+3} = \frac{y}{y+5}$ باشد با تفضیل نسبت در مخرج تناسب را خلوت می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+3} = \frac{y}{y+5} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

✓ (۲) اگر در یک تناسب یک متغیر با ضرایب قرینه در صورت و مخرج وجود داشت، باید **ترکیب نسبت** در طرف شلوغ تر انجام دهید تا تناسب خلوت شود.

مثلاً اگر $\frac{2-y}{5-2x} = \frac{y}{2x}$ باشد ابتدا جای وسطین را عوض می‌کنیم و آن گاه با ترکیب نسبت تناسب را خلوت می‌کنیم:

$$\frac{2-y}{y} = \frac{5-2x}{2x} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{5}{2x} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

سؤال ۸: اگر $\frac{x}{x+3} = \frac{y}{y+2}$ باشد حاصل $\frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$ کدام است.

$$\frac{6}{19} \quad (4) \qquad \frac{7}{19} \quad (3) \qquad \frac{6}{17} \quad (2) \qquad \frac{6}{23} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴- چون هر دو طرف تناسب پارامتری و شلوغ هستند اول با تفضیل نسبت در مخرج تناسب را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+3} = \frac{y}{y+2} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

حالا می‌توانیم با فرض $x = 3$ و $y = 2$ به سراغ همان **راه هیجان انگیز** برویم:

$$\frac{xy}{x^2 + xy + y^2} = \frac{3 \times 2}{9 + 6 + 4} = \frac{6}{19}$$

سؤال ۹: اگر طول پاره خط $AB = 24$ و نقطه M روی پاره خط AB چنان قرار گرفته باشد که $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$ باشد

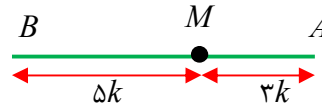
اندازه $MB - MA$ کدام است؟

$$6 \quad (4) \qquad 8 \quad (3) \qquad 5 \quad (2) \qquad 10 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴- باز هم با یک تناسب مواجه هستیم که یک طرف پارامتری و یک طرف عددی است. کافی است فرض کنیم $MA = 3k$ و $MB = 5k$ بنابراین مطابق شکل خواهیم داشت:

$$3k + 5k = 24 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow MB - MA = 5k - 3k = 2k = 6$$



راه هیجان انگیز

اگر یک تناسب برابر نسبت معلومی باشد مثلاً $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$ در این صورت اگر فرض کنید: $a = 3k$ و $b = 4k$ باید c و d را بر حسب ضربی از پارامتر دیگر فرض کنید، مثلاً: $c = 4t$ و $d = 3t$

سؤال ۱۰: روی پاره خط AB نقطه m و روی امتداد آن نقطه N را طوری انتخاب می کنیم که $\frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NA} = \frac{3}{7}$ باشد.

اگر اندازه پاره خط $AB = 20$ باشد، فاصله دو نقطه M و N از هم چقدر است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

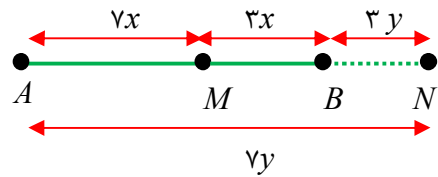
۲۱ (۲)

۲۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲- ابتدا طبق راهکار گفته شده پاره خط ها را بر حسب دو پارامتر نشان می دهیم یعنی:

$$MA = 7x, MB = 3x, NB = 3y, NA = 7y$$

$$\begin{cases} 3x + 7x = 20 \Rightarrow x = 2 \\ 7y - 3y = 20 \Rightarrow y = 5 \end{cases} \Rightarrow MN = 3x + 3y = 6 + 15 = 21$$



واسطه هندسی (میانگین هندسی)

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب یکسان باشند، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ در این صورت با طرفین وسطین کردن تناسب به یک رابطه جدید می رسیم که در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c می نامند.

$$\boxed{b^2 = ac}$$

مثلاً واسطه هندسی بین دو عدد ۴ و ۹ را b فرض کنیم $b^2 = 4 \times 9$ و در نتیجه $b = 6$ خواهد بود؛ به عبارت دیگر:

$$b = \sqrt{4 \times 9} = 6$$

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند در این صورت عدد $\frac{a+b}{2}$ واسطه حسابی (عددی) a و b خواهد بود.

سؤال ۱۱: در یک مثلث قائم الزاویه وتر واسطه هندسی بین یک ضلع و دو برابر ضلع دیگر است. زاویه های مثلث به

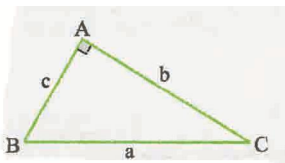
چه نسبتی تقسیم می شوند؟

۱، ۵، ۶ (۴)

۲، ۳، ۵ (۳)

۱، ۱، ۲ (۲)

۳، ۲، ۱ (۱)



پاسخ: گزینه ۲- فرض کنید اضلاع مثلث مطابق شکل روبه رو باشد حال طبق

داده های مسئله داریم:

$$a^2 = (2b)(c) \Rightarrow a^2 = 2bc$$

از طرفی چون مثلث قائم الزاویه است $a^2 = b^2 + c^2$ می باشد و در نتیجه:

$$b^2 + c^2 = 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 - 2bc = 0 \Rightarrow (b - c)^2 = 0 \Rightarrow b = c$$

بنابراین مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است یعنی زاویه های آن ۴۵ و ۴۵ و ۹۰ است که متناسب با اعداد ۱، ۱ و ۲ می باشد.

سؤال ۱۲: دو پاره خط با طول های x و $13-x$ مفروض اند. اگر طول پاره خط واسطه هندسی بین آن دو ۶ باشد طول پاره خط بزرگتر کدام است؟

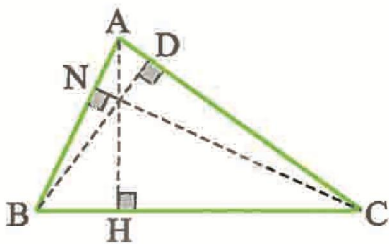
- (۱) ۱۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۹

$$6^2 = x(13-x) \Rightarrow x(13-x) = 36 = 4 \times 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 13-x = 9 \end{cases} \quad \text{پاسخ: گزینه ۴-}$$

تمرین ویژه فردورزان: نشان دهید اگر واسطه هندسی و حسابی بین دو عدد با هم برابر باشند، آن دو عدد نیز با هم برابرند. حالا با یادگیری کامل تناسب، خواص و ویژگی هایش می توانیم آن را در مسائل مختلف هندسه مورد استفاده قرار دهیم. اولین و دم دستی ترین کاربرد تناسب رابطه بین اضلاع و ارتفاع های یک مثلث است.

رابطه اضلاع و ارتفاع ها در مثلث

مثلث ABC را مطابق کل در نظر بگیرید. اگر ارتفاع های وارد بر اضلاع BC , AC , و AB را به ترتیب با h_c, h_b, h_a نشان دهیم خواهیم داشت:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow \boxed{a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c}$$

نتیجه هیجان انگیز

چون همیشه در یک مثلث مشخص مساحت مقدار ثابتی است، بنابراین هر چه یک ضلع **بزرگتر** باشد ارتفاع وارد بر آن **کوچکتر** است و برعکس. یعنی در تمام مثلث ها بزرگترین ارتفاع همواره بر کوچکترین ضلع و کوچکترین ارتفاع نیز بر بزرگترین ضلع فرود می آید و در این میان ارتفاع متوسط از فرصت استفاده کرده و دقیقاً روی ضلع متوسط فرود می آید.

◀ **حواست باشه!** این نتیجه جالب درباره نیمساز و میانه نیز در تمام مثلث ها صادق است.

سؤال ۱۳: در یک مثلث به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱ اندازه کوتاه ترین ارتفاع ۸ است. اندازه بلندترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۵/۸ (۲) ۱۶/۸ (۳) ۱۷/۸ (۴) ۱۴/۸

پاسخ: گزینه ۲- می دانیم که کوتاه ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می آید، بنابراین ارتفاع ۸ بر ضلع ۲۱ و بلندترین ارتفاع بر ضلع ۱۰ فرود می آید، بنابراین:

$$ah_a = bh_b \Rightarrow 8 \times 21 = 10 \times h_b \Rightarrow h_b = 16/8$$

سؤال ۱۴: در مثلثی به اضلاع $a+1, a+8$ و a اندازه بزرگترین ارتفاع ها ۸ و $7/2$ است. در این مثلث اندازه کوتاهترین ارتفاع کدام است؟

- (۱) $\frac{72}{17}$ (۲) $\frac{64}{17}$ (۳) $\frac{80}{17}$ (۴) $\frac{54}{17}$

پاسخ: گزینه ۱- بزرگترین ارتفاع ها بر کوچکترین اضلاع فرود می آید؛ یعنی ارتفاع به طول ۸ بر ضلع a و ارتفاع به طول $۷/۲$ بر ضلع $a+۱$ در نتیجه:

$$۸ \times a = ۷/۲ \times (a+۱) \Rightarrow ۸a = ۷/۲a + ۷/۲ \Rightarrow ۱۵/۲a = ۷/۲ \Rightarrow a = \frac{۷۲}{۱۵} = ۹$$

حال کوتاهترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می آید یعنی بر ضلع $a+۸$ بنابراین:

$$h \times (a+۸) = ۸ \times a \Rightarrow h \times (۹+۸) = ۸ \times ۹ \Rightarrow h = \frac{۷۲}{۱۷}$$

راه هیجان انگیز

با توجه به این که $a \times h_a = b \times h_b$ می باشد با استفاده از عکس طرفین وسطین به نتیجه جالب زیر می رسم:

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

یعنی «نسبت اضلاع مثلث متناسب با عکس نسبت ارتفاع ها است» بنابراین همیشه به جای نسبت ارتفاع های یک مثلث می توانیم عکس نسبت اضلاع را قرار دهیم و یک نتیجه هیجان انگیز رابطه به دست آمده این است که «اگر رابطه ه درجه ای بین اضلاع مثلثی برقرار باشد، عین همان رابطه بین عکس ارتفاع ها برقرار است و برعکس.»

حواست باشه! این رابطه به جای تساوی حتی می تواند یک نامساوی هم درجه هم باشد.

مثلاً اگر در مثلثی $a^2 > b^2 + c^2$ باشد آنگاه $\frac{1}{h_a^2} > \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ خواهد بود و...

سؤال ۱۵: در مثلثی به اضلاع $a=۶, b=۳, c=۵$ حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟

$$\frac{۱۳}{۶} \quad (۴) \quad \frac{۸}{۱۳} \quad (۳) \quad \frac{۶}{۱۳} \quad (۲) \quad \frac{۱۳}{۸} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴- همان طور که دیدید نسبت دو ارتفاع مثلث متناسب با عکس نسبت اضلاع است بنابراین داریم:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = \frac{۳}{۶} + \frac{۵}{۳} = \frac{۳+۱۰}{۶} = \frac{۱۳}{۶}$$

سؤال ۱۶: در مثلث ABC اگر a و c اضلاع h_a و h_c ارتفاع های وارد بر آن ها باشند و $\frac{h_a}{h_c} = \frac{a}{c}$ نوع مثلث کدام

است؟

(۱) قائم الزاویه (۲) متساوی الساقین (۳) متساوی الاضلاع (۴) نامشخص

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a^2 \Rightarrow a = c \Rightarrow \text{متساوی الساقین}$$

پاسخ: گزینه ۲-

سؤال ۱۷: در مثلثی اندازه های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع های وارد بر این دو ضلع برابر ارتفاع ضلع

سوم است. اندازه ضلع سوم کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

$$۸ \quad (۴) \quad ۷/۵ \quad (۳) \quad ۷ \quad (۲) \quad ۶ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱- فرض کنیم $a=۱۰$ و $b=۱۵$ باشد در این صورت:

$$h_a + h_b = h_c \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{۱۰} + \frac{1}{۱۵} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{۱۰ \times ۱۵}{۱۰+۱۵} = \frac{۱۵۰}{۲۵} = ۶$$

سؤال ۱۸: در مثلث قائم الزاویه ABC اگر h_a, h_b, h_c و ارتفاع ها باشند، کدام رابطه درست است؟ ($\hat{A} = 90^\circ$)

$$\begin{aligned} (1) \quad h_a^2 &= h_b \times h_c & (2) \quad h_a^2 &= h_b^2 + h_c^2 & (3) \quad \frac{1}{h_a^2} &= \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} & (4) \quad 2h_a &= h_b + h_c \end{aligned}$$

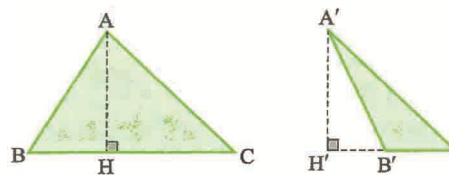
پاسخ: گزینه ۳ $\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$

در ادامه، کاربردهای دیگری از تناسب را با هم می بینیم اما این بار در دو مثلث مختلف.

مثلث های هم ارتفاع

فرض کنید دو مثلث مانند ABC و $A'B'C'$ داریم که ارتفاع های برابر دارند حال مساحت دو مثلث را حساب می کنیم و بر هم تقسیم می کنیم:

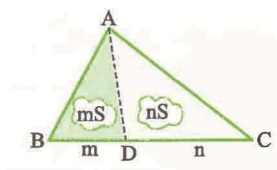
$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \times BC \\ S_{A'B'C'} &= \frac{1}{2} A'H' \times B'C' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$



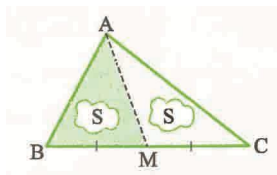
یعنی می توان گفت: در دو مثلث هم ارتفاع، نسبت مساحت ها برابر است با نسبت قاعده ها.

نتایج هیجان انگیز

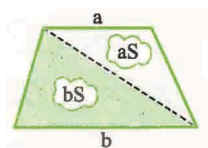
(۱) اگر یک پاره خط از رأس مثلث به نقطه ای روی قاعده وصل شود و قاعده را به نسبت m و n تقسیم کند، مثلث های ایجاد شده هم ارتفاع هستند و مساحت را نیز به همان نسبت تقسیم می کنند:



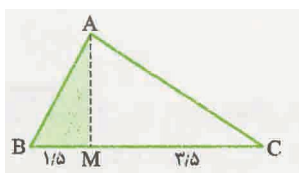
(۲) میانه ها در هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کنند. چون مثلث های ایجاد شده ارتفاع و قاعده برابر دارند.



(۳) در هر دوزنقه هر قطر آن را به دو مثلث هم ارتفاع تقسیم می کند،



سؤال ۱۹: در شکل زیر مساحت مثلث رنگ شده چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



(۱) ۳۰

(۲) ۱۵

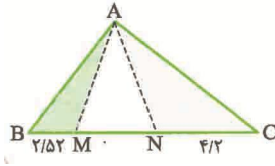
(۳) ۲۵

(۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۱- مثلث های AMB و ABC هم ارتفاع هستند بنابراین نسبت مساحت های آنها با نسبت قاعده های

$$\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{1/5}{5} = \frac{15}{50} = 30\% \text{ یعنی: آنها برابر است.}$$

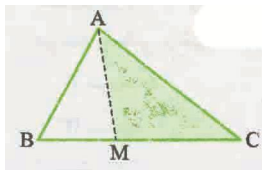
سؤال ۲۰: در شکل مقابل مساحت AMB چند درصد مساحت مثلث ANC است؟



- ۵۰ (۱)
- ۸۰ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴- $\frac{S_{ABM}}{S_{ANC}} = \frac{2/52}{4/2} = \frac{252}{420} = \frac{6}{10} = 60\%$

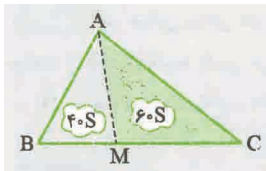
سؤال ۲۱: در شکل زیر مساحت مثلث AMC شصت درصد مساحت مثلث ABC است. حاصل $\frac{MB}{MC}$ کدام است؟



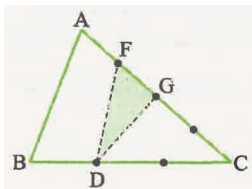
- $\frac{2}{5}$ (۱)
- $\frac{3}{2}$ (۲)
- $\frac{3}{5}$ (۳)
- $\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴- اگر مساحت AMC را $60S$ فرض کنیم مساحت AMB

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{40S}{60S} = \frac{2}{3}$$



سؤال ۲۲: در شکل مقابل ضلع AC به ۴ قسمت مساوی و ضلع BC به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است. مساحت



مثلث DFG چه کسری از مساحت ABC است؟

- $\frac{3}{16}$ (۱)
- $\frac{1}{5}$ (۲)
- $\frac{1}{7}$ (۳)
- $\frac{1}{6}$ (۴)

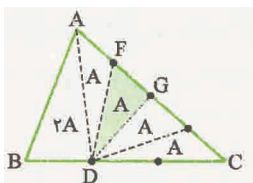
پاسخ: گزینه ۴- ابتدا به مثلث ADC نگاه کنید. قاعده به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده

است، پس مساحت هر ۴ قسمت برابر است. حال به مثلث های ABD و ADC نگاه کنید. باز

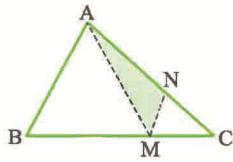
هم هم ارتفاع هستند ولی $DC = 2BD$ پس مساحت ABD نصف مساحت ADC یعنی

برابر $2A$ می شود (چون قاعده اش نصف قاعده ADC است) بنابراین:

$$\frac{S_{FDG}}{S_{ABC}} = \frac{A}{6A} = \frac{1}{6}$$

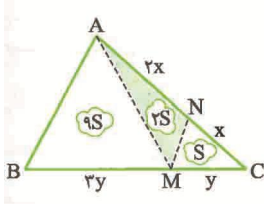


سؤال ۲۳: در شکل مقابل $AN = 2NC$ و $BM = 3MC$ می باشد. مساحت رنگ شده چه کسری از مساحت ABC است؟



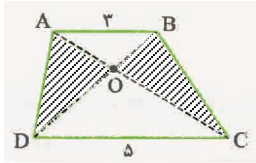
- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{1}{6}$
 (۳) $\frac{2}{9}$
 (۴) $\frac{3}{8}$

پاسخ: گزینه ۲-



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{2S}{12S} = \frac{1}{6}$$

سؤال ۲۴: در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل نسبت مساحت دو مثلث رنگ شده کدام است؟



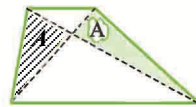
- (۱) $\frac{3}{5}$
 (۲) $\frac{3}{8}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴- مثلث های ADC و DBC هم ارتفاع برابر دارند و هم قاعده برابر پس هم مساحت هستند. از طرفی مثلث ODC در هر دو مشترک است پس اگر آن را برداریم دو مثلث رنگی می مانند که هم مساحت هستند.

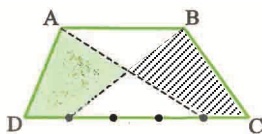
البته این خاصیت یکی از خاصیت های مهم دوزنقه است که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

خاصیت پروانه ای دوزنقه ها

با رسم دو قطر هر دوزنقه، ۲ پروانه متولد می شود (یکی پروانه رنگی و یکی هم پروانه سفید رنگ) که مساحت بال های پروانه رنگی که دو ضلع آن ساق های دوزنقه هستند، با هم برابر است و بعدها بیشتر درباره آن صحبت خواهیم کرد.

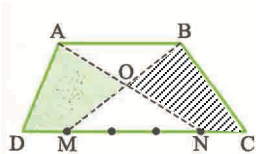


سؤال ۲۵: در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل قاعده بزرگ به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگی نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

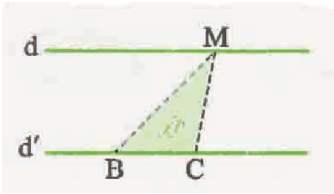


- (۱) هم محیط (۲) همنهشت
 (۳) متشابه (۴) هم مساحت

پاسخ: گزینه ۴- مثلث های ADN و BMC دارای ارتفاع ها و قاعده های برابر هستند و در نتیجه مساحت های برابر دارند. از طرفی مثلث OMN در هر دوی آن ها مشترک است که اگر آن را کنار بگذاریم مساحت چهارضلعی های سایه زده شده برابر خواهد بود.



سؤال ۲۶: در شکل مقابل دو خط d و d' موازی اند. با تغییر نقطه M روی خط d محیط و مساحت مثلث MBC چگونه تغییر می کند؟



(۱) محیط ثابت - مساحت ثابت

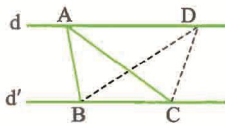
(۲) محیط متغیر - مساحت ثابت

(۳) محیط متغیر - مساحت متغیر

(۴) محیط ثابت - مساحت متغیر

پاسخ: گزینه ۲- چون قاعده BC ثابت است و M روی خطی موازی قاعده BC حرکت می کند، با تغییرات M روی خط d ارتفاع مثلث MBC تغییر نمی کند، اما با دور شدن M از رأس های B و C محیط رفته رفته افزایش می یابد.

سؤال ۲۷: در شکل مقابل $d \parallel d'$ است و مساحت مثلث ABC برابر ۸cm^2 است. اگر $BD = ۶\text{cm}$ باشد فاصله رأس C از ضلع BD کدام است؟



(۱) $\frac{۳}{۸}$

(۲) $\frac{۴}{۳}$

(۳) $\frac{۳}{۴}$

(۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴- مثلث های ABC و DBC دارای قاعده ها و ارتفاع های برابر هستند پس هم مساحت هستند یعنی $S_{BDC} = ۸\text{cm}^2$ می باشد حال فاصله رأس C از ضلع BD همان ارتفاع وارد بر ضلع BD است بنابراین:

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow ۸ = \frac{1}{2} \times ۶ \times CH \Rightarrow CH = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

تست های نسبت و تناسب

سؤال ۱: اگر $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ و $\frac{4a+5}{5+3a} = \frac{4b+2}{2+3b}$ و $\frac{2x}{5+2x} = \frac{y}{3+y}$ آنگاه $\frac{x}{y} - \frac{a}{b}$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{9}$ (۲) $-\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{9}$

سؤال ۲: اگر $\frac{2x-3y}{2} = \frac{2(y-z)}{5} = \frac{3z-x}{9} = \frac{1}{10}$ حاصل $x-y+z$ کدام است؟

(۱) $1/6$ (۲) $1/4$ (۳) $1/8$ (۴) $1/2$

سؤال ۳: از تساوی $\frac{2\sin^4 x - 5\sin x}{2\cos^4 x - 5\cos x} = \frac{2\sin^4 x - 6\sin x}{2\cos^4 x - 6\cos x}$ حاصل عبارت کدام است؟

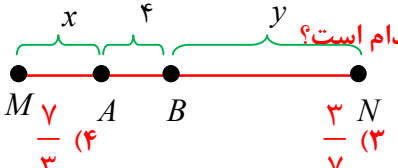
(۱) 2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 5 (۴) $\frac{1}{4}$

سؤال ۴: پاره خط MN را طوری در نظر بگیرید که نقاط B, A روی آن و در یک طرف وسط MN واقع باشند. اگر

$AB = 4$ و $\frac{MA}{NA} = \frac{1}{3}$, $\frac{MB}{NB} = \frac{3}{5}$ باشد، طول پاره خط MN چند برابر طول پاره خط MA است؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

سؤال ۵: اگر $\frac{a}{b} = \frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$ باشد $\frac{a}{b}$ کدام است؟



(۱) $\frac{10}{7}$ (۲) $\frac{7}{10}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{7}{3}$

سؤال ۶: اگر $\frac{x+3}{y+4} = a$, $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ آنگاه a کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2x}{3y}$ (۴) $\frac{2y}{3x}$

سؤال ۷: اگر $-\frac{3}{2} = \frac{a}{2b+c} = \frac{1}{2b-c}$ باشد محیط مثلثی به اضلاع a, b, c چند برابر b است؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

سؤال ۸: اگر $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

(۱) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-t}{z+t}$ (۲) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{z+t}{t-z}$

(۳) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{z-t}{z+t}$ (۴) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{t-z}{z+t}$

سؤال ۹: نقطه های P, Q روی پاره خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. نقطه P پاره خط AB را به نسبت

$\frac{2}{3}$ و نقطه Q پاره خط AB را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم می کند. اگر $PQ = 2$ باشد، آنگاه طول پاره خط AB برابر است با:

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۸ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

سؤال ۱۰: اگر $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ حاصل $\frac{a}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3b-a}{2b}$ (۲) $\frac{2b-3a}{b}$ (۳) $\frac{3b-2a}{b}$ (۴) $\frac{b-3a}{2b}$

سؤال ۱۱: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \lambda > 0$ آنگاه $\frac{3\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}$ کدام است؟

- (۱) λ (۲) $\frac{3}{\lambda}$ (۳) 3λ (۴) $\frac{\lambda}{3}$

سؤال ۱۲: اگر $\frac{a}{2b-a} = -3$ ، $\frac{1}{2b+c} = \frac{2b-c}{3}$ باشد محیط مثلثی به اضلاع a, b, c چند برابر b است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سؤال ۱۳: اگر $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_n}{n}$ آنگاه حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

- (۱) n (۲) $n(n+1)$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴) $2n(n+1)$

سؤال ۱۴: روی پاره خط $AB = a$ دو نقطه M و N را طوری اختیار می کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$. در این

صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

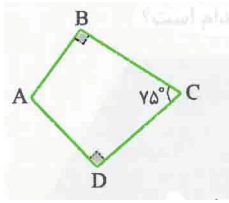
- (۱) $\frac{a}{4}$ (۲) $\frac{a}{2}$ (۳) $\frac{a}{3}$ (۴) $\frac{2a}{3}$

سؤال ۱۵: بر روی پاره خط AB و امتداد آن دو نقطه M و N چنان اختیار شده اند که $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ نسبت

$\frac{AM}{AN}$ کدام است؟ ($k > 1$)

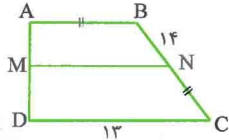
- (۱) $\frac{k}{k+1}$ (۲) $\frac{k-1}{k}$ (۳) $\frac{k-1}{k+1}$ (۴) $\frac{k}{k-1}$

سؤال ۱۶: در چهارضلعی داده شده مطابق شکل نسبت زاویه‌ی کوچکتر به زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{7}$
 (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{5}{9}$
 (۴) $\frac{5}{7}$

سؤال ۱۷: در دوزنقه‌ی قائم الزویه ای مطابق شکل اندازه ساق قائم ۵ است. پاره خط MN موازی قاعده که دو ساق را به هم وصل می کند آن را به دو دوزنقه با محیط های برابر تقسیم می کند. این پاره خط ساق ها را به چه نسبتی تقسیم می کند؟



- (۱) $\frac{3}{5}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

سؤال ۱۸: اگر $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ باشد حاصل $\frac{3x-y}{2y-x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
 (۲) $\frac{1}{7}$
 (۳) $\frac{2}{7}$
 (۴) $\frac{1}{6}$

سؤال ۱۹: اگر $\frac{x}{3} = y = z + 1$ باشد و داشته باشیم $x + 3y + z = 20$ مقدار z کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۷
 (۳) ۴
 (۴) ۲

سؤال ۲۰: زوایای یک چهارضلعی برحسب درجه متناسب با اعداد ۳، ۳، ۴ و ۵ هستند. تفاضل دو زاویه بزرگتر کدام است؟

- (۱) 36°
 (۲) 24°
 (۳) 30°
 (۴) 18°

سؤال ۲۱: اگر $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ باشد حاصل $\frac{xy}{x^2+y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{16}$
 (۲) $\frac{9}{16}$
 (۳) $\frac{7}{25}$
 (۴) $\frac{12}{25}$

سؤال ۲۲: اگر $\frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y}$ باشد حاصل $\frac{2x-y}{x+y}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
 (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{2}{7}$
 (۴) $\frac{3}{5}$

سؤال ۲۳: پاره خط AB به طول ۱۵ مفروض است. اگر نقطه M روی امتداد AB چنان قرار گرفته باشد که $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{8}$

باشد در این صورت اندازه MB کدام است؟

- (۱) ۱۸
 (۲) ۲۴
 (۳) ۲۰
 (۴) ۳۰

سؤال ۲۴: روی پاره خط AB به طول ۱۲ دو نقطه M و N را طوری انتخاب می کنیم که رابطه $\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{AN} = 3$ برقرار باشد. بین آنها برقرار باشد. اندازه پاره خط MN کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

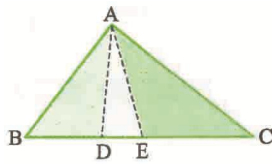
سؤال ۲۵: دو پاره خط با طول های a و ۸ مفروض اند. اندازه پاره خطی که واسطه هندسی بین این دو پاره خط است برابر ۱۲ می باشد. a کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

سؤال ۲۶: اگر $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ باشد و عدد ۱۲ واسطه هندسی بین a و b باشد $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

سؤال ۲۷: در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است.



حاصل $\frac{BE}{CE} + \frac{DE}{DC}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{13}{12}$

تست های نسبت و تناسب

۱- پاسخ: گزینه ۲

از روی تساوی $\frac{2x}{5+2x} = \frac{y}{3+y}$ به سه روش نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست می آوریم:

❖ راه اول

$$\text{از طرفین وسطین: } (2x)(3+y) = (y)(5+2x) \Rightarrow 6x + 2xy = 5y + 2xy \Rightarrow 6x = 5y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

❖ راه دوم

$$\text{تفضیل نسبت در مخرج: } \frac{2x}{2x - (5+2x)} = \frac{y}{y - (3+y)} \Rightarrow \frac{2x}{-5} = \frac{y}{-3} \Rightarrow -6x = -5y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

❖ راه سوم

$$\text{معکوس کردن تناسب: } \frac{5+2x}{2x} = \frac{3+y}{y} \Rightarrow \text{تقلیب کسر} \Rightarrow \frac{5}{2x} + \frac{2x}{2x} = \frac{3}{y} + \frac{y}{y} \Rightarrow \frac{5}{2x} = \frac{3}{y} \Rightarrow$$

$$\text{تعویض جای طرفین با وسطین} \Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{5}{3} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

حال برویم سراغ تساوی $\frac{4a+5}{5+3a} = \frac{4b+2}{2+3b}$ و نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آوریم:

$$\frac{4a+5}{(4a+5)(5+3a)} = \frac{4b+2}{(4b+2)-(2+3b)} \Rightarrow \frac{4a+5}{a} = \frac{4b+2}{b} \Rightarrow \frac{4a}{a} + \frac{5}{a} = \frac{4b}{b} + \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{5}{6} - \frac{5}{2} = \frac{5-15}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

بنابراین خواهیم داشت:

۲- پاسخ: گزینه ۱

اگر صورت نسبت ها را با هم و مخرج آنها را با هم جمع کنیم مسأله به راحتی حل می شود ببینید:

$$\frac{2x-3y}{2} = \frac{2y-2z}{5} = \frac{3z-x}{9} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{(2x-3y) + (2y-2z) + (3z-x)}{2+5+9} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y+z}{16} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10(x-y+z) = 16 \Rightarrow x-y+z = \frac{16}{10} = 1/6$$

۳- پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{2\sin^2 x - \Delta \sin x}{2\cos^2 x - \Delta \sin x} = \frac{2\sin^2 x - \epsilon \sin x}{2\cos^2 x - \epsilon \cos x} \Rightarrow \frac{2\sin^2 x - \Delta \sin x}{2\sin^2 x - \epsilon \sin x} = \frac{2\cos^2 x - \Delta \cos x}{2\cos^2 x - \epsilon \cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2 x - \Delta \sin x}{(2\sin^2 x - \Delta \sin x) - (2\sin^2 x - \epsilon \sin x)} = \frac{2\cos^2 x - \Delta \cos x}{(2\cos^2 x - \Delta \cos x) - (2\cos^2 x - \epsilon \cos x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2 x - \Delta \sin x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x - \Delta \cos x}{\cos x} \Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{\sin x} - \frac{\Delta \sin x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos x} - \frac{\Delta \cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - \Delta = 2\cos^2 x - \Delta \Rightarrow 2\sin^2 x = 2\cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = 1$$

بنابراین $\cot x = \frac{1}{\tan x} = 1$ و در نتیجه: $\tan x + \cot x = 1 + 1 = 2$

۴- پاسخ: گزینه ۳

بر اساس گفته های مسئله شکل زیر را خواهیم داشت:

در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{MB}{NB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+4}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x+20=3y \Rightarrow 5x-3y=-20 & (1) \\ \frac{MA}{NA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{y+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x=y+4 \Rightarrow 3x-y=4 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 5x-3y=-20 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=-20 \\ -9x+3y=-12 \end{cases} \Rightarrow -4x=-32 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=20$$

بنابراین طول پاره فط MN برابر می شود: $x+4+y=8+4+20=32$

پس طول پاره فط MN ، چهار برابر طول پاره فط MA است.

۵- پاسخ: گزینه ۱

عبارت را طرفین وسطین می کنیم:

$$(3a+10)(7+2b) = (3b+7)(10+2a) \Rightarrow 21a+6ab+70+20b = 30b+6ab+70+14a$$

$$\Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$$

۶- پاسخ: گزینه ۱

قبلاً یاد گرفتیم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ (یعنی در تساوی کسرها، مجموع صورت ها تقسیم بر مجموع مخرج ها، با هر کدام از

کسرها برابر است)

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+3}{y+4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۷- پاسخ: گزینه ۴

مسئله از ما نسبت محیط مثبت (مجموع طول اضلاع) بر طول ضلع b را خواسته، بنابراین باید طول اضلاع را بر حسب b به دست آوریم و با هم جمع کنیم. آن وقت مشخص می شود که محیط چند برابر b است:

$$\frac{a}{2b-a} = -3 \Rightarrow a = -6b + 3a \Rightarrow 2a = 6b \Rightarrow a = 3b$$

$$\frac{2b-c}{2b+c} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6b - 3c = 2b + c \Rightarrow 4b = 4c \Rightarrow c = b$$

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{طول ضلع } b} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{3b+b+b}{b} = \frac{5b}{b} = 5$$

۸- پاسخ: گزینه ۱

اگر در صورت و مخرج کسره‌های یک تناسب به طور همزمان ترکیب و تفاضل انجام دهیم، داریم:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{y-x} = \frac{z+t}{t-z} & (\text{ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج}) \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{z-t}{z+t} & (\text{تفضیل در صورت و ترکیب در مخرج}) \end{cases}$$

۹- پاسخ: گزینه ۳

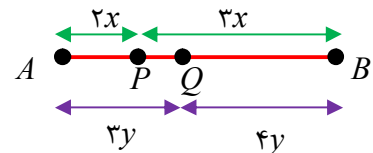
کافی است به فرض مسئله که نقاط P و Q در یک طرف وسط AB هستند توجه کنید و از نسبت های داده شده استفاده کنید. چون

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3} \text{ پس } AP = 2x, PB = 3x \text{ است. همچنین چون } \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{4} \text{ است پس } AQ = 3y, QB = 4y \text{ است}$$

بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} AP &= \frac{2}{5} AB \\ AQ &= \frac{3}{7} AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow PQ = AQ - AP = \frac{3}{7} AB - \frac{2}{5} AB = \frac{AB}{35}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{AB}{35} \xrightarrow{PQ=2} 2 = \frac{AB}{35} \Rightarrow AB = 70$$



۱۰- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{3}{a} = \frac{2c+b}{bc} \xrightarrow{\times(a) \text{ طرفین تساوی}} 3 = \frac{2ac+ab}{bc} \xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}}$$

$$3 = \frac{2a}{b} + \frac{a}{c} \xrightarrow{\text{جداسازی کسر مطلوب}} \frac{a}{c} = 3 - \frac{2a}{b} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a}{c} = \frac{3b-2a}{b}$$

۱۱- پاسف: گزینه ۲

با استفاره از ویژگی های تناسب داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \lambda \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + d^2}{a^2 + c^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{a^2 + c^2}} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{\lambda}$$

۱۲- پاسف: گزینه ۴

هر کدام از نسبت ها را جداگانه نوشته با طرفین وسطین، اضلاع a , c , را بر حسب b به دست می آوریم و...

$$\frac{a}{2b - a} = -3 \Rightarrow a = -6b + 3a \Rightarrow 2a = 6b \Rightarrow a = 3b \quad (I)$$

$$\frac{2b - c}{2b + c} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6b - 3c = 2b + c \Rightarrow 4b = 4c \Rightarrow c = b \quad (II)$$

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{b \text{ ضلع}} = \frac{P}{b} = \frac{a + b + c}{b} \xrightarrow{(I), (II)} \frac{3b + b + b}{b} = \frac{5b}{b} = 5$$

۱۳- پاسف: گزینه ۳

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{از درس دنباله می دانیم که برای هر } n \text{ طبیعی داریم:}$$

با استفاره از ویژگی پنجم تناسب داریم:

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_n}{n} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{a_1}{1} \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n)a_1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1$$

۱۴- پاسف: گزینه ۴

به وضوح $AN = MB = \frac{a}{3}$ پس داریم:

$$MN = a - (AN + MB) = a - \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} \right) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$$



۱۵- پاسف: گزینه ۳

چون $k > 1$ پس N به B نزدیکتر است.

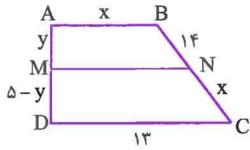
با توجه به فرض مسئله و ویژگی های تناسب داریم:

$$\begin{cases} \frac{MA}{MB} = k = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{MA}{MA + MB} = \frac{k}{k + 1} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{k}{k + 1} \\ \frac{NA}{NB} = k = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{NA}{NA - NB} = \frac{k}{k - 1} \Rightarrow \frac{NA}{AB} = \frac{k}{k - 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{NA} = \frac{k - 1}{k + 1}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۴ - می دانیم مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است بنابراین:

$$\hat{A} + 90^\circ + 90^\circ + 75^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 105^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{\hat{A}} = \frac{75}{105} = \frac{5}{7}$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۴



$$x + 14 + y + MN = MN + x + 13 + 5 - y \Rightarrow 2y = 4$$

$$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{y}{5-y} = \frac{2}{3}$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۱ - فرض کنیم $x = 2k$ و $y = 5k$ در نتیجه:

$$\frac{3x - y}{2y - x} = \frac{6k - 5k}{10k - 2k} = \frac{1}{8}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{x}{3} = y = z + 1 = k \Rightarrow x = 3k, y = k, z = k - 1$$

حال به جای x, y و z در رابطه $x + 3y + z = 20$ مقادیرشان را جایگذاری می کنیم:

$$(3k) + 3(k) + (k - 1) = 20 \Rightarrow 7k = 21 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow z = k - 1 = 2$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۲ - اگر زاویه های چهارضلعی $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ و \hat{D} باشند داریم:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{D}{5} = k \Rightarrow A = 3k, B = 3k, C = 4k, D = 5k$$

$$\Rightarrow 3k + 3k + 4k + 5k = 360^\circ \Rightarrow 15k = 360^\circ \Rightarrow k = 24^\circ \Rightarrow \hat{D} - \hat{C} = 5k - 4k = k = 24^\circ$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۴ - با فرض $x = 3$ و $y = 4$ داریم:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{3 \times 4}{9 + 16} = \frac{12}{25}$$

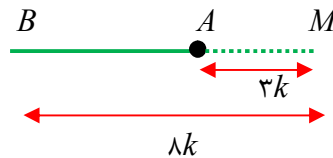
۲۲- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y} \xrightarrow[\text{تفضیل در صورت}]{\text{فرض}} \frac{3}{x} = \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x-y}{x+y} = \frac{6-4}{3+4} = \frac{2}{7}$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۲

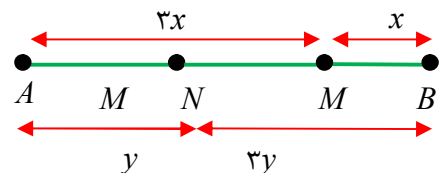
$$AB = 15 \Rightarrow 8k - 3k = 15 \Rightarrow 5k = 15$$

$$\Rightarrow k = 3 \Rightarrow MB = 8k = 24$$



۲۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} 3x + x = 12 \Rightarrow x = 3 \\ 3y + y = 12 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow MN = AB - x - y = 12 - 3 - 3 = 6$$



۲۵- پاسخ: گزینه ۳ - $12^2 = a \times 8 \Rightarrow 144 = 8a \Rightarrow a = \frac{144}{8} = 18$

۲۶- پاسخ: گزینه ۱- چون $\frac{a}{b} = \frac{۴}{۹}$ است فرض می کنیم $a = ۴k$ و $b = ۹k$ حال سوال گفته ۱۲ واسطه هندسی بین a و b است بنابراین:

$$۱۲^۲ = a \times b \Rightarrow ۱۴۴ = (۴k)(۹k) \Rightarrow k^۲ = ۴ \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۸ \\ b = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۱۰$$

۲۷- پاسخ: گزینه ۴-

$$\begin{cases} S_{ACE} = ۳S_{ADE} \Rightarrow CE = ۳DE \\ S_{ACE} = ۲S_{ABD} \Rightarrow CE = ۲BD \end{cases} \xrightarrow{CE=k}$$

$$\begin{cases} DE = \frac{k}{۳} \\ BD = \frac{k}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{BE}{CE} + \frac{DE}{DC} = \frac{\frac{k}{۲} + \frac{k}{۳}}{k} + \frac{\frac{k}{۳}}{\frac{k}{۳} + k} = \frac{۵}{۶} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۰+۳}{۱۲} = \frac{۱۳}{۱۲}$$