



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

تابع نمایی

تابع $y = a^x$ را که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک ($a > 0$, $a \neq 1$) و x یک متغیر باشد را تابع نمایی گوئیم دامنه‌ی آن R و برد آن R^+ است.

تست تابع نمایی $y = (m^2 - 1)^x$ به ازای چه مقادیری از m صعودی است؟

$$(1) \quad |m| > 0 \quad (2) \quad |m| > \sqrt{2}$$

$$(3) \quad |m| > \sqrt{3} \quad (4) \quad |m| > 2$$

تابع نمایی $y = a^x$ زمانی صعودی است که $a > 1$ باشد پس داریم:

$$m^2 - 1 > 1 \Rightarrow m^2 > 2 \Rightarrow |m| > \sqrt{2}$$

تست فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = a^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

(تجربی ۸۲)

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{2}$$

$$(3) \quad 2 \quad (4) \quad 2\sqrt{2}$$

محل برخورد تابع با محور y ها از قرار دادن $x = 0$ به دست می‌آید.

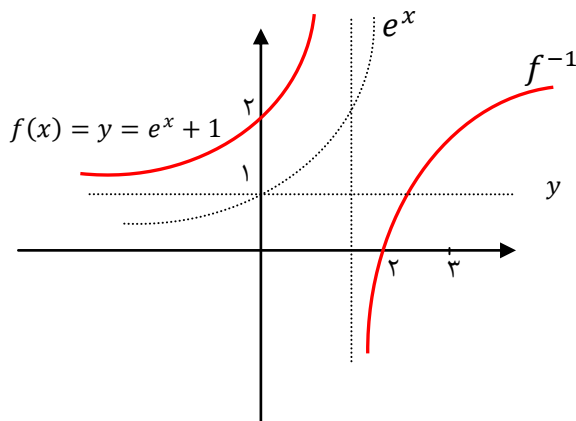
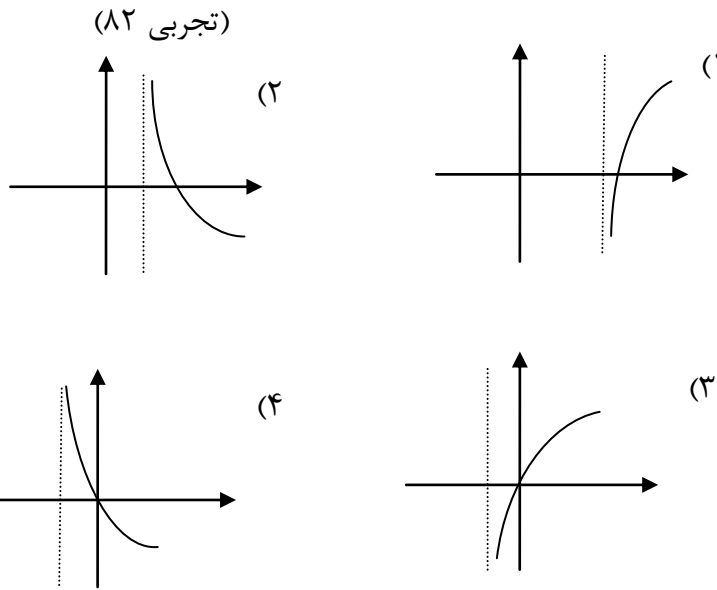
$$y = 2^0 = 1 \Rightarrow (0,1) \in f \Rightarrow (1,0) \in f^{-1}$$

$(1,0)$ نقطه‌ی برخورد f^{-1} با محور x ها است پس داریم:

$$A(0,1) , B(1,0)$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

تست) نمودار معکوس تابع $y = 1 + e^x$ کدام است؟



شکل ۱ صحیح است

حل معادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی، کافی است در دو طرف تساوی تنها دو عبارت نمایی هم پایه ایجاد کنیم (بدون ضریب)، حال باید توانها نیز با هم برابر باشند.

تست) حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی $8^{x+1} = \left(\frac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+2}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۵ (۴) -۵



$$(3^{-(x+1)})^{(x+2)} = (3^4)^{(x+1)} \Rightarrow 3^{-x^2-3x-2} = 3^{4x+4}$$

$$-x^2 - 3x - 2 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0$$

حاصلضرب ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم برابر $\frac{c}{a}$ است یعنی:

$$\frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

یا می‌توان ریشه‌ها را یافت و حاصلضرب آنها را به دست آورد.

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow (-1)(-6) = 6$$

تست ریشه‌ی معادله‌ی $3^{5x-9} - \frac{3^{2x+6}}{27} = 0$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$3^{5x-9} - 3^{2x+6} \times 3^{-3} = 0 \Rightarrow 3^{5x-9} = 3^{2x+3}$$

$$\Rightarrow 5x - 9 = 2x + 3 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

تست اگر $\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 2^A$ ، عدد A کدام است؟ (تجربی خارج ۸۴)

- ۸ (۱) ۱۶ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $12\sqrt{2}$ (۴)

$$\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^{4\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\frac{2^{8\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = (2^{8\sqrt{2}-2\sqrt{2}})^2 = (2^{6\sqrt{2}})^2$$

$$= 2^{12\sqrt{2}} \Rightarrow 2^A = 2^{12\sqrt{2}} \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$



تست) فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ ، $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ،
 ار نقطه‌ی $A(0,4)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱ (۱) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 2^x \\ y_2 = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$$

$$\Rightarrow 2^x - \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$$(\sqrt{2})^x = t$$

$$t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 2 - 4(1)(-4) = 18$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2\sqrt{2} \\ t_2 = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$t = (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3$$

اکنون عرض نقطه‌ی تقاطع را می‌یابیم

$$x = 3 \Rightarrow y = 2^3 = 8 \Rightarrow B(3,8)$$

$$A(0,4), B(3,8)$$

$$AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

تابع لگاریتمی

معکوس تابع نمایی $y = a^x$ را تابع لگاریتمی در مبنای a می‌نامیم و آن را به صورت
 $y = \log_a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$) نمایش می‌دهیم.



نکته: اگر مبنای لگاریتم عدد e باشد، لگاریتم را لگاریتم طبیعی و با $\ln x$ نشان می‌دهیم.

تست دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 3)}$ کدام است؟

(۱) $R - (-2, 2)$

(۲) $(-2, 2)$

(۳) $R - [-2, 2]$

(۴) $[-2, 2]$

مبنای لگاریتم عدد e است که تقریباً $2/71$ می‌باشد چون بزرگتر از یک است در صورتی زیر رادیکال نامنفی است که داشته باشیم:

$$x^2 - 3 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = R - (-2, 2)$$

تست دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$ کدام است؟

(۱) $(-3, 3)$

(۲) $(-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$

(۳) $(-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$

(۴) $[-3, 3]$





چون مبنای لگاریتم بین صفر و یک است در صورتی زیر رادیکال نامنفی است که عبارت
جلوی لگاریتم بین صفر و یک مساوی یک باشد پس داریم:

$$0 < 9 - x^2 \leq 1 \Rightarrow -9 < -x^2 \leq -8$$

$$\Rightarrow 8 \leq x^2 < 9 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} \leq x < 3 \\ -3 < x \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$D: (-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$$

تست اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آن گاه لگاریتم $a^3 + 7$ در پایه 8 کدام

است؟ (تجربی ۸۷)

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{4}{3} \text{ (۲)} \quad \sqrt{2} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow a = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a^3 = 3^2 = 9$$

$$\log_8^{a^3+7} = \log_8^{9+7} = \log_8^{16} = \log_8^{2^4} = \frac{4}{3} \log_2^2 = \frac{4}{3}$$

تست اگر $\log_2^{12} = \alpha$ باشد، $4^{\alpha-2}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۶)

$$\frac{9}{2} \text{ (۱)} \quad ۶ \text{ (۲)} \quad ۹ \text{ (۳)} \quad ۱۸ \text{ (۴)}$$

$$\log_2^{12} = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = 12$$

$$4^{\alpha-2} = (2^2)^{(\alpha-2)} = 2^{2\alpha-4} = \frac{2^{2\alpha}}{2^4} = \frac{(2^\alpha)^2}{16} = \frac{(12)^2}{4^2} = \left(\frac{12}{4}\right)^2 = 3^2 = 9$$

تست نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x$ نسبت به هم چگونه اند؟ (تجربی خارج ۹۱)

$$(۱) f(x) \text{ بالاتر} \quad (۲) g(x) \text{ بالاتر}$$





(۳) منطبق

(۴) فقط در یک نقطه متقاطع

دامنه‌ی دو تابع را می‌یابیم:

$$D_f : x > 0 \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$D_g : x > 0 \quad D_g = (0, +\infty)$$

دو تابع دارای دامنه‌ی مساویند پس ضابطه‌ها را مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$$

$$g(x) = \log_{2^{-1}} x = \frac{1}{-1} \log_2 x = -\log_2 x$$

دو تابع ضابطه‌ی یکسانی دارند پس بر هم منطبق هستند.

تست اگر $x = 8 \log_4^{2\sqrt{2}}$ باشد لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه‌ی x کدام است؟ (ریاضی ۸۷ خارج)

۳ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)

$$x = 8 \log_{2^2}^{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 8 \log_{2^2}^{2^{\frac{3}{2}}} = 8 \times \frac{3}{2} \log_2^2 = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

$$\log_6^{4(6+3)} = \log_6^{36} = \log_6^{6^2} = 2 \log_6^6 = 2$$

تست اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ کدام

(تجربی ۹۰)

است؟

2+4k (۴)

1+k (۳)

4k (۲)

2k (۱)

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log 36 - 20 = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

تست حاصل عبارت $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2} \log 16}}$ کدام است؟



۴۰۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

$$\begin{aligned}\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}} &= \sqrt{10^2 \times 10^{\frac{1}{2}\log 16}} = \sqrt{100 \times 16^{\frac{9}{2}\log 10}} = \sqrt{100 \times \sqrt{16}} \\ &= \sqrt{100 \times 4} = 10 \times 2 = 20\end{aligned}$$

نکته: می‌دانیم

$$1) A^{m \log_a B} = B^{m \log_a A}$$

$$2) a^{\log_a B} = B$$

تست از تساوی $\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

(تجربی خارج ۹۳)

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$$\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)} = 2$$

$$\Rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 48 = x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 & \text{ق ق} \\ x = -3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} \log_2^2 = \frac{3}{2}$$

تست از معادله $\log_2^{(4x+2)} - \log_2^{\sqrt{x+4}} = 1$ مقدار x کدام است؟ (سنجش ریاضی تجربی ۸۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۸





$$\begin{aligned} \log_2^{(4x+2)} - \log_2^{(\sqrt{x+4})^2} = 1 &\Rightarrow \log_2^{(4x+2)} - \log_2^{(x+4)} = 1 \\ \Rightarrow \log_2^{\frac{(4x+2)}{x+4}} = 1 &\Rightarrow \frac{4x+2}{x+8} = 2 \Rightarrow 4x+2 = 2x+8 \\ &\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

به ازای $x = 3$ لگاریتم‌ها با معنی هستند پس $x = 3$ جواب معادله است.

تست از دو معادله‌ی $\log_{10}^{(y+2)} = 1$ ، $\log_{10}^{(y-x)} + \log_{10}^{(4x+y)} = 2$ مقدار x کدام است؟ (تجربی خارج ۸۷)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$\log_{10}^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y+2 = 10 \Rightarrow y = 8 \text{ ق ق}$$

$$\log_{10}^{(8-x)} + \log_{10}^{(4x+8)} = 2 \Rightarrow \log_{10}^{(8-x)(4x+8)} = 2$$

$$\begin{aligned} (8-x)(4x+8) = 100 &\Rightarrow -4x^2 + 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \\ &= 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

تست از دو معادله‌ی $4^x + 2^x = 72$ ، $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۴)

$$4^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0$$

$$t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -9 \text{ غ ق ق } (2^x \neq -9) \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

$$\log(3+1) + \log(2y+9) = 2 \Rightarrow \log 4(2y+9) = 2$$





$$\Rightarrow 4(2y + 9) = 100 \Rightarrow 8y = 64 \Rightarrow y = 8$$

تست مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$ کدام است؟

$$\text{Ln} \frac{35}{2} \quad (۲) \quad \text{Ln} 35 \quad (۱)$$

$$\text{Ln} \frac{35}{8} \quad (۴) \quad \text{Ln} \frac{35}{4} \quad (۳)$$

$$(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 5 \Rightarrow \text{Ln} e^x = \text{Ln} 5 \Rightarrow x = \text{Ln} 5 \\ e^x = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{Ln} e^x = \text{Ln} \frac{7}{2} \Rightarrow x = \text{Ln} \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ln} 5 + \text{Ln} \frac{7}{2} = \text{Ln} 5 \left(\frac{7}{2}\right) = \text{Ln} \left(\frac{35}{2}\right)$$

تست ریشه‌های معادله‌ی $e^{2x} = e^x + 2$ کدام است؟ (سنجش تجربی ۸۲)

$$\text{Ln} \frac{1}{2} \quad (۲) \quad -۱ \quad (۱)$$

$$\text{Ln} 2 \quad (۴) \quad \text{Ln} \sqrt{2} \quad (۳)$$

$$(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ e^x = -1 \\ e^x = 2 \Rightarrow \text{Ln} e^x = \text{Ln} 2 \Rightarrow x = \text{Ln} 2 \end{cases}$$

تست معادله‌ی $|e^{3x} - 1| = |2e^{3x} - 5|$ چند ریشه دارد؟

$$۴ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۰ \quad (۱)$$

$$e^{3x} - 1 = \pm(2e^{3x} - 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{3x} - 1 = 2e^{3x} - 5 \Rightarrow e^{3x} = 4 \Rightarrow 3x = \text{Ln} 4 \Rightarrow x = \frac{\text{Ln} 4}{3} \\ e^{3x} - 1 = -2e^{3x} + 5 \Rightarrow 3e^{3x} = 6 \Rightarrow e^{3x} = 2 \Rightarrow 3x = \text{Ln} 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{Ln} 2 \end{cases}$$



دو ریشه دارد

تابع رشد و زوال

در هر پدیده‌ای، کمیت یا کمیت‌هایی ممکن است بر حسب کمیت‌های دیگری مانند زمان تغییر کند. مدل این تغییرات، تابعی به وجود می‌آورد که از نوع توابع نمایی می‌باشد. حال اگر این تغییرات در توابع نمایی به صورت افزایشی باشد تابع رشد و اگر کاهش‌ی باشد تابع زوال نامیده می‌شود.

تابع رشد و تابع زوال از مدل روبرو تبعیت می‌کند.

$$f(t) = A_t = A_0 \times e^{kt}$$

اگر $k > 0$ ، رشد و اگر $k < 0$ باشد زوال

تست در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است و تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{0/04t}$ است پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ $(\ln 5 = 1/68)$ (تجربی ۹۲)

۲۸ (۱) ۲۱ (۲) ۳۵ (۳) ۴۲ (۴)

$$f(t) = Ae^{0/04t} \Rightarrow 7000 = 1400 e^{0/04t} \Rightarrow 5 = e^{0/04t}$$

$$\ln 5 = \ln e^{0/04t} \Rightarrow \frac{1}{68} = \frac{4}{100}t \Rightarrow t = \frac{168}{4} = 42 \text{ دقیقه}$$

تست تعداد واحد کار کامل شده در روز، توسط یک کارگر عادی بعد از اشتغال برابر $f(t) = 82 - 56e^{-0/2t}$ است بعد از چند ماه تجربه‌ی کاری، این کارگر میتواند روزانه ۷۵ واحد را

کامل کند؟ $(\ln 2 = 0/733)$ (تجربی خارج ۸۵)

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

$$f(t) = 82 - 56e^{-0/2t} \Rightarrow 75 = 82 - 56e^{-0/2t} \Rightarrow e^{-0/2t} = \frac{1}{8}$$



$$-0/2t = \ln \frac{1}{8} \Rightarrow -0/2t = \ln 2^{-3} \Rightarrow -0/2t = -3\ln 2$$

$$= -3(0/733) = -2/1999$$

$$t = \frac{2/2}{0/2} = 11$$

تست تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است اگر

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه‌ی بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد در دقیقه‌ی سی‌ام

تعداد آنها کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۷۲۰۰ (۴) ۶۴۰۰ (۳) ۵۶۰۰ (۲) ۴۸۰۰ (۱)

$$f(0) = 800 \Rightarrow Ae^0 = 800 \Rightarrow A = 800$$

$$f(20) = 3200 \Rightarrow 3200 = 800e^{k \times 20} \Rightarrow e^{20k} = 4 \Rightarrow e^k$$

$$= \sqrt[10]{2}$$

$$f(30) = 800e^{k \times 30} = 800(e^k)^{30} = 800(\sqrt[10]{2})^{30}$$

$$= 800 \times 2^3 = 6400$$

موفق باشید ...

عباس اسدی امیرآبادی

Abasasadi220@gmail.com

